arXiv:2301.04726v1 [math.CV] 11 Jan 2023

关于某些谢弗序列及其伴随序列的零点

G.-S. Cheon[1], T. FORGÁCS[2], 和 K. Tran[2]

摘要。给定一个多项式谢弗序列，我们引入一种称为伴随序列的相关序列概念。我们研究这对相关序列的零点之间的关系，并证明对于阿佩尔序列以及一类更一般的谢弗序列，当 n 充分大时，每个序列中各项的零点要么全为实数，要么位于直线 $\mathrm{Re}\, z = c$ 上。除了确定零点轨迹外，我们还求出了这类序列的极限概率分布函数。

数学主题分类：05A15, 05A40, 30C15, 30E15

关键词：谢弗序列，伴随序列，零点轨迹，极限分布

1. 引言

多项式序列在数学的多个领域中发挥着基础性作用，包括计数组合学、泛函分析、应用数学和微分方程。多项式序列已从许多不同的角度得到广泛研究 [3, 8]。近期研究关注的若干方面包括其显式公式、生成函数、递推关系和零点分布。

本文所说的谢弗序列 [12, 13] 是指以非负整数 0、1、2、.....为索引的多项式序列，其中每个多项式的索引等于其次数，并满足组合学中与影子演算相关的条件 [11] 。本文针对给定的谢弗序列，引入其伴随序列的概念，并研究某些谢弗序列的伴随序列的零点。这个研究方向很大程度上受到利用递推关系定义的多项式对的启发，例如卢卡斯多项式序列 [4, 7] 。

谢弗序列 $\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 由其指数型生成函 n

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(s)\frac{z^n}{n!} = g(z)e^{sf(z)}$$

其中， g 和 f 是变量 z 的形式幂级数，满足条件 $g(0) \neq 0$、 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) \neq 0$。按照惯例，我们称 $\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 为对应于数对 $(g,\ f)$ 的谢弗序列。特别地，对于常数 $a \neq 0$ ，数对 $(g,\ az)$ 对应的谢弗序列称为阿佩尔序列。一些经典多项式序列属于阿佩尔序列，包括对应于数对 $(\frac{z}{e^z-1},\ z)$ 的伯努利多项式 $B_n(s)$、对应于数对 ____

G.-S. Cheon 的部分研究经费由韩国政府（未来创造科学部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目提供（2016R1A5A1008055 和 2019R1A2C1007518）。第三位作者感谢在埃尔温·薛定谔国际数学物理研究所举办的“流形上的最优点配置”研讨会的组织者和参与者。

$\left(\frac{2}{e^z+1},\ z\right)$ 的欧拉多项式 $H_n(s)$，以及对应于数对 $(e^{-z^2},\ 2z)$ 的埃尔米特多项式 $H_n(s)$。

谢弗序列在影子复合运算下构成一个群，称为谢弗群，其定义如下（见 [6]）。设 $\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{H_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 分别是对应于数对 (g, f) 和 (h, ℓ) 的谢弗序列，表示为

$$G_n(s)=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}s^k \quad \text{and} \quad H_n(s)=\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}s^k. \tag{1.1}$$

那么， $G_n(s)$ 与 $H_n(s)$ 的影子复合记作 $G_n \circ H_n(s)$，它是由下式定义的多项式序列

$$G_n \circ H_n(s)=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}H_k(s)=\sum_{0\le\ell\le k\le n} a_{n,k}b_{k,\ell}s^{\ell}.$$

文献 [6] 证明，谢弗群同构于由指数生成函数定义的指数里奥丹矩阵的里奥丹群，如下所示。设 $D=[d_{i,j}]_{i,j\ge 0}$ 是一个含有复数项的无限下三角矩阵。若存在一对指数生成函数

$$g=\sum_{k\ge 0} g_k\frac{z^k}{k!} \ \text{ and } \ f=\sum_{k\ge 1} f_k\frac{z^k}{k!}$$

其中 $g_0\neq 0$ 且 $f_1\neq 0$，使得 D 的第 k 列的指数生成函数为 $gf^k/k!$ 对 $k=0,1,2,\ldots$，则称 D 为**指数里奥丹矩阵**，记作 $[g, f]$。设 $\mathcal{R}$为所有指数里奥丹矩阵构成的集合。 $\mathcal{R}$ 在通常的矩阵乘法下构成一个群，称为（指数）**里奥丹群**。用生成函数表示，其乘积为

$$[g, f][h, \ell]=[gh(f), \ell(f)] \tag{1.2}$$

其中， $h(f)$表示幂级数的复合，且 $f(0)=0$。

根据定义可知，(1.1) 中 $[a_{n,k}]$ 关于 $\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $[b_{n,k}]$ 关于 $\{H_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$的系数矩阵分别是指数里奥丹矩阵 $[g, f]$ 和 $[h, \ell]$。此外， $\{G_n \circ H_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$是对应于数对$(gh(f)\ \ell(f))$的谢弗序列。

我们断言，里奥丹群 $\mathcal{R}$ 与指数里奥丹矩阵群 $\mathcal{R}'$ 同构，其中矩阵的形式为 $[f'/g, f]$。为此，考虑映射 $\phi\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{R}'$，定义为 $\phi([g, f])=[f'/g, f]$。那么，对于 $\mathcal{R}$中的任意 $A=[g, f]$ 和 $B=[h, \ell]$，有

$$\phi(AB)=\phi([gh(f), \ell(f)])=\left[\frac{f'\ell'(f)}{gh(f)}, \ell(f)\right]=\left[\frac{f'}{g}, f\right]\left[\frac{\ell'}{h}, \ell\right]=\phi(A)\phi(B).$$

因此， ϕ 是一个群同态。此外，$\ker(\phi)=\{(1,\ z)\}$，显然， ϕ 是满射。因此， ϕ是一个群同构。由此，我们可以将由关系式生成的、对应于数对$(g,\ f)$的谢弗序列 $\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 与其伴随序列 $\{G_n^c(s)\}_{n=0}^{\infty}$联系起来：

$$\frac{f'(z)}{g(z)}e^{sf(z)}=\sum_{n\ge 0} G_n^c(s)\frac{z^n}{n!}.$$

对于每个 n，我们称 $G_n^c(s)$为 $G_n(s)$的伴生多项式。自然会有人想问，$G_n(s)$的零点与伴生多项式 $G_n^c(s)$的零点有何关系。毕竟，映射

$$\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}\xrightarrow{\Phi}\{G_n^c(s)\}_{n=0}^{\infty}$$

是作用于 $\mathbb{R}[x]$上的一种变换，而这类变换在保留零点轨迹方面的性质，一直是 Pólya-Schur

计划（见 [1]）及其后续研究中的核心问题。本文研究这类映射的一个子集——或者等价地，研究谢弗序列及其伴随序列构成的序列对——它们能够保留谢弗序列零点轨迹的对称类型 。

本文的组织结构如下。第2节中，我们以伯努利多项式为例，讨论阿佩尔序列及其伴随序列。我们还刻画了所有零点具有与伯努利多项式零点相同类型对称性的阿佩尔序列。第3节中，我们证明，[3] 中讨论的谢弗序列及其伴随序列由一对一般形式相同的函数生成。我们证明，任何由这类函数生成的谢弗序列都由多项式组成 H_n ，其零点要么为实数，要么位于形如 $\operatorname{Re} z = c$ 的直线上，其中 $n \gg 1$。我们分两个小节完成这一工作：第一小节（第3.1小节）推导所研究多项式的积分表示所需的渐近公式，第二小节（第3.2小节）确定该序列零点的精确位置。本文最后在第4节讨论定理 8 中定义的序列族的零点极限分布。

2. 阿佩尔序列及其伴随序列的零点

我们首先研究伯努利多项式的伴生序列的零点。根据定义，伯努利多项式 $\{B_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 的伴随序列 $\{B_n^c(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 是对应于数对 $(\frac{e^z-1}{z},\ z)$ 的阿佩尔序列。众所周知，伯努利多项式 $B_n(s)$ ($n \geq 1$) 的所有零点都关于直线 $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ 对称。

我们的第一个定理（参见定理2）表明， $B_n^c(s)$ 的零点位置与 $B_n(s)$ 的零点位置密切相关。证明这一结果时，我们需要用到以下引理。

引理1。 [2, 14] 设 $G(s) \in \mathbb{C}[s]$ 是一个所有零点虚部均为正的多项式，并设 $\overline{G}(s)$ 是一个多项式，其系数为 $G(s)$ 的系数的复共轭。那么， $\overline{G}(s) + G(s) \in \mathbb{R}[s]$ 的所有零点均为实数。

定理2. 对于 $n \geq 1$ ，令 $B_n^c(s)$ 为伯努利多项式 $B_n(s)$的伴生多项式。则 $B_n^c(s)$ 的所有零点都位于直线 实部 $s = -\frac{1}{2}$上。

证明. 定义 $G_n(s) = B_n^c\left(-\frac{1}{2} + is\right)$。那么， $G_n(s)$ 的所有零点均为实数，当且仅当 $B_n^c(s)$ 的每个零点的实部均为 $-\frac{1}{2}$；等价地， $B_n^c(s)$ 的所有零点都位于直线实部 $s = -\frac{1}{2}$上。因此，只需证明 $G_n(s)$ 的所有零点均为实数。根据 $G_n(s)$ 的定义，我们有

$$\sum_{n\geq 0} G_n(s)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^z-1}{z}e^{\left(-\frac{1}{2}+is\right)z} = \frac{e^{\frac{1}{2}z}-e^{-\frac{1}{2}z}}{z}e^{isz} = \frac{1}{z}\left(e^{\left(\frac{1}{2}+is\right)z} + \left(-e^{\left(-\frac{1}{2}+is\right)z}\right)\right).$$

Let

$$e^{\left(\frac{1}{2}+is\right)z} = \sum_{n\geq 0} f_n(s)\frac{z^n}{n!} \quad \text{and} \quad -e^{\left(-\frac{1}{2}+is\right)z} = \sum_{n\geq 0} g_n(s)\frac{z^n}{n!}.$$

由于 $f_n(s) = \left(\frac{1}{2}+is\right)^n$， $f_n(s)$（以及 $-f_n(s)$）的所有零点的虚部均为正，即1 2。容易看出， $g_n(s) = (-1)^{n+1}\bar{f}_n(s)$。因此，由引理1可得，$G_n(s) = f_n(s) + (-1)^{n+1}\bar{f}_n(s)$ 的所有零点均为实数，证毕。□

上述伯努利多项式的零点与其伴随序列之间的联系并不适用于任意阿佩尔序列及其伴随序列。因此，自然

会引出这样一个问题：找出并刻画所有零点呈现出类似于 $\{B_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{B_n^c(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 的零点所表现出的对称性的谢弗序列及其伴随序列。一般而言，了解谢弗序列的零点与其伴随序列之间的关系会很有意义。

