arXiv:2301.04729v1 [math.GT] 11 Jan 2023

同调球中曲面的 PL 属

JENNIFER HOM、MATTHEW STOFFREGEN 和 HUGO ZHOU

Abstract. 我们考察流形-结对（Y，K），其中 Y 是一个边界为同调球的同调球面。我们证明，满足 $\partial(X,\Sigma)=(Y,K)$ 的同调球 X 中 PL 曲面 Σ 的最小亏格可以任意大。等价地，从（Y，K）到 S^3 中任意纽结的同调配边内，曲面配边的最小亏格可以任意大。证明依赖于 Heegaard Floer 同调。

1. 引言

K 在 S^3 中的每个纽结都围成四维球中的一个分片线性（PL）圆盘，具体做法是取对（S^3，K）上的锥。（这个圆盘并非局部平坦；本文始终不对 PL 曲面的局部平坦性作任何要求。）为解决 Zeeman 猜想，[Zee64]，Akbulut [Akb91] 给出了一个可缩四维流形 X 和一个纽结 $K\subset\partial X$，使得 K 不围成 X 中的 PL 圆盘。然而，Akbulut 的 K 确实在另一个可缩四维流形 X' 中围成 PL 圆盘，且 $\partial X'=\partial X$。A. Levine [Lev16] 证明了更强的结果：存在流形-结对（Y，K），使得 Y 围成一个光滑的可缩四维流形 X，而 K 不仅不在 X 中围成 PL 圆盘，也不在任何其他满足 $\partial X'=Y$ 的整数同调球 X' 中围成 PL 圆盘。

鉴于 Levine 的结果，一个自然的问题是：给定整数同调三维球面 Y 中的纽结 K，使得 Y 围成一个整数同调四维球，那么在整数同调球 X 中，满足 $\partial(X,\Sigma)=(Y,K)$ 的 PL 曲面 Σ 的最小亏格是多少？我们注意到，这样的曲面 Σ 总是存在，因为 K 是零同调的，因此在 Y 中围成一个曲面，而该曲面可以稍稍推入任意一个以其为边界的 4 维流形中。

我们的主要结果表明，这种 PL 亏格可以任意大。以下始终设 $(Y_n,K_n)=\left(S^3_{-1}(T_{2n,\,2n+1})\#-S^3_{-1}(T_{2n,\,2n+1})\,\mu_{2n-1,\,-1}\#U\right)$，其中 $\mu_{2n-1,\,-1}$ 表示 $S^3_{-1}(T_{2n,\,2n+1})$ 中子午线的 $(2n-1,-1)$-缆结，而 U 表示 $-S^3_{-1}(T_{2n,\,2n+1})$ 中的平凡结。

定理 1.1. 任意整数同调球 X 中的 PL 曲面 Σ，若满足 $\partial(X,\Sigma)=(Y_n,K_n)$，则当 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 时，其亏格至少为 $n-1$。

我们通过将同调余边界内部的 PL 曲面重新解释为余边界来证明定理 1.1。回顾一下，从 Y_0 到 Y_1 的同调余边界是满足 $\partial W=Y_0\sqcup Y_1$ 的光滑紧致 4 维流形 W，并且由包含映射诱导的映射 $i_*\colon H_*(Y_j;\mathbb{Z})\to H_*(W;\mathbb{Z})$ 对于 $j=0$、1 是同构。设 Σ 是整数同调球 X 中的亏格为 g 的 PL 曲面，满足 $\partial(X,\Sigma)=(Y_n,K_n)$。经过同痕，我们可以假设 Σ 除有限个奇点外均为光滑的，其中每个奇点都以光滑结 J_i 在 S^3 中的锥为模型。（例如参见 [HLL22，定理 A.1]。）删除连接 Σ 中锥点的弧的邻域后，我们得到一个从纽结 $J=J_1\#\ldots\#J_m$ 到 K 的亏格为 g 的余边界，该余边界位于从 S^3 到 Y 的同调余边界中。

设 K 是同调零配边同调球面 Y中的一个纽结。我们考虑成对配边

$$(W,S)\colon (S^3,J)\to(Y,K)$$

使得 W 是从 S^3 到 Y的同调配边。(Y,K) 与 (S^3,J) 之间的余边界距离，是任意此类配对 (W,S) 中 S 的最小亏格。根据前面的讨论，定理 1.1 可直接由以下结果推出。

定理 1.2. (Y_n,K_n) 与 S^3中的任意纽结之间的余边界距离至少为 $n-1$。

我们使用 Heegaard Floer 同调 [OS04b], , 具体而言，使用 Zemke 的余边界映射 [Zem19]，来证明定理 1.2。我们的障碍论证依赖于两个关键性质：

(1) 考虑一对对象之间的余边界

$$(W,S)\colon (S^3,J)\to(Y_n,K_n)$$

其中 W 是一个同调配边，且 S 的亏格为 g。对于任意满足 $c_1+c_2=-2g$ 和 c_1的 $(c_1,c_2)\in(2\mathbb{Z})^2$ ，都存在一个局部映射

$$f_{W,S}\colon \mathrm{CFK}(S^3,J)\to\mathrm{CFK}(Y_n,K_n)$$

具有双分次（c_1,c_2）。类似地，我们也可以考虑方向相反的余边界，从（Y_n,K_n）到（S^3,J）。参见 [Zem19 定理 1.4 和 1.7]。

(2) S^3 的 Heegaard Floer 同调尤其简单；即 $\mathrm{HF}^-(S^3)=\mathbb{F}[U]$。特别地， U 会非平凡地作用于 $\mathrm{HF}^-(S^3)$ 中的任意非零元素。

更多细节请参见第 2 节。

为构造我们的例子（Y_n,K_n），我们借助最后一位作者近期的工作 [Zho22]，该工作结合了 Hedden-Levine [HL19] 和 Truong [Tru21] 的成果，描述了 S^3 中沿纽结进行手术所得流形内子午线的（$p,1$）-缆结的结 Floer 复形。第 3 节介绍这个滤过映射锥的预备知识，第 4 节则进行计算。

致谢。JH 和 HZ 得到了 NSF 资助 DMS-2104144 和西蒙斯学者项目的支持。MS 得到了 NSF 资助 DMS-1952755 的支持。本研究是在 JH 和 HZ 入驻西蒙斯-劳弗数学科学研究所（前身为 MSRI）期间完成的，时间为 2023 年秋季，并得到 NSF 资助 DMS-1928930 的支持。作者感谢 Irving Dai、Tye Lidman、Chuck Livingston 和 Linh Truong 的宝贵交流。

2. Cobordism obstruction

本节中，我们为流形-结对引入一种余边界障碍，并通过将该障碍应用于配对 (Y_n,K_n)，并借助本文后半部分的计算结果，证明定理 1.2。此外，我们还计算了 DHST 的 [族 (Y_n,K_n) 上同痕同态 $\varphi_{i,\ j}$ 的取值，这一结果本身也可能具有独立的研究价值。

我们先介绍一些关于结 Floer 同调的预备知识。结 Floer 同调由 Ozsv´ath-Szab´o [OS04a] 和 J. Rasmussen [Ras03] 定义。按照 Zemke [Zem19], 的约定，为流形-结对 (Y,K) 关联一个链复形 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]}(Y,K)=$

