arXiv:2301.04722v1 [math.PR] 11 Jan 2023

利用随机矩阵理论研究多重 SLE 的收敛速率

Andrew CAMPBELL、KYLE LUH 和 VLAD MARG ARINT

Abstract. 我们为由 Dyson 布朗运动驱动的多重 SLE 模型趋向其流体力学极限时的一种 Carath´eodory 收敛，给出了收敛阶，其中 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$。这一结果结合了 Schramm-Loewner 演化领域的技术与随机矩阵领域的现代技术而得出。我们的方法展示了如何将随机矩阵理论中用于证明普适性的现代工具应用于 Schramm-Loewner 演化领域。

1. Introduction and main results

Schramm-Loewner 演化（SLE）和随机矩阵理论（RMT）是现代概率论中两个活跃且研究充分的领域 [2, 38]。Oded Schramm 于 2000年 在研究各种离散过程的标度极限时引入了 SLE [49]。RMT 更早便出现在 Wishart 的统计学研究 [61] 以及 Wigner 开创性的物理学研究 [60]中。自出现以来，SLE 和 RMT 一直是蓬勃发展的数学研究领域。

研究 SLE 理论时，会引入紧船体的概念，即补集在上半平面中为单连通的紧集。如果K_t是一族由 $t \in [0, T]$ 参数化且不断增长的船体，并且这种增长在某种意义下是局部的，那么已知 $g_t := g_{K_t}$ 满足 Loewner 微分方程

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - W_t}$$

其中， W_t 称为驱动函数，用于描述 K_t的局部增长。当驱动函数为布朗运动的常数倍时，对应的随机曲线称为 SLE；我们将其记为 $\sqrt{\kappa}B_t$，其中 $\kappa \geq 0$。以概率 1， g_t 连续延伸至边界，并且极限

$$\gamma(t) = \lim_{y \to 0} g_t^{-1}(\sqrt{\kappa}B_t + iy)$$

根据 Rohde-Schramm 定理 [46]，该对象存在且关于时间连续。曲线$\gamma(t)$称为 SLE 迹。此外，可以证明，以概率 1， g_t 是从 H_t 到 $\mathbb{H}$的共形映射连续族，其中 H_t 是 $\mathbb{H}$ 中 $\gamma(t)$补集的无界连通分支， $t \in [0, T]$ [46]成立时如此。此外，随着 κ 增大，曲线的性质会发生变化：当 $\kappa \in [0, 4]$时，它几乎必然是简单曲线；当 $\kappa \in (4, 8)$时，几乎必然具有双重点；当 $\kappa \geq 8$时，几乎必然是空间填充曲线。对于不同的参数 κ，随机Loewner演化模型对应着极其丰富多样的离散模型的标度极限。例如， [39] 证明，环擦除随机游走（按时间顺序擦除环）的标度极限收敛于

K. Luh 部分获得了拉尔夫·E·波伊青年教师提升奖的资助。

在标度极限下收敛于随机Loewner演化κ，其中 $\kappa = 2.$。此外，在 [52], [50], [51]和 [39]的一系列研究中，已证明统计力学中的另外几种二维离散模型——包括伊辛模型簇边界、高斯自由场界面、临界概率下三角格子上的渗流，以及均匀生成树——在标度极限下分别收敛于参数取 $\kappa = 3$、 $\kappa = 4$、 $\kappa = 6$ 和 $\kappa = 8$ 的随机Loewner演化。

更一般地，可以考虑由随时间变化的实值测度 μ_t 驱动的 Loewner 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu_t(dx)}{g_t(z) - x}, \quad g_0(z) = z.$$

当驱动测度 μ_t 是位于 $\sqrt{\kappa}B_t$ 处的狄拉克δ质量时，我们便得到前述随机Loewner演化映射。当 $\mu_t = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(t)\delta_{U_i(t)}$ 时，对于某些互不相交的连续函数 $U_i(t) \in \mathbb{R}$ （称为驱动函数）以及权重 $\omega_i(t) \in \mathbb{R}^+$，我们得到由驱动函数 $U_i(t)$、 $i = 1$、 $\cdots$、 n 驱动的多裂缝Loewner方程。在本文中，我们考虑对所有 $t \in [0, T]$.， $\omega_i(t) = 1/N$ 的情形

对于实参数 $\beta > 0$，Dyson 布朗运动（DBM）由以下 N 个方程组成的系统定义

$$d\lambda_t^{(i)} = \frac{2}{\sqrt{N\beta}} dB_t^{(i)} + \frac{2}{N} \sum_{j \neq i} \frac{dt}{\lambda_t^{(j)} - \lambda_t^{(i)}}, \tag{1}$$

对于 $i = 1$、2、.....、N。

由于与其他领域的联系，一种重要的 Loewner 方程是以 DBM 为驱动项的多重 SLE。当驱动测度是 N 个 DBM 粒子上的经验测度时，所得的多重 SLE 映射在本文中记作 $g_t^N(z)$。该模型由 Cardy 在 [10], 中提出，随后 Lawler 和 Healey 在 [30], 中结合量子 Calogero-Sutherland 模型与共形场论对其进行了进一步研究。关于多重 SLE 与 CFT 之间联系的更多研究见 [40] 和 [48]。对于 $N = 2$ 条曲线的情形，人们在 [11] 中研究了该模型关于参数 β 的扰动。我们注意到，DBM 模型中的参数 β 与 SLE 理论中的参数 κ 通过 $\beta = 8/\kappa$ 相关联。

我们将以 Dyson 布朗运动为驱动项的多重 SLE 模型称为同步增长多重随机Loewner演化模型。多重 SLE 还有一种非同步增长的版本，近年来受到广泛关注。关于上半平面和单位圆盘两种版本的多重 SLE 模型，已有若干研究成果 [5, 12, 13, 15, 31, 32, 35, 37,40, 45, 47, 58, 62, 63]。

在 [14], 中，作者考察由 DBM 驱动的多重 SLE 的 $N \to \infty$ 极限。具体而言，他们证明初始位置的经验测度收敛到概率测度 μ_0，随后 g_t^N关于局部一致收敛依分布收敛到满足以下条件的 g_t^∞

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t^\infty(z) = M_t^\infty(z), \qquad g_0(z) = z, \tag{2}$$

其中， M_t^∞是复 Burgers 方程的一个解

$$\begin{cases} \frac{\partial M_t^\infty(z)}{\partial t} = -2M_t^\infty(z) \frac{\partial M_t^\infty(z)}{\partial z}, \ t > 0, \\ M_0^\infty(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{z-x} d\mu_0(x). \end{cases} \tag{3}$$

他们的结果是随机矩阵理论中 Wigner 著名的半圆定律在多重 SLE 中的对应版本。我们研究这一模型，并通过给出该模型在较弱版本的 Carath´eodory 型收敛中的收敛阶，获得了更精细的信息。未来的工作中，我们计划通过在接近多重 SLE 承载体时加强估计，研究完整的 Carath´eodory 收敛。

在这项工作中，我们将随机矩阵理论中证明局部定律所用方法的要素（例如预解式技巧）与 SLE 理论中的方法相结合。换言之，我们将随机矩阵理论中的现代技巧应用于 SLE 的分析。近年来，局部定律一直是随机矩阵理论中一个非常重要的研究方向（参见 [9], [16], [18], [17], [19], [20], [21], [22], [25], [24], [26], [23], [42], [44], [54], [53], [57], [56], [55] ，此处仅列举部分文献）。它们是证明随机矩阵理论中 Wigner 系综普适性的基本要素之一（参见 [27]）。