为了了解阿佩尔序列的伴随序列的零点的一些信息，我们先给出以下引理。

引理3. 设 $G(s) \in \mathbb{R}[s]$ 的次数为 $n \geq 1$。则 $G(s)$ 的所有零点关于直线 实部 $s = -\frac{m}{2} (m \in \mathbb{R})$ 对称，当且仅当 $G(-s) = (-1)^n G(s-m)$。

证明。 假设 $G(s)$ 的所有零点关于直线 Re $s = -\frac{m}{2}$ 对称，其中$m \in \mathbb{R}$为某个值。首先设 n 为偶数。于是我们可以假设 n 个 $G(s)$ 的零点形如 $-\frac{m}{2} \pm q_k (q_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \ldots\ldots, \frac{n}{2})$，从而 $G(s)$ 可写为

$$G(s) = \prod_{k=1}^{n/2} \left(s + \frac{m}{2} + q_k\right)\left(s + \frac{m}{2} - q_k\right).$$

因此

$$\begin{aligned} G(-s) &= \prod_{j=1}^{n/2} \left(-\left(s - \frac{m}{2} - q_k\right)\right)\left(-\left(s - \frac{m}{2} + q_k\right)\right) \\ &= (-1)^n \prod_{k=1}^{n/2} \left((s-m) + \frac{m}{2} - q_k\right)\left((s-m) + \frac{m}{2} + q_k\right) = (-1)^n G(s-m). \end{aligned}$$

现在设 n 为奇数。则 $G(s)$ 具有如下形式

$$G(s) = \left(s + \frac{m}{2}\right)^j \prod_{k=1}^{(n-j)/2} \left(s + \frac{m}{2} + q_k\right)\left(s + \frac{m}{2} - q_k\right)$$

其中 $j \geq 1$ 和 j 为奇数。简单计算可知，对于这种情况， $G(-s) = (-1)^n G(s-m)$ 也成立。

反过来，假设对于某个 $m \in \mathbb{R}$， $G(-s) = (-1)^n G(s-m)$ 成立。设 $a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ 是 $G(s)$ 的一个零点。那么 $a - bi = -\frac{m}{2} + \left(\left(a + \frac{m}{2}\right) - bi\right)$ 也是 $G(s)$ 的一个零点。由

$$0 = G(a - bi) = G\left(-\frac{m}{2} + \left(\left(a + \frac{m}{2}\right) - bi\right)\right) = (-1)^n G\left(-\frac{m}{2} - \left(\left(a + \frac{m}{2}\right) - bi\right)\right)$$

可知， $-(a+m) + b_i = -\frac{m}{2} - \left(\left(a + \frac{m}{2}\right) - bi\right)$ 是 $G(s)$ 的一个零点，这意味着 $G(s)$ 的所有零点都关于直线 Re $s = -\frac{m}{2}$ 对称。证毕。□

定理4。 设 $\{G_n(s)\}_{n\geq 0}$ 是对应于数对 (g, az)的阿佩尔序列。则以下条件等价:

(i) 对于 $n \geq 1$， $G_n(s)$ 的零点关于直线 实部 $s = -\frac{g'(0)}{2a}$ 对称；(ii) 对于 $n \geq 1$， $G_n(-s) = (-1)^n G_n(s - \frac{g'(0)}{a})$；(iii) $g(z) = g(-z)e^{g'(0)z}$。

证明。它 f 由引理3可知，(i)和(ii)等价。此外，(ii)成立当且仅当 if

$$\begin{aligned} g(z)e^{-asz} &= \sum_{n\geq 0} G_n(-s)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n G_n\left(s-\frac{g'(0)}{a}\right)\frac{z^n}{n!} = g(-z)e^{-a(s-\frac{g'(0)}{a})z} \\ &= g(-z)e^{g'(0)z}e^{-asz}, \end{aligned}$$

这等价于 (iii)。 □

定理5。 设 $\{G_n(s)\}_{n\geq 0}$ 是对应于数对 (g, az) 的阿佩尔序列。若对于$n \geq 1$， $G_n(s)$ 的所有零点均关于直线 实部 $s = -\frac{g'(0)}{2a}$ 对称，则 $G_n^c(s)$ 的所有零点均关于直线 实部 $s = \frac{g'(0)}{2a}$ 对称。

证明。 只需证明对所有 $n \geq 1$， $G_n^c(-s) = (-1)^n G_n^c(s + \frac{g'(0)}{a})$ 成立即可。由定理4可得

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} G_n^c(-s)\frac{z^n}{n!} &= \frac{a}{g(z)}e^{-asz} = \frac{a}{g(-z)}e^{(-as-g'(0))z} = \frac{a}{g(-z)}e^{-a(s+\frac{g'(0)}{a})z} \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n G_n^c\left(s+\frac{g'(0)}{a}\right)\frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

这意味着对所有 $n \geq 1$， $G_n^c(-s) = (-1)^n G_n^c(s + \frac{g'(0)}{a})$。证明完毕。 □

下面的定理表明，满足定理5假设的阿佩尔序列有无穷多个。

定理6. 设 $\{G_n(s)\}_{n\geq 0}$ 是对应于数对 (g, az)的阿佩尔序列。若

$$g(z) = 2\rho(z)(1+\tanh(kz)), \tag{2.1}$$

其中 $\rho(z)$ 是任意满足 $\rho(0) = 1$ 和 $k \in \mathbb{R}$的偶函数，则 $G_n(s)$ 的所有零点都关于直线 $\mathrm{Re}\ s = -\frac{k}{a}$ 对称，其中 $n \geq 1$。反过来，若 $G_n(s)\,(n \geq 1)$ 的所有零点都关于 $\mathbb{C}$ 中的某条垂直直线对称，则存在一个满足 $\rho(0) = 1$和 $k \in \mathbb{R}$ 的偶函数 $\rho(z)$，使其满足（*2.1*）。

证明。 设 $g(z) = 2\rho(z)(1+\tanh(kz))$，其中 $\rho(z)$ 是某个满足 $\rho(0) = 1$ 和$k \in \mathbb{R}$的偶函数。于是

$$\begin{aligned} g(-z)e^{2kz} &= 2\rho(z)(1+\tanh(-kz))e^{2kz} = 2\rho(z)\left(1+\frac{e^{-kz}-e^{kz}}{e^{-kz}+e^{kz}}\right)e^{2kz} \\ &= 2\rho(z)\left(1+\frac{e^{kz}-e^{-kz}}{e^{kz}+e^{-kz}}\right) = 2\rho(z)(1+\tanh(kz)) = g(z), \end{aligned}$$

且 $g'(0) = 2k$。因此，定理4（iii）成立，进而（i）也成立，即 $G_n(s)\,(n \geq 1)$ 的零点关于直线 $\mathrm{Re}\ s = -\frac{k}{a}$对称。反过来，假设 $G_n(s)$ 的所有零点都关于$\mathbb{C}$中的某条垂直直线对称。设 $g(z) = 2\left(1+\sum_{n\geq 1} g_n z^n\right)$。由于$G_1(s) = 2(g_1 + as)$，这条垂直直线为 $\mathrm{Re}\ s = -\frac{g_1}{a}$。根据定理4， $g(z)$ 满足 $g(z) = g(-z)e^{2g_1 z}$。经过简单计算可得

$$g(z) = \frac{g(z)+g(-z)}{2}(1+\tanh(g_1 z)).$$

令 $\rho(z) = \frac{g(z)+g(-z)}{2}$，可得一个偶函数，且 $k = g_1 \in \mathbb{R}$，正如所需。 □

注 7。注意，若 $\{G_n(s)\}_{n\geq 0}$ 是对应于数对 $(g(z)\ z)$ 的阿佩尔序列，那么对应于数对 $(g(z)\ az)$ 的阿佩尔序列为 $\{G_n(as)\}_{n\geq 0}$。因此，在研究对应于数对 $(g(z)\ az)$ 的阿佩尔序列的零点时，只需考察对应于数对 $(g(z)\ z)$ 的阿佩尔序列。

3. 某 个谢弗序列族及其伴随序列的零点 S

现在我们转而关注此前在 [3] 中讨论过的谢弗序列的伴随序列。请注意——先作预告——伴随序列的零点关于某条直线的对称性依然存在，而我们的主要结果（参见定理 8）也利用了生成函数的非指数因子（经过适当修正后）为偶函数这一事实。

为了 陈述主要结果，设 $z_2 > z_1 > 0$，并令 Log(·) 表示 t
对数原理。令

$$f(z) = \mathrm{Log}(z_1 - z) + \mathrm{Log}(z_2 - z) - \mathrm{Log}(z_1 + z) - \mathrm{Log}(z_2 + z)$$
$$g(z) = (z_1 + z)(z_2 + z).$$

对于数对 $(g(z)\ f(z))$，谢弗多项式序列 $\{G_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 由下式生成：

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(s)\frac{z^n}{n!} = g(z)e^{sf(z)} = (z_1 - z)^s(z_2 - z)^s(z_1 + z)^{1-s}(z_2 + z)^{1-s}.$$

相应的伴随序列 $\{G_n^c(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 是对应于数对 $(f'(z)/g(z)\ f(z))$ 的谢弗序列，由下式生成：

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^c(s)\frac{z^n}{n!} = \frac{f'(z)}{g(z)}e^{sf(z)},$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{g(z)} &= -\frac{1}{(z_1 + z)(z_2 + z)}\left(\frac{1}{z_1 - z} + \frac{1}{z_2 - z} + \frac{1}{z_1 + z} + \frac{1}{z_2 + z}\right)\\ &= -\frac{2(z_1 + z_2)}{(z_1 + z)^2(z_2 + z)^2(z_1 - z)(z_2 - z)}(z_1 z_2 - z^2).\end{aligned}$$

读者会注意到， g 和 $\frac{f'}{g}$ 均具有如下形式：

$$(z_1 - z)^p(z_1 + z)^{p^*}(z_2 - z)^q(z_2 + z)^{q^*}\prod_{i=1}^{m}(\alpha_i - z^2)^{p_i}$$

对于适当的常数取值，正如定理 8所示，由数对 (g, f) 确定的谢弗序列及其伴随序列的零点都关于直线 Re $z = k$ 对称。关于谢弗序列的这一事实， [3, 定理 5] 已经讨论过。定理 8 是该结果的推广。

定理 8. 设 $m \in \mathbb{N}$ 和 p、p^*、q、q^*、α_i、p_i、$1 \leq i \leq m$ 均为满足 $\alpha_i > z_1^2$ 的实数。令

$$h(z) = (z_1 - z)^p(z_1 + z)^{p^*}(z_2 - z)^q(z_2 + z)^{q^*}\prod_{i=1}^{m}(\alpha_i - z^2)^{p_i}, \tag{3.1}$$

let

$$f(z) = \mathrm{Log}(z_1 - z) + \mathrm{Log}(z_2 - z) - \mathrm{Log}(z_1 + z) - \mathrm{Log}(z_2 + z),$$