CFK(Y, K) 是定义在多项式环 $\mathbb{F}[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ 上的复形，其中 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，称为结 Floer 复形。这个链复形是一个自由模，由 Heegaard 曲面的对称积中两个拉格朗日子流形的交点生成；其微分通过计数全纯圆盘并按其与两个基点的交数加权来定义。Ozsv´ath-Szab´o 和 J. Rasmussen 证明了 CFK(Y, K) 在 $\mathbb{F}[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ 上的链同伦等价意义下的拓扑不变性。

结 Floer 复形 CFK(Y, K) 带有一个双分次，即 (gr$u$, gr$v$)，其中$\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$和 ∂的双分次分别为 $(-2, 0)$、$(0, -2)$ 和 $(-1, -1)$。齐次元素 $x \in$CFK(Y, K) 的 Alexander 分次定义为 $A(x) = \frac{1}{2}$(gr$u(x)$ $-$ gr$v(x)$)。

两个复形之间的链映射若在 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$-局部化同调上诱导出同构，则称为局部映射。根据 [Zem19 的一个特殊情形，定理 1.4], 给出了该障碍的主要技术依据。

定理 2.1（ [Zem19] 中的定理 1.4）。设 (W, S): $(Y_1, K_1) \to (Y_2, K_2)$ 是流形-结对 (Y_1, K_1) 与 (Y_2, K_2) 之间的余边界，满足 W 是一个同调配边，且 S 的亏格为 g.。那么对于任意给定的 $(c_1, c_2) \in (2\mathbb{Z})^2$，若 $c_1 + c_2 = -2g$且 $c_1, c_2 \leq 0$，则存在一个局部映射

$$f_{W,S} \colon \mathrm{CFK}(Y_1, K_1) \to \mathrm{CFK}(Y_2, K_2)$$

具有双分次（c_1, c_2）。

特别地，当 $g(S) = 0$ 时，也就是说，当 (Y_1, K_1) 和 (Y_2, K_2) 同调共边时，余边界映射$f_{W,S}$ 是保持双分次的局部映射。

定义 2.2. 若存在保持双重分次的局部映射，则称两个双分次链复形 C_1 和 C_2 在 $\mathbb{F}[\mathcal{U}, \mathcal{V}]$ 上局部等价

$$f \colon C_1 \to C_2 \qquad \text{and} \qquad g \colon C_2 \to C_1.$$

不难验证，局部等价是一种等价关系。将余边界反向后，我们便得到同调共边会诱导结 Floer 复形的局部等价。由于余边界距离在同调共边类中保持不变，我们研究所关注的流形-结对的结 Floer 复形的局部等价类。

出于计算方面的原因，先考虑

$$-(Y_n, K_n) = -\big(S^3_{-1}(T_{2n,2n+1}) \# - S^3_{-1}(T_{2n,2n+1}), \mu_{2n-1,-1} \# U\big),$$

也就是说，对第 1 节中出现的流形-结对取反向定向。注意，$-(S^3_{-1}(T_{2n,\ 2n+1})\, \mu_{2n-1,\ -1})$ 等价于 $(S^3_1(-T_{2n,\ 2n+1})\, \mu_{2n-1,\ 1})$。根据引理 4.3，在环 $\mathbb{F}[U, U^{-1}]$ 上，复形 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})\ \langle 2n-1 \rangle$ 对所有 $n \geq 3$. 都表示 CFK$^{\infty}(S^3_1(-T_{2n,\ 2n+1})\, \mu_{2n-1,\ 1})$ 的局部等价类。（关于定义在环$\mathbb{F}[U, U^{-1}]$上的结 Floer 复形 CFK$^{\infty}(Y, K)$ 的更多内容，见第 3 节开头。）

回顾一下，根据 [OS04a 定理 7.1]，结 Floer 复形满足 K¨unneth 原理。由于 $-(Y_n, K_n) = \big(S^3_1(-T_{2n,2n+1})\, \mu_{2n-1,1}\big) \# \big(S^3_{-1}(T_{2n,2n+1})\ U\big)$，配对 $-(Y_n, K_n)$ 的结 Floer 复形局部等价于 CFK$^{\infty}(S^3_1(-T_{2n,2n+1})$ $\mu_{2n-1,1})$ 与一个

平凡复形的张量积，其中调整马斯洛分次，使得该张量复形的 d–不变量等于 0。

将其转换到环 $\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]$ 中；对于 $n \geq 1$，令 C_n 表示与 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})\langle 2n-1\rangle$ 对应的复形，并作 $(d(S^3_{-1}(T_{2n,2n+1}))\ d(S^3_{-1}(T_{2n,2n+1})))$ 双分次平移。于是 C_n 表示复形 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]}(-(Y_n, K_n))$ 的局部等价类。当 $n = 3.$ 时的示例见图 3

命题 2.3. 对于 $n \geq 3$，复形 C_n 由以下条件刻画：

$$\partial\alpha_s = \begin{cases} \mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}}b^{(1)}_{n-1}, & s = 1 \\ \mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}-s+1}\mathcal{V}^{\frac{n(n+1)}{2}}b^{(s-1)}_{n} + \mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}}b^{(s)}_{n-1}, & 2 \leq s \leq n-2 \\ \mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}+n-s+1}\mathcal{V}^{\frac{n(n+1)}{2}}b^{(s-1)}_{n} + \mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}-n+s+1}b^{(s)}_{n} & n-1 \leq s \leq n+1 \\ \mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}}b^{(s-1)}_{n+1} + \mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}-n+s+1}b^{(s)}_{n}, & n+2 \leq s \leq 2n-2 \\ \mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}}b^{(2n-2)}_{n+1}, & s = 2n-1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\partial\widetilde{\alpha}_s = \begin{cases} \mathcal{U}^{n}b^{(s)}_{n} + \mathcal{V}^{n-s-1}b^{(s)}_{n-1}, & 1 \leq s \leq n-2 \\ \mathcal{U}^{s-n}b^{(s)}_{n+1} + \mathcal{V}^{n}b^{(s)}_{n}, & n+1 \leq s \leq 2n-2. \end{cases} \tag{2}$$

证明。这是对引理 4.4 的直接转换。 □

这使我们能够计算 DHST21，定义 8.1]，中定义的同痕同态族 $\varphi_{i,j}$ 的取值，如下所示。

命题 2.4. 对于每个 $n \geq 3$，我们有

$$\varphi_{i,0}(C_n) = \begin{cases} -1, & 1 \leq i \leq n-2 \\ -n+2, & i = n. \end{cases} \tag{3}$$

$$\varphi_{\frac{n(n-1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}}(C_n) = -n+2, \tag{4}$$

$$\varphi_{\frac{n(n+1)}{2},j}(C_n) = -1, \qquad \frac{n(n-1)}{2} \leq j \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1, \tag{5}$$

并且 $\varphi_{i,\ j}(C_n)\ = 0$ 对于所有其他 i 和 $j.$

证明。 $\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]$ 上的复形可以使用映射转换为环 $\mathbb{X}$ 上的复形，该环定义于 [DHST21]

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &\longmapsto U_B + W_{T,0} \\ \mathcal{V} &\longmapsto V_T + W_{B,0}. \end{aligned}$$

由于其形式简单，不难表述一种基的变换，使得 C_n变为标准复形（见 [DHST21，第 5.1]节）。特别地， a_i 的不变量

C_n（其中 i 为奇数；见 [DHST21，定义 6.1]）由以下序列给出

$$\Bigg(\underbrace{-\Big(\frac{n(n-1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}\Big),-(n,0)}_{\text{repeats } n-2 \text{ times}},\cdots,-\Big(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}\Big),-\Big(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}+1\Big),$$

$$\underbrace{-\Big(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}+2\Big),-(1,0),\cdots,-\Big(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n-1)}{2}+s+1\Big),-(s,0),\cdots}_{\text{for } 1\le s\le n-2}\Bigg).$$

