arXiv:2301.04714v1 [math.AT] 11 Jan 2023

# $RO(C_2)$-分次上同调： $C_2$-等变埃伦伯格–麦克莱恩空间

U ̆GUR Y ̇I ̆G ̇IT

Abstract. 本文计算了 $n \geq 0$ 的 $C_2$-等变埃伦伯格–麦克莱恩空间 $K(\underline{Z/2}, n+\sigma)$ 的 $RO(C_2)$-分次上同调。这些结果可用于给出等变 λ 代数与等变 Adams 分解及等变不稳定 Adams 谱序列之间的关系；这些概念均在作者的学位论文中定义。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 2 3. $C_2$-等变 Steenrod 代数 6 4. 等变埃伦伯格–麦克莱恩空间 11 5. 埃伦伯格–麦克莱恩空间的上同调 13 参考文献 16

## 1. Introduction

Lewis、May 和 Mcclure [8] 定义了一种普通上同调理论 $H^\star_G(-:\underline{M})$，其定义在带有麦基函子$\underline{M}$ 系数的 $G$-空间上，并按实正交表示分次。本文计算了具有常值麦基函子$\underline{M} = \underline{Z/2}$ 系数的 $C_2$-等变 Eilenberg-Mac Lane 空间的 $RO(C_2)$-分次上同调。这对于给出等变 lambda 代数与等变不稳定 Adams 分解及等变不稳定 Adams 谱序列之间的关系至关重要；Mahowald [12] 在经典情形下给出了这一关系。全文中， $H^\star(-)$ 表示具有常值麦基函子系数 $\underline{\mathbb{Z}/2}$ 的 $C_2$-空间的普通 $RO(C_2)$-分次上同调。

为计算具有常值麦基函子 $\underline{M} = \underline{Z/2}$ 系数的 $C_2$-等变埃伦伯格–麦克莱恩空间的 $RO(C_2)$-分次上同调，我们使用 Borel 定理 17 关于路径空间纤维化的结果

$$\Omega K(\underline{Z/2}, V) \longrightarrow P(K(\underline{Z/2}, V)) \longrightarrow K(\underline{Z/2}, V).$$

对于 $V = \sigma + n$，其中 $n \geq 0$。

*Key words and phrases.* 等变上同调，等变 Steenrod 代数，等变 Eilenberg-MacLane 空间。

如果我们知道 $H^\star(K(\underline{Z/2}, n\sigma))$ 对于 $n \geq 2$，便可以利用 Eilenberg-Moore 谱序列 [4, 第 5], 章的 Borel 定理，以及 Kronholm [7, 定理 1.2.] 中路径空间纤维化的 $RO(G)$-分次 Serre 谱序列

$$\Omega K(\underline{Z/2}, V) \longrightarrow P(K(\underline{Z/2}, V)) \longrightarrow K(\underline{Z/2}, V).$$

本文结构如下。第 2 节介绍基本的等变拓扑工具、点的 $C_2$-等变上同调 $M_2^{C_2}$ 以及 $G$-空间的等变连通性。第 3 节阐述等变 Steenrod 平方、$C_2$-等变 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_{C_2}$ 及其公理。第 4 节给出等变 Eilenberg-Mac Lane 空间的定义及其若干性质，并介绍等变 Eilenberg-Mac Lane 空间的不动点集，这对于计算它们的上同调非常有用。第 5 节计算一些 $C_2$-等变 Eilenberg-Mac Lane 空间 $K_V$关于实正交表示 $V = \sigma + n$、 $n \geq 0$的 $RO(C_2)$-分次$C_2$-等变上同调。此外，我们还针对其他情形提出了一些猜想，并指出未来的研究方向。

记号。为方便起见，我们在此列出本文中使用的记号。

- $V = r\sigma + s$， $C_2$的实正交表示，由 $r$份符号表示 $\sigma$ 和 $s$份平凡表示1组成。

- $\rho = \sigma + 1$， $C_2$的正则表示。
- $RO(C_2)$， $C_2$的实表示环。
- $S^V$，等变球，即 $V$的单点紧化。
- $\pi_V^{C_2}(X)$，拓扑 $C_2$-空间$X$的第 $V$个 $C_2$-等变同伦群。

- $\pi_{r\sigma+s}^S$， $C_2$ 等变球谱的稳定同伦群。
- $\Sigma^\sigma(X)$， $X$ 的第 $\sigma$ 次悬挂。
- $\Omega^\sigma(X)$，从 $S^\sigma$ 到 $X$ 的所有连续函数。
- $H_G^\star(-; \underline{M})$，以麦基函子 $\underline{M}$ 为系数的 RO($G$) 分次普通等变上同调。

- $M_2^{C_2}$，$C_2$ 等变点的 RO($C_2$) 分次等变上同调。
- $\mathcal{A}_{C_2}$， $C_2$ 等变 Steenrod 代数。
- $K(\underline{M}, V)$，简称 $K_V$，是具有麦基函子 $\underline{M}$ 的第 $V$ 个等变 Eilenberg–Mac Lane 空间。

- $\underline{\pi}_V^G(X)$，作为麦基函子的 $G$-空间 $X$ 的 $C_2$-等变同伦。
- $Sq_{C_2}^k$， $k \geq 0$ 的 $C_2$-等变 Steenrod 平方运算。
- $RP_{tw}^\infty$，完全宇宙 $\mathcal{U} = (\mathbb{R}^\rho)^\infty$ 中直线所成的空间，它等价于 $K(\underline{Z/2}, \sigma)$。

致谢。我谨向 Michael A. Hill 致谢，感谢他与我进行有益的讨论，并为我的计算提供了一些建议；也感谢 William Kronholm 推导出 Steenrod 平方运算在 $RP_{tw}^\infty$ 的上同调环上的作用。最后，也是最重要的，我要感谢我的导师 Douglas C. Ravenel，在我研究生学习期间给予我的耐心、支持和鼓励，以及许多有益的讨论和建议。本文的工作是作者在罗切斯特大学就读期间博士论文的一部分。

## 2. Preliminaries

本节将介绍本文其余部分所用的主要工具。设 $X$ 是一个 $G$-空间，其中 $G = C_2$ 是一个循环群，其生成元为 $\gamma$，且满足 $\gamma^2 = e$。群 $C_2$ 有两个不可约实表示，即平凡

表示，记作 1（或 $\mathbb{R}$），以及符号表示，记作 $\sigma$ （或 $\mathbb{R}_-$）。正则表示同构于 $\rho_{C_2} = 1 + \sigma$（若无歧义，则记作 $\rho$）。因此，表示环 $RO(C_2)$ 是秩为 2 的自由阿贝尔群，所以每个表示 $V$ 都可表示为 $V = r\sigma + s$。

定义 1. $G$-宇宙是一个可数无限维的 $G$表示，其中包含平凡的 $G$表示，并且包含其每个有限维子表示的无穷多个副本。此外，完备 G-宇宙就是包含每个不可约 $G$ 表示的无穷多个副本的 G-宇宙。

定义 2. $G$-谱 $E$ 定义在 $G$宇宙 $\mathcal{U}$ 上，是一族 $E_V$ 带基点的$G$空间，连同保持基点的 $G$映射

$$\sigma_{V,W} : \Sigma^{W-V} E_V \longrightarrow E_W$$

当 $V \subset W \subset \mathcal{U}$ 时，其中 $W - V$ 表示 $V$ 在 $W$ 中的正交补。要求 $\sigma_{V,\ V}$ 为恒等映射，并且下图交换