并设 $\{H_n(s)\}_{n=0}^{\infty}$ 是对应于 $(h(z)\ f(z))$ 的谢弗序列。假设 $p^*-p=q^*-q:=2c$。若 $c+p<0$，则 $H_n(s)$ 的所有零点 $n\gg 1$ 均位于直线 $s=c+it$ 上。若 $c+p\geq 0$，则同样的结论成立，但有 $2\lceil c+p\rceil$ 个实零点除外；这些零点分别趋近于 $c\pm(c+p+1-k)$，$0<k\leq\lceil c+p\rceil$，当 $n\to\infty$ 时。

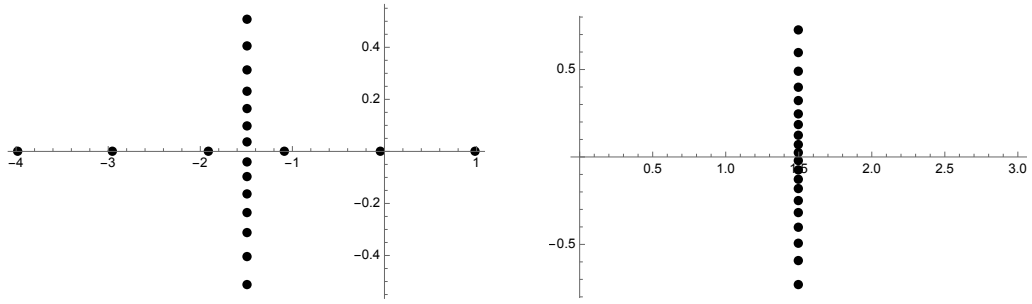


图 3.1. $H_n(s)$ 的零点

例 *1.* 设 $z_1=1, z_2=7$。图 3.1 左侧的图显示了当$p=4,p^*=1,q=2,q^*=-1$, $p-p^*=3=q-q^*$, $c+p=\frac{11}{2}$ 且 时 $H_{20}(s)$ 的零点 —

$$h(z)=(1-z)^4(1+z)(7-z)^2(7+z)^{-1}(2-z^2)^{-1}.$$

右侧的图显示了当 $p=-4,p^*=-1,q=-2,q^*=1$, $p-p^*=-3=q-q^*$, $c+p=-\frac{11}{2}$ 且 时 $H_{20}(s)$ 的零点 —

$$h(z)=(1-z)^{-4}(1+z)^{-1}(7-z)^{-2}(7+z)^{1}(2-z^2)^{-1}.$$

定理 8 的证明将在接下来的两节中给出。第一节推导 $H_n(s)$s 的积分表示的渐近行为，随后一节讨论如何计数这些多项式在指定轨迹上的零点。

3.1. 渐近公式。 本节将为定理 8 中所述的谢弗多项式 $H_n(c+int)$ 求得一个积分表示，并推导该积分表示的渐近公式，该公式在参数范围 $e^{-\ln^4 n}/n\ll t\ll \ln^4 n/n$ 内一致成立。首先，令 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为定理 8 陈述中关于数对 $(h,\ f)$ 的谢弗序列。作变量代换 $s=c+int$，并利用柯西积分公式，得到

$$\begin{aligned}H_n(c+int)&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=\epsilon}\frac{h(z)e^{(c+int)f(z)}}{z^{n+1}}dz\\&=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=\epsilon}\psi(z)e^{-n\phi(z,t)}dz,\end{aligned}$$

其中

$$\phi(z,t)=\operatorname{Log}z-it\left(\operatorname{Log}(z_1-z)+\operatorname{Log}(z_2-z)-\operatorname{Log}(z_1+z)-\operatorname{Log}(z_2+z)\right),$$

and

$$\psi(z)=\frac{h(z)}{z}\frac{(z_1-z)^c(z_2-z)^c}{(z_1+z)^c(z_2+z)^c}.$$

由 $h(z)$ 的定义可知，作为 z 的函数， $\psi(z)e^{-n\phi(z,t)}$ 在以下集合的补集上解析

$$\{0\} \cup [z_1, \infty) \cup (-\infty, -z_1].$$

$h(z)$ 和 $f(z)$ 的定义还意味着，在半径 R 较大的任意圆弧 $\mathcal{C}_R$ 上，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{h(z)e^{(c+int)f(z)}}{z^{n+1}} dz = 0, \qquad \text{for} \quad n \gg 1.$$

因此，

$$H_n(c + int) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \psi(z) e^{-n\phi(z,t)} dz, \tag{3.2}$$

其中， Γ_1 和 Γ_2 是绕无穷远点回路的两半，而割线（$-\infty, -z_1]$ 和 $[z_1, \infty$）按逆时针方向取向。

假设 $p^* - p = q^* - q$ 意味着

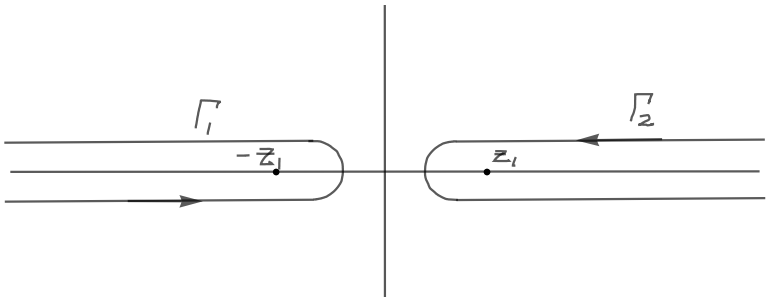


图 3.2. 绕割线和无穷远点的回路

$$h(z) \frac{(z_1 - z)^c (z_2 - z)^c}{(z_1 + z)^c (z_2 + z)^c}$$

是偶函数。通过变量代换 $z \mapsto -z$ ，我们看到 (3.2) 中积分在 Γ_1 上的部分等于

$$(-1)^n \int_{\Gamma_2} \psi(z) e^{-n\phi(z,-t)} dz.$$

再作变量代换 $z \mapsto z$，该积分变为以下积分的复共轭：

$$(-1)^{n+1} \int_{\Gamma_2} \psi(z) e^{-n\phi(z,t)} dz.$$

我们推知， $\pi H_n(c + int)$ 是虚部，或者是该积分实部的 $-i$ 倍

$$\int_{\Gamma_2} \psi(z) e^{-n\phi(z,t)} dz, \tag{3.3}$$

这取决于 n 是偶数还是奇数。

为求完整起见，我们现在介绍 [3] 中建立的框架和定义，以帮助推导我们所见的渐近公式。为此，令

$$T_1 := \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2}, \qquad T_2 := \frac{z_1 + z_2}{4\sqrt{z_1 z_2}},$$

and

$$T = \begin{cases} T_1 & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 \geq 0 \\ T_2 & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

对于 $t \in (0, T)$，函数

$$\zeta = \zeta(t) := \frac{z_1 + z_2}{2}\left(it - \sqrt{T_1^2 - t^2} + \sqrt{1 - 2t^2 - 2it\sqrt{T_1^2 - t^2}}\right) \quad \text{for} \quad 0 \leq t < T_1, \tag{3.5}$$

$$\zeta = \zeta(t) := \frac{z_1 + z_2}{2}\left(it + i\sqrt{t^2 - T_1^2} + \sqrt{1 - 2t^2 - 2t\sqrt{t^2 - T_1^2}}\right) \quad \text{for} \quad T_1 \leq t \leq T_2, \tag{3.6}$$

是 $\phi_z(z, t) = 0$ 的解。

Set

$$\begin{aligned} g(\zeta) &:= \frac{2\pi\psi^2(\zeta)e^{-2n\phi(\zeta,t)}}{n\phi_{z^2}(\zeta,t)}, \\ p(\zeta) &:= \int_{\Gamma_2} \psi(z)e^{-n\phi(z,t)}dz, \end{aligned} \tag{3.7}$$

并考虑以下区间

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{t | \ln^4 n/n \ll t < T - \ln^2 n/n^{2/3}\right\}, \\ I_2 &= \left\{t | \ln^4 n/n \ll t < T_1 - \ln^2 n/n^{2/3}\right\}, \\ I_3 &= [T_1 + \ln^2 n/n^{2/3}, T_2 - \ln^2 n/n^{2/3}], \\ I &= \left\{t | 1/n^{2/3} \ll T - t < \ln^2 n/n^{2/3}\right\}. \end{aligned}$$

根据这些定义， [3] 中的结果表明，当 $n \to \infty$ 时，

$$p^2(\zeta) \sim g(\zeta)$$

当 $T = T_2$ 时，在 $t \in I_2 \cup I_3$ 上一致成立；当 $T = T_1$ 时，在 $t \in I_1$ 上一致成立。此外，若 $t \in I$，则

$$p(\zeta) \sim \frac{4c\psi(\zeta(T))e^{-n\phi(\zeta,t)}}{\sqrt{6}\sqrt{C^3\phi_{z^3}(\zeta(T),T)}}\alpha_n(t)$$

关于 t 一致成立，其中

$$C = \begin{cases} \frac{z_1+z_2}{2}\left(-\sqrt{2T_1} + \frac{T_1\sqrt{2T_1}}{\sqrt{2T_1^2-1}}\right) & \text{if } T = T_1 \\ \frac{\sqrt{32}(z_1z_2)^{3/4}}{\sqrt{(z_1+z_2)(-z_1^2+6z_1z_2-z_2^2)}} & \text{if } T = T_2 \end{cases}$$

且 $\operatorname{Re}\alpha_n(t) \geq 0$。若 $T = T_2$，则

$$p(\zeta) \sim \frac{4d\psi(\zeta(T_1))e^{-n\phi(\zeta,t)}}{\sqrt{6}\sqrt{D^3\phi_{z^3}(\zeta(T_1),T_1)}}\beta_n(t)$$

在 $\frac{1}{n} \ll |T_1 - t| \leq \ln^2 n/n^{2/3}$ 上一致，其中

$$D = -\frac{(z_1 + z_2)\sqrt{T_1}}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{iT_1}{\sqrt{1 - 2T_1^2}}\right)$$

且 Re $\beta_n(t) \geq 0$。在陈述并证明主要估计之前，我们注意到 (3.1) 表明，当$z \to z_1$时，

$$h(z) = (z_1 - z)^p \left(h_p + \mathcal{O}\left(z_1 - z\right)\right)$$

对于某个 $h_p \in \mathbb{R}$。在本节余下部分中，我们证明以下渐近等价。

命题9. 设 h_p 和 $p(\zeta)$ 如本节开头所定义，并令 Γ 表示伽马函数。当 $n \to \infty$ 时，以下渐近公式在 $e^{-\ln^4 n}/n \ll t \ll \ln^4 n/n$上一致成立：

$$p(\zeta) \sim \frac{2i\pi h_p (z_2 - z_1)^{c+int}}{z_1^{n-p} 2^{c+int} (z_2 + z_1)^{c+int} n^{c+p+1+int} \Gamma(-c-p-int)}.$$