$\varphi_{i,\ j}(C_n)$ 的取值计算紧随其后。 □

类似地，对于情形 $n=2$，引理 4.5 得出如下结论。

引理 2.5。我们有

$$\varphi_{3,1}(C_2)=\varphi_{3,2}(C_2)=-1,$$

且对于所有其他 i 和 j，$\varphi_{i,\ j}(C_2)=0$

因此， 序列，我们可以计算流形-结对（Y_n, K_n）的 τ 不变量。

命题 2.6。对于所有 $n\ge 1$，

$$\tau(Y_n,K_n)=2n^2-3n+1.$$

证明。根据 [DHST21，命题 1.4]，可以从$\varphi_{i,\ j}$ 计算 τ 不变量。对于 $n\ge 3$，

$$\begin{aligned}\tau(C_n)&=n(-n+2)-\sum_{i=1}^{n-2}i-\sum_{i=1}^{n}i\\&=-2n^2+3n-1.\end{aligned}$$

当 $n=2$时，

$$\tau(C_2)=-1-2=-3.$$

复形 C_1 是局部平凡的，因此 $\tau(C_1)=0$。结论由 τ在同痕群中是可加的这一事实立即得出。□

根据 [OS04a，命题 3.8]，，镜像结的结 Floer 复形是原结的对偶复形。因此，CFK(Y_n, K_n)的局部等价类由 C_n的对偶复形给出；将其记为 C_n^*. 。将 α_s^* 和 $\widetilde{\alpha}_s^*$ 分别记为 α_s和 $\widetilde{\alpha}_s$的对偶，并类似地将 $b^{*,\ (s)}_{\ i}$ 记为 $b_i^{(s)}$ 的对偶。

Prop命题 2.7。对于 $n\ge 3$，复形 C_n^* 由以下内容刻画

$$\partial b_{n-1}^{*,(s)}=\mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}}\alpha_s^*+\mathcal{V}^{n-s-1}\widetilde{\alpha}_s^*,\qquad 1\le s\le n-2 \tag{6}$$

$$\partial b_n^{*,(s)}=\begin{cases}\mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}-s}\mathcal{V}^{\frac{n(n+1)}{2}}\alpha_{s+1}^*+\mathcal{U}^n\widetilde{\alpha}_s^*, & 1\le s\le n-2\\ \mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}-n+s+1}\alpha_s^*+\mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}-s}\mathcal{V}^{\frac{n(n+1)}{2}}\alpha_{s+1}^*, & n-1\le s\le n\\ \mathcal{U}^{\frac{n(n+1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}-n+s+1}\alpha_s^*+\mathcal{V}^n\widetilde{\alpha}_s^*, & n+1\le s\le 2n-2\end{cases} \tag{7}$$

$$\partial b_{n+1}^{*,(s)}=\mathcal{U}^{\frac{n(n-1)}{2}}\mathcal{V}^{\frac{n(n-1)}{2}}\alpha_{s+1}^*+\mathcal{U}^{s-n}\widetilde{\alpha}_s^*,\qquad n+1\le s\le 2n-2 \tag{8}$$

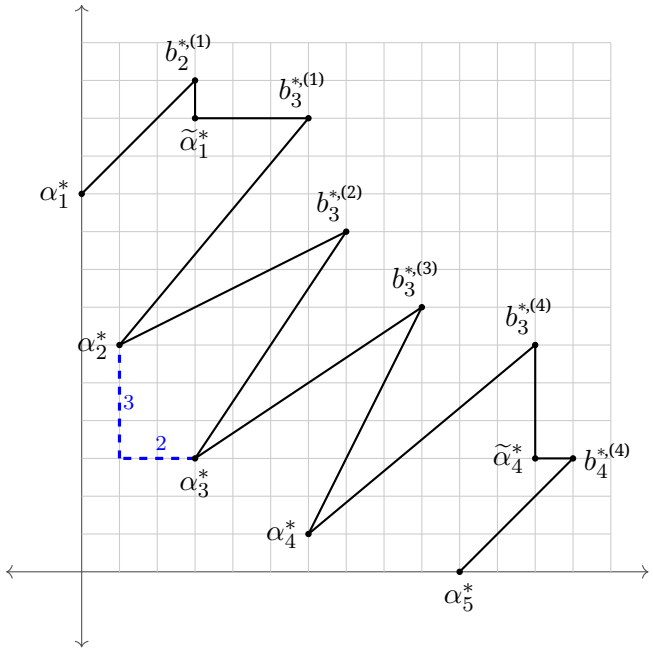

FIGURE 1. 复形 C_3^*定义为 C_3 的对偶复形。坐标轴表示 $\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$作用。实心点是生成元，以抽象方式标出，缺少实际的 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$标记；边表示微分。

证明。这由命题 2.3 以及 C_n^* 是 C_n的对偶复形这一事实得出。 □

我们记 录命题 2 中 $n \geq 3$ 对应的复形 C_n^* 的若干显著特征。 7:

引理 2.8。我们有以下不等式

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_s^*, \mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \widetilde{\alpha}_s^* \leq \mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_n^* - 2n, \quad \text{for } s \leq n-1.$$

类似地,

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\, \alpha_s^*, \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\, \widetilde{\alpha}_s^* \leq \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\, \alpha_n^* - 2n, \quad \text{for } s \geq n+1.$$

证明。我们有

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_{n-1}^* = \mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_n^* - 2n.$$

另请注意以下等式:

(9) $\mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \widetilde{\alpha}_s^* = \mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_{s+1}^* - n(n+1)$ 当 $1 \leq s \leq n-2$ 时

(10) $\mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \widetilde{\alpha}_s^* = \mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_s^* - n(n-1) + 2(n-s-1)$ 当 $1 \leq s \leq n-2.$ 时

特别是,

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_s^* \leq \mathrm{gr}_{\mathcal{V}}\, \alpha_{s+1}^* - 2n - 2$$

当 $1 \leq s \leq n-2.$ 时

由此，对于所有 $1 \leq s \leq n-1$， α_s^* 的引理断言得证。关于 $\widetilde{\alpha}_s^*$ 的陈述由 (9) 得出。

$\mathrm{gr}_{\mathcal{U}}$ 的情形也可类似地处理，其中我们使用

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\, \alpha_{n+1}^* = \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\, \alpha_n^* - 2n,$$

并且还计算：

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\,\widetilde{\alpha}_s^* = \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\,\alpha_s^* - n(n+1) \qquad \text{for } n+1 \le s \le 2n-2$$

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\,\widetilde{\alpha}_s^* = \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\,\alpha_{s+1}^* - n(n-1) + 2(s-n) \qquad \text{for } n+1 \le s \le 2n-2.$$

特别地，

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\,\alpha_{s+1}^* \le \mathrm{gr}_{\mathcal{U}}\,\alpha_s^* - 2n - 2$$

对于 $n+1 \le s \le 2n-2$. 由此，对于 α_s^* 对所有 $n+1 \le s \le 2n-1$，引理的结论成立。$\widetilde{\alpha}_s^*$ 的陈述由（11）得出。□

引理 2.9. 对于 $n \ge 3$，令 ϕ: $C_n^* \to C_n^*$ 为一个双分次为（c_1，c_2）的链映射，其中 $c_1 > -2n$ 且 $c_2 > -2n$。则 ϕ（α_n^*）要么是 α_n^* 的 $\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]$倍，要么为 0。