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{W-V}\Sigma^{V-U}E_U & \xrightarrow{\Sigma_{W-V}\sigma_{U,\ V}} & \Sigma^{W-V}E_V \\ & {\scriptstyle \sigma_{U,W}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \sigma_{V,W}} & \\ & E_W & \end{array}$$

对于 $U \subset V \subset W \subset \mathcal{U}$。

定义 3。如果伴随结构映射

$$\tilde{\sigma}_{V,W} : E_V \longrightarrow \Omega^{W-V} E_W$$

对于 $V \subset W \subset \mathcal{U}$ 都是弱同伦等价，则 $G$-谱称为$G - \Omega$-谱。

以完备（平凡） $G$-宇宙为指标的 $G$-谱称为真正的（朴素的）。

对于 $G$ 的一个实际表示 $V$ 和一个 $G$-空间 $X$， $X$ 的 $V$ 阶同伦群是由下式确定的麦基函子 $\underline{\pi}_V(X)$:

$$\underline{\pi}_V(X)(G/H) = [S^V, X]^H$$

对于每个 $H < G$。

对于虚表示 $V \in RO(G)$ 和一个 $G$-谱 $E$， $E$ 的 $V$ 阶同伦群是由下式确定的麦基函子 $\underline{\pi}_V(E)$:

$$\underline{\pi}_V(E)(G/H) = colim_n \pi_0(\Omega^{V+W_n} E_{W_n})^H$$

其中 $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ 是一个递增的表示序列

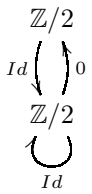
$$\cdots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \cdots$$

使得 $G$ 的任意有限维表示 $V$ 都可以等变嵌入到某个 $W_n$ 中。

Lewis、May 和 Mcclure [8] 定义了一种普通上同调理论 $H^\star_G(-:\underline{M})$，它作用于 $G$-空间，系数为麦基函子 $\underline{M}$，并按实正交表示分次。

在本文中，麦基函子通常取为常值麦基函子 $\underline{M} = \underline{Z/2}$，它可以用刘易斯记法表示为以下图表。

(2.1)




具有该系数的点的普通等变上同调 $M_2^{C_2}$如下方图1所示。图中的每个 • 都代表 $Z/2$的一份。

如你在下方图1中所见，有两个值得关注的元素。不动点集（北极和南极）的包含映射 $a : S^0 \longrightarrow S^\sigma$ 在 $\pi_{-\sigma}^{C_2}(S^{-0})$中定义了一个元素，我们将用同一符号表示它的模2赫维茨像。它称为欧拉类。可以证明

$$H_1^{C_2}(S^\sigma; Z/2) = H_{1-\sigma}^{C_2}(S^{-0}; Z/2) = Z/2$$

其生成元记为 $u$。对偶地，我们有 $a \in H_{C_2}^\sigma(S^{-0}; Z/2)$ 和 $u \in H_{C_2}^{\sigma-1}(S^{-0}; Z/2)$。它们分别对应于实动机同伦论中的元素 $\rho$ 和 $\tau$。

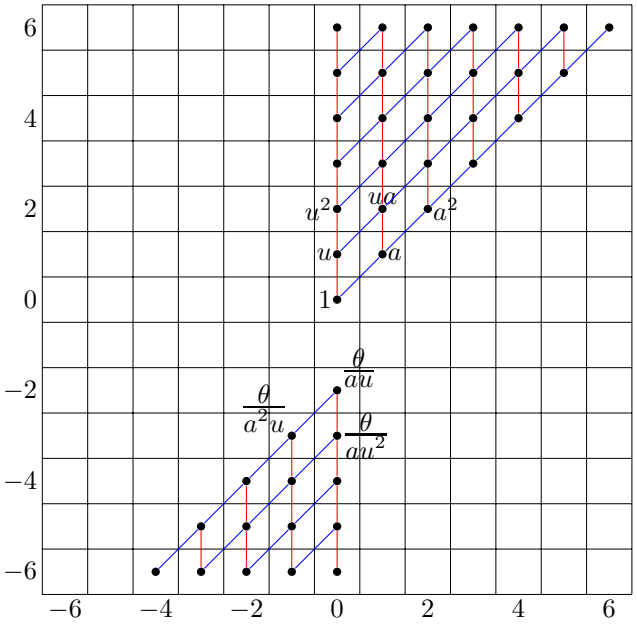



FIGURE 1. 点的等变上同调 $M_2^{C_2}$

坐标（$x$, $y$）表示次数（$x - y$）$+ \sigma y$，这与动机双次数相符。红线和蓝线分别表示乘以 $u$ 和 $a$。

现在，我们将给出 $G$-空间的等变连通性的定义。

定义 4. [10]

(i) 从 $G$ 的子群共轭类集合到整数集的函数 $\nu^*$ 称为维数函数。 $\nu^*$ 在 $K \subset G$ 的共轭类上的取值记为 $\nu^K$。设 $\nu^*$ 和 $\mu^*$ 是两个维数函数。若对每个子群 $K$ 都有 $\nu^K \geq \mu^K$，则 $\nu^* \geq \mu^*$。任意 $G$-表示 $V$ 都对应一个维数函数 $|V^*|$，其在 $K$ 处的取值为 $V$ 的 $K$-不变子空间 $V^K$ 的实维数。常数值为整数 $n$ 的维数函数记为 $n^*$，其中 $n$ 为任意整数。

(ii) 设 $\nu^*$ 是一个非负维数函数。若对 $G$ 的每个子群 $K$，不动点空间 $Y^K$ 都是 $\nu^K$-连通的，则称 $G$-空间 $Y$ 为 $G$-$\nu^*$-连通的。若 A $G$-空间 $Y$ 是 $G$-$0^*$-连通的，则称其为 $G$-连通的。此外，若其为 $G$-$1^*$-连通的，则简称为 $G$-连通的。若对 $G$ 的每个子群 $K$ 以及满足 $0 \leq m \leq \nu^K$ 的每个整数 $m$，同调群 $H_m^K(Y)$ 都为零，则称 $G$-空间 $Y$ 在同调意义下是 $G$-$\nu^*$-连通的。

(iii) 设 $\nu^*$ 是一个非负维数函数，并设 $f\colon Y \longrightarrow Z$ 是一个 $G$-映射。若对 $G$ 的每个子群 $K$，

$$(f^K)_* : \pi_m(Y^k) \longrightarrow \pi_m(Z^K)$$

对满足 $0 \leq m < \nu^K$ 的每个整数 $m$，它都是同构；而当 $m = \nu^K$ 时，它是满同态，则称 $f$ 为 $G$-$\nu^*$-等价。若包含映射 $B$ 到 $Y$ 是一个 $G$-$\nu^*$- 等价，则称 $G$- 对 $(Y, B)$ 是 $G$-$\nu^*$- 连通的。对偶的同调 $G$-$\nu^*$- 等价以及对偶的同调 $G$-$\nu^*$-连通性，定义方式类似，只需将同伦群替换为同调群。