证明. 我们将 $p(\zeta)$ 改写为

$$p(\zeta) = \int_{+\infty}^{(z_1^-)} \psi(z) e^{-n\phi(z,t)} dz,$$

其中积分路径是汉克尔轮廓，它绕着射线 $[z_1, \infty)$。记号z_1^-表示路径沿负方向绕过 z_1。我们先作变量代换 $w = z/z_1$，再作变量代换 $e^z = w$，得到表达式

$$p(\zeta(t)) = z_1 \int_{+\infty}^{(1^-)} \psi(w z_1) e^{-n\phi(w z_1, t)} dw = z_1 \int_{+\infty}^{(0^-)} \psi(z_1 e^z) e^{-n\phi(z_1 e^z, t)} e^z dz.$$

设 $\epsilon > 0$ 足够小，使得 $n\epsilon = o(1)$。我们将最后一个积分拆成三部分：

$$\begin{aligned}
&z_1 \int_{(0^-)}^{\left(ln^5 n/n\right) \pm i\epsilon} \psi(z_1 e^z) e^{-n\phi(z_1 e^z, t)} e^z dz \\
&+ z_1 \int_{(\ln^5 n/n) + i\epsilon}^{+\infty + i\epsilon} \psi(z_1 e^z) e^{-n\phi(z_1 e^z, t)} e^z dz \\
&+ z_1 \int_{+\infty - i\epsilon}^{\left(\ln^5 n/n\right) - i\epsilon} \psi(z_1 e^z) \frac{2i\pi h_p (z_2 - z_1)^{c+int}}{z_1^{n-p} 2^{c+int} (z_2 + z_1)^{c+int} n^{c+p+1+int} \Gamma(-c-p-int)} e^{-n\phi(z_1 e^z, t)} e^z dz.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

回想一下，

$$\psi(z) e^{-n\phi(z,t)} = \frac{h(z)}{z^{n+1}} \frac{(z_1 - z)^c (z_2 - z)^c}{(z_1 + z)^c (z_2 + z)^c} \left(\frac{(z_1 - z)(z_2 - z)}{(z_1 + z)(z_2 + z)}\right)^{nit}, \tag{3.9}$$

and

$$h(z) = (z_1 - z)^p \left(h_p + \mathcal{O}\left(z_1 - z\right)\right)$$

由 $z_1 - z = o(1)$ 可知。因此，(3.8) 中的第一个积分渐近于

$$\begin{aligned}
&\frac{z_1^{c+p+int} h_p (z_2 - z_1)^{c+int}}{z_1^n 2^{c+int} z_1^{c+int} (z_2 + z_1)^{c+int}} \int_{(0^-)}^{\left(\ln^5 n/n\right) \pm i\epsilon} \frac{(1 - e^z)^{c+p+int}}{e^{nz}} dz \\
\sim &\frac{z_1^{c+p+int} h_p (z_2 - z_1)^{c+int}}{z_1^n 2^{c+int} z_1^{c+int} (z_2 + z_1)^{c+int}} \int_{(0^-)}^{\left(\ln^5 n/n\right) \pm i\epsilon} (-z)^{c+p+int} e^{-nz} dz \\
= &\frac{z_1^{c+p+int} h_p (z_2 - z_1)^{c+int}}{z_1^n 2^{c+int} z_1^{c+int} (z_2 + z_1)^{c+int} n^{c+p+1+int}} \int_{(0^-)}^{\left(\ln^5 n\right) \pm in\epsilon} (-z)^{c+p+int} e^{-z} dz.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

下面的辅助引理有助于我们进一步细化这一估计。

引理10. 假设与命题9的陈述中一样， $e^{-\ln^4 n}/n \ll t \ll \ln^4 n/n$。若$n\epsilon = o(1)$，则以下渐近等价成立：

$$\int_{(0^-)}^{\ln^5 n \pm in\epsilon} (-z)^{c+p+int} e^{-z} dz \sim 2i \sin \pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int).$$

证明。 我们应用伽马函数的汉克尔围道表示（例如，参见 [9]）

$$\Gamma(s) = \frac{1}{2i \sin \pi s} \int_{+\infty}^{(0^-)} e^{-z}(-z)^{s-1} dz \qquad (s \neq 0, -1, -2, \ldots)$$

来改写

$$\int_{(0^-)}^{\ln^5 n \pm in\epsilon} (-z)^{c+p+int} e^{-z} dz$$

as

(3.11)

$$2i \sin \pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int) - \int_{\ln^5 n + in\epsilon}^{+\infty+in\epsilon} (-z)^{c+p+int} e^{-z} dz + \int_{\ln^5 n - in\epsilon}^{+\infty-in\epsilon} (-z)^{c+p+int} e^{-z} dz.$$

在 $e^{-\ln^4 n} \ll nt = \mathcal{O}(1)$的情形下，我们有

$$2i \sin \pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int) \gg e^{-\ln^4 n}. \tag{3.12}$$

此外，在此情形下，(3.11)中的第二项和第三项有界于

$$\int_{\ln^5 n \pm in\epsilon}^{+\infty \pm in\epsilon} |z|^{c+p} e^{-nt \operatorname{Arg}(-z)} e^{-\operatorname{Re} z} d|z|. \tag{3.13}$$

由于 $n\epsilon = o(1)$，我们有 $|z| = \operatorname{Re} z + o(1)$，因此根据上不完全伽马函数的渐近行为（参见 [5, 10]），(3.13)中的积分为 $\mathcal{O}(e^{-\ln^5 n} \ln^{5(c+p)} n)$。此情形下的结论现即得出。

另一方面，若 $nt \gg 1$，则由斯特林公式

$$\Gamma(s) = \exp\left((s-1/2)\operatorname{Log} s - s + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \mathcal{O}(s^{-1})\right) \qquad (|s| \gg 1)$$

以及事实 $nt \ll \ln^4 n$ 可得

$$\begin{aligned}
&|\Gamma(c+p+1+int)| \\
&= \exp\left(\left(c+p+\frac{1}{2}\right)\ln|c+p+1+int| - nt\operatorname{Arg}(c+p+1+int) - (c+p+1) + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{nt}\right)\right) \\
&\gg \exp(-\pi \ln^4 n),
\end{aligned}$$

由此我们推出

$$|2i \sin \pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int)| \gg \exp\left(n\pi t - \pi \ln^4 n\right).$$

该结论由以下事实可得

$$\int_{\ln^5 n \pm in\epsilon}^{+\infty \pm in\epsilon} |z|^{c+p} e^{-nt \operatorname{Arg}(-z)} e^{-\operatorname{Re} z} d|z| = \mathcal{O}\left(e^{nt\pi - \ln^5 n} \ln^{5(c+p)} n\right).$$

引理10的证明完成。 □

我们 con 继续证明命题9，求出式（3.8）中第二个积分的一个界):

$$z_1 \int_{ln^5 n/n+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \psi(z_1 e^z) e^{-n\phi(z_1 e^z,t)} e^z dz.$$

回想一下方程 (3.9):

$$\psi(z_1 e^z) e^{-n\phi(z_1 e^z,t)} = \frac{h(z_1 e^z)}{z_1^{n+1} e^{(n+1)z}} \frac{(z_1 - z_1 e^z)^c (z_2 - z_1 e^z)^c}{(z_1 + z_1 e^z)^c (z_2 + z_1 e^z)^c} \left(\frac{(z_1 - z_1 e^z)(z_2 - z_1 e^z)}{(z_1 + z_1 e^z)(z_2 + z_1 e^z)} \right)^{nit}.$$

取 $z = u + i\epsilon$，$\ln^5 n/n \le u < \infty$，我们有

$$\begin{aligned} |z_2 - z_1 e^z| &\ge |\operatorname{Im}(z_2 - z_1 e^z)| \\ &= z_1 e^u \sin\epsilon \\ &\gg \epsilon, \end{aligned}$$

因此，

$$(z_2 - z_1 e^z)^c = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^{|c|}} + e^{u|c|} \right).$$

我们得出结论:

$$\frac{h(z_1 e^z)(z_2 - z_1 e^z)^c (z_1 - z_1 e^z)^c}{(z_1 + z_1 e^z)^c (z_2 + z_1 e^z)^c} = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^B} + \frac{n^{|c+p|}}{\ln^{5(c+p)} n} \right) & \text{if } z = \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(e^{Au}) & \text{if } z \gg 1 \end{cases}$$

对于某些常数 A（取决于 h 的次数）和 B（取决于 c 以及 h 在 $[z_1, \infty$ 上的极点个数）。

我们还注意到

$$\left| \left(\frac{(z_1 - z_1 e^z)(z_2 - z_1 e^z)}{(z_1 + z_1 e^z)(z_2 + z_1 e^z)} \right)^{nit} \right| = \exp^{nt} \left(\operatorname{Arg}(z_1 - z_1 e^z) + \operatorname{Arg}(z_2 - z_1 e^z) - \operatorname{Arg}(z_1 + z_1 e^z) - \operatorname{Arg}(z_2 + z_1 e^z) \right),$$

并且对于 $z = u + i\epsilon$ 和 $|z| \ll 1$,

$$\operatorname{Arg}(z_1 - z_1 e^z) + \operatorname{Arg}(z_2 - z_1 e^z) - \operatorname{Arg}(z_1 + z_1 e^z) - \operatorname{Arg}(z_2 + z_1 e^z) = \operatorname{Arg}(-z) + \mathcal{O}(z).$$

因此，存在一个较小的 δ （与 n 无关），使得若 $u < \delta$，则

$$\left| \left(\frac{(z_1 - z_1 e^z)(z_2 - z_1 e^z)}{(z_1 + z_1 e^z)(z_2 + z_1 e^z)} \right)^{nit} \right| < e^{n\pi t}.$$

对于 u 的其他取值，我们从几何上注意到

$$|\operatorname{Arg}(z_1 - z_1 e^z) - \operatorname{Arg}(z_1 + z_1 e^z)|$$

等于顶点为 0、 z_1 和 $(z_1 + z_1 e^z)/2$ 的三角形的两个角之和，该和小于 π。同一不等式也适用于

$$|\operatorname{Arg}(z_2 - z_1 e^z) - \operatorname{Arg}(z_2 + z_1 e^z)|.$$

我们得出，对于 $u \ge \delta$,

$$\left| \left(\frac{(z_1 - z_1 e^z)(z_2 - z_1 e^z)}{(z_1 + z_1 e^z)(z_2 + z_1 e^z)} \right)^{nit} \right| < e^{2n\pi t}.$$

为了利用这些估计，我们将积分区间划分为

$$\int_{\ln^5 n/n+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} z_1\psi(z_1e^z)e^{-n\phi(z_1e^z,t)}e^z dz$$

分为三部分：(i) $\ln^5 n/n < \mathrm{Re}\, z < \delta$，(ii) $\delta \le \mathrm{Re}\ z$和 $\mathrm{Re}\ z = \mathcal{O}(1)$，以及 (iii) $\mathrm{Re}\ z \gg 1$。第一段范围上的积分为

$$\frac{e^{n\pi t}}{z_1^n}\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{\epsilon^B}+\frac{n^{|c|}}{\ln^{5c} n}\right)\int_{\ln^5 n/n}^{\delta} e^{-nu}du\right) = \frac{e^{n\pi t}}{nz_1^n}\mathcal{O}\left(\frac{e^{-\ln^5 n}}{\epsilon^B}+\frac{n^{|c|}}{\ln^{5c} n}e^{-\ln^5 n}\right),$$