证明。根据引理 2.8，C_n^* 中所有其他作为闭链的生成元，其 $\mathcal{U}$ 分次或 $\mathcal{V}$ 分次均小于 α_n^* 的相应分次。b^*型项的任何线性组合都不是闭链，因此 ϕ（α_n^*）仅由 $\langle\alpha_n^*\rangle$支撑。□

引理 2.10. 对于 $n \ge 3$，设 ϕ: $C_n^* \to C_n^*$ 是一个齐次链映射，其次数如引理 2.9 所述，且 $\phi(\alpha_n^*)$ 是 $C_n^* \otimes \mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}=1]/(\mathcal{U}^{n-1})$ 中的一个边界。那么 $\phi(\alpha_n^*)$ 必须能被 $\mathcal{U}^{n-1}$ 整除。

证明. 根据引理 2.9，$\phi(\alpha_n^*) = c\alpha_n^*$，其中 $c \in \mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]$ 是某个元素。考虑 C_n^* 模 $\mathcal{V}=1$、$\mathcal{U}^{n-1}=0$ 的微分，我们得到：$c\alpha_n^*$ 在这个商环上是一个边界，当且仅当 $\mathcal{U}^{n-1} \mid c$。□

如果一个环 $\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]$ 上的链复形 D 满足 $H_*(D \otimes \mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}=1]) = \mathbb{F}[\mathcal{U}]$，我们就称它为 S^3-纽结型。特别地，如果 D 是 S^3 中某个纽结的结 Floer 复形，那么 D 是 S^3-纽结型。

引理 2.11. 对于 $n \ge 3$，设 f 是从 C_n^* 到一个 S^3-类结复形 D 的映射，并设 g 是从 D 到 C_n^* 的映射。那么 $gf(\alpha_n^*)$ 是 $C_n^* \otimes \mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}=1]/(\mathcal{U}^{n-1})$ 中的一个边界。

证明。通过考虑 $b^*,\ {}_n{}^{(n-1)}$，我们有

$$\mathcal{U}^{n(n-1)/2+1}\mathcal{V}^{n(n+1)/2}\alpha_n^* + \mathcal{U}^{n(n+1)/2}\mathcal{V}^{n(n-1)/2}\alpha_{n-1}^*$$

是一个边界。令 $V=1$,

$$\mathcal{U}^{n(n-1)/2+1}(f(\alpha_n^*) + \mathcal{U}^{n(n+1)/2-n(n-1)/2-1}f(\alpha_{n-1}^*)) \text{ is a boundary in } C_n/(\mathcal{V}=1)$$

由于 S^3-类结复形中任何在 $(\mathcal{V}=1)$ 同调中为 $\mathcal{U}$-挠的循环实际上在同调中为零，因此我们有

$$f(\alpha_n^*) + \mathcal{U}^{n-1}f(\alpha_{n-1}^*)$$

是 $D/(\mathcal{V}=1)$ 中的一个边界。因此 $f(\alpha_n^*)$ 是 $D/(\mathcal{V}=1,\mathcal{U}^{n-1}=0)$ 中的一个边界。由于 g 是链映射，$gf(\alpha_n^*)$ 也同样成立。□

引理 2.12. 对于 $n \ge 3$，设 f 是从 C_n^* 到类结复形 D 的局部映射。不存在局部映射 g: $D \to C_n^*$，使得 $g \circ f$ 的双分次为 (c_1,c_2)，且 $c_1 > -2n+2$ 和 $c_2 > -2n$。

证明. 综合前面的引理，我们得到

$$gf(\alpha_n^*) = \mathcal{U}^{-c_1/2}\mathcal{V}^{-c_2/2}\alpha_n^*.$$

根据引理 2.11， $gf(\alpha_n^*)$ 模 $\mathcal{U}^{n-1} = 0$ 是边界， $\mathcal{V} = 1$，因此 $n-1 \le -c_1/2$。也就是说， $-2n+2 \ge c_1 > -2n+2$，矛盾。

□

定理 1.2 的证明：当 $n = 2$ 时，对于任意纽结 $J \subset S^3$，根据 [DHST21，定理 10.1]，我们有 $\varphi_{i,\,j}(S^3, J) = 0$ 对任意 $j \neq 0$ 均成立，因此引理 2.5 排除了 (Y_2, K_2) 与 (S^3, J) 之间存在同调共边的可能性。

现在假设 $n \ge 3$. 。设有一对 (W, S)，如定理 1.2 之前的讨论所述，且 S 的亏格为 $g \le n-2$。那么，对于任意选择的 (c_1, c_2)，$(d_1, d_2) \in (2\mathbb{Z})^2$，使得 c_i、$d_i \le 0$ 和 $c_1 + c_2 = -2g = d_1 + d_2$，存在局部映射 $f\colon C_n \to \mathrm{CFK}(J)$ 和 $g\colon \mathrm{CFK}(J) \to C_n$，其双分次分别为 (c_1, c_2)、(d_1, d_2)。令 f 的双分次为 $(0, -2g)$， g 的双分次为 $(-2g, 0)$。根据假设， $-2g \ge -2n+4$，因此可应用引理 2.12 得出这样的 f、g 不存在，矛盾。□

3. Preliminaries on the filtered mapping cone formula

我们首先回顾 Ozsv´ath 和 Szab´o 关于环 $\mathbb{F}[U, U^{-1}]$ 上的结 Floer 复形的原始定义，因为在这一框架下，滤过映射锥公式最便于定义。

在原始定义中，结 Floer 复形由环 $\mathbb{F}[U, U^{-1}]$ 上两个拉格朗日子流形的交点自由生成；其微分同样对全纯圆盘计数，但权重取决于这些圆盘与其中一个基点的交数。另一个基点的数据则编码在 Alexander 分次中。这个版本的结 Floer 复形记作 $\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$，通常表示在 (i, j) 平面中，其中 j 坐标由 Alexander 分次给出， i 坐标则是由 U 作用自然诱导的归一化过滤层级。我们常将 $\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$ 视为带有由 Alexander 分次给出的额外过滤的链复形。将 Alexander 过滤压缩后，便可得到与底层三维流形相关联的链复形 $\mathrm{CF}^\infty(Y)$。

$\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$上存在一个马斯洛分次，对应于 $\mathrm{gr}u$；在 $\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$ 上乘以 U，等价于在 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]}(Y, K)$ 上乘以 $\mathcal{U}\mathcal{V}$。尽管设定略有不同，$\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$ 包含的信息与 $\mathrm{CFK}^{\mathbb{F}[\mathcal{U},\mathcal{V}]}(Y, K)$ 相同。在 $\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$ 的设定下，局部等价定义如下。

定义 3.1. 若存在保持马斯洛夫分次的过滤局部映射，则称两个关于 $\mathbb{F}[U, U^{-1}]$ 的过滤链复形 C_1 和 C_2 局部等价。

$$f\colon C_1 \to C_2 \qquad \text{and} \qquad g\colon C_2 \to C_1.$$

在本文余下部分，我们始终使用结 Floer 复形 $\mathrm{CFK}^\infty(Y, K)$。接下来，我们为读者回顾 [Zho22] 中的过滤映射锥公式；这是我们的主要计算工具。

设 $K \subset S^3$ 是一个亏格等于 g. 的纽结。对于给定的正整数 p，令 $\mu_{p,\,1}$ 表示 K 上的 $+1$ 手术中 K. 的子午线的（p, 1）-缆结。根据 [Zho22，定理