(iv) 设 $V$ 是一个 $G$-表示。对于 $G$ 的每个子群 $K$，令 $V(K)$ 为 $V^K$ 的正交补；则 $V(K)$ 是一个 $K$-表示。若对于 $G$ 的每个子群 $K$ 以及满足 $0 \leq m \leq |V^K|$ 的每个整数 $m$，$\pi^K_{V(K)+m}(Y)$ 均为零，则称 $Y$ 为空间 $G$-$V$ 连通。类似地，若对于 $G$ 的每个子群 $K$ 以及满足 $0 \leq m \leq |V^K|$ 的每个整数 $m$，$H^G_{V(K)+m}(Y)$ 均为零，则称 $Y$ 为空间同调 $G$-$V$ 连通。

(v) 设 $V$ 是一个 $G$-表示。若一个 $G$-$0^*$-等价 $f\colon Y \longrightarrow Z$ 满足以下条件，则称其为 $G$-$V$-等价：对于 $G$ 的每个子群 $K$，映射

$$f_* : \pi^K_{V(K)+m}(Y) \longrightarrow \pi^K_{V(K)+m}(Z)$$

对每个满足 $0 \leq m < |V^K|$ 的整数 $m$，都是一个同构；而当 $m = |V^K|$ 时，则是一个满同态。类似地定义同调 $G$-$V$-等价。若包含映射 $B$ 到 $Y$ 是一个 $G$-$V$- 等价（分别地，同调 $G$-$V$- 等价），则称 $G$- 对 $(Y, B)$ 为 $G$-$V$-连通（分别地，同调 $G$-$V$-连通）。

## 3. $C_2$-Equivariant Steenrod Algebra

Voevodsky [19] 在动机情形中定义了模 2 Steenrod 代数的类似物，而 Po Hu 和 Igor Kriz [5] 在等变情形中也作了同样的定义。这两种描述本质上是相同的。

存在平方运算 $Sq^k_{C_2}$，作用于 $k \geq 0$，其次数为

$$|Sq^k_{C_2}| = \begin{cases} i(1+\sigma) & for\ k = 2i \\ i(1+\sigma)+1 & for\ k = 2i+1. \end{cases}$$

$Sq^0_{C_2} = 1$，与经典情形相同。$C_2$-等变 Steenrod 代数在系数环 $M_2^{C_2}$ 上的作用为

$$Sq^k_{C_2}(u) = \begin{cases} u & for\ k = 0 \\ a & for\ k = 1 \\ 0 & else. \end{cases} \tag{3.1}$$

$$Sq^{2m+\delta}_{C_2}(u^{2l+\epsilon}) = \binom{2l+\epsilon}{2m+\delta} u^{2l+\epsilon-m-\delta} a^{2m+\delta} \tag{3.2}$$

推导公式 3.2 的难点在于 $C_2$-等变嘉当公式 3.7、3.8。由于

$$|Sq^{2m+\delta}_{C_2}| = m(1+\sigma)+\delta \quad \text{for } 0 \leq \delta \leq 1,$$

我们有

$$\begin{cases} \Delta(Sq^{2m+1}_{C_2}) = \sum_{0\leq i\leq 2m+1} Sq^i_{C_2} \otimes Sq^{2m+1-i}_{C_2} \\ \\ \Delta(Sq^{2m}_{C_2}) = \sum_{0\leq j\leq m} Sq^{2i}_{C_2} \otimes Sq^{2m-2j}_{C_2} + u\sum_{1\leq j\leq m} Sq^{2j-1}_{C_2} \otimes Sq^{2m-2j+1}_{C_2}. \end{cases} \tag{3.3}$$

被 $u$ 整除的项使问题变得棘手。这里我们使用上同调次数，因此 $|u| = \sigma - 1$。注意，

$$|u^{-m}Sq^{2m+\delta}_{C_2}| = m(1-\sigma) + m(1+\sigma) + \delta = 2m+\delta$$

并定义

$$\mathcal{S}q^{2m+\delta} := u^{-m}Sq^{2m+\delta}_{C_2}.$$

我们将看到，这些运算满足经典 Cartan 公式。我们有

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{S}q^{2m+1}) &= u^{-m}\Delta(Sq^{2m+1}_{C_2}) \\ &= u^{-m}\sum_{0\leq i\leq 2m+1} Sq^i_{C_2} \otimes Sq^{2m+1-i}_{C_2} \\ &= \sum_{0\leq i\leq 2m+1} u^{-\lfloor i/2\rfloor} Sq^i_{C_2} \otimes u^{-\lfloor (2m+1-i)/2\rfloor} Sq^{2m+1-i}_{C_2} \\ &= \sum_{0\leq i\leq 2m+1} \mathcal{S}q^i_{C_2} \otimes \mathcal{S}q^{2m+1-i}_{C_2} \end{aligned}$$

因为 $\lfloor i/2\rfloor + \lfloor (2m+1-i)/2\rfloor = m$。而且，

$$\Delta(\mathcal{S}q^{2m}) = u^{-m}\Delta(Sq^{2m}_{C_2})$$

$$
\begin{aligned}
&= u^{-m} \sum_{0\le j\le m} Sq^{2j}_{C_2} \otimes Sq^{2m-2j}_{C_2} + u^{1-m} \sum_{1\le j\le m} Sq^{2j-1}_{C_2} \otimes Sq^{2m-2j+1}_{C_2} \\
&= \sum_{0\le j\le m} u^{-j} Sq^{2j}_{C_2} \otimes u^{j-m} Sq^{2m-2j}_{C_2} + \sum_{1\le j\le m} u^{1-j} Sq^{2j-1}_{C_2} \otimes u^{j-m} Sq^{2m-2j+1}_{C_2} \\
&= \sum_{0\le j\le m} \mathcal{S}q^{2j}_{C_2} \otimes \mathcal{S}q^{2m-2j}_{C_2} + \sum_{1\le j\le m} \mathcal{S}q^{2j-1}_{C_2} \otimes \mathcal{S}q^{2m-2j+1}_{C_2} \\
&= \sum_{0\le i\le 2m} \mathcal{S}q^{i}_{C_2} \otimes \mathcal{S}q^{2m-i}_{C_2}.
\end{aligned}
$$

现在，如果我们采用同调次数，那么

$$|\mathcal{S}q^m| = -m, |a| = -\sigma, \text{ and } |u| = 1 - \sigma.$$

我们知道

$$Sq^m_{C_2}(u) = \begin{cases} u & for\ m = 0 \\ a & for\ m = 1 \\ 0 & else. \end{cases} \tag{3.4}$$

考虑总斯廷罗德运算

$$\mathcal{S}q_t = \sum_{i\ge 0} t^i \mathcal{S}q^i, \tag{3.5}$$

其中 $t$ 是一个哑变量。尽管这个和是无穷的，但作用于 $a$ 和 $u$中的任意单项式时，会得到有限和。运算 $\mathcal{S}q^i$ 满足的经典 Cartan 公式意味着它是一个环同态，也就是说，

$$\mathcal{S}q_t(xy) = \mathcal{S}q_t(x)\mathcal{S}q_t(y).$$

于是，由 3.4 可知

$$\mathcal{S}q_t(u) = u + ta$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}q_t(u^l) &= (u + ta)^l \\
&= \sum_{0\le m\le l} \binom{l}{m} t^m u^{l-m} a^m \\
&= \sum_{0\le m\le l} t^m \mathcal{S}q^m(u^l).
\end{aligned}
$$