第二段范围上的积分为

$$\frac{e^{2\pi nt}}{z_1^n}\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{\epsilon^B}+\frac{n^{|c|}}{\ln^{5c} n}\right)\frac{e^{-n\delta}}{n}\right),$$

而第三段范围上的积分为

$$\frac{e^{2\pi nt}}{z_1^n}\mathcal{O}\left(\int_C^{\infty} e^{-(n+1)u+Au}du\right) = \frac{e^{2\pi nt}}{z_1^n}\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}e^{-nC}\right)$$

其中某个常数 C 足够大。我们回顾一下，$nt \ll \ln^4 n$。若选择 ϵ，使其除了满足条件 $n\epsilon = o(1)$ 外，还满足

$$\frac{1}{\epsilon^B} = \mathcal{O}\left(\exp\left(\frac{\ln^5 n}{2}\right)\right),$$

then

$$z_1\int_{\ln^5 n/n+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon}\psi(z_1e^z)e^{-n\phi(z_1e^z,t)}e^z dz = \frac{e^{\pi nt}}{z_1^n}\mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\ln^5 n}{2}\right)\right).$$

用类似的论证可得

$$z_1\int_{+\infty-i\epsilon}^{\ln^5 n/n-i\epsilon}\psi(z_1e^z)e^{-n\phi(z_1e^z,t)}e^z dz = \frac{e^{\pi nt}}{z_1^n}\mathcal{O}\left(\exp\left(-\frac{\ln^5 n}{2}\right)\right).$$

由方程 (3.8)、(3.10)、引理10以及以下事实,

$$2i\sin\pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int)\begin{cases}\gg e^{-\ln^4 n} & \text{if } e^{-\ln^4 n}\ll nt=\mathcal{O}(1)\\ \gg \exp\left(n\pi t-\frac{\pi\ln^4 n}{4}\right) & \text{if } 1\ll nt\ll\ln^4 n\end{cases},$$

我们得出

$$\int_{+\infty}^{(z_1^-)}\psi(z)e^{-n\phi(z,t)}dz \sim \frac{2i\sin\pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int)z_1^{c+p+int}h_p(z_2-z_1)^{c+int}}{z_1^n 2^{c+int}z_1^{c+int}(z_2+z_1)^{c+int}n^{c+p+1+int}}$$

在 $e^{-\ln^4 n}\ll nt\ll\ln^4 n$ 上一致成立。命题9的证明完成。 □

注 11。若 $c+p\notin\mathbb{Z}^+$，则方程 (3.12) 中的估计无需满足条件 $e^{-\ln^4 n}\ll nt$。因此，命题9中的渐近行为对 $nt\ll\ln^4 n$ 在 $c+p\notin\mathbb{Z}^+$ 时成立。

3.2. 的零点位置 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$。 完成渐近分析后，本节将证明，对于所有 $n \gg 1$，除可能存在有限个实零点外， H_n 的零点都位于直线 $\operatorname{Re} s = c$ 上（参见定理 8）；我们还将确定这些实零点的渐近位置。我们先给出一个技术性但至关重要的结果。

引理 12. 假设 τ_1 和 τ_2 分别是 $e^{-\ln^4 n}/n$ 和 $\ln^4 n/n$ 的常数倍，且 α 是满足 $-\pi < \alpha \le \pi$ 和 $(c+p+1/2)\pi = 2k\pi + \alpha$ 的唯一角，其中 $k \in \mathbb{Z}$。令 g 和 p 如方程(3.7)中所定义。则

(i) $p(\zeta(t)) \neq 0$ *for* $\tau_1 \le t \le \tau_2$, *and*

(ii) $\Delta \arg_{\tau_1 \le t \le \tau_2} p(\zeta(t)) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\xi \to 0} \Delta \arg_{\xi \le t \le \tau_2} g(\zeta(t)) + \dfrac{|c+p|\pi}{2} + \eta,$

其中

$$\eta = \begin{cases} -\pi/2 & \text{if } c+p < 0 \\ 0 & \text{if } c+p \ge 0 \text{ and } \alpha = \pm\frac{\pi}{2} \\ -\alpha & \text{if } c+p \ge 0 \text{ and } -\pi/2 < \alpha < \pi/2 \\ -\alpha - \pi & \text{if } c+p \ge 0 \text{ and } -\pi < \alpha < -\pi/2 \\ -\alpha + \pi & \text{if } c+p \ge 0 \text{ and } \pi/2 < \alpha \le \pi. \end{cases} \tag{3.14}$$

证明。由命题 10 可立即得出，对于 $\tau_1 \le t \le \tau_2$， $p(\zeta(t)) \neq 0$。为证明关于辐角变化的结论，我们先回顾

$$g(\zeta) = \frac{2\pi\psi^2(\zeta)e^{-2n\phi(\zeta)}}{n\phi_{z^2}(\zeta,t)} = \frac{2\pi}{n\phi_{z^2}(\zeta,t)} \cdot \frac{h^2(\zeta)}{z^{2n+2}} \frac{(z_1-z)^{2c}(z_2-z)^{2c}}{(z_1+z)^{2c}(z_2+z)^{2c}} \left(\frac{(z_1-z)(z_2-z)}{(z_1+z)(z_2+z)}\right)^{2nit}.$$

由于 $z_1 - z = -iz_1 t + \mathcal{O}(t^2)$，在 $\xi \le t \le \tau_2$ 上，辐角的变化

$$h^2(\zeta)\frac{(z_1-z)^{2c}(z_2-z)^{2c}}{(z_1+z)^{2c}(z_2+z)^{2c}} = (z_1-z)^{2p^*}H(t) \sim (-z_1^2t^2)^{p^*} + \mathcal{O}(t^3)$$

为 $o(1)$。因此，采用 [3], 中引理 39 证明里的相同计算，我们得出

$$\lim_{\xi \to 0} \Delta \arg_{\xi \le t \le \tau_2} g(\zeta(t)) = 2n\tau_2 \ln \frac{\tau_2(z_2-z_1)}{2(z_1+z_2)} - 2n\tau_2 + \frac{\pi}{2} + o(1). \tag{3.15}$$

对于 $\tau_1 \le t \le \tau_2$，表达式中因子 2^{c+int}、$(z_2-z_1)^{c+int}$、$(z_2+z_1)^{c+int}$ 和 $e^{(c+p+1+int)\ln n}$ 的辐角变化为

$$\frac{2i\pi h_p (z_2-z_1)^{c+int}}{z_1^{n-p} 2^{c+int}(z_2+z_1)^{c+int} n^{c+p+1+int}\Gamma(-c-p-int)}$$

分别为 $n(\tau_2-\tau_1)\ln 2$、$n(\tau_2-\tau_1)\ln(z_2-z_1)$、$n(\tau_2-\tau_1)\ln(z_2+z_1)$ 和 $n(\tau_2-\tau_1)\ln n$。

接下来，我们计算因子 $\Gamma(-c-p-int)$、$\tau_1 \le t \le \tau_2$ 的辐角变化，该变化由下式给出

$$\operatorname{Im} \operatorname{Log} \Gamma(-c-p-int)|_{\tau_1}^{\tau_2},$$

其中，函数 $\operatorname{Log}\Gamma(s)$ 定义为

$$\operatorname{Log}\Gamma(s) = -\gamma s - \operatorname{Log} s + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{s}{k} - \operatorname{Log}(1+s/k)\right).$$

利用斯特林公式,

$$\operatorname{Log}\Gamma(s) \sim (s-1/2)\operatorname{Log} s - s + 1/2 \operatorname{Log}(2\pi) + \mathcal{O}(1/s), \qquad \text{for } |s| \to \infty \text{ and } |\operatorname{Arg} s| \le \pi - \delta,$$

我们得出

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\operatorname{Log}\Gamma(-c-p-in\tau_2)\\=&\operatorname{Im}\left((-c-p-1/2-in\tau_2)\operatorname{Log}(-c-p-in\tau_2)+n\tau_2+\mathcal{O}(1/\ln^4 n)\right.\\=&-n\tau_2\ln|c+p+in\tau_2|+(c+p+1/2)\frac{\pi}{2}+n\tau_2+\mathcal{O}(1/\ln^4 n).\end{aligned}$$

利用估计

$$\ln|c+p+in\tau_2|=\ln\left|in\tau_2\left(1+\frac{c+p}{in\tau_2}\right)\right|=\ln(n\tau_2)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2\tau_2^2}\right),$$

最后一个表达式变为

$$-n\tau_2\ln(n\tau_2)+(c+p+1/2)\frac{\pi}{2}+n\tau_2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^4 n}\right).$$

若 $-c-p>0$，则由 $n\tau_1\asymp e^{-\ln^4 n}$ 可知

$$\operatorname{Im}\operatorname{Log}\Gamma(-c-p-in\tau_1)=\mathcal{O}\left(e^{-\ln^4 n}\right),$$

因此

$$\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\Gamma(-c-p-int)=-n\tau_2\ln(n\tau_2)+(c+p+1/2)\frac{\pi}{2}+n\tau_2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^4 n}\right).$$

另一方面，若 $c+p\ge 0$，则恒等式

$$\Gamma(-c-p-int)=\frac{\pi}{\sin\pi(c+p+1+int)\Gamma(c+p+1+int)}$$

这意味着

$$\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\Gamma(-c-p-int)=-\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\sin\pi(c+p+1+int)-\Delta\arg_{\tau_1\le t\le t_2}\Gamma(c+p+1+int).$$

利用伽马函数的复共轭，我们写出

$$-\Delta\arg_{\tau_1\le t\le t_2}\Gamma(c+p+1+int)=\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\Gamma(c+p+1-int)=-n\tau_2\ln(n\tau_2)-(c+p+1/2)\frac{\pi}{2}+n\tau_2+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^4 n}\right).$$

分析 $\sin\pi(c+p+int)$ 的辐角变化需要进一步考虑。为此，回顾

$$\sin\pi(c+p+1+int)=\frac{e^{-\pi nt+i\pi(c+p+1)}-e^{\pi nt-i\pi(c+p+1)}}{2i}=\frac{-e^{\pi nt-i\pi(c+p+1)}}{2i}\left(e^{-2\pi nt}+1\right),$$

由此可得

$$\operatorname{Im}\sin\pi(c+p+1+int)=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi nt}-e^{\pi nt}\right)\cos\pi(c+p+1).$$

显然，若 $c+p+1/2\in\mathbb{Z}$，则

$$\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\sin\pi(c+p+1+int)=0.$$

另一方面，如果 $c+p+1/2\notin\mathbb{Z}$，那么 $\sin\pi(c+p+1+int)\notin\mathbb{R}$，并且

$$\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\sin\pi(c+p+1+int)=\operatorname{Arg}\sin\pi(c+p+1+in\tau_2)-\operatorname{Arg}\sin\pi(c+p+1+in\tau_1).$$