1.9], 结 Floer 复形 CFK$^\infty$($S^3_1(K)$ $\mu_{p,\ 1}$) 与双重过滤链复形 $X_p^\infty(K)$ 过滤链同伦等价，后者定义为以下对象的映射锥

$$\bigoplus_{s=-g+1}^{g+p-1} A_s \xrightarrow{v_s+h_s} \bigoplus_{s=-g+2}^{g+p-1} B_s, \tag{13}$$

其中 A_s和 B_s均同构于 CFK$^\infty$(S^3, K)，并带有 (i, j) 坐标。映射 v_s: $A_s \to B_s$ 是恒等映射，而映射 h_s: $A_s \to B_{s+1}$ 是沿着 $i = j$反射后与 U^s复合。注意，结 Floer 同调的帽、负和无穷版本，都有相应的过滤映射锥公式。在以下计算中，我们将始终使用 A_s 和 B_s 复形以及 v_s和 h_s 映射的无穷版本，因此省略上标。

令 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 为双重过滤，并令 gr$_M$ 为滤过映射锥复形 $X_p^\infty(K)$ 上的绝对 Maslov 分次。全文中我们将专门用字母 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 表示这些对象。我们有

对于 [x i, j] $\in A_s$,

$$\mathcal{I}([\mathbf{x}, i, j]) = \max\{i, j - s\} \tag{14}$$

$$\mathcal{J}([\mathbf{x}, i, j]) = \max\{i - p, j - s\} + ps - \frac{p(p-1)}{2} \tag{15}$$

$$\mathrm{gr}_M([\mathbf{x}, i, j]) = \widetilde{\mathrm{gr}}([\mathbf{x}, i, j]) + s(s-1) \tag{16}$$

以及对于 [x i, j] $\in B_s$,

$$\mathcal{I}([\mathbf{x}, i, j]) = i \tag{17}$$

$$\mathcal{J}([\mathbf{x}, i, j]) = i - p + ps - \frac{p(p-1)}{2} \tag{18}$$

$$\mathrm{gr}_M([\mathbf{x}, i, j]) = \widetilde{\mathrm{gr}}([\mathbf{x}, i, j]) + s(s-1) - 1. \tag{19}$$

这里， ˜gr 表示原始链复形 CFK$^\infty$(S^3, K) 上的绝对 Maslov 分次。容易验证，对于 $s < -g + 1$，映射 h_s 在同调上诱导一个同构；对于 $s > g + p - 1$，映射 v_s(K) 在同调上诱导一个同构，这为映射锥的截断提供了依据。

计算的一般策略是为 X_p^∞(K) 求一个约化基，使得微分中的每一项都严格降低至少一个过滤。这可以通过消去过程实现（例如参见 [LOT18，命题 11.57]），具体如下：假设 $\partial x_i = y_i +$ 是过滤较低的项，且 y_i 的双重过滤与 x_i相同，那么由所有此类 $\{x_i, \partial x_i\}$ 生成的 X_p^∞(K) 的子复形是无环的，并且X_p^∞(K) 对该复形取商后是约化的。另一种看待上述过程的方式是将其视为一次基变换，它分离出一些无环直和项，而每个直和项都完全位于一个双重过滤层级中。

映射锥上有如下显而易见的对称性。设 [x i, j] $\mapsto$ [ψ(x) j, i] 是一个同伦等价，它在原链复形 CFK$^\infty$(S^3, K) 上实现了该对称性。在下面的引理中，我们用下标标记来自 A_s 或 B_s 的元素。

命题 3.2. 设 $\Psi\colon X_p^\infty(K) \longrightarrow X_p^\infty(K)$ 为如下定义的映射

对于 $[\mathbf{x}\ i,j]_s \in A_s$,

$$\Psi([\mathbf{x},i,j]_s) = U^{\frac{(p-1)(p-2s)}{2}}[\psi(\mathbf{x}),j,i]_{p-s} \in A_{p-s} \tag{20}$$

对于 $[\mathbf{x}\ i,j]_s \in B_s$,

$$\Psi([\mathbf{x},i,j]_s) = U^{\frac{p(p-2s+1)}{2}}[\mathbf{x},j,i]_{p-s+1} \in B_{p-s+1}. \tag{21}$$

于是， Ψ 是一个链映射，它在双重滤过链复形 $\mathrm{CFK}^\infty(S^3_1(K),\mu_{p,\ 1})$ 上实现一个同伦等价，并交换 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 过滤。

证明。根据定义， Ψ 是 U–等变的，因此只需证明，对于任意一个 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 值， Ψ 都实现该对称性。

在每个链复形 A_s 上，由 (14) 和 (15)，我们有 $\{\mathcal{I}=0\} = \max\{i, j-s\}$ and $\{\mathcal{J} = ps - \frac{p}{(p-1)_2}\ \} = \max\{i-p, j-s\}$。计算

$$\begin{aligned}
\Psi(\{\mathcal{I}=0\}_s) &= U^{\frac{(p-1)(p-2s)}{2}}\max\{i-s,j\}_{p-s}\\
&= U^{\frac{(p-1)(p-2s)}{2}+(p-s)}\max\{i-p,j-(p-s)\}_{p-s}\\
&= U^{\frac{p^2+p-2ps}{2}}\{\mathcal{J} = p(p-s)-\frac{p(p-1)}{2}\}_{p-s}\\
&= \{\mathcal{J}=0\}_{p-s}\\
\Psi(\{\mathcal{J} = ps-\frac{p(p-1)}{2}\}_s) &= U^{\frac{(p-1)(p-2s)}{2}}\max\{i-s,j-p\}_{p-s}\\
&= U^{\frac{(p-1)(p-2s)}{2}-s}\max\{i,j-(p-s)\}_{p-s}\\
&= \{\mathcal{I} = ps-\frac{p(p-1)}{2}\}_{p-s}
\end{aligned}$$

而对于 B_s 的计算也类似，这里留给读者完成。此外，根据定义，我们有 $\Psi\circ v_s = h_s\circ\Psi$，并且 $\Psi\circ h_s = v_s\circ\Psi$，因此 Ψ 是一个链映射。□

4. Cables of the knot meridian of $-T_{2n,2n+1}$

本节中，我们将进行滤过映射锥计算，以确定命题 2.3 和引理 2.5 中的纽结 Floer 复形。

给定 $n\geq 1$，设 $T_{2n,\ 2n+1}$ 为 $(2n, 2n+1)$-环面结，其亏格等于 $n(2n-1)$。计算其亚历山大多项式是个有趣的练习，结果如下

$$\frac{(t^{2n(2n+1)}-1)(t-1)}{(t^{2n}-1)(t^{2n+1}-1)} = \frac{t^{(2n-1)(2n+1)}+t^{(2n-2)(2n+1)}+\cdots+1}{t^{2n-1}+t^{2n-2}+\cdots+1} =$$
$$1+\sum_{i=0}^{2n-2}\left(t^{(2n-i)(2n-1)-i}-t^{(2n-i)(2n-1)-2i-1}\right).$$

例如，若令 $S_{2n}(i) = \left(t^{(2n-i)(2n-1)-i} - t^{(2n-i)(2n-1)-2i-1}\right)\left(t^{2n-1} + t^{2n-2} + \cdots + 1\right)$ for$i = 0$, 1, $\cdots, 2n-2$，通过归纳法可得，对于 $0 \le \ell \le 2n-2$

$$\sum_{i=0}^{\ell} S_{2n}(i) = t^{(2n-1)(2n+1)} + \cdots + t^{(2n-\ell-1)(2n+1)} - t^{(2n-\ell)(2n-1)-\ell-1} - \cdots - t^{(2n-\ell)(2n-1)-2\ell-1}.$$