鉴于通过分析 DBM 来证明随机矩阵理论中普适性的工作取得了杰出进展，多重 SLE 与随机矩阵之间的相互作用将提供许多值得探索的方向。当前工作的研究方法代表了概率论这两个重要领域之间可能的探索方向之一。未来我们希望探索另一个方向：利用 Dyson 布朗运动驱动项的分析研究多重 SLE 曲线的几何性质，以及模型的良好近似方案（例如，在单条 SLE 曲线的情形下参见 [28], [59], [33] ）。另一个可能方向是研究多重 SLE 模型关于参数 β 的连续性；这一研究受到人们多年来对单条 SLE 曲线情形中这一尚未解决猜想的浓厚兴趣及相关进展的启发（参见 [6], [7], [29], [34]）。此外，多重 SLE 曲线从驱动项所在位置生长这一事实，加上我们对驱动项结构的了解，使我们能够定义新的可观测量，以研究离散模型收敛到多重 SLE 的过程。这类可观测量包括驱动项之间 $k \geq 1$ 个最小距离的统计量（参见 [8]），或关于原点对称区域内不含任何驱动项的概率（关于 $\beta = 2$，参见 [41] ）。

虽然我们的结果也适用于一般的有界初始条件，但这里我们仅陈述所有戴森布朗运动粒子均从原点出发的情形。为使记号和阐述更简洁，我们选择了这一情形。

定理 1.1. 令 $\beta = 1$ 或 $\beta = 2$，并考虑从原点出发的 Dyson 布朗运动。令 K_T 为时刻 $T > 0$. 的多重 SLE 承载体。那么，对于任意 $\varepsilon > 0$，对于 N 条曲线对应的多重 SLE 映射，我们有

$$\sup_{t\in[0,T],\ z\in G} |g_t^N(z) - g_t^\infty(z)| = O\left(\frac{1}{N^{1/3-\varepsilon}}\right),$$

以压倒性概率[1], 对于给定的 $G \subset \mathbb{H} \setminus K_T$.

注 1.2. 众所周知，对于参数 $\beta = 1$、$\beta = 2$ 和 $\beta = 4$ 的特殊取值，可以用矩阵来理解戴森布朗运动粒子的统计特性，因为这些取值分别对应于研究充分的高斯正交系综、高斯酉系综（GUE）和高斯

[1]若对于每个 $p > 0$，都有 $\mathbb{P}(E) \geq 1 - O_p(n^{-p})$，则称事件 E 以压倒性概率成立；详情参见定义 3.1。

辛系综（GSE）模型。若上三角部分的元素 A_{ij}、$1 \le i \le j \le n$ 是相互独立的高斯随机变量，其中 A_{ij} 的均值为零、方差为 $\frac{1+\delta_{ij}}{n}$，且 δ_{ij} 为克罗内克δ，则从高斯正交系综（GOE）中抽取一个 $n \times n$ 实对称矩阵 A。GUE 和 GSE 系综的定义类似，只是非对角元素分别为复高斯变量和四元数高斯变量。我们分别研究 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$ 两种情形，因为它们对应于 SLE 理论中的临界参数 $\kappa = 8$ 和 $\kappa = 4$。我们预计，对应于取值 $\kappa = 2$ 的情形 $\beta = 4$ 也可以进行类似分析。

我们注意到，$N^{-(1/3-\epsilon)}$ 多重 SLE 收敛到流体力学极限的收敛阶，是通过 [44] 中的一个估计得到的。据我们所知，这是文献中该情形下最佳的稳定性估计。

定理 1.1 依赖于以下技术性结果。

定理 1.3. 设 $\beta = 1$ 或 $\beta = 2$，并考虑从原点出发的 Dyson 布朗运动 $\left(\lambda_t^{(1)}, \dots, \lambda_t^{(N)}\right)$ 和 $M_t^N \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_-$ 定义为

$$M_t^N(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{2}{z - \lambda_t^{(j)}}.$$

令 $M_t^\infty \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_-$ 为复 Burgers 方程的解

$$\begin{cases} \frac{\partial M_t^\infty(z)}{\partial t} = -2M_t^\infty(z) \frac{\partial M_t^\infty(z)}{\partial z}, \ t > 0, \\ M_0^\infty(z) = \frac{2}{z}. \end{cases} \tag{4}$$

那么，对于任意紧集 $G \subset \mathbb{C}_+$、$\varepsilon > 0$以及固定的 $t \in [0, T]$

$$\sup_{z \in G} \left| M_t^N(z) - M_t^\infty(z) \right| = O_{G,\varepsilon}\left(\frac{t}{N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \right), \tag{5}$$

以压倒性概率。

本文其余部分分为几个章节。第二节给出涉及多重 SLE 承载体及其补集子集的概率估计。第三节着重介绍我们使用的随机矩阵技术，以及定理 1.3 的证明。在第 3.4 节中，我们使用网论证，将此前针对固定时刻 $t \in [0, T]$ 得到的结果推广到所有时刻同时成立。在第四节中，我们证明定理 1.1，并在附录中给出论证中的稳定性部分。

2. Subset of the complement of the multiple SLE hull

本节针对一般的 $\beta \ge 1$ 给出概率估计，这些估计有助于推导集合 $G \subset \mathbb{H} \setminus K_T$ 的选取，并据此确定映射族的收敛阶。我们给出一般 $\beta \ge 1$ 的估计，并在应用中具体讨论 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$ 情形。

令 $\partial_t g_t(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{2}{g_t(z) - \lambda_t^i}$，其中 $(\lambda_t^{(1)}, \cdots, \lambda_t^{(N)})$ 是参数为 $\beta \ge 1$. 的 Dyson 布朗运动（DBM）。我们首先考虑 $\lambda_t^i \equiv 0, \forall t \in [0, T]$,

对所有 $i = \{1, 2, \cdots, N\}$.。那么，我们有 $\partial_t g_t(z) = {}^{2N}_{N g_t}(z) = {}^{2}_{g_t}(z) \cdot$。由于$g_t(z) = \mathrm{Re}(g_t(z)) + i\mathrm{Im}(g_t(z))$，我们有

$$\partial_t \mathrm{Im}(g_t(z)) = \frac{-2\mathrm{Im}(g_t(z))}{|g_t(z)|^2} \geq \frac{2}{(\mathrm{Im}(g_t(z))^2}.$$

由此可得

$$\mathrm{Im}\left(g_t(z)\right)^2 \geqslant \left(\mathrm{Im}(z)\right)^2 - 4t > 0,$$

只要 $\mathrm{Im}(z) > 2\sqrt{T}$.

为了控制实部，对于参数为 $\beta \geq 1$ 的 Dyson 布朗运动 $(\lambda_t^{(1)}, \cdots, \lambda_t^{(N)})$，我们注意到

$$\partial_t \mathrm{Re}(g_t(z)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{Re}\left(g_t(z)\right) - \lambda_t^i}{\left|g_t(z) - \lambda_t^i\right|^2} > 0,$$

只要 $\mathrm{Re}(g_t(z)) > M = \sup^{t\in[0,T]} \sup_{i=\{1,2,\ldots,N\}} \left|\lambda_t^i\right|$. 那么，结合这两个估计，我们得到

$$\{z \in H| : |\mathrm{Re}(z) > M \text{ or } \mathrm{Im} > 2\sqrt{T}\} \subset \mathbb{H} \setminus K_T.$$

我们还注意到，对所有 $t \in [0, T]$，都有

$$K_t \subset \{z \in \overline{\mathbb{H}} : |\operatorname{Re} z| \leq M \; and \; \operatorname{Im} z \leq 2\sqrt{T}\}.$$