因此， $\mathcal{S}q^m(u^l)$ 是上面第一个求和式中 $t^m$ 的系数。

由此可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}q^{2m+\delta}(u^{2l+\epsilon}) &= \binom{2l+\epsilon}{2m+\delta} u^{2l+\epsilon-2m-\delta} a^{2m+\delta} \\
\mathcal{S}q^{2m+\delta}(u^{2l+\epsilon}) &= u^m \mathcal{S}q^{2m+\delta}(u^{2l+\epsilon}) \\
&= \binom{2l+\epsilon}{2m+\delta} u^{2l+\epsilon-m-\delta} a^{2m+\delta}.
\end{aligned}
$$

因此，我们得到如下结论：

引理 5。

$$Sq^{2m+\delta}_{C_2}(u^{2l+\epsilon}) = \binom{2l+\epsilon}{2m+\delta} u^{2l+\epsilon-m-\delta} a^{2m+\delta}.$$

Steenrod 代数在同调上的自然作用是右作用，而不是左作用。经典地，空间或谱的模 $p$ 上同调 $X$ 是 Steenrod 代数 $\mathcal{A}$上的左模，因此存在一个映射

$$c_X : A \otimes H^*X \to H^*X.$$

Steenrod 代数具有一个乘法

$$\phi^* : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

（符号 $\phi^*$ 及其对偶 $\phi_*$ 取自 Milnor 的论文 [14]），且下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes H^*X & \xrightarrow{\phi^* \otimes H^*X} & \mathcal{A} \otimes H^*X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{A} \otimes c_X} & & \downarrow{\scriptstyle c_X} \\ \mathcal{A} \otimes H^*X & \xrightarrow{c_X} & H^*X. \end{array} \tag{3.6}$$

Milnor 根据以下规则定义了 $\mathcal{A}$ 在 $H_*X$ 上的右作用

$$\langle xa, y\rangle = \langle x, ay\rangle \in \mathbb{F}_p$$

对于 $x \in H_*X$、 $a \in \mathcal{A}$ 和 $y \in H^*X$，其中括号表示将右侧的上同调类作用于左侧的同调类所得的配对值。Milnor 将所得的映射记为 $\lambda^*$

$$H_*X \otimes \mathcal{A} \to H_*X.$$

在 $C_2$等变情形中也会发生同样的事情。例如，我们有

$$(u^2)Sq^3_{C_2} = (u^2)Sq^1_{C_2}Sq^2_{C_2} = 0$$

因为 $(u^2)Sq^1_{C_2} = 0$。并且，

$$(u^2)\chi(Sq^3_{C_2}) = (u^2)Sq^2_{C_2}Sq^1_{C_2} = (ua^2)Sq^1_{C_2} = a^3,$$

其中 $\chi$(–) 表示共轭斯廷罗德运算。因此，3.2 实际上应当写作

$$(u^{2l+\epsilon})Sq^{2m+\delta}_{C_2} = \binom{2l+\epsilon}{2m+\delta} u^{2l+\epsilon-m-\delta}a^{2m+\delta}.$$

例如，

$$\begin{aligned} Sq^l_{C_2}(u^{-1}) &= \binom{-1}{l} a^l u^{-1-l} \\ &= \begin{cases} \binom{-1}{0}u^{-1} = u^{-1} & \text{for } l = 0 \\ \binom{-1}{1}au^{-2} = au^{-2} & \text{for } l = 1 \\ \binom{-1}{2}a^2u^{-3} = a^2u^{-3} & \text{for } l = 2 \\ 0 & \text{for } l \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

其他元素上的作用由下文给出的嘉当公式 (iv) 确定。现在我们给出平方运算 $Sq^k_{C_2}$ 的公理。关于动机情形，可以查阅 Voevodsky 的论文 [19]。不过，Adem关系由 Jo¨el Riou 在 [17] 中确定。

(i) $Sq^0_{C_2} = 1$ 和$Sq^1_{C_2} = \beta_{C_2}$，Bockstein 同态。(ii) $\beta Sq^{2k}_{C_2} = Sq^{2k+1}_{C_2}$ 。

**(iii)** $\beta Sq^{2k+1}_{C_2} = 0$。

**(iv)**（嘉当公式）

$$Sq^{2k}_{C_2}(xy) = \sum_{r=0}^{k} Sq^{2r}_{C_2}(x) Sq^{2k-2r}_{C_2}(y) + u \sum_{s=0}^{k-1} Sq^{2s+1}_{C_2}(x) Sq^{2k-2s-1}_{C_2}(y) \tag{3.7}$$

$$Sq^{2k+1}_{C_2}(xy) = \sum_{r=0}^{2k+1} Sq^{r}_{C_2}(x) Sq^{2k+1-r}_{C_2}(y) + a \sum_{s=0}^{k-1} Sq^{2s+1}_{C_2}(x) Sq^{2k-2s-1}_{C_2}(y) \tag{3.8}$$

**(v)**（Adem关系）如果 $0 < i < 2j$，那么当 $i+j$ 为偶数时

$$Sq^{i}_{C_2} Sq^{j}_{C_2} = \sum_{k=0}^{[i/2]} \binom{b-1-k}{i-2k} u^{\epsilon} Sq^{i+j-k}_{C_2} Sq^{k}_{C_2}$$

其中

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & for\ k\ is\ odd\ and\ i\ and\ j\ are\ even \\ 0 & else \end{cases}$$

当 $i+j$ 为奇数时

$$Sq^{i}_{C_2} Sq^{j}_{C_2} = \sum_{k=0}^{[i/2]} \binom{j-1-k}{i-2k} Sq^{i+j-k}_{C_2} Sq^{k}_{C_2} + a \sum_{k=odd} \varepsilon\ Sq^{i+j-k}_{C_2} Sq^{k}_{C_2}$$

其中

$$\varepsilon = \begin{cases} \binom{j-1-k}{i-2k} & for\ i\ is\ odd \\ \binom{j-1-k}{i-2k-1} & for\ j\ is\ odd \end{cases}$$

**(vi)** 若 $x$ 的次数为 $k\sigma + k$，则 $Sq^{2k}_{C_2}(x) = x^2$。

**(vii)**（不稳定性）若 $x$ 的次数为 $V$，$V < k\sigma + k$ 则 $Sq^{2k}_{C_2}(x) = 0$，其中 $V < V'$ 当且仅当存在次数为正的实际表示 $W$ 使得 $V' = V + W$。

注意，令 $u = 1$ 和 $a = 0$ 后，嘉当公式 (iv) 化为经典 Cartan 公式，而 Adem关系 (v) 化为经典Adem关系。

例子 6. 我们有

$$Sq^{1}_{C_2} Sq^{n}_{C_2} = \begin{cases} Sq^{n+1}_{C_2} & for\ n\ is\ even \\ 0 & for\ n\ is\ odd \end{cases}$$

$$Sq^{2}_{C_2} Sq^{n}_{C_2} = \begin{cases} Sq^{n+2}_{C_2} + u Sq^{n+1}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 0\ mod\ 4 \\ Sq^{n+1}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 1\ mod\ 4 \\ u Sq^{n+1}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 2\ mod\ 4 \\ Sq^{n+2}_{C_2} + Sq^{n+1}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 3\ mod\ 4 \end{cases}$$

and

$$Sq^{3}_{C_2} Sq^{n}_{C_2} = \begin{cases} Sq^{n+3}_{C_2} + a Sq^{n+1}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 0\ mod\ 4 \\ Sq^{n+2}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 1\ mod\ 4 \\ a Sq^{n+1}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 2\ mod\ 4 \\ Sq^{n+2}_{C_2} Sq^{1}_{C_2} & for\ n \equiv 3\ mod\ 4 \end{cases}$$