取 ℓ 为 $2n-2$，即可得到答案。

环面结是 L–空间结。因此，根据 [OS05，定理 1.2]，，结 Floer 复形 CFK$^\infty$(S^3,$T_{2n,}$ $_{2n+1}$) 由 a_i^* 生成，其坐标为 (0, $_{(2n-i)(2n-i+1)\ 2}$ $^{-}{}_{i(i-1)\ 2}$)，其中 $i \in \{1, \cdots, 2n\}$；并由 b_i^* 生成，其坐标为 (0, $_{(2n-i)(2n-i+1}$ $_{\underline{i(i+1)}\ )}$)，其中 $i \in \{1, \cdots, 2n-1\}$ （事实上，这是一组来自 HFK 模型的生成元），微分由下式给出

$$\partial b_i^* = U^i a_i^* + a_{i+1}^*.$$

由 [OS04a，命题 3.8]，可知，镜像结的结 Floer 复形是原结的对偶复形。因此，CFK$^\infty$(S^3,$-T_{2n,2n+1}$) 由 a_i 生成，其坐标为 (0, $-\frac{(2n-i)(2n-i+1)}{2}$ + $^{i}{}_{(i-1)\ 2}$)，其中 $i \in \{1, \cdots, 2n\}$；并由 b_i 生成，其坐标为 (0, $-\frac{(2n-i)(2n-i+1)}{2}$ + $^{i}{}_{(i+1)\ 2}$)，其中 $i \in \{1, \cdots, 2n-1\}$ （只需取 a_i 为 a_i^* 的对偶，取 $\overline{b_i}$ 为 b_i^* 的对偶即可）。作为记号简写，我们令 $g_a(n,i)$: $= -\frac{(2n-i)(2n-i+1)}{2} + {}^{i}{}_{(i-1)\ 2}$，$g_b(n,i) := -\frac{(2n-i)(2n-i+1)}{2} + {}^{i}{}_{(i+1)\ 2}$。注意，$g_a(n,i) + i = \overline{g_b(n,i)}$。微分由下式给出

$$\partial a_i = \begin{cases} Ub_i, & i = 1 \\ b_{i-1}, & i = 2n \\ U^i b_i + b_{i-1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

请注意，从 a_i 到 b_i 的（水平）箭头长度为 i，而从a_i到 b_{i-1}的（垂直）箭头长度为 $2n-i+1$。图 2 给出了当$n = 3$.时 CFK$^\infty$(S^3,$-T_{2n,\ 2n+1}$) 的一个例子

有趣的例子由以下配对给出：(S_1^3($-T_{2n,\ 2n+1}$) $\mu_{2n-1,\ 1}$)，其中 $\mu_{2n-1,\ 1}$是对偶结的 ($2n-1$, 1)-缆结。为了计算这些例子的结 Floer 复形，我们对 $-T_{2n.2n+1}$上对偶结的缆结应用过滤映射锥公式，手术系数为 $+1.$ 。按照第 3 节中所述的步骤，过滤链复形 CFK$^\infty$(S_1^3 ($-T_{2n,\ 2n+1}$) $\mu_{2n-1,\ 1}$) 与过滤复形 X_{2n-1}^{∞}($-T_{2n,\ 2n+1}$) 在过滤同伦意义下等价，后者由以下映射锥定义

$$\bigoplus_{s=-n(2n-1)+1}^{(n+1)(2n-1)-1} A_s \xrightarrow{v_s+h_s} \bigoplus_{s=-n(2n-1)+2}^{(n+1)(2n-1)-1} B_s.$$

通过与 CFK$^\infty$(S^3,$-T_{2n,\ 2n+1}$) 的同构，将 A_s 中相应的生成元记为 $a_i^{(s)}$ 和 $b_i^{(s)}$，将 B_s 中的生成元记为 $a_i'^{(s)}$ 和 $b_i'^{(s)}$，其中 i 和 s 取适当的值。回想一下，我们专门用 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 表示整个映射锥复形上的双重过滤。利用公式 (14)、(15)、(17) 和 (18)，计算上述生成元的 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 过滤相当直接。我们将结果整理为以下引理，其中

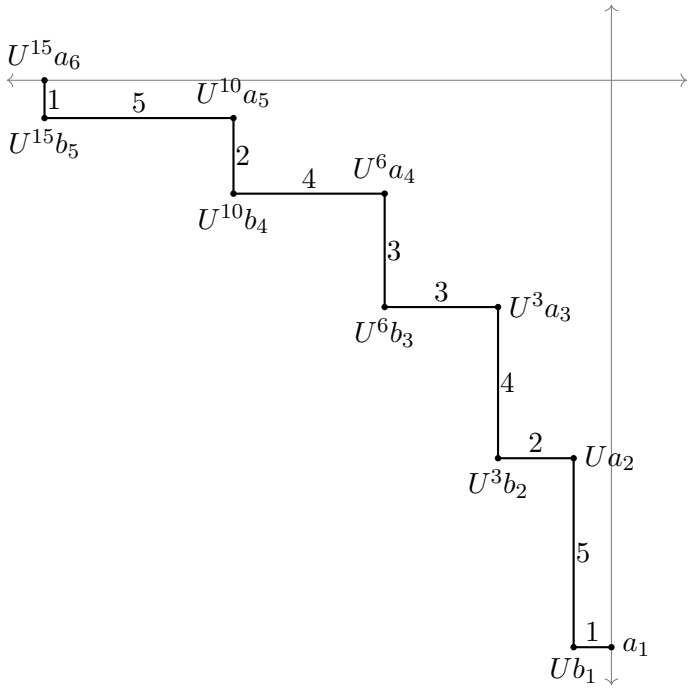

FIGURE 2. 结 Floer 复形 $\mathrm{CFK}^\infty(S^3,-T_{6,7})$。实心圆点表示生成元。微分指向较低的过滤层级，数字表示其长度。

结果整理为以下引理，其中 $g_a(n,i)$ 和 $g_b(n,i)$ 是上一段中定义的量。另定义一个记号简写

$$f(n,s) \coloneqq -\frac{(n-1)n}{2} + ns. \tag{22}$$

注意，$f(n,s-1) + n = f(n,s)$。

引理 4.1。在复形 $X^\infty_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})$中，我们有

$$\mathcal{J}(a_i^{(s)}) = \begin{cases} f(n,s) + g_a(n,i) - s, & s \le g_a(n,i) + 2n - 1 \\ f(n,s-1), & s > g_a(n,i) + 2n - 1 \end{cases} \tag{23}$$

$$\mathcal{J}(b_i^{(s)}) = \begin{cases} f(n,s) + g_b(n,i) - s, & s \le g_b(n,i) + 2n - 1 \\ f(n,s-1), & s > g_b(n,i) + 2n - 1; \end{cases} \tag{24}$$

$$\mathcal{I}(a_i^{(s)}) = \mathcal{I}(b_i^{(s)}) = \mathcal{I}(a_i'^{(s)}) = \mathcal{I}(b_i'^{(s)}) = 0; \tag{25}$$

$$\mathcal{J}(a_i'^{(s)}) = \mathcal{J}(b_i'^{(s)}) = f(n,s-1). \tag{26}$$

在接下来的计算中，我们假设 $n \ge 3$.（$n = 1$，2 的情形不符合以下模型。这两种情形的结果记录在引理 4.5 中。）

我们首先旨在得到 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 的生成元的约化模型。除过滤同伦等价外，作为 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 的子复形，每个 B_s 都是一维的。事实上，商去 $\{a_i^{\prime(s)}, \partial a_i^{\prime(s)}\}_{2\le i\le 2n}$ 后，每个 B_s 中只剩下一个生成元 $a_1^{\prime(s)}$。