接下来，我们使用以下关于极端特征值行为的概率结果。

引理2.1（ [3]中的引理4.3.17）。设 $\lambda_N^*(t) := \max_{1\leq i\leq N} \left|\lambda_t^{(i)}\right| = \max\left(\lambda_t^{(N)}, -\lambda_t^{(1)}\right)$.设 $\beta \geq 1$。那么存在有限常数 $\alpha = \alpha(\beta) > 0$、 $C = C(\beta)$，并且对于所有 $t \geq 0$ ，存在一个随机变量 $\eta_N^*(t)$，其分布与 t 无关，使得

$$P\left(\eta_N^*(t) \geq x + C\right) \leq e^{-\alpha N x}$$

并且，对于所有 $t \geq 0$,

$$\lambda_N^*(t) \leq \lambda_N^*(0) + \sqrt{t}\eta_N^*(t).$$

对于 DBM驱动项，利用引理2.1，我们得到：对于 $\beta \geq 1$ ，以及对于 $C = C(\beta)$ 和 $\alpha = \alpha(\beta)$，存在某些有限常数，使得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \sup_{i=\{1,2,\ldots,N\}} \left|\lambda_t^i\right| \leq (C + x)\sqrt{T}\right) \geq 1 - e^{-\alpha N x}.$$

对于共形映射，我们有以下结果。

引理2.2（ [36]中的引理4.5）。设 K 为一个凸起集，且 $H = \mathbb{H}\backslash K$。若 $K \subset B(x_0, r)$，则 g_K 将 $H \cap B(x_0, 2r)$映射到 $B(x_0, 3r)$中，并且

$$\sup_{z\in H} |g_K(z) - z| \leq 5r.$$

对于盒子 $G \subset H_T = \mathbb{H} \setminus K_T$，我们有，以压倒性概率

$$g_t^N(G) \subset \{z : \sqrt{\mathrm{Im}(z_0))^2 - 4t} \leq \mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(z_0);\ |Re(z)| \leq f(N, T)\}, \tag{6}$$

其中， $f(N, T)$ 可由以下内容推导得出：

$$|\mathrm{Re} q_K(z)| \le |q_K(z)| \le |z| + 5r. \tag{7}$$

在多重 SLE 承载体 K_T 的情况下，我们有 $r = \sqrt{M^2 + (2\sqrt{T})^2}$。

3. Random Matrix Techniques

本节将证明一些随机矩阵结果，从而为定理 1.3 的证明铺平道路。值得注意的是，对于 $\beta = 1$ 和 $\beta = 2$，从初始位置 $\left(\lambda_0^{(1)}, \dots, \lambda_0^{(N)}\right)$ 出发、由方程 (1) 的解定义的 DBM $\left(\lambda_t^{(1)}, \dots, \lambda_t^{(N)}\right)$，其分布与 $D - 2\sqrt{t}A$ 的特征值相同，其中 D 是一个以初始位置为对角元素的 $N \times N$ 对角矩阵，而 A 是从高斯正交系综中抽取的矩阵（当 $\beta = 1$ 时），或从高斯酉系综（GUE）中抽取的矩阵（当 $\beta = 2$时）。本节将针对 A 从 GOE 中抽取的情形建立这些结果，因为对 GUE 模型的调整是直接的。

3.1. 工具。

本节介绍我们将在全文中使用的工具。我们首先给出高概率事件的定义。

定义 3.1（高概率事件）。设 E 是一个依赖于 n 的事件。

- E 渐近几乎必然成立，当且仅当 $\mathbb{P}(E) = 1 - o(1)$。
- E 以高概率成立，当且仅当对于某个常数 $c > 0$，$\mathbb{P}(E) = 1 - O(n^{-c})$。
- E 以压倒性概率成立，当且仅当对于每个 $p > 0$，$\mathbb{P}(E) \ge 1 - O_p(n^{-p})$。

对于 $z = E + i\eta \in \mathbb{C}_+$、$n \times n$ 厄米矩阵 H 以及 $G(z) := (H - zI)^{-1}$，Ward 恒等式指出

$$\sum_{j=1}^{n} |G_{ij}(z)|^2 = \frac{1}{\eta} \operatorname{Im} G_{ii}(z). \tag{8}$$

若 A 和 B 是可逆矩阵，则预解式恒等式表明

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1}. \tag{9}$$

若 ξ 是均值为零、方差为 σ^2 的高斯随机变量，且 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$连续可微，则高斯分部积分公式表明

$$\mathbb{E}[\xi f(\xi)] = \sigma^2 \mathbb{E}[f'(\xi)], \tag{10}$$

只要期望有限即可。下面的引理给出了鞅差序列的一个方便的矩界。

引理 3.2（ [4]中的引理 2.12）。设 $\{X_k\}$ 是一个复鞅差序列，且 $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, \dots, X_k)$ 是由 $X_1, \dots, X_k$生成的 σ-代数。那么，对任意 $p \ge 2$,

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \le C_p \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{k-1}|X_k|^2 \right)^{p/2} + \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n} |X_k|^p \right).$$

其中 C_p 是一个仅依赖于 p 和 $\mathbb{E}_{k-1}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_{k-1}]$的常数。

下面的集中引理有助于控制二次型相对于其期望的偏差。

引理 3.3（ [1]中的公式 (3)）。设 X 是一个包含独立同分布标准高斯随机变量的 n 向量， A 是一个确定性的 $n \times n$ 矩阵， $\ell \geq 1$ 是一个整数。则

$$\mathbb{E}[X^* AX - \operatorname{tr} A|^{2\ell} \leq C_\ell (\operatorname{tr} AA^*)^\ell$$

其中， C_ℓ 是仅取决于 ℓ的常数。

最后，我们将在第 3.2 节中用到以下代数恒等式。

引理 3.4（ [4]中的定理 A.5）。设 A 是一个 $n \times n$ 对称矩阵，且A_k 是 k阶、大小为（$n-1$） $\times$ （$n-1$）的主子矩阵。若 A 和 A_k 均可逆，则

$$\operatorname{tr}(A^{-1}) - \operatorname{tr}(A_k^{-1}) = \frac{1 + \alpha_k^* A_k^{-2} \alpha_k}{A_{kk} - \alpha_k^* A_k^{-1} \alpha_k}$$

其中， α_k 由 A 的第 k列删除第 k个元素后得到。

3.2. 高斯正交系综的集中性。本节将证明，对于固定的 $z \in \mathbb{C}_+$， $|M_t^N$（z）$-\mathbb{E}M_t^N$（z）|很小。为与随机矩阵文献保持一致，我们将对固定的 $t > 0$，考虑 m_N（z）：$= -\frac{1}{2} M_t^N$（z）。令 A_t为 $\sqrt{t}A$ ，其中 A 取自高斯正交系综。

注意， $m_N(z) - \mathbb{E}m_N(z)$ 可以写成如下望远镜求和

$$m_N(z) - \mathbb{E}m_N(z) = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}_k m_N(z) - \mathbb{E}_{k-1} m_N(z)) := \sum_{k=1}^{N} \gamma_k$$

注意，

$$m_N(z) = \frac{1}{N} \operatorname{tr}(A_t - z)^{-1} = \frac{1}{N} \operatorname{tr} \frac{1}{\sqrt{t}A - z} = \frac{1}{N\sqrt{t}} \operatorname{tr} \frac{1}{A - z/\sqrt{t}} = \frac{1}{N\sqrt{t}} \operatorname{tr} \frac{1}{A - z'}$$

我们定义 $E' = E/\sqrt{t}$ 和 $\eta' = \eta/\sqrt{t}$。令 $\mathbb{E}_k$ 表示关于由 A_{ij}生成的 σ-域的条件期望，其中 i、 $j \leq k$，从而 $\mathbb{E}_N m_N(z) = m_N(z)$ 且 $\mathbb{E}_0 m_N(z) = \mathbb{E}m_N(z)$。