现在，令 $Sq^I_{C_2}$ 表示整数序列 $I=(i_1,\cdots,i_n)$ 的 $Sq^{i_1}_{C_2}Sq^{i_2}_{C_2}\cdots Sq^{i_n}_{C_2}$。若对所有 $s\geq 1$ 都有 $i_s\geq 2i_{s+1}$，则称序列 $I$ 为容许的，其中 $i_{s+1}=0$。

带有容许的 $I$ 的运算称为容许单项式。我们也称 $Sq^0_{C_2}$ 为容许的，其中 $Sq^0_{C_2}=Sq^I_{C_2}$ 对应空的 $I$。

引理 7。容许单项式构成 $C_2$-等变 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_{C_2}$ 作为一个 $H^\star(pt)$-模的基。

证明。证明与经典情形一样，由 Adem 关系和嘉当公式推出。□

关于等变 Steenrod 代数的分次 $\mathcal{A}_{C_2}$-模结构和 Hopf 代数结构，可参见 [16]。现在我们给出它的不稳定模结构。

定义 8。若一个 $\mathcal{A}_{C_2}$-模满足前述不稳定条件 (vii)，则称其为不稳定的。

我们将 $Sq^k_{C_2}$ 的超额定义为 $Sq^k_{C_2}$的次数

$$e(Sq^k_{C_2})=\begin{cases} i\rho & for\ k=2i \\ i\rho+1 & for\ k=2i+1. \end{cases}$$

因此，$e(Sq^k_{C_2})=|Sq^k_{C_2}|$。那么，$Sq^I_{C_2}=Sq^{i_1}_{C_2}Sq^{i_2}_{C_2}\cdots Sq^{i_k}_{C_2}$ 的超额为

$$e(Sq^I_{C_2})=\sum_j e(Sq^{i_j}_{C_2})-\rho e(Sq^{i_{j+1}}_{C_2})$$

其中 $\rho(r\sigma+s)=(r+s)\rho$。

例子 9。

- 超额为 $e(Sq^I_{C_2})=0$ 的单项式是 $Sq^0_{C_2}$。
- 超额为 $e(Sq^I_{C_2})=1$ 的单项式是 $Sq^1_{C_2}$, $Sq^2_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $Sq^4_{C_2}Sq^2_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $\cdots$
- 不存在满足 $e(Sq^I_{C_2})=\sigma$ 的单项式。
- 满足 $e(Sq^I_{C_2})=2$ 的单项式为$Sq^3_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $Sq^6_{C_2}Sq^3_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $Sq^{12}_{C_2}Sq^6_{C_2}Sq^3_{C_2}$-$Sq^1_{C_2}$, $\cdots$
- 满足 $e(Sq^I_{C_2})=\rho$ 的单项式为 $Sq^2_{C_2}$, $Sq^4_{C_2}Sq^2_{C_2}$, $Sq^8_{C_2}Sq^4_{C_2}Sq^2_{C_2}$, $\cdots$
- 不存在满足 $e(Sq^I_{C_2})=2\sigma$ 的单项式,
- 满足 $e(Sq^I_{C_2})=3$ 的单项式为 $Sq^7_{C_2}Sq^3_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $Sq^{11}_{C_2}Sq^5_{C_2}Sq^2_{C_2}Sq^1_{C_2}$,
  $\cdots$
- 满足 $e(Sq^I_{C_2})=2+\sigma$ 的单项式为 $Sq^3_{C_2}$, $Sq^4_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $Sq^5_{C_2}Sq^2_{C_2}$,$Sq^6_{C_2}Sq^3_{C_2}$, $Sq^6_{C_2}Sq^2_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $Sq^8_{C_2}Sq^4_{C_2}Sq^1_{C_2}$, $\cdots$
- 不存在满足 $e(Sq^I_{C_2})=1+2\sigma$ 的单项式。

注释 10. 如果 $r>s$，则不存在满足 $e(Sq^I_{C_2})=r\sigma+s$ 的单项式。

设 $\mathbf{t}_{j,\ k}=Sq^{j2^{k-1}}_{C_2}\cdots Sq^j_{C_2}$。那么总超额为 1 的元素集合为

$$\{\mathbf{t}_{1,k_1}|k_1>0\}.$$

总超额为 2 的元素集合为

$$\left\{\mathbf{t}_{1+2^{k_1},k_2+1}\mathbf{t}_{1,k_1}|k_1,k_2\geq 0\right\}.$$

总超额为 3 的元素集合为

$$\left\{\mathbf{t}_{1+2^{k_2}+2^{k_1+k_2},k_3+1}\mathbf{t}_{1+2^{k_1},k_2}\mathbf{t}_{1,k_1}|k_1,k_2,k_3\geq 0\right\}.$$

$C_2$等变模 2 对偶 Steenrod 代数（详情可参见 [16], 或 [5] ）为

$$\mathcal{A}^{C_2}=M_2^{C_2}[\tau_i,\xi_i]/(\tau_i^2+a\tau_{i+1}\eta_R(u)\xi_{i+1})$$

使得

$$\begin{aligned}
&\eta_R(u)=u+a\tau_0\\
&\eta_R(a)=a\\
&|\xi_i|=(2^i-1)\rho\\
&|\tau_i|=1+|\xi_i|\\
&\Delta(\xi_i)=\sum_{j=0}^{i}\xi_{i-j}^{2^j}\otimes\xi_j,\ \text{where } \xi_0=1\\
&\Delta(\tau_i)=\tau_i\otimes 1+\sum_{j=0}^{i}\xi_{i-j}^{2^j}\otimes\tau_j.
\end{aligned}$$

## 4. Equivariant Eilenberg-Mac Lane Spaces

对于每个麦基函子 $\underline{M}$，都有一个 Eilenberg–Mac Lane $G$谱 $H\underline{M}$，其作为麦基函子具有如下性质

$$\underline{\pi}_n^G(H\underline{M})=\begin{cases}\underline{M} & n=0\\ 0 & n\in\mathbb{Z},n\neq 0\end{cases}$$

存在性证明可参见第十三章第 162] 页。

设 $\underline{M}$ 为一个麦基函子， $V$ 是 $H\underline{M}$ 的 Ω-谱中的第 $V$ 个空间，称为类型为 $K(\underline{M},V)$ 的等变 Eilenberg–Mac Lane 空间，它是函子 $H_G^V(-;\underline{M})$ 的分类空间。也就是说，给定任意实正交表示$V$、 $W$，存在一个 $G$-同伦等价 $K(\underline{M};V)\simeq\Omega^W K(\underline{M},V+W)$，并满足各种相容性条件。这类空间在 [9], 中构造，或者可以在 [3] 中查找采用其他方法的构造。这里，为保持一致，我将给出它们的定义。

定义 11. [9] 设 $V$为一个满足 $|V^G|\geq 1$ 的实正交表示，且$\underline{M}$为一个麦基函子。等变 Eilenberg–Mac Lane 空间 $K(\underline{M},V)$ 是一个基点的、$(|V^*|-1)$-连通的 $G$-空间，其 $G$-同伦类型与一个 $G$-CW 复形相同，并且 $\underline{\pi}_V^G(K(\underline{M},V))=\underline{M}$，且对 $\underline{\pi}_{V+k}^G$，有 $K(\underline{M},V))=0$ $k\neq 0$。