每个 A_s 都是商复形 $\bigoplus_s A_s$ 的子复形，它自然继承了 $(\mathcal{I},\mathcal{J})$ 过滤。我们希望为每个 A_s 获得一个约化模型。在接下来的部分中，暂时令 ∂ 表示限制在每个子商复形 A_s 上的微分，以区别于整个链复形 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 上的微分。根据约化模型的维数，复形 A_s 分为两种类型。

当 $s\in[-n(2n-1)\ -n(2n-1)+2n]\cup\{-n(2n-1)+2jn-1$ 时，$-n(2n-1)+2jn\}_{1\le j\le 2n-2}\cup[n(2n-1)\ -1,\ (n+1)(2n-1)\ -1]$；商去 $\{a_i^{(s)}, \partial a_i^{(s)}\}_{2\le i\le 2n-1}$ 后，A_s 的约化模型是 3 维的。

- 当 $s\in[-n(2n-1)\ -n(2n-1)+2n]$ 时，约化模型由 $\{a_{(s)\,2n}$、$b_{(s)\,1}$、$a_{(1}{}^{s}\}_{)}$ 生成，其修正后的微分为：

$$\partial a_1^{(s)} = Ub_1^{(s)}, \qquad \partial a_{2n}^{(s)} = U^{-n(2n-1)+1}b_1^{(s)}.$$

- 当 $s\in\{-n(2n-1)\ +2jn-1$、$-n(2n-1)\ +2jn\}_{1\le j\le 2n-2}$ 时，约化模型由 $\{a_{(s)\,2n}$、$b_{(s)\,j}$、$a_{(1}{}^{s}\}_{)}$ 生成，修正后的微分为

$$\partial a_1^{(s)} = U^{\frac{j(j+1)}{2}}b_j^{(s)}, \qquad \partial a_{2n}^{(s)} = U^{-n(2n-1)+\frac{j(j+1)}{2}}b_j^{(s)}.$$

- 当 $s\in[n(2n-1)\ -1$、$(n+1)(2n-1)\ -1]$ 时，约化模型由 $\{a_{(s)\,2n}$、$b_{(s)\,2n-1}$、$a_{(1}{}^{s}\}_{)}$ 生成，其修正后的微分为

$$\partial a_1^{(s)} = U^{n(2n-1)}b_{2n-1}^{(s)}, \qquad \partial a_{2n}^{(s)} = b_{2n-1}^{(s)}.$$

当 $s\in\bigcup_{1\le j\le 2n-2}[-n(2n-1)\ +2jn+1$、$-n(2n-1)\ +2(j+1)n-2]$ 时，A_s 的约化模型是 5 维的。事实上，除去 $\{a_i^{(s)}, \partial a_i^{(s)}\}_{j\in[2,j]\cup[j+2,2n-1]}$ 后，剩下的生成元为 $\{a_{2n}^{(s)}, b_{j+1}^{(s)}, a_{j+1}^{(s)}, b_j^{(s)}, a_1^{(s)}\}$。与前一种情形的区别在于，$\partial a_{j+1}^{(s)}$ 中的两项都会严格降低 $\mathcal{I}$ 或 $\mathcal{J}$ 分次，因此会保留在约化复形中。修正后的微分为

$$\partial a_1^{(s)} = U^{\frac{j(j+1)}{2}}b_j^{(s)}, \qquad \partial a_{j+1}^{(s)} = b_j^{(s)} + U^{j+1}b_{j+1}^{(s)},$$
$$\partial a_{2n}^{(s)} = U^{-n(2n-1)+\frac{(j+1)(j+2)}{2}}b_{j+1}^{(s)}.$$

最后，考虑整个链复形 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})$，并对 A_s 和 B_s. 都使用约化模型。令 ∂ 表示整个映射锥复形（包括v_s和 h_s映射）的微分。注意，对于 $-n(2n-1)\ +1\le s\le n(2n-1)$，有 $h_s(U^{-s}a_{2n}^{(s)}) = a_1^{\prime(s+1)} = v_{s+1}(a_1^{(s+1)})$；而 $\mathcal{I}(U^{-s}a_{2n}^{(s)}) = \mathcal{I}(a_1^{\prime(s+1)}) = \mathcal{I}(a_1^{(s+1)})$，并且 $\mathcal{J}(U^{-s}a_{2n}^{(s)}) = \mathcal{J}(a_1^{\prime(s+1)}) \le \mathcal{J}(a_1^{(s+1)})$，其中当 $s\ge -(n-1)(2n-1)$ 时得到最后一个等式。因此，我们可以对 $\{a_{2n}^{(s)}, \partial a_{2n}^{(s)}\}$ 取商，使得 $-n(2n-1)\ +1\le s\le n(2n-1)$。若令 α_s表示 $a_1^{(s)}$ 在 $-n(2n-1)+1\le s\le n(2n-1)\ +1$的商中的像，请注意，对于 $-n(2n-1)\ +2\le s\le n(2n-1)\ +1$，这相当于一次基变换 $a_1^{(s)}\mapsto U^{-s+1}a_{2n}^{(s-1)}+$

$a_1^{(s)}$ ，随后是一个同伦等价。类似地，我们可以对 $\{a_1^{(s)}, \partial a_1^{(s)}\}$ 取商，使得$n(2n-1)+2 \le s \le (n+1)(2n-1)-1$。

我们得到了 $X^\infty_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 的一个约化模型。注意， B_s 中没有生成元存留于约化基中。此外，从商复形的角度来看，限制在 A_s 上的诱导微分 ∂ 是一个映射 $\partial\colon\ A_s \to A_s \oplus A_{s-1}$，其中 $-n(2n-1)+2 \le s \le n$，并将 α_s 视为 A_s 的一个元素。不过，我们通常会采用基变换的观点，并将 α_s 视为 $A_s \oplus A_{s-1}$ 的一个元素，主要是因为这与映射锥复形上的对称性相契合。

考虑到 $X^\infty_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 上的对称性（见命题 3.2），我们的策略是聚焦于复形的“前半部分”，也就是以下映射的映射锥

$$\bigoplus_{s=-n(2n-1)+1}^{n-1} A_s \xrightarrow{v_s+h_s} \bigoplus_{s=-n(2n-1)+2}^{n} B_s,$$

在当前基下，它就是链复形

$$\bigoplus_{s=-n(2n-1)+1}^{n-1} A_s.$$

因此，我们在下面的引理中总结这个第一半复形的生成元与关系。（为保证连续性，我们也纳入那些 A_s，其中 s 位于区间 $[n, 2n-1]$ 内。）令 $\widetilde{\alpha}_s$ 表示当 $s \in [-n(2n-1)+2jn+1,\ -n(2n-1)+2(j+1)n-2]$ 时的 $a_{j+1}^{(s)}$，对每个$1 \le j \le n$.