我们记作

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\sin\pi(c+p+1+in\tau_2) &= \operatorname{Arg}\left(\frac{-e^{\pi n\tau_2 - i\pi(c+p+1)}}{2i}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-2\pi n\tau_2}\right)\\ &= -\alpha + \mathcal{O}(e^{-2\pi\ln^4 n}),\end{aligned}$$

其中， α 是满足 $-\pi < \alpha \le \pi$ 且（$c+p+1/2$）$\pi = 2k\pi + \alpha$ （当 $k \in \mathbb{Z}$时）的唯一角。注意， α 由下式显式给出

$$\alpha = ((c+p+3/2)\pi \mod 2\pi) - \pi.$$

若 $c+p \in \mathbb{Z}$，则正弦函数的泰勒展开给出

$$\operatorname{Arg}\sin\pi(c+p+1+in\tau_1) = (-1)^{c+p+1}\frac{\pi}{2} + \mathcal{O}\left(e^{-\ln^4 n}\right).$$

若 $c+p \notin \mathbb{Z}$，则

$$\operatorname{Arg}\sin\pi(c+p+1+in\tau_1) = \begin{cases}\mathcal{O}\left(e^{-\ln^4 n}\right) & \text{if } \sin\pi(c+p+1) > 0\\ \pi & \text{if } \sin\pi(c+p+1) < 0 \text{ and } \cos\pi(c+p+1) > 0\\ -\pi & \text{if } \sin\pi(c+p+1) < 0 \text{ and } \cos\pi(c+p+1) < 0.\end{cases}$$

综合这些情形，我们得出：对于任意 c， $p \in \mathbb{R}$,

$$\Delta\arg_{\tau_1\le t\le\tau_2}\Gamma(-c-p-int) = -n\tau_2\ln(n\tau_2) + n\tau_2 - \frac{|c+p|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \eta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^4 n}\right),$$

最后,

$$\Delta\arg_{\tau_1<t\le\tau_2} p(\zeta(t)) = n\tau_2\ln\frac{(z_2-z_1)\tau_2}{2(z_2+z_1)} - n\tau_2 + \frac{|c+p|\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \eta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^4 n}\right).$$

根据方程 (3.15)，结论随即得出。 □

接下来，我们确定一条合适的曲线，并在其上计算 g 的辐角变化。令 γ 为由 $\zeta(t)$ $\zeta(t)$ $-\zeta(t)$, 和 $-\zeta(t)$ 的轨迹构成的、取逆时针方向的简单闭曲线，其中 $0 \le t \le T$，并在.....周围作小幅变形

$$\begin{cases}\pm i\sqrt{z_1z_2}, \pm\zeta(T_1), \pm\overline{\zeta(T_1)} & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 < 0\\ \pm i\zeta(T) & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 \ge 0\end{cases} \tag{3.16}$$

使得 γ 所围区域包含 (3.16) 中定义的点。我们还将 γ 在 $\pm z_1$ 周围变形，使割线 $(-\infty, -z_1]$ 和 $[z_1, \infty)$ 位于该区域之外（见图3.3）。利用留数定理（详细计算见 [3]方程 (2.86)），我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}d\zeta = \begin{cases}-2n-6 & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 < 0\\ -2n-2 & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 \ge 0\end{cases},$$

因为 c 和 p 的取值不会影响积分。

令 γ_1 为 γ 在第一象限内的部分。利用对称性 $g(\zeta) = g(\zeta)$ 和$g(-\zeta) = g(\zeta)$，我们得出

$$\Delta_{\gamma_1}\arg g(\zeta) = \frac{\Delta_\gamma\arg g(\zeta)}{4} = \begin{cases}-(n+3)\pi & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 < 0\\ -(n+1)\pi & \text{if } z_1^2 - 6z_1z_2 + z_2^2 \ge 0\end{cases}.$$

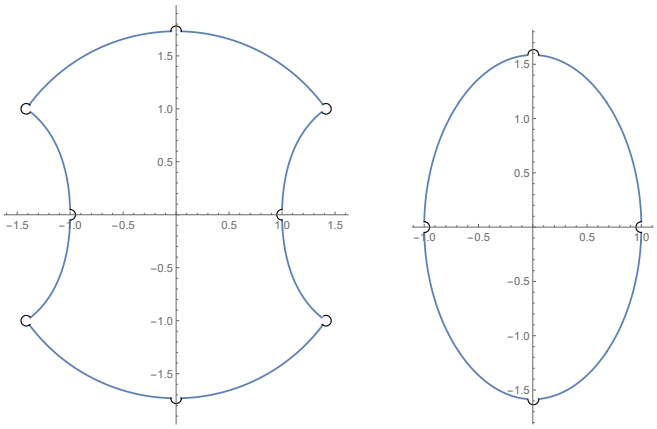


图3.3。 $\gamma$for $(z_1,\ z_2)$ $=$(1，3)（左）和 (1，7)（右）的曲线

注 13。 在 $t \to T$ 和 $t \to T_1$ 的情形下（当 $T \neq T_1$时），数值 c 和 p 只会通过 $o(1)$ 影响 $g(\zeta(t))$ 的辐角变化。因此，以下结果可由 [3] 直接推出。

(1) 若 $\tau < T$ 使得 $T - \tau \ll 1/n^{2/3}$，则由 [3], 中的引理40可知

$$\lim_{\xi \to 0} \Delta \arg_{\tau \le t \le T-\xi} g(\zeta(t)) \ll 1.$$

(2) 若 $T = T_2$ 且 $|T_1 - \tau| \ll 1/n$，则由 [3], 中的引理41和引理42可知

$$\lim_{\xi \to 0} \Delta_{T_1+\xi<t<\tau} \arg g(\zeta(t)) \ll 1, \quad \text{and}$$
$$\lim_{\xi \to 0} \Delta_{\tau \le t < T_1-\xi} \arg g(\zeta(t)) \ll 1.$$

(3) [3] 中的引理37表明，存在某个 $|C| < \pi/2 + o(1)$，使得

$$\Delta_{\ln^2 n/n^{2/3}<T-t\ll 1/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t) = \frac{1}{2}\Delta_{\ln^2 n/n^{2/3}<T-t\ll 1/n^{2/3}} \arg g(\zeta(t)) + C.$$

(4) 若 $T = T_2$ 且 $p(\zeta(T_1)) \neq 0$，则 $p(\zeta(t)) \neq 0$ 在 $(T_1 - \ln^2 n/n^{2/3},\ T_1 + \ln^2 n/n^{2/3})$ 上，而由 [3], 中的引理38可知，存在某个 $|C| < \pi + o(1)$，使得

$$\begin{aligned}&\Delta_{T_1-\ln^2 n/n^{2/3}<t<T_1+\ln^2 n/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t))\\ =&\frac{1}{2}\Delta_{\ln^2 n/n^{2/3}<T_1-t\ll 1/n} \arg g(\zeta) + \frac{1}{2}\Delta_{1/n\ll t-T_1<\ln^2 n/n^{2/3}} \arg g(\zeta) + C.\end{aligned}$$

(5) 完全类似于 [3]第55页上的论证表明，当 $T \neq T_1$ 时，$g(\zeta(t))$ 在 γ_1 上围绕 $\zeta(T)$ 和 $\zeta(T_1)$ 的小弧的辐角变化分别为 $-\pi/2$ 和 $-3\pi/2$ 。

最后，当 $\zeta \to z_1$ 时，

$$g(\zeta) = \frac{2\pi\psi^2(\zeta)e^{-2n\phi(\zeta)}}{n\phi_{z^2}(\zeta)} \sim c_1(z_1 - \zeta)^{2c+2p+1}, \qquad (c_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

and

$$\exp\left(2n(\zeta - z_1)(z_1 - z_2)\operatorname{Log}(z_1 - \zeta)/z_1\right) \to 1.$$

因此， γ_1 在 z_1 周围的小弧上，$\zeta(\zeta)$ 的辐角变化为 $-(c+p+1/2)\pi+o(1)$。与 [3] 中讨论的多项式不同——那些多项式至多有两个实零点——本文所研究的多项式族可以有多个实零点，其位置随 n 而变化。下面的结果给出了当 $c+p>0$ 时 H_n 的实零点个数下界，并描述了当 $n\to\infty$ 时这些零点的渐近行为。

引理 14. 设 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如定理 *8* 的陈述所述。若 $c+p>0$，则 $H_n(s)$ 至少有 $2\lceil c+p\rceil$ 个趋近于 $c\pm(c+p+1-k)$ 的实零点， $0<k\le\lceil c+p\rceil$ 当 $n\to\infty$ 时。

证明。 对于 $x\in\mathbb{R}$，由柯西积分公式可得

$$
\begin{aligned}
H_n(c+x) &= \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z|=\epsilon}\frac{h(z)}{z^{n+1}}\frac{(z_1-z)^c(z_2-z)^c}{(z_1+z)^c(z_2+z)^c}\left(\frac{(z_1-z)(z_2-z)}{(z_1+z)(z_2+z)}\right)^x dz \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\frac{h(z)}{z^{n+1}}\frac{(z_1-z)^c(z_2-z)^c}{(z_1+z)^c(z_2+z)^c}\left(\frac{(z_1-z)(z_2-z)}{(z_1+z)(z_2+z)}\right)^x dz,
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

其中 Γ_1 和 Γ_2 是分别围绕两条割线（$-\infty,-z_1]$ 和 $[z_1,\infty$）逆时针定向的回路。利用变量代换 $z\mapsto -z$ 以及

$$
h(z)\frac{(z_1-z)^c(z_2-z)^c}{(z_1+z)^c(z_2+z)^c}
$$

是偶函数这一事实，我们可知沿 Γ_1 的积分等于

$$
(-1)^n\int_{\Gamma_2}\frac{h(z)}{z^{n+1}}\frac{(z_1-z)^{c-x}(z_2-z)^{c-x}}{(z_1+z)^{c-x}(z_2+z)^{c-x}}dz.
$$

将 $t=0$ 和 c 替换为 $c+x$ 后，我们应用注11得出：若 $c+p+x\notin\mathbb{Z}^+$，则沿 Γ_2 的积分渐近于

$$
\frac{2ih_p(z_2-z_1)^{c+x}\sin\pi(c+p+x+1)\Gamma(c+p+x+1)}{z_1^{n-p}2^{c+x}(z_2+z_1)^{c+x}n^{c+p+x+1}}.
$$

将 c 换成 $c-x$，同样应用于这种情形，我们得出

$$
\begin{aligned}
H_n(c+x) \sim{}& \frac{n!h_p(z_2-z_1)^{c+x}\sin\pi(c+p+x+1)\Gamma(c+p+x+1)}{\pi z_1^{n-p}2^{c+x}(z_2+z_1)^{c+x}n^{c+p+x+1}} \\
&+(-1)^n\frac{n!h_p(z_2-z_1)^{c-x}\sin\pi(c+p-x+1)\Gamma(c+p-x+1)}{\pi z_1^{n-p}2^{c-x}(z_2+z_1)^{c-x}n^{c+p-x+1}}
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