注 12。可以询问对于 $n>0$， $\underline{\pi}_{V+n\sigma}^G(K(\underline{M},V))$ 是什么。我们主要关注的是 $K(\underline{Z/2},V)$。于是,

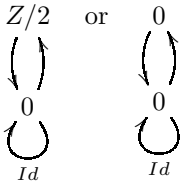
$$\underline{\pi}_{V+n\sigma}^{C_2}(K(\underline{Z/2},V))(C_2/e)=\pi_{V+n\sigma}^e(K(\underline{Z/2},V))=0$$

and

$$\begin{aligned}\underline{\pi}_{V+n\sigma}^{C_2}(K(\underline{Z/2},V))(C_2/C_2)&=\pi_{V+n\sigma}^{C_2}(K(\underline{Z/2},V))\\&\cong\tilde{H}_{V+n\sigma}^{C_2}(S^V;\underline{Z/2})\end{aligned}$$

$$\cong \tilde{H}^{C_2}_{n\sigma}(S^{0,0}; \underline{Z/2})$$
$$\cong H^{C_2}_{n\sigma}(*; \underline{Z/2})$$

因此，作为一个麦基函子，同伦 $\underline{\pi}^G_{V+n\sigma}(K(\underline{M}, V))$ 是以下之一




取决于表示 $V$ 和 $n$的维数。

如前所述，可以查阅 [9] ，了解这些空间的存在性及其某些性质。

构造等变 Eilenberg-Mac Lane 空间的另一种方法是 Dos Santos [3] 方法。正如我们在经典情形中所知， $n$-球面上的自由阿贝尔群是 Eilenberg–Mac Lane 空间 $K(\mathbb{Z}, n)$的一个模型，而 $n$-球面上的自由 $\mathbb{F}_2$向量空间是 Eilenberg–Mac Lane空间 $K(\mathbb{F}_2, n)$的一个模型。Dos Santos 在 [3, 定义 2.1.],中构造了一个拓扑阿贝尔群 $M \otimes X$ ，它是前述内容针对麦基函子 $M$的等变推广；并证明了一个 $RO(G)$-分次版本的等变 Dold-Thom定理。Lima-Filho 已在 [11]中证明了 $\mathbb{Z}$-分次情形。

令 $M$ 为一个 $\mathbb{Z}[G]$-模， $\underline{M}$ 为与 $M$ 关联的麦基函子：$\underline{M}$ 在 $G/H$ 上的取值为 $M^H$，而对于 $K < H < G$，在投影 $G/K \longrightarrow G/H$ 上的取值为 $M^H \hookrightarrow M^K$ 的包含映射。我们将 $M \otimes X$ 定义为带有如下拓扑的 $\mathbb{Z}[G]$-模（[3, 定义 2.1.]）：设 $(X, *)$ 为一个带基点的 $G$-集，令 $M \otimes X$ 表示 $\mathbb{Z}[G]$-模 $\bigoplus_{x \in X - \{*\}} M$。$g \in G$ 的作用定义为 $(g.m)_x = g.m_{g^{-1}.x}$，其中 $m_x$ 表示 $m \in \bigoplus_{x \in X-\{*\}} M$ 的第 $x$ 个坐标。给定一个带基点的 $G$-空间 $(X, *)$， $M \otimes X$ 也可等价地定义为以下商空间

$$M \otimes X = \amalg_{n \geq 0} M^n \times X^n / \backsim,$$

其中 $\backsim$ 是由以下关系生成的等价关系：

(i) $(r, \phi^* x) \backsim (\phi_* r, x)$，对于每个基点映射 $\phi : \{0, \cdots, n\} \longrightarrow \{0, \cdots, m\}$ ，$n, m \in \mathbb{N}$，其中 $\phi^* x = x \circ \phi$，且 $(\phi_* r)^i = \sum_{k \in \phi^{-1}(i)} r_k$。

(ii) $((r, r'), (x, *)) \backsim (r, x)$，对于每个 $r \in M^n$, $r' \in M$, $x \in X$。

我们赋予 $M$ 离散拓扑，并赋予 $M \otimes X$ 与关系 $\backsim$对应的商拓扑。

我们可以将埃伦伯格–麦克莱恩空间定义为 $K_V = M \otimes S^V$。在我们的情形中，

$$K_{m+n\sigma} = \mathbb{Z}/2 \otimes S^{m+n\sigma}.$$

定理 13. [3] 设 $X$ 是一个基点 $G$-CW 复形，且 $V$ 是一个有限维 $G$-表示，则 $M \otimes X$ 是一个等变无限循环空间，并且存在一个自然等价

$$\pi^G_V(M \otimes X) \cong \tilde{H}^G_V(X; \underline{M})$$

作为该定理的推论，我们有 $M \otimes S^V$是一个 $K(\underline{M}, V)$ 空间（如定义 11 所述）。因此，我们得到了等变 Eilenberg-Mac Lane 谱 $H\underline{M}$ 的一个简单模型。

例子 14。

(i) $K(\underline{Z/2}, 1)$ 是 $RP^\infty$，并带有平凡作用。(ii) 回想一下，$RP^\infty_{tw} = \mathbb{P}(\mathcal{U})$ 是完全宇宙中的直线空间（定义 1）[13]。Kronholm 在 [?] 中计算了 $RP^\infty_{tw}$ 的上同调。空间$RP^\infty_{tw}$等价于 $K(\underline{Z/2}, \sigma)$，因为它等价于 $\mathbb{Z}/2 \otimes S^\sigma$。

$\mathcal{U} = (\mathbb{R}^\rho)^\infty$

定理 15。 [6] $H^\star(RP^\infty_{tw}) \cong H^\star(pt)[c,d]/(c^2 = ac + ud)$，其中 $\deg(c) = \sigma$，且 $\deg(d) = \rho$。

现在，我们将给出等变 Eilenberg–Mac Lane 空间的不动点结构，这有助于计算它们的上同调。

定理 16. [2, 推论 10]

(i) $(K(\underline{Z/2}, r\sigma + s))^e \simeq K(Z/2, r + s)$.

(ii) $(K(\underline{Z/2}, r\sigma + s))^{C_2} \simeq K(Z/2, s) \times \cdots \times K(Z/2, r + s)$.

## 5. Cohomology of Eilenberg-Mac Lane Spaces

在经典情形下，Eilenberg-Mac Lane 空间 $K_n$ 的 $\mathbb{Z}/2$-系数上同调由 Serre 在 [18] 中给出，是一个多项式环

$$H^*(K_n; \mathbb{Z}/2) = P(Sq^I(\iota_n) | e(I) < n)$$

其中 $I$是可容许序列，$\iota_n$是基本类，而 $e(Sq^I) = \sum_j (i_j - 2i_{j+1})$。我们原以为可以对 $C_2$-等变埃伦伯格–麦克莱恩空间的 $RO(C_2)$–分次 $C_2$-等变上同调给出类似的描述，但其复杂程度超出了我们的预期。