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{1}{N\sqrt{t}}(\mathbb{E}_k \operatorname{tr}(A-z')^{-1} - \mathbb{E}_{k-1}\operatorname{tr}(A-z')^{-1}) \\
&= \frac{1}{N\sqrt{t}}\Big(\mathbb{E}_k\big[\operatorname{tr}(A-z')^{-1} - (A_k-z')^{-1}\big] - \mathbb{E}_{k-1}\big[\operatorname{tr}(A-z')^{-1} - \operatorname{tr}(A_k-z')^{-1}\big]\Big) \\
&= \frac{1}{N\sqrt{t}}(\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\Bigg(\frac{a_k^* G_k^2 a_k - \mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k^2 a_k}{A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k} + \frac{1+\mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k^2 a_k}{A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k} \\
&\qquad\qquad - \frac{1+\mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k^2 a_k}{A_{kk}-z'-\mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k a_k}\Bigg) \\
&= \frac{1}{N\sqrt{t}}(\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\Bigg(\frac{a_k^* G_k^2 a_k - \mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k^2 a_k}{A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k} \\
&\qquad\qquad - \frac{(1+\mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k^2 a_k)(a_k^* G_k a_k - \mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k a_k)}{(A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k)(A_{kk}-z'-\mathbb{E}_{a_k} a_k^* G_k a_k)}\Bigg) \\
&= \frac{1}{N\sqrt{t}}(\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\Bigg(\frac{a_k^* G_k^2 a_k - \frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k^2}{A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k} \\
&\qquad\qquad - \frac{(1+\frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k^2)(a_k^* G_k a_k - \frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k)}{(A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k)(A_{kk}-z'-\frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k)}\Bigg)
\end{aligned}$$

其中 a_k 表示 A 的第 k 行，并移除了第 k 个元素。我们定义以下量，

$$\alpha_k = a_k^* G_k^2 a_k - \frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k^2,$$

$$\beta_k = \frac{1}{A_{kk}-z'-a_k^* G_k a_k}, \quad \bar{\beta}_k = \frac{1}{A_{kk}-z'-\frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k},$$

$$\delta_k = a_k^* G_k a_k - \frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k, \quad \epsilon_k = 1 + \frac{1}{N}\operatorname{tr} G_k^2,$$

使得

$$\begin{aligned}
m_N(z) - \mathbb{E}m_N(z) &= \frac{1}{N\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{N}(\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\alpha_k\beta_k - \frac{1}{N\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{N}(\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\epsilon_k\delta_k\beta_k\bar{\beta}_k \\
&:= \frac{1}{\sqrt{t}}S_1 - \frac{1}{\sqrt{t}}S_2. \qquad (11)
\end{aligned}$$

对于固定的 $\varepsilon > 0$，我们将以压倒性概率证明 $N^{1-\varepsilon}(\eta')^3|S_1| = o(1)$ 和 $N^{1-\varepsilon}(\eta')^3|S_2| = o(1)$。我们将通过矩方法来完成这一证明。我们先从 S_1 开始。根据马尔可夫不等式，只需对 $\ell \in \mathbb{N}$，给出 $\mathbb{E}|N^{1-\varepsilon}(\eta')^3 S_1|^{2\ell} = \mathbb{E}|N^{-\varepsilon}(\eta')^3\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\alpha_k\beta_k|^{2\ell}$ 的上界。

根据引理 3.2，对于任意 $\ell \geq 1$,

$$\mathbb{E}|N^{-\varepsilon}(\eta')^3 \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\alpha_k\beta_k|^{2\ell} \leq C_\ell \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_{k-1}|N^{-\varepsilon}(\eta')^3\alpha_k\beta_k|^2 \right)^\ell + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}|N^{-\varepsilon}(\eta')^3\alpha_k\beta_k|^{2\ell} \right).$$

我们用 C_ℓ 表示一个仅依赖于 ℓ、但可能随行而变化的常数。由于 $\operatorname{Im} a_k^* G_k a_k > 0$,

$$|\beta_k| \leq (\eta')^{-1}.$$

因此,

$$\mathbb{E}\left| N^{-\varepsilon}(\eta')^3 \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\alpha_k\beta_k \right|^{2\ell} \leq C_\ell N^{-2\varepsilon\ell} \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_{k-1}|(\eta')^2\alpha_k|^2 \right)^\ell + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}|(\eta')^2\alpha_k|^{2\ell} \right). \tag{12}$$

由引理 3.3,

$$\mathbb{E}|(\eta')^2\alpha_k|^{2\ell} \leq C_\ell(\eta')^{4\ell}N^{-2\ell}\mathbb{E}|\operatorname{tr} G_k^2 G_k^{*2}|^\ell.$$

我们使用如下简单估计：

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} G_k^2 G_k^{*2} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{((\lambda_i - E)^2 + (\eta')^2)^2} \right) \\ &\leq N(\eta')^{-4} \end{aligned} \tag{13}$$

现在我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|(\eta')^2\alpha_k|^{2\ell} &\leq C_\ell(\eta')^{4\ell}N^{-2\ell}\mathbb{E}|N(\eta')^{-4}|^\ell \\ &\leq C_\ell N^{-\ell} \end{aligned}$$

因此，根据方程（12），

$$\mathbb{E}\left| N^{-\varepsilon}(\eta')^3 \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}_k - \mathbb{E}_{k-1})\alpha_k\beta_k \right|^{2\ell} \leq C_\ell N^{-2\varepsilon\ell} \left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_k|(\eta')^2\alpha_k|^2 \right)^\ell + N^{-\ell+1} \right)$$

用与（13）相同的推理，我们还可以得到 $\mathbb{E}_k|\alpha_k|^2 \leq N(\eta')^{-4}$。因此,

$$\mathbb{E}_k|(\eta')^2\alpha_k|^2 \leq KN^{-1}$$

so

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}_k|(\eta')^2\alpha_k|^2 \right)^\ell \leq C_\ell.$$

最后，我们可以得出结论：

$$\mathbb{E}\left| N^{-\varepsilon}(\eta')^3 \sum_{k=1}^{N} (\mathbb{E}_{k-1} - \mathbb{E}_k)\alpha_k\beta_k \right|^{2\ell} \leq C_\ell N^{-2\varepsilon\ell}.$$

由于 ℓ 是任意的，我们已经证明，以压倒性概率有 $|S_1| = o_\eta(t^{3/2}/N^{1-\varepsilon})$。

现在我们来处理 S_2。首先注意到

$$\begin{aligned}\left|1+\frac{1}{N}\operatorname{tr}G_k^2\right| &\le 1+\frac{1}{N}\operatorname{tr}G_kG_k^* \\ &= (\eta')^{-1}\operatorname{Im}\left(-A_{kk}+z'+\frac{1}{N}\operatorname{tr}G_k\right)\end{aligned}$$

因此，

$$|\epsilon_k\bar{\beta}_k| = \frac{|1+\frac{1}{N}\operatorname{tr}G_k^2|}{|A_{kk}-z'-\frac{1}{N}\operatorname{tr}G_k|} \le (\eta')^{-1}$$

回忆 $|\beta_k| \le (\eta')^{-1}$，我们有

$$\mathbb{E}|N^{1-\varepsilon}(\eta')^4S_2|^{2\ell} = N^{-2\varepsilon\ell}(\eta')^{2\ell}\left|\sum_{k=1}^N(\mathbb{E}_k-\mathbb{E}_{k-1})\delta_k\right|^{2\ell}$$

再次，根据引理 3.2

$$\mathbb{E}|N^{1-\varepsilon}(\eta')^4S_2|^{2\ell} \le C_\ell N^{-2\varepsilon\ell}(\eta')^{2\ell}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^N\mathbb{E}_{k-1}|\delta_k|^2\right)^\ell+\sum_{K=1}^N\mathbb{E}|\delta_k|^{2\ell}\right).$$

注意，根据引理 3.3,

$$\mathbb{E}|\delta_k|^{2\ell} \le C_\ell N^{-2\ell}\mathbb{E}|\operatorname{tr}G_kG_k^*|^\ell.$$