引理 4.2. 在上面选取的约化基下，我们有

- 当 $s \in [-n(2n-1)+1,\ -n(2n-1)+2n]$时，复形 A_s 由 α_s 和$b_{(s)\ 1}$生成，其中微分定义如下：

$$\partial\alpha_s = \begin{cases} U b_1^{(s)}, & s = -n(2n-1)+1 \\ U^{-s+2} b_1^{(s-1)} + U b_1^{(s)}, & s > -n(2n-1)+1. \end{cases} \tag{27}$$

- 当 $s \in [-n(2n-1)+2jn+1,\ -n(2n-1)+2(j+1)n-2]$ 且存在某个 $1 \le j \le n$ 时，复形 A_s 由 α_s、$\widetilde{\alpha}_s$、$b_{(s)\ j}$ 以及 $b_{(s)\ j+1}$ 生成，其中微分定义如下：

$$\partial\alpha_s = \begin{cases} U^{-s+1+\frac{j(j+1)}{2}} b_j^{(s-1)} + U^{\frac{j(j+1)}{2}} b_j^{(s)}, & s = -n(2n-1)+2jn+1, \\ U^{-s+1+\frac{(j+1)(j+2)}{2}} b_{j+1}^{(s-1)} + U^{\frac{j(j+1)}{2}} b_j^{(s)}, & s > -n(2n-1)+2jn+1, \end{cases} \tag{28}$$

$$\partial\widetilde{\alpha}_s = b_j^{(s)} + U^{j+1} b_{j+1}^{(s)}. \tag{29}$$

- 对于 $s \in \{-n(2n-1)+2jn-1,\ -n(2n-1)+2jn\}$，在某些 $2 \le j \le n$下，复形A_s 由 α_s 和 $b_{(s)\ j}$ 生成，其中微分定义为

$$\partial\alpha_s = U^{-s+1+\frac{j(j+1)}{2}} b_j^{(s-1)} + U^{\frac{j(j+1)}{2}} b_j^{(s)}. \tag{30}$$

证明。这由前面的讨论可知。 □

我们将在下一个引理中证明，在局部等价的意义下，我们可以进一步截断映射锥。定义 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})\langle\ell\rangle$ for $\ell\in\mathbb{Z}$ 为滤过映射锥

$$\bigoplus_{s=-\ell+2n-1}^{\ell} A_s \xrightarrow{v_s+h_s} \bigoplus_{s=-\ell+2n}^{\ell} B_s,$$

在约化基下，它化简为过滤链复形

$$\bigoplus_{s=-\ell+2n-1}^{\ell} A_s.$$

注意，在此记号下 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1}) = X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})\langle(n+1)(2n-1) - 1\rangle$。

引理 4.3. 经过基变换，过滤复形 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})$ 同构于 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})\langle 2n-1\rangle\oplus D$，其中 $H_*(D) = 0$。

证明. 只需证明，对于任意 $2n\le\ell\le(n+1)(2n-1)-1$，复形 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})\langle\ell\rangle$ 同构于 $X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,2n+1})\langle\ell-1\rangle\oplus D'$，其中 $H_*(D') = 0$，且同构关系在基变换意义下成立。对于每个这样的 ℓ，我们将证明存在一种过滤基变换，使复形 $A_{-\ell+2n-1}$成为一个直和项。根据命题 3.2 给出的对称性，也存在一种过滤基变换，使 A_ℓ 在新基下成为一个直和项，正如所需。令 $s=-\ell+2n-1.$。回想一下，我们将 α_s 视为 $A_s\oplus A_{s-1}.$ 中的一个元素

- 对于 $s\in[-n(2n-1)+2,-n(2n-1)+2n+1]$，进行基变换

$$\alpha_s\longmapsto\alpha_s+U^{-s+1}\alpha_{s-1}.$$

  根据 (27) 和 (28)，这就按要求分离出一个无环直和项。由于根据 (23)，$\mathcal{J}(\alpha_s) = \mathcal{J}(a_1^s) > \mathcal{J}(a_1^{s-1}) = \mathcal{J}(\alpha_{s-1})$，显然此基变换是过滤的。
- 对于 $s\in[-n(2n-1)+2jn+2,-n(2n-1)+2(j+1)n-1]$ 对于某个 $1\le j\le n-1$，且当 $s\le 1$ 时，进行基变换

$$\alpha_s\longmapsto\alpha_s+U^{-s+1}\big(\alpha_{s-1}+U^{\frac{j(j+1)}{2}}\widetilde{\alpha}_{s-1}\big).$$

  根据 (28)、(29) 和 (30)，这就按要求分离出一个无环直和项。当 $s\le 1.$ 时，此基变换显然是过滤的（等式在与 $j=n-1$ 相关联的区间内取到。）

- 对于 $s\in\{-n(2n-1)+2jn,\ -n(2n-1)+2jn+1\}$，取某个 $2\le j\le n-1$（注意到 $s<0$ 总是成立），进行基变换

$$\alpha_s\longmapsto\alpha_s+U^{-s+1}\alpha_{s-1}.$$

  显然，这一基变换仍然是滤过的。

□

因此，$X^{\infty}_{2n-1}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 的局部等价类在约化基下由 $\bigoplus_{s=0}^{2n-1}A_s$ 给出。这个复形中的微分已由引理 4.2 给出，而生成元的滤过由引理 4.1 给出。在下面的引理中，我们将推导由微分关联的生成元之间的 $\mathcal{J}$–过滤位移。

假设 $U^c\beta$ 是 $\partial\alpha$ 中的一个非平凡项，其中 β 用来表示某个 $b_i^{(s)}$，而 α 用来表示某个 α_s 或 $\widetilde{\alpha}_s$。定义

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha,\beta) = (\mathcal{I},\mathcal{J})(\alpha) - (\mathcal{I},\mathcal{J})(U^c\beta) \tag{31}$$

并类似地定义 $\Delta_{\mathcal{I}}$ 和 $\Delta_{\mathcal{J}}$。

Lem命题 4.4. $\bigoplus_{s=0}^{2n-1} A_s$ 的约化基中的生成元满足以下 .

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_s, b_{n-1}^{(s)}) = \big(\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\big), \qquad 1 \le s \le n-2 \tag{32}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_s, b_{n+1}^{(s-1)}) = \big(\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\big), \qquad n+2 \le s \le 2n-1 \tag{33}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_s, b_{n}^{(s-1)}) = \big(\frac{n(n+1)}{2} - s + 1, \frac{n(n+1)}{2}\big), \qquad 2 \le s \le n \tag{34}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_s, b_{n}^{(s)}) = \big(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} + s - n + 1\big), \qquad n \le s \le 2n-2 \tag{35}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_{n-1}, b_{n}^{(n-1)}) = \big(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\big), \tag{36}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_{n+1}, b_{n}^{(n)}) = \big(\frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2}\big), \tag{37}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\widetilde{\alpha}_s, b_{n-1}^{(s)}) = \big(0, n-1-s\big), \qquad \Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\widetilde{\alpha}_s, b_{n}^{(s)}) = \big(n, 0\big), \qquad 1 \le s \le n-2 \tag{38}$$

$$\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\widetilde{\alpha}_s, b_{n}^{(s)}) = \big(0, n\big), \qquad \Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\widetilde{\alpha}_s, b_{n+1}^{(s)}) = \big(s-n, 0\big), \qquad n+1 \le s \le 2n-2. \tag{39}$$

证明。我们在表 1 中汇总了 $\bigoplus_{s=0}^{2n-1} A_s$引理 4.1 中约化基的生成元的滤过。注意，$g_b(n,n) = 0$ 以及 $g_a(n,n) = -n$。$\mathcal{I}$ 生成元的滤过全部为 0（因此这实际上是 $HFK.