设 $\mathbf{s}_{V,l}$ 是将 $x$ 映射到 $x^{2^l}$ 的运算，其中 $x \in H^V$。可以将 $\mathbf{s}_{V,l}$ 表示为 Steenrod 运算的线性组合。

$$\mathbf{s}_{V,0} = 1$$

若 $x \in H^{a+b\sigma}$，且 $b = r_1 + \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$，则 $(u^{-r_1}x)^2 = Sq^{a+b}_{C_2}(u^{-r_1}x)$，因此

$$x^2 = u^{2r_1} Sq^{a+b}_{C_2}(u^{-r_1}x)$$

利用 $C_2$-等变嘉当公式和公式 3.2

$$Sq^{2m+\delta}_{C_2}(u^{2l+\epsilon}) = \binom{2l+\epsilon}{2m+\delta} u^{2l+\epsilon-m-\delta} a^{2m+\delta}$$

有关于 $Sq^{a+b}_{C_2}(u^{-r_1}x)$ 的一般公式。通过反复应用此方法，可以求出每个 $x^{2^l}$ 的公式，因此 $\mathbf{s}_{V,\ l}$ 存在。例如，若 $x \in H^{3+\sigma}$，则

$$\begin{aligned}(ux)^2 = Sq^4_{C_2}(ux) &= \sum_{r=0}^{2} Sq^{2r}_{C_2}(u) Sq^{4-2r}_{C_2}(x) + \sum_{s=0}^{1} Sq^{2s+1}_{C_2}(u) Sq^{3-2s}_{C_2}(x) \\ &= uSq^4_{C_2}(x) + uaSq^3_{C_2}(x)\end{aligned}$$

Thus

$$x^2 = u^{-1}Sq^4_{C_2}(x) + u^{-1}aSq^3_{C_2}(x).$$

元素集合 $x_i$ 的有限个互不相同的乘积构成分次环 $A$ 的一组基，这样的集合称为生成元简单系。例如，多项式代数 $k[x]$ 有生成元简单系 $\left\{x^{2^i} \mid i \geq 0\right\}$。

定理 17。（Borel）设 $F \to E \to B$ 是一个 $C_2$纤维化，且 $E$ 可缩的。假设 $H^\star(F)$ 有一组横截生成元的简单系 $\{x_i\}$ 。那么$H^\star(B)$是一个以 $\{\Sigma(x_i)\}$为生成元的多项式环。

$E_2$页的 Kronholm [7] 的 $RO(G)$分次 Serre 谱序列只取决于表示的总次数，而不取决于扭曲部分的维数。该定理的证明与经典情形完全相同。例如参见 [15, 第 88 页，定理 1]。

$H^\star(K_\sigma) \cong H^\star(pt)[c,d]/(c^2 = ac + ud)$的一组生成元简单系为

$$\left\{c, d^{2^l} | l \geq 0\right\} = \{c, \mathbf{s}_{1+\sigma,l}(d) | l \geq 0\}$$

将 Borel 定理应用于路径空间纤维化，

$$K_\sigma \to P(K_\rho) \to K_\rho$$

我们得到

$$H^\star(K_\rho) = P(x_\rho, \mathbf{s}_{\rho,l}(x_{1+\rho}) | l \geq 0).$$

$H^\star(K_\rho)$的生成元简单系为

$$\left\{x_\rho^{2^j}, (\mathbf{s}_{\rho,l}(x_{1+\rho}))^{2^j} | j, l \geq 0\right\} = \left\{\mathbf{s}_{\rho,j}(x_\rho), \mathbf{s}_{2^l\rho+1,j}\mathbf{s}_{\rho,l}(x_{1+\rho}) | j, l \geq 0\right\}$$

其中 $|\mathbf{s}_{\rho,l}(x_{1+\rho})| = 2^l\rho + 1$。于是，

$$H^\star(K_{1+\rho}) = P(\mathbf{s}_{\rho,j}(x_{1+\rho}), \mathbf{s}_{2^l\rho+1,j}\mathbf{s}_{\rho,l}(x_{2+\rho}) | j, l \geq 0).$$

$H^\star(K_{1+\rho})$的生成元简单系为

$$\begin{aligned}&\left\{(\mathbf{s}_{\rho,j}x_{1+\rho})^{2^k}, (\mathbf{s}_{2^j\rho+1,j}\mathbf{s}_{\rho,l}x_{2+\rho})^{2^k} | j, l, k \geq 0\right\}\\ &= \left\{\mathbf{s}_{2^j\rho+1,k}\mathbf{s}_{\rho,j}x_{2+\sigma}, \mathbf{s}_{2^j(2^l\rho+1)+1,k}\mathbf{s}_{2^l\rho+1,j}\mathbf{s}_{\rho,l}x_{2+\rho} | j, l, k \geq 0\right\}\end{aligned}$$

其中 $|\mathbf{s}_{2^l\rho+1,j}\mathbf{s}_{\rho,l}x_{2+\rho}| = 2^j(2^l\rho + 1) + 1$。于是，

$$H^\star(K_{2+\rho}) = P(\mathbf{s}_{2^j\rho+1,k}\mathbf{s}_{\rho,j}x_{2+\rho}, \mathbf{s}_{2^j(2^l\rho+1)+1,k}\mathbf{s}_{2^l\rho+1,j}\mathbf{s}_{\rho,l}x_{3+\rho} | j, l, k \geq 0).$$

因此，通过迭代这一过程，可以求得 $RO(C_2)$-分次上同调的$C_2$-等变埃伦伯格–麦克莱恩空间 $K_{n+\sigma}$

$$H^\star(K_{n+\sigma})$$

$n \geq 0$。

猜想18. 我们知道

$$\begin{aligned}H^*(K_1) &= P(x_1)\\ H^*(K_\sigma) &= P(x_\sigma, x_{1+\sigma})/(x_\sigma^2 + ax_\sigma + ux_{1+\sigma}).\end{aligned}$$

如果我们知道所有 $k \geq 0$ 的 $H^\star(K_{1+k(\sigma-1)})$，那么就可以利用 Borel 定理求出 $m \geq 0$ 的 $H^\star(K_{1+m+k(\sigma-1)})$。

我们猜想， $H^\star(K_{1+k(\sigma-1)})$ 是由 $k+1$ 个生成元构成、带有 $k$ 个关系的多项式代数，其中前 k 个生成元各自的平方都是其他生成元的线性组合。前 $k$ 个生成元的维数

$H^\star(K_{1+k(\sigma-1)})$ 的维数可通过将 $\sigma-1$ 加到 $H^\star(K_{1+(k-1)(\sigma-1)})$ 的生成元维数上得到，而最后一个生成元的维数为 $k\sigma+2^k-k$。

例 19。设 $k=3$。那么

$$H^*(K_{3\sigma-2})=P(x_{3\sigma-2},x_{3\sigma-1},x_{3\sigma+1},x_{3\sigma+5})/(x_{3\sigma-2}^2+\cdots,x_{3\sigma-1}^2+\cdots,x_{3\sigma+1}^2+\cdots)$$

其中关系中的其他项都是线性的。由此得到的生成元简单系为

$$\{x_{3\sigma-2},x_{3\sigma-1},x_{3\sigma+1}\}\cup\{x_{3\sigma+5}^{2^i}|i\geq 0\}.$$

现在，我们给出另一个用于计算的实用引理，它是引理 2.7 在 [1] 中的上同调类比。

存在一个遗忘映射

$$\Phi^e:H^V_{C_2}(X;\underline{Z/2})\longrightarrow H^{|V|}(X^e;Z/2)$$

从等变上同调到系数为 $Z/2$ 的非等变上同调。此外，我们还有一个不动点映射

$$\Phi^{C_2}:H^V_{C_2}(X;\underline{Z/2})\longrightarrow H^{|V^{C_2}|}(X^{\Phi C_2};Z/2)$$