我们有

$$\operatorname{tr}G_kG_k^* \le N(\eta')^{-2}$$

so

$$\mathbb{E}|\delta_k|^{2\ell} \le C_\ell N^{-\ell}(\eta')^{-2\ell}.$$

此外，

$$\mathbb{E}_{k-1}|\delta_k|^2 \le N^{-1}(\eta')^{-2}.$$

因此，

$$\mathbb{E}|N^{1-\varepsilon}(\eta')^4S_2|^{2\ell} \le C_\ell N^{-2\varepsilon\ell}.$$

因此，我们可以得出， S_2 以压倒性概率为 $o_\eta(t^2/N^{1-\varepsilon})$。回到 (11)，我们已经证明

$$|m_N(z)-\mathbb{E}m_N(z)| = o\left(\frac{t}{N^{1-\varepsilon}}\right) \tag{14}$$

以压倒性概率。

3.3. 定理 1.3 的证明。本节给出定理 1.3 的证明。我们将先证明 Dyson 布朗运动具有一般初始位置时的情形，然后再专门讨论初始位置位于原点的情形。定义矩阵

$$L_t = D-2\sqrt{t}A \tag{15}$$

其中， A 取自高斯正交/酉系综， D 是一个$N\times N$ 确定性对角矩阵。定义预解矩阵

$$G_t(z) := (L_t-zI)^{-1}, \quad \text{and} \quad Q(z) := (D-zI)^{-1}.$$

接下来，我们定义函数

$$M_t^N(z) = -\frac{2}{N}\operatorname{tr} G_t(z), \quad \text{and} \quad S^N(z) = -\frac{2}{N}\operatorname{tr} Q(z).$$

固定 t、$\eta > 0$ 和 z，使得 $\operatorname{Im}(z) \geq \eta$。此外，定义矩阵

$$G := G_t(z),$$

and

$$Q := Q\left(z - 2t\mathbb{E}M_t^N(z)\right).$$

特别地，$S^N\left(z - 2t\mathbb{E}M_t^N(z)\right) = -\frac{2}{N}\operatorname{tr} Q$。根据预解式恒等式 (9)

(16)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M_t^N(z) - S^N\left(z - 2t\mathbb{E}M_t^N(z)\right) &= -\frac{2}{N}\left(\operatorname{tr} G_t - \operatorname{tr} Q_t\right) \\ &= -2\mathbb{E}\frac{1}{N}\operatorname{tr}\left(G\tilde{A}Q\right) + 4t\mathbb{E}M_t^N(z)\mathbb{E}\frac{1}{N}\operatorname{tr}\left(GQ\right)\end{aligned}$$

其中 $\tilde{A} = 2\sqrt{t}A$。现在考虑这一项

$$-2\mathbb{E}\frac{1}{N}\operatorname{tr}\left(G\tilde{A}Q\right) = -\frac{2}{N}\sum_{i,j} Q_{ii}\mathbb{E}\left[G_{ij}\tilde{A}_{ji}\right]. \tag{17}$$

利用预解式恒等式 (9) 进行计算可得

$$\frac{\partial G_{kl}}{\partial A_{ij}} = \begin{cases} G_{ki}G_{ji} + G_{kj}G_{il}, & \text{if } i \neq j, \\ G_{ki}G_{jl}, & \text{if } i = j \end{cases}.$$

对 (17) 应用高斯分部积分可得

$$-2\mathbb{E}\frac{1}{N}\operatorname{tr}\left(G\tilde{A}Q\right) = \frac{-8}{N^2}\mathbb{E}\sum_{i,j} Q_{ii}G_{ij}^2 - \frac{4t}{N}\mathbb{E}M_t^N(z)\operatorname{tr}(QG),$$

将其与（16）结合可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M_t^N(z) - S^N\left(z - 2t\mathbb{E}M_t^N(z)\right) = \frac{-8}{N^2}\mathbb{E}\sum_{i,j} Q_{ii}G_{ij}^2 - \frac{4t}{N}\mathbb{E}M_t^N(z)\operatorname{tr}(QG) \\ + 4t\mathbb{E}M_t^N(z)\mathbb{E}\frac{1}{N}\operatorname{tr}\left(GQ\right).\end{aligned} \tag{18}$$

现在我们固定 $z = E + i\eta \in \mathbb{C}_+$。根据 Ward 恒等式 (8)

$$\begin{aligned}\left|\frac{8}{N^2}\mathbb{E}\sum_{i,j} Q_{ii}G_{ij}^2\right| &\leq \mathbb{E}\frac{8}{N^2}\sum_j |Q_{ii}|\sum_j |G_{ij}|^2 \\ &\leq \mathbb{E}\frac{8}{N^2\eta}\sum_i |Q_{ii}|\operatorname{Im} G_{ii} \\ &\leq \frac{8}{N\eta^3}.\end{aligned}$$

对于差值 $4t\mathbb{E}M_t^N(z)\mathbb{E}\frac{1}{N}\text{tr}\,(GQ) - \frac{4t}{N}\mathbb{E}M_t^N(z)\,\text{tr}(QG)$，注意到

$$\begin{aligned}\left|\frac{4t}{N}\operatorname{tr}(GQ)\right| &= \left|\frac{4t}{N}\sum_i Q_{ii}G_{ii}\right| \\ &\leq \frac{4t}{\eta^2}.\end{aligned}$$

于是，由 (14) 可知，将 D 取为零矩阵时

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|4t\left(\mathbb{E}M_t^N(z)\right)\frac{1}{N}\operatorname{tr}(GQ) - \frac{4t}{N}M_t^N(z)\operatorname{tr}(QG)\right|\right] \\ &\quad\leq \mathbb{E}\left[\left|M_t^N(z)\mathbb{E} - \mathbb{E}M_t^N(z)\right|\left|\frac{4t}{N}\operatorname{tr}(GQ)\right|\right] \\ &\quad= o\left(\frac{4\max(t,t^2)}{N^{1-\varepsilon}\eta^2}\right).\end{aligned}$$

因此，我们得出

$$\mathbb{E}M_t^N(z) - S^N\left(z - 2t\mathbb{E}M_t^N(z)\right) = O\left(\frac{4\max(t,t^2)}{N^{1-\varepsilon}\eta^3}\right), \tag{19}$$

其中，对所有 N， $S^N(z) = \frac{2}{z}$。令 M_t^∞ 如定理 1.3 中所定义，则

$$M_t^\infty(z) - S^N\left(z - 2tM_t^\infty(z)\right) = 0.$$

注意，对每个 $z \in \mathbb{C}_+$， $s_t = -\frac{1}{2}M_t^\infty(z)$、 $\tilde{s}_t = -\frac{1}{2}\mathbb{E}M_t^N(z)$ 和 $s_0(z) = -\frac{1}{2}S^N(z)$ 均满足命题 A.1 的条件（见附录），因此由命题 A.1 和 (44) （见附录）可得

$$\mathbb{E}M_t^N(z) - M_t^\infty(z) = O\left(\frac{4^{1/3}\max(t,t^2)^{1/3}}{N^{1/3-\varepsilon}\eta}\right). \tag{20}$$

将 (14) 应用于 (20)，定理 1.3 的证明即告完成。

3.4. 将一致上界推广至 $[0,T]$。本节概述如何将定理 1.3 关于 $t \in [0,T]$ 的结论一致地推广。这依赖于 DBM 的连续性。不失一般性，我们考虑区间 $[0,1]$ ，而不是区间 $[0,T]$。考虑将时间区间 $[0,1]$ 均匀划分为若干子区间，划分点为 $t_k = \frac{k}{n}$、 $k = 0$、1、.....、$n.$。这些子区间长度相等，均为 $\frac{1}{n}$.