若 $c+p\pm x\notin\mathbb{Z}^+$ 且 $x\neq 0$。对于任意一个固定的小量 $\delta>0$（与 n 无关），我们考虑以下区间

$$
J_k=[c+p+1-k-\delta,c+p+1-k+\delta],\qquad 0<k<c+p+1-\delta.
\tag{3.19}
$$

对于每个 k，当 x 取 J_k 的端点值时，$\sin(c+p-x+1)$ 的值分别为 $(-1)^{k-1}\sin\delta$ 和 $(-1)^k\sin\delta$。此外，在这些端点处， $c+p\pm x\notin\mathbb{Z}^+$ （当 δ 较小时）， $\Gamma(c+p-x+1)>0$；当 n 较大时，(3.18) 的第二项占主导。因此，根据介值定理，每个区间 J_k 至少包含 $H_n(c+x)$ 的一个零点。由此可推得， $H_n(c+x)$ 至少有 $\lceil c+p\rceil$ 个正实零点。在方程 (3.17) 中，以 $-z$ 代换 z，并以 $-x$ 代换 x，得到

$$
H_n(c-x)=(-1)^nH_n(c+x).
$$

T结论现可由以下事实得出：如果 x 是 $H_n(c+x)$ 的一个实零点，那么 $-x$ 也是如此。 □

现在我们开始证明定理 8。除了引理 14 中给出的 $H_n(s)$ 的实零点个数外，我们还将统计 $H_n(c+nit)$ 在 $t\in(0,T)$ 上的零点个数，并将此数与 $H_n(s)$ 的次数进行比较。我们先给出一个关于 $H_n(s)$ 次数的引理。

引理 15. 设 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如定理 *8* 中所定义。则对每个 $n\geq 0$，多项式 $H_n(c+x)$的次数为 n，且其首项系数的符号为 $(-1)^n$。

证明。由于

$$H_n(c-x)=(-1)^nH_n(c+x),$$

只需证明 $H_n(c-x)$ 的次数为 n，且其首项系数为正。$H_n(c-x)$ 的生成函数为

$$h(z)\frac{(z_1-z)^c(z_2-z)^c}{(z_1+z)^c(z_2+z)^c}(1-z/z_1)^{-x}(1-z/z_2)^{-x}(1+z/z_1)^x(1+z/z_2)^x.$$

对每个 $k\in\mathbb{N}$，每个因子 $(1-z/z_1)^{-x}$、$(1-z/z_2)^{-x}$、$(1+z/z_1)^x$ 和 $(1+z/z_2)^x$ 的二项式展开中 z^k 的系数，都是关于 x 的次数为 k 且首项系数为正的多项式。因此，给定一个 $n\in\mathbb{N}$，乘积中 z^n 的系数

$$(1-z/z_1)^{-x}(1-z/z_2)^{-x}(1+z/z_1)^x(1+z/z_2)^x$$

具有如下形式

$$\sum_{i+j+k+\ell=n}p_i(x)p_j(x)p_k(x)p_\ell(x),$$

其中每个加项中的每个因子——因而整个表达式——的首项系数均为正，次数等于其指标。我们将其展开为

$$h(z)\frac{(z_1-z)^c(z_2-z)^c}{(z_1+z)^c(z_2+z)^c}$$

作为关于 z 的幂级数（系数为常数），由此推得 $H_n(c-x)$ 的次数为 n，且其首项系数的符号与该级数的常数项 $h(0)>0$ 的符号相同。□

要计算出 $H_n(s)$ 的所有零点，最后还需利用这样一个事实（很快将予以证明）：$H_n(s)$ 的实零点总数与 $c+it$ 上的零点总数（可能的零点 c 除外）之和至少为

$$\begin{cases} n-2 & \text{if } 2\mid n \\ n-3 & \text{if } 2\nmid n \end{cases}. \tag{3.20}$$

假设这一事实成立，我们现在给出一个论证，以完成定理 8 的证明。若 n 为奇数，则令 $x=0$ 属于 $H_n(c-x)=(-1)^nH_n(c+x)$，从而得出 c 是 $H_n(s)$的一个零点。因此，接下来只需说明，无论 n的奇偶性如何，$H_n(s)$可能遗漏的两个零点。由于 $H_n(s)$的次数为 n，且 $H_n(s)$的零点关于实轴和直线$c+it$对称，只需证明 $H_n(s)$可能剩余的两个零点不是实数。注意，$H_n(c+x)$在每个 J_k（定义见 (3.19)）的端点处符号相反。因此，$H_n(c+x)$在每个 J_k 上必恰有一个零点，因而剩余的两个零点不可能位于任何J_k上。由于在集合

$$(0,c+p+\delta)\setminus\bigcup_{0<k<c+p+1-\delta}J_k$$

表达式 (3.18) 的第二项占主导，因此 $H_n(c+x)$在那里没有零点。此外，由 $h_p>0$ 和 (3.18) 中的渐近表达式可知， $H_n(c+x)$在 $x=c+p+\delta$ 处的符号为 $(-1)^n$。根据引理 15，这与 $\lim_{x\to\infty} H_n(c+x)$的符号相同，由此得出 $H_n(c+x)$在 $[c+p+\delta,\infty)$上没有零点。因此，剩余的两个可能零点必定位于直线 $\operatorname{Re} z=c$上，定理 8 的证明至此完成。

注16。在 $c+p\in\mathbb{Z}^+$ 的情形下，(3.18) 表明 $H_n(c+x)$ 在 $(0,1-\delta)$ 上非零，且其符号在那里为 $(-1)^{n+c+p}$。

现在给出上文表达式 (3.20) 中所声称的 $H_n(s)$ 的零点计数证明。由于引理 14 给出了 $H_n(s)$ 的实零点个数的一个下界，因此只需计算 $H_n(c+int)$ 在 $|t|\in(0,T)$ 上的零点个数。回顾一下，对于 $t\in(0,T)$， $\pi H_n(c+int)$ 是 $-i$ 乘以 $p(\zeta(t))$ 的实部所得结果的虚部。因此，为了得到 $H_n(s)$ 在直线 $\operatorname{Re} z=c$ 上的零点计数下界，只需计算 $p(\zeta(t))$ 的辐角变化。我们根据 $T=T_2$ 或 $T=T_1$ 的情形进行分类讨论（参见方程（3.4））。

情形 $T=T_2$。若 $T=T_2$ 且 $p(\zeta(T_1))\neq 0$，则存在某个 $|C|<3\pi/2+o(1)$ 和 $c_2\in\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\Delta_{e^{-ln^4n}/n\ll t<T-c_2/n^{2/3}}\arg p(\zeta(t)) &= \frac{1}{2}\Delta\arg_{e^{-ln^4n}/n\ll t<T-c_2/n^{2/3}} g(\zeta(t))+\frac{|c+p|\pi}{2}+\eta+C\\ &= \frac{1}{2}\left(\Delta_{\gamma_1}\arg g(\zeta)+(c+p+5/2)\pi\right)+\frac{|c+p|\pi}{2}+\eta+C\\ &= -\frac{n\pi}{2}+\frac{c+p+|c+p|}{2}\pi-\frac{\pi}{4}+\eta+C,\end{aligned}\tag{3.21}$$

其中 η 的定义同引理 12 中方程 (3.14) 的定义。在 $c+p<0$ 的情形下，上述方程表明， $H_n(c+int)$ 在 $(0,\ T)$ 上的零点个数至少为

$$\left\lfloor\frac{n}{2}+\frac{3}{4}-\frac{C}{\pi}\right\rfloor.$$

由 $|C|<3\pi/2+o(1)$ 可知， $H_n(s)$ 至少有

$$\begin{cases} n-3 & \text{if } 2\nmid n\\ n-2 & \text{if } 2\mid n\end{cases}$$

个非实零点位于直线 $\operatorname{Re} s=c+it$ 上。

另一方面，若 $c+p\geq 0$，则 $H_n(c+int)$ 在 $(0,\ T)$ 上的零点个数至少为

$$\left\lfloor\frac{n}{2}-(c+p)+\frac{\pi}{4}-\frac{\eta+C}{\pi}\right\rfloor.$$

由引理18可得，实零点与位于 $c+it$ 上的零点总数（可能位于 c 的零点除外）至少为

$$2\left\lfloor\frac{n}{2}-(c+p)+\frac{1}{4}-\frac{\eta+C}{\pi}\right\rfloor+2\lceil c+p\rceil,\tag{3.22}$$

其中 $c+p=2k+\alpha/\pi-1/2$。

若 $-\pi<\alpha<-\pi/2$，则 $\eta=-\alpha-\pi$。因此，

$$-(c+p)-\frac{\eta+C}{\pi}+\frac{1}{4}=-2k+\frac{7}{4}-\frac{C}{\pi},$$

且表达式 (3.22) 至少为

$$\begin{cases} 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k\right) + 2(2k-1) = n-2 & \text{if } 2 \mid n \\ 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k\right) + 2(2k-1) = n-3 & \text{if } 2 \nmid n \end{cases}.$$

若 $\pi/2 < \alpha \leq \pi$，则 $\eta = -\alpha + \pi$ 且

$$-(c+p) - \frac{\eta + C}{\pi} + \frac{1}{4} = -2k - \frac{1}{4} - \frac{C}{\pi},$$

由此可见，式 (3.22) 至少为

$$\begin{cases} 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 2\right) + 2(2k+1) = n-2 & \text{if } 2 \mid n \\ 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 2\right) + 2(2k+1) = n-3 & \text{if } 2 \nmid n \end{cases}.$$

若 $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$，则 $\eta = -\alpha$ 且

$$-(c+p) - \frac{\eta + C}{\pi} + \frac{1}{4} = -2k + \frac{3}{4} - \frac{C}{\pi}.$$

再次计算式 (3.22)，可得其至少为

$$\begin{cases} 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 1\right) + 4k = n-2 & \text{if } 2 \mid n \\ 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 1\right) + 4k = n-3 & \text{if } 2 \nmid n \end{cases}.$$

若 $\alpha = \pi/2$，则 $\eta = 0$ 且

$$\Delta_{e^{-ln^4 n}/n \ll t < T - c_2/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t)) = -\frac{n\pi}{2} + (c+p)\pi - \frac{\pi}{4} + C,$$

且式 (3.22) 的计算结果至少为

$$\begin{cases} 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 2\right) + 4k = n-4 & \text{if } 2 \mid n \\ 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 1\right) + 4k = n-3 & \text{if } 2 \nmid n. \end{cases}$$

如果 $\alpha = -\pi/2$，那么 $\eta = 0$ 且

$$\Delta_{e^{-ln^4 n}/n \ll t < T - c_2/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t)) = -\frac{n\pi}{2} + (2k-1)\pi - \frac{\pi}{4} + C.$$

在这种情况下，我们发现式 (3.22) 至少为

$$\begin{cases} 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k - 1\right) + 2(2k-1) = n-4 & \text{if } 2 \mid n \\ 2\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2k\right) + 2(2k-1) = n-3 & \text{if } 2 \nmid n. \end{cases}$$