其中，$X^{\Phi C_2}$ 是 $G$-空间 $X$ 的一个几何不动点。现在，我将陈述这个引理，其证明与 [1] 中的引理 2.7 类似。

引理 20. 设 $X$ 是一个真正的 $C_2$-谱，并设 $\{b_i\}$ 是 $H^\star(X)$ 中的一个元素集合，满足

(i) $\{\Phi^e(b_i)\}$ 是 $H^*(X^e)$ 的一组基，

且 (ii) $\{\Phi^{C_2}(b_i)\}$ 是 $H^*(X^{\Phi C_2})$ 的一组基

那么 $H^\star(X)$ 是 $H^\star(pt)$ 上的自由模，其基为 $\{b_i\}$。

一个研究计划是利用 Caruso 定理 16 和引理 20，完成对 $C_2$-等变埃伦伯格–麦克莱恩空间的 $RO(C_2)$– 分次 $C_2$-等变上同调的计算，然后研究 Michael A. Hill 的 Eilenberg–Moore 谱序列 [4, 第 5] 章。

猜想 21. $H^\star(K_{r\sigma+s})$ 是由某些 $C_2$-等变 Steenrod 运算 $Sq^I_{C_2}(\iota_{r\sigma+s})$ 构成的多项式代数，这些运算除以 $u$ 的某些幂，其中 $e(I)<r\sigma+s$，且 $\iota_{r\sigma+s}$ 是基本类；当且仅当对于某些次数为正的实际表示 $W$，$V<V'$ $V'=V+W$。

例 22. $H^\star(K(\underline{Z/2},1+\sigma))$ 是由元素 $Sq^I(\iota_{1+\sigma})$ 生成的多项式代数，其中 $I$ 是容许的，且 $e(I)<1+\sigma$。因此，它是一个多项式代数

$$P(Sq^0(\iota_{1+\sigma}),Sq^2Sq^1(\iota_{1+\sigma}),Sq^4Sq^2Sq^1(\iota_{1+\sigma}),\cdots).$$

那么，简言之

$$P(x_\rho,x_{1+2\rho},x_{1+4\rho},x_{1+8\rho},\cdots).$$

到目前为止，我们已经计算了 $K(\underline{Z/2},n+\sigma)$ 在 $n\geq 0$ 下的上同调。要计算其他情形，如果已知 $n\geq 2$ 下的 $H^*(K_{n\sigma})$，我们便可以使用 Eilenberg–Moore 谱序列 [4, Chapter 5] anf，以及路径空间纤维化的 Borel 定理

$$\Omega K(\underline{Z/2},V)\longrightarrow P(K(\underline{Z/2},V))\longrightarrow K(\underline{Z/2},V).$$

例如，对于路径空间纤维化

$$K(\underline{Z/2},\sigma) \longrightarrow P(K(\underline{Z/2},1+\sigma)) \longrightarrow K(\underline{Z/2},1+\sigma).$$

Eilenberg-Moore谱序列的$E_\infty$项是

$$E_\infty = E(x_\sigma, x_\rho, x_{2\rho}, x_{4\rho}, \cdots)$$

其关系为

$$\begin{aligned} x_\sigma^2 &= ax_\sigma + ux_{1+\sigma} \\ x_{1+\sigma}^2 &= x_{2+2\sigma} \\ x_{2+2\sigma}^2 &= x_{4+4\sigma} \\ &\vdots \\ x_{2^i\rho}^2 &= x_{2^{i+1}\rho} \\ &\vdots \end{aligned}$$

对于 $i \geq 0$。因此， $H^\star(K(\underline{Z/2},\sigma)\ \underline{Z/2})$是多项式代数的二次扩张，这一点早已为人所知。

## References


[1] Mark Behrens 和 Dylan Wilson。一个 $c_2$-等变的 Mahowald Thom谱定理类比。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，146，2017年7月。[2] Jeffrey L. Caruso。等变 Z /p *Math. Proc. Cambridge Philos.* -上同调中的运 *Soc.* 126 3 521 541, 1999
算。，（）：–。[3] Pedro F. dos Santos。关于等变 Dold-Thom定理的一则注记。 *J. Pure Appl. Algebra*, 183 1 3 299（-）：–312，2003年。[4] Michael A. Hill。自由性与等变稳定同伦。 *Journal of Topology*, 15(2):359–397。[5] Po Hu 和 Igor Kriz。实定向同伦理论及 Adams-Novikov谱序列的一个类比。 *Topology*, 40(2):317–399，2001年。[6] William C. Kronholm。关于 $RO(\mathbb{Z}/2)$-分次上同调的一个自由性定理。 *Topology Appl.*，157 5 902（）：–915，2010年。[7] William C. Kronholm。RO( G *Homology Homotopy*)-分次 Serre 谱 *Appl.* 12 1 75 92, 2010
序列。，（）：–。[8] G. Lewis、J. P. May 和 J. McClure。普通 RO G *Bull. Amer.*（）-分次上同 *Math. Soc. (N.S.)* 4 2 208 212, 1981
调。，（）：–。[9] L. Gaunce Lewis, Jr. 等变 Eilenberg–Mac Lane 空间以及等变 Seifert-van Kampen 定理和悬挂定理。 *Topology Appl.*，48(1):25–61，1992年。[10] L. Gaunce Lewis, Jr. 等变 Hurewicz映射。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，329(2):433–472，1992年。[11] P. Lima-Filho。关于 $G$-空间和 $G$-谱上自由阿贝尔群的等变同伦。*Math. Z.*，224(4):567–601，1997年。[12] Mark Mahowald。序列中 J EHP 116 1 65 112, 的像。
1982
*Ann. of Math. (2)*，（）：–。[13] J. P. May。 *Equivariant homotopy and cohomology theory* 91 *CBMS Regional*，卷，。由数学 *Conference Series in Mathematics*
科学会议委员会出版，华盛顿特区，1996年。撰稿者包括 M. Cole、G. Comeza˜na、S. Costenoble、A. D. Elmendorf、J. P. C. Greenlees、L. G. Lewis, Jr.、R. J. Piacenza、G. Triantafillou 和 S. Waner。[14] John Milnor。Steenrod 代数及其对偶。 *Ann. of Math. (2)*，67:150–171，1958年。[15] Robert E. Mosher 和 Martin C. Tangora。 *Cohomology operations and applications in homotopy theory* 1968 。Harper & Row 出版社，纽约—伦敦，。[16] Nicolas Ricka。
$\mathbb{Z}/2$ *Homology Homotopy* -等变 *Appl.* 17 1 281 305, 2015
Steenrod 代数的子代数。，（）：–。[17] Jo¨el Riou。Op´erations de Steenrod motiviques。 https://arxiv.org/abs/1207.3121，2012年。

[18] 让-皮埃尔·塞尔。 *Représentations linéaires des groupes finis*。Hermann，巴黎，1967年。[19] 弗拉基米尔·沃沃茨基。动机上同调中的约化幂运算。 *Publ. Math. Inst.Hautes Études Sci.*，（98）：1–57，2003年。

Istanbul Medeniyet University, Istanbul, TURKEY*Email address*: ugur.yigit@medeniyet.edu.tr*Current address*: 数学系，伊斯坦布尔梅德尼耶特大学，H1-20，伊斯坦布尔，土耳其 34700