考虑 $t \in$ （t_1、 t_2）这一中间时刻。我们有

$$\begin{aligned}&\sup_{z\in G}|M_t^\infty(z) - M_t^N(z)| \\ &\leq \sup_{z\in G}|M_t^\infty(z) - M_{t_1}^\infty(z)| + \sup_{z\in G}|M_{t_1}^\infty(z) - M_{t_1}^N(z)| + \sup_{z\in G}|M_{t_1}^N(z) - M_t^N(z)|,\end{aligned} \tag{21}$$

其中 G 是前一节中凸起集补集的一个特定子集。第一项可利用伯格斯方程加以控制，因为解关于时间局部利普希茨连续。

对于（21）右侧的第二项，由定理 1.3 可知，对任意 $\epsilon > 0$

$$\sup_{z\in G}|M_{t_1}^{\infty}(z)-M_{t_1}^{N}(z)|=O_{\varepsilon}\left(\frac{1}{N^{1/3-\epsilon}}\right) \tag{22}$$

以压倒性概率成立，即其概率至少为 $1-e^{-cN}$，其中 c 为某个常数。

根据并集界，对于网中的任意 t_j、 $j=1$、.....、 n，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\bigcup_{t_i}|M_{t_i}^{\infty}(z)-M_{t_i}^{N}(z)|=\Omega\left(\frac{C}{N^{1/3-\epsilon}}\right)\right)\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(|M_{t_i}^{\infty}(z)-M_{t_i}^{N}(z)|=\Omega\left(\frac{C}{N^{1/3-\epsilon}}\right)\right)\\&\leq ne^{-CN},\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $g=\Omega(f)$ 表示 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 当 $x\to\infty$.

对于 (21) 右侧的第三项，使用记号 $\tilde{\eta}_t^i=z-\lambda_t^i$，对于 $i=1$、2、.....、 N，我们有

$$|M_{t_1}^{N}(z)-M_{t}^{N}(z)|\leq\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|\lambda_t^i-\lambda_{t_1}^i|}{|\tilde{\eta}_{t_1}^i\tilde{\eta}_t^i|}\leq\frac{\tilde{C}|t-t_1|^{1/2-\epsilon}}{\operatorname{Im}(z_0)^2}, \tag{24}$$

其中我们利用了 Dyson 布朗运动驱动项的正则性（ [43]）以及界 $|\tilde{\eta}_t^i|\geq|\operatorname{Im}(z)|\geq|\operatorname{Im}(z_0)|$，其中 $z_0\in\mathbb{H}$ 满足 $\operatorname{Im}(z_0)\leq\min_{z\in G}(\operatorname{Im}(z))$。

采用记号 $\hat{C}=\frac{\tilde{C}}{\operatorname{Im}(z_0)^2}$，若要使误差在网中不累积，我们需要

$$\hat{C}\frac{1}{n^{1/2-\epsilon}}\leq\frac{C}{N^{1/3-\epsilon}}.$$

因此，对于时间区间的划分，我们有

$$n>\frac{\hat{C}^2(N^{(1/3-\epsilon)})^2}{C^2},$$

对 $\hat{C}$ 和某些常数 C，由 (21) 可得

$$\sup_{t\in[0,1],\ z\in G}\left|M_t^N(z)-M_t^{\infty}(z)\right|=O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\right). \tag{25}$$

4. Proof of Theorem 1.1

本节将完成定理 1.1 的证明。固定 $\varepsilon>0$。令 G 为 $\mathbb{C}_+$ 的一个合适紧子集，并令 G 为 $\mathbb{C}_+$ 的一个紧子集，使得以压倒性概率有 $g_t^N(G)\subseteq\tilde{G}$ （关于此类 $\tilde{G}$ 的存在性，见 (6)）。

首先定义 $\eta := \min_{z\in\tilde{G}}(\operatorname{Im} z) > 0$。注意

$$|g_t^N(z) - g_t^\infty(z)| = \left| \int_0^t M_s^N(g_s^N(z)) - M_s^\infty(g_s^\infty(z))ds \right| \tag{26}$$

$$\leq \left| \int_0^t M_s^N(g_s^N(z)) - M_s^\infty(g_s^N(z))ds \right| + \left| \int_0^t M_s^\infty(g_s^N(z)) - M_s^\infty(g_s^\infty(z))ds \right|. \tag{27}$$

对于项 $M_s^N(g_s^N(z)) - M_s^\infty(g_s^N(z))$，注意到根据定理 1.3

$$\sup_{z\in\tilde{G}} \left| M_s^N(z) - M_s^\infty(z) \right| = O\left(\frac{4T^2}{N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \right),$$

对于固定的 $s \in [0,T]$，以压倒性概率成立。根据第 3.4 节中的论证，这可以推广为

$$\sup_{s\in[0,T],\ z\in\tilde{G}} \left| M_s^N(z) - M_s^\infty(z) \right| = O\left(\frac{4T^2}{N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \right). \tag{28}$$

对于项 $M_s^\infty(g_s^N(z)) - M_s^\infty(g_s^\infty(z))$，注意到 M_s^∞ 在 $\tilde{G}$ 上至多是 $\frac{2}{\eta^2}$-利普希茨的，因此

$$\left| M_s^\infty(g_s^N(z)) - M_s^\infty(g_s^\infty(z)) \right| \leq \frac{2}{\eta^2} |g_t^N(z) - g_t^\infty(z)|. \tag{29}$$

由 (26)、(28) 和 (29)，我们得出

$$|g_t^N(z) - g_t^\infty(z)| \leq O\left(\frac{4T^2}{N^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \right) + \int_0^t \frac{2}{\eta^2} |g_s^N(z) - g_s^\infty(z)| ds.$$

定理 1.1 随即由 Gr¨onwall 不等式得出。

AppendixA. Stability

下面的结果本质上是 O'Rourke 和 Vu（ [44]）的成果。为方便读者，我们给出了时间变换的详细说明。

命题 A.1（正时间下的稳定性）。设 $t > 0$ 和 $z, s_t, \tilde{s}_t$ 是上半平面的元素，满足

$$s_t = s_0(z + 4ts_t), \tag{30}$$

and

$$\tilde{s}_t = s_0(z + 4t\tilde{s}_t) + O(\varepsilon), \tag{31}$$

其中 $s_0(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_0}{x-z}$，对应某个紧支撑概率测度 μ_0、某个$R \geq z$以及较小的 $\varepsilon > 0$。此外，假设存在 $\eta > 0$，使得 $\mathrm{Im}(z) \geq \eta$。那么 $s, s' = O(1)$ 并且

$$s_t = \tilde{s}_t + O\left(\frac{\varepsilon^{1/3}}{(4t)^{2/3}\eta}\right). \tag{32}$$

证明。证明 $s_t, \tilde{s}_t = O(1)$ 无需对 O'Rourke 和 Vu 的论证作任何改动。令$w_t = z + 4ts_t$ 和 $\tilde{w}_t = z + 4t\tilde{s}_t$。现在我们要证明 $|w_t - \tilde{w}_t|$ 足够小。由 (30) 和 (31) 可得

$$s_0(w_t) - s_0(\tilde{w}_t) = \frac{w_t - \tilde{w}_t}{4t} + O(\varepsilon). \tag{33}$$

此外，根据 s_0 的定义可得

$$s_0(w_t) - s_0(\tilde{w}_t) = (w_t - \tilde{w}_t)\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_0(z)}{(x - w_t)(x - \tilde{w}_t)},$$

将其与 (33) 结合可得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_0(z)}{(x - w_t)(x - \tilde{w}_t)} = \frac{1}{4t} + O\left(\frac{\varepsilon}{|w_t - \tilde{w}_t|}\right). \tag{34}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(s_t) &= \mathrm{Im}(s_0(w_t)) \\ &= \mathrm{Im}(w_t)\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_0(x)}{|x - w_t|^2}, \end{aligned} \tag{35}$$