读者会注意到，如果 $\alpha = \pm\pi/2$ 且 $2 \mid n$，我们需要再找到两个零点，才能将目前得到的下界（即 $n-4$）提高到所声称的下界 $n-2$。因此，假设 $2 \mid n$。恒等式

$$H_n(c-x) = (-1)^n H_n(c+x)$$

这意味着，如果 c 是 $H_n(z)$ 的一个零点，那么它就是一个二重零点。另一方面，如果 c 不是这个多项式的零点，那么由注16可得， $H_n(c)$ 的符号为 $(-1)^{c+p}$ ，因此

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{Arg} p(\zeta(t)) = (-1)^{c+p} \frac{\pi}{2}.$$

此外，由命题9可知，对于 $t \asymp e^{-\ln^4 n}/n$,

$$\operatorname{Arg} p(\zeta(t)) = \operatorname{Arg}(i\sin(c+p+1+int)) + o(1) = \begin{cases} o(1) & \text{if } 2 \mid c+p \\ \pm\pi + o(1) & \text{if } 2 \nmid c+p \end{cases}.$$

这意味着

$$\Delta_{0<t\ll e^{-ln^4 n}/n} \arg p(\zeta(t)) = -\frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{3\pi}{2}. \tag{3.23}$$

若 (3.23) 中的辐角变化为 $3\pi/2$，则在区间 $0 < t \ll e^{-ln^4 n}/n$ 上，$H_n(c \pm int)$ 至少有两个零点，因为 $\pi H_n(c+int)$ 是 $p(\zeta(t))$ 的虚部。若 (3.23) 中的辐角变化为 $-\pi/2$，则由方程 (3.21) 可得

$$\Delta_{0<t<T-c_2/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t)) = -\frac{n\pi}{2} + (c+p)\pi - \frac{3\pi}{4} + C.$$

因此，$H_n(s)$ 的实零点数与 $c+it$ 上的实零点数（可能位于 c 的零点除外）之和至少为

$$2\left(\frac{n}{2} - 2k - 1\right) + 4k = n - 2$$

当 $\alpha = \pi/2$ 时，至少为

$$2\left(\frac{n}{2} - 2k\right) + 2(2k-1) = n - 2$$

当 $\alpha = -\pi/2$ 时。这就完成了 $\alpha = \pm\pi/2$ 为偶数时 n 的情形。

若 $T = T_2$ 且 $p(\zeta(T_1)) = 0$，则对于某个 $c_2 \in \mathbb{R}^+$ 和足够小的 $\xi > 0$，$H_n(c+int)$ 在 $(0,\ T)\backslash\{T_1\}$ 上的实零点个数至少为

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{\Delta_{e^{-ln^4 n}/n \ll t < T_1 - \xi/n} \arg p(\zeta(t))}{\pi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\Delta_{T_1+\xi/n<t<T-c_2/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t))}{\pi} \right\rfloor \\ \geq &\left\lfloor \frac{\Delta_{e^{-ln^4 n}/n \ll t < T_1 - \xi/n} \arg p(\zeta(t))}{\pi} + \frac{\Delta_{T_1+\xi/n<t<T-c_2/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t))}{\pi} \right\rfloor - 1. \end{aligned}$$

将 T_1 计作 $H_n(1/2+int)$ 在 $(0,\ T)$ 上的一个附加零点后，我们得到该多项式的零点个数与 $p(\zeta(T_1)) \neq 0$ 的情形相同。

情形 $T = T_1$。由引理 14 可知，对于某个 $|C| < \pi/2 + o(1)$ 和 $c_2 \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \Delta_{e^{-ln^4 n}/n \ll t < T-c_2/n^{2/3}} \arg p(\zeta(t)) &= \frac{1}{2}\Delta \arg_{e^{-ln^4 n}/n \ll t < T-c_2/n^{2/3}} g(\zeta(t)) + \frac{|c+p|\pi}{2} + \eta + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\Delta_{\gamma_1} \arg g(\zeta) + (c+p+1)\pi\right) + \frac{|c+p|\pi}{2} + \eta + C \\ &= -\frac{n\pi}{2} + \frac{c+p+|c+p|}{2}\pi + \eta + C. \end{aligned}$$

将最后一个表达式与方程 (3.21) 中的表达式进行比较，我们便完成了这一情形的讨论，也完成了定理 8 的证明。

4. 极限零点分布密度函数

虽然我们已经找到了所研究的伴随序列的零点轨迹，但还可以根据零点的分布，进一步了解其极限行为。为此，我们计算 $H_n(c+int)$ 在 $t\in(0,\ T)$ 上的零点的极限概率密度函数。具体而言，对于每个 $x\in(0,\ T)$ 和 $\epsilon>0$，令 $N_{n,\ \epsilon}(x)$ 表示 $H_n(c+int)$ 在区间 $t\in(x,\ x+\epsilon)$ 上的零点个数。由此可得，$x\in(0,\ T)$ 处的极限概率密度函数为

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{N_{n,\epsilon}(x)}{n}.$$

我们注意到，对于任意 $x\in(0,T)$ 和 $x\neq T_1$(若 $T=T_2$),

$$p^2(\zeta(t))\sim g(\zeta(t))=\frac{2\pi\psi^2(\zeta)e^{-2n\phi(\zeta,t)}}{n\phi_{z^2}(\zeta,t)}$$

在 $t\in(x,x+\epsilon)$ 上一致成立，因此

$$\begin{aligned}\Delta\arg_{x<t<x+\epsilon}p(\zeta(t))&=\frac{1}{2}\Delta\arg_{x<t<x+\epsilon}g(\zeta(t))\\&=-n\Delta\operatorname{Im}_{x<t<x+\epsilon}\phi(\zeta,t)+\mathcal{O}(\epsilon).\end{aligned}$$

由 $\phi(\zeta,\cdot)$ 在 x 处的泰勒展开可立即得出

$$\phi(\zeta,t)|_{t=x}^{t=x+\epsilon}=\left.\frac{d\phi(\zeta,t)}{dt}\right|_{t=x}\epsilon+\mathcal{O}(\epsilon^2),$$

其中

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=x}&=\left.\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right|_{t=x}\left.\frac{d\zeta}{dt}\right|_{t=x}+\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t=x}\\&=\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t=x}\\&=-i\left(\operatorname{Log}(z_1-z)+\operatorname{Log}(z_2-z)-\operatorname{Log}(z_1+z)-\operatorname{Log}(z_2+z)\right).\end{aligned}$$

因此，利用

$$\pi H_n(c+int)=\operatorname{Im}(-i\operatorname{Re}(p(\zeta(t)))),$$

我们得出

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{N_{n,\epsilon}(x)}{n}&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\Delta\arg_{x<t<x+\epsilon}p(\zeta(t))\right|}{\pi n}.\\&=\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{(z_1+\zeta(x))(z_2+\zeta(x))}{(z_1-\zeta(x))(z_2-\zeta(x))}\right|.\end{aligned}\tag{4.1}$$

在 $x=T_1$ 当 $T=T_2$ 的情况下，我们从上一节得知，对于较小的 $\xi>0,\ \ t\in(T_1,T_1+\xi/n)$ 上的 $H_n(c+int)$ 的零点个数为 $\mathcal{O}(1)$。由于

$$\Delta\arg_{T_1+\xi/n<t<T_1+\epsilon}p(\zeta(t))=\frac{1}{2}\Delta\arg_{T_1+\xi/n<t<T_1+\epsilon}g(\zeta(t))+C$$

对于 $|C|<\pi/2+o(1)$，上述相同的论证也表明，(4.1) 对 $x=T_1$ 同样成立 .

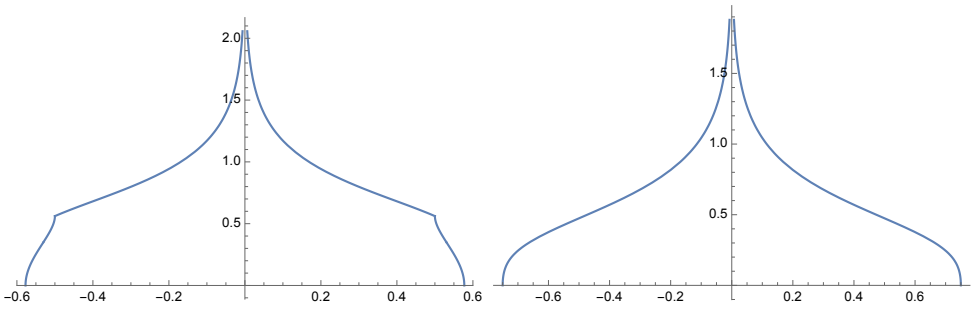


图 4.1。(z_1, z_2) =(1,3)（左）和 (1,7)（右）的极限概率密度函数

参考文献

[1] J. Borcea 和 P. Brändén，圆域及其边界上的 Pólya-Schur 主定理，《数学年刊》，**170** (2009)，465-492。[2] D. Bump，Eugene K.-S. Ng，论黎曼ζ函数，《数学杂志》192 (1986)，195-204。[3] G. Cheon，T. Forgács，H. Kim，K. Tran，某些谢弗序列的组合性质与零点分布，《数学分析与应用杂志》514 (2022)，126273。[4] G.-S. Cheon，H. Kim，L. W. Shapiro，卢卡斯多项式序列的推广，《离散应用数学》157 (2009)，920-927。[5] Dingle, R. B.，《渐近展开：推导与阐释》，学术出版社，伦敦和纽约，1973年。[6] Tian-Xiao He，Leetsch C. Hsu，Peter J.-S. Shiue，谢弗群与里奥丹群，《离散应用数学》155 (2007)，1895-1909。[7] A. F. Horadam，某类多项式序列的一种综合方法的扩展，《斐波那契季刊》34(1) (1996)，68-74。[8] A. Leibman，群中的多项式序列，《代数杂志》201 (1998)，189-206。[9] G. Moretti，《复变函数》。新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：普伦蒂斯霍尔公司，第179-184页。1964年。[10] Olver, F. W. J.，《渐近分析与特殊函数》，学术出版社，伦敦和纽约，1974年。[11] S. Roman，《影子演算》，学术出版社，纽约，1984年。[12] Gian-Carlo Rota，D. Kahaner，A. Odlyzko，论组合理论的基础。VIII. 有限算子演算，《数学分析与应用杂志》42 (1973)，684-760。[13] L. Shapiro，R. Sprugnoli，P. Barry，G.-S. Cheon，T.-X. He，D. Merlini，W. Wang，《里奥丹群及其应用》，施普林格数学专著，2022年。[14] E. C. Titchmarsh，《黎曼ζ函数理论》，牛津大学出版社，纽约，1951年。

[1]成均馆大学数学系/应用代数与优化研究中心，韩国大韩民国水原 16419电子邮件地址：gscheon@skku.edu

[2]加利福尼亚州立大学弗雷斯诺分校数学系，美国加利福尼亚州弗雷斯诺 93740-8001电子邮件地址：tforgacs@mail.fresnostate.edu电子邮件地址：khangt@mail.fresnostate.edu