整理后可得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_0(x)}{|x - w_t|^2} =\leq \frac{1}{4t}. \tag{36}$$

同理可得

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_0(x)}{|x - \tilde{w}_t|^2} =\leq \frac{1}{4t} + O\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right). \tag{37}$$

根据算术-几何平均不等式，我们有

$$\left|\frac{1}{(x - w_t)(x - \tilde{w}_t)}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{|x - w_t|^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{|x - \tilde{w}_t|^2}.$$

由于 $w_t \neq \tilde{w}_t$，可得

$$\left|\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(x-w_t)(x-\tilde{w}_t)}\right]\right| = (1-\delta)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{|x-w_t|^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{|x-\tilde{w}_t|^2}\right)$$

对某个 $\delta > 0$。于是我们有

$$|x-w_t| = (1+O(\delta))\,|x-\tilde{w}_t|\,.$$

and

$$\angle(x-w_t, x-\tilde{w}_t) = O\left(\delta^{1/2}\right).$$

由于 x、w_t、$\tilde{w}_t = O(1)$，我们得到 $w_t - \tilde{w}_t = O\left(\delta^{1/2}\right)$。我们得到，对某个 $C > 0$，$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(x-w_t)(x-\tilde{w}_t)}\right] \leq \left(1 - C\,|w_t-\tilde{w}_t|^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{|x-w_t|^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{|x-\tilde{w}_t|^2}\right)$，因此

$$\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu(x)}{(x-w_t)(x-\tilde{w}_t)} \leq \left(1-C\,|w_t-\tilde{w}_t|^2\right)\left(\frac{1}{4t}+O\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right)\right).$$

我们有

$$\left(1-C|w_t-\tilde{w}_t|^2\right)\left(\frac{1}{4t}+O\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right)\right) = \frac{1}{4t}+O\left(\frac{\epsilon}{|w_t-\tilde{w}_t|}\right). \tag{38}$$

于是，

$$\frac{1}{4t}+O\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right)-\frac{c}{4t}|w_t-\tilde{w}_t|^2 - C|w_t-\tilde{w}_t|^2 O\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right) = \frac{1}{4t}+O\left(\frac{\epsilon}{|w_t-\tilde{w}_t|}\right). \tag{39}$$

此外，我们得到

$$O(\epsilon) = |w_t-\tilde{w}_t|O\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right)-\frac{C}{4t}|w_t-\tilde{w}_t|^3 - C|w_t-\tilde{w}_t|^3 O\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right). \tag{40}$$

利用第一项和第三项有界这一事实，我们得到

$$O(\epsilon)+O\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right) = |w_t-\tilde{w}_t|^3\frac{C}{4t}. \tag{41}$$

因此，我们有

$$|w_t-\tilde{w}_t| = O\left(\left(\frac{4t\epsilon}{\eta}\right)^{1/3}\right), \tag{42}$$

and

$$|s_t-\tilde{s}_t| = O\left(\frac{\epsilon^{1/3}}{(4t)^{2/3}\eta^{1/3}}\right). \tag{43}$$

□

对于较小的 t，以下观察很有用。固定 $\eta > 0$，则 s_0 在 $\{z$ 上是利普希茨连续的，利普希茨常数至多为 $\frac{1}{\eta^2}$：$\mathrm{Im}(z) \geq \eta\}$。因此，对于 (30) 和 (31) 中的 s_t 与 $\tilde{s}_t$，有

$$s_t-\tilde{s}_t = \frac{4t}{\eta^2}(s_t-\tilde{s}_t)+O(\varepsilon). \tag{44}$$

References

[1] R. a. Adamczak、R. Lata l a 和 R. Meller。《巴拿赫空间中的 Hanson–Wright 不等式》。*Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 56 4 2356 2376, 2020 , ( ): –。[2] G. Akemann、J. Baik 和 P. Di Francesco。 *The Oxford handbook of random matrix theory*。牛津大学出版社，2011 年。[3] A. Anderson、Greg W. Guionnet 和 O. Zeitouni。 *An introduction to Random Matrices*。《高等数学研究丛书》。剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。[4] Z. Bai 和 J. W. Silverstein。 *Spectral analysis of large dimensional random matrices*。《统计学丛书》。施普林格，纽约，第二版，2010 年。[5] V. Beffara、E. Peltola 和 H. Wu。论全局多个 SLE 的唯一性。 *Ann. Probab.*，49 1 400 434，2021 ( ): –。[6] D. Beliaev、T. J. Lyons 和 V. Margarint。利用构造性方法和粗糙路径理论研究 SLE$_\kappa$ 理论中的 κ连续性。 *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*，57(1):455–468，2021 年。[7] D. Beliaev、V. Margarint 和 A. Shekhar。贝塞尔过程零点命中时刻的连续性及 SLE$_\kappa$ *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 18 1 69 79, 的焊接同胚。2021 *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 41 4 2648 2681, 2013 , ( ): –。[8] G. Ben Arous 和 P. Bourgade。随机矩阵特征值之间的极端间距。[9] ( ): – *Lectures on the local semicircle law for Wigner matrices* ` 2016 F. Benaych-Georges 和 A. Knowles。《随机矩阵专题》。高级随机矩阵专题，Panoramas et Synthèses，。[10] J. Cardy。随机 Loewner 演化与 Dyson 圆系综。 *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36 24 379, 2003 , ( ):L。[11] J. Chen 和 V. Margarint。由两个互不相撞的 Dyson 布朗运动驱动的多重 Schramm-Loewner 演化的扰动。 *Stochastic Process. Appl.*，151:553–569，2022 年。[12] A. del Monaco、I. Hotta 和 S. Schleiß inger。弦状 Loewner 方程无限裂缝极限的紧性结果。 *Comput. Methods Funct. Theory*，18(1):9–33，2018 年。[13] A. del Monaco 和 S. Schleiß inger。多重 SLE 与复 Burgers 方程。 *Math. Nachr.* 289 16 2007 2018, 2016 , ( ): –。[14] A. del Monaco 和 S. Schleiß inger。多重 SLE 与复 Burgers 方程。 *Math. Nachr.* 289 16 2007 2018, 2016 , ( ): –。[15] J. Dub ´ *Comm. Pure Appl.* edat。 *Math.* 60 12 1792 1847, 2007 Schramm-Loewner 演化的交换关系。[16] , ( ): –。″L. Erd *Ann. Henri Poincaré*os、A. Knowles 和 H.-T. Yau。随机带状矩阵预解式中涨落的平均。 *Ann. Henri Poincaré*，14(8):1837–1926，2013 年。[17] L. Erd″os、B. Schlein 和 H.-T. Yau。Wigner 随机矩阵的局部半圆律与完全离域。 *Comm. Math. Phys.*，287(2):641–655，2009 年。[18] L. Erd″os、B. Schlein 和 H.-T. Yau。短尺度上的半圆定律与 Wigner 随机矩阵特征向量的离域。 *Ann. Probab.*，37(3):815–852，2009 年。[19] L. Erd″os、B. Schlein 和 H.-T. Yau。Wigner 随机矩阵的 Wegner 估计与能级排斥。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(3):436–479，2010 年。[20] L. Erd″os、B. Schlein 和 H.-T. Yau。随机矩阵的普适性与局部弛豫流。 *Invent. Math.*，185(1):75–119，2011 年。[21] L. Erd″os、B. Schlein、H.-T. Yau 和 J. Yin。利用局部弛豫流方法研究随机矩阵局部统计量的普适性。 *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*，48(1):1– 46，2012 年。[22] L. Erd ″ *Bull.* os 和 H.-T. Yau。随机矩阵局部谱统计的普适性。[23] , ( ): –。″L. Erd *A dynamical approach to random matrix theory* os 和 H.-T. Yau。 *A dynamical approach to random matrix theory*，第 28 卷，收录于 *Courant Lecture Notes in Mathematics*。库朗数学科学研究所，纽约；美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2017 年。[24] L. Erd″os、H.-T. Yau 和 J. Yin。伯努利分布下广义 Wigner 矩阵的普适性。 *J. Comb.*，2(1):15–81，2011 年。[25] L. Erd ″ *Probab.* os、H.-T. Yau *Theory Related Fields* 154 1 2 341 407, 2012 和 J. Yin。广义 Wigner 矩阵的谱体普适性。[26] , (-): –。 ″ *Adv.* L. Erdos、 *Math.* 229 3 1435 1515, 2012 H.-T. Yau 和 J. Yin。广义 Wigner 矩阵特征值的刚性。, ( ): –。

[27] L. Erdos 和 H.-T. Yau。随机矩阵理论的动力学方法。 *Courant Lecture Notes in Mathematics* 28 2017 , , .

[28] J. Foster、T. Lyons 和 V. Margarint。Loewner 方程的渐近收敛半径，以及通过分裂法模拟 SLE_κ 189 2 18, 轨迹。14, 2022

J. Stat. Phys., ( ):Paper No. .[29] P. K. Friz、H. Tran 和 Y. Yuan。SLE 在 (t, κ) 中的正则性及精细的 GRR 估计。*Probab. Theory Related Fields*, 180(1-2):71–112, 2021. [30] V. O. Healey 和 G. F. Lawler。N 侧径向 Schramm–Loewner 演化。 *Probability Theory and Related Fields* 181 1 451 488, 2021 , ( ): – . [31] I. Hotta 和 M. Katori。多重 SLE 的流体力学极限。 *J. Stat. Phys.*, 171 188, 2018 1 166( ): – . [32] I. Hotta 和 S. Schleiß inger。径向多重 SLE 的极限及 Burgers-Loewner 微分方程。 *J. Theoret. Probab.*, 34(2):755–783, 2021. [33] V. M. Jiaming Chen。Ninomiya-Victoir 分裂格式收敛到 Schramm-Loewner 演化。 *https://arxiv.org/pdf/2110.10631.pdf*. [34] F. Johansson Viklund、S. Rohde 和 C. Wong。关于 SLE κ κ *Probab.* 的连续性。 *Theory Related Fields* 159 3 4 413 433, 2014 , (-): – . [35] M. Katori 和 S. Koshida。共形焊接问题、流线问题与多重 Schramm-Loewner 演化。 *J. Math. Phys.*, 61(8):083301, 25, 2020. [36] A. Kemppainen。 *Schramm-Loewner evolution* 24 *SpringerBriefs in Mathematical Physics* 2017 , 第卷。施普林格，查姆，.[37] K. Kyt¨ol¨a 和 E. Peltola。多个 SLE 的纯分割函数。 *Comm. Math. Phys.*, 346 1 237( ): –292, 2016. [38] G. F. Lawler。 *Conformally invariant processes in the plane*. 第 114 号。美国数学会，2008.[39] G. F. Lawler、O. Schramm 和 W. Werner。平面环擦随机游走与均匀生成树的共形不变性。 *Ann. Probab.*, 32(1B):939–995, 2004. [40] J. Lenells 和 F. Viklund。Schramm 公式及多重 SLE 的格林函数。 *J. Stat. Phys.* 176 4 873 931, 2019 , ( ): – . [41] S. Lyu 、 Y. Chen 和 E. Fan。高斯酉系综与 Jacobi 酉系综的渐近间隙概率分布。 *Nuclear Phys. B*, 926:639–670, 2018. [42] V. Margarint。利用预解式展开证明 Wigner 矩阵的弱局部定律。*https://arxiv.org/pdf/1808.07092.pdf*. [43] D. Nualart 和 V. P´erez-Abreu。关于矩阵分数布朗运动的特征值过程。 *Stochastic Process. Appl.*, 124(12):4266–4282, 2014. [44] S. O'Rourke 和 V. Vu。带外部源的随机矩阵局部特征值统计的普适性。 *Random Matrices Theory Appl.*, 3(2):1450005, 37, 2014. [45] E. Peltola 和 H. Wu。 $\kappa \leq 4$ 的整体与局部多重 SLE，以及高斯自由场水平线的连接概率。 *Comm. Math. Phys.*, 366(2):469–536, 2019. [46] S. Rohde 和 O. Schramm。SLE 的基本性质。 *Ann. of Math. (2)*, 161(2):883–924, 2005. [47] O. Roth 和 S. Schleissinger。多条裂隙的 Schramm-Loewner 方程。 *J. Anal. Math.* 131 73 99, 2017 , : – . [48] K. Sakai。具有李代数对称性的共形场论中的多重 Schramm-Loewner 演化。 *Nuclear Phys. B*, 867(2):429–447, 2013. [49] O. Schramm。环擦随机游走与均匀生成树的标度极限。 *Israel Journal of Mathematics* 118 1 221 288, 2000 , ( ): – . [50] O. Schramm 和 S. Sheffield。二维离散高斯自由场的等高线。 *Acta Math.*, 202(1):21–137, 2009. [51] S. Smirnov。平面中的临界渗流：共形不变性、Cardy 公式与标度极限。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(3):239–244, 2001. [52] S. Smirnov。随机簇模型中的共形不变性。一、伊辛模型中的全纯费米子。 *Ann. of Math. (2)*, 172(2):1435–1467, 2010. [53] T. Tao 和 V. Vu。随机矩阵：局部特征值统计直至边缘的普适性。 *Comm. Math. Phys.*, 298(2):549–572, 2010. [54] T. Tao 和 V. Vu。随机矩阵：局部特征值统计的普适性。 *Acta Math.*, 206 1 127 204, 2011 ( ): – . [55] T. Tao 和 V. Vu。Wigner 矩阵的 Wigner-Dyson-Mehta 体普适性猜想。 *Electron. J. Probab.*, 16:no. 77, 2104–2121, 2011.

[56] T. Tao 和 V. Vu。随机矩阵：Wigner 系综的普适性现象。载于 *Modern aspects of random matrix theory*， *Proc. Sympos. Appl. Math.* 第 72 卷，第 121–172 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2014.[57] T. Tao 和 V. Vu。随机矩阵：非厄米矩阵局部谱统计的普适性。 *Ann. Probab.*, 43(2):782–874, 2015. [58] N.-G. K. Tom Alberts、Sung-Soo Byun 和 N. G. Makarov。多重 SLE(0) 的极点动力学与运动积分。 *https://arxiv.org/pdf/2011.05714/*. [59] H. Tran。模拟 Loewner 曲线的算法的收敛性。

Ann. Acad. Sci. Fenn. , ( ): – *Math.* 40 2 601 616, 2015. [60] E. P. Wigner。无限维边界矩阵的特征向量。 *Annals of Mathematics* 62 3 548 564, 1955 , ( ): – . [61] J. Wishart。正态多元总体样本中的广义乘积矩分布。 *Biometrika*, 第 32–52 页，1928. [62] D. Zhan。2-SLE 的双曲线格林函数：内部情形。 *Comm. Math. Phys.*, 375 1 1 40, 2020 ( ): – . [63] D. Zhan。2-SLE 的双曲线格林函数：边界情形。 *Electron. J. Probab.*, 26:第 32 号论文，58，2021.

Department of Mathematics, University of Colorado, Campus Box 395, Boulder, CO 80309-0395, USA*Email address*: andrew.j.campbell@colorado.edu

Department of Mathematics, University of Colorado, Campus Box 395, Boulder, CO 80309-0395, USA*Email address*: kyle.luh@colorado.eduDepartment of Mathematics, University of Colorado, Campus Box 395, Boulder, CO80309-0395, USA*Email address*: vlad.dumitrumargarint@colorado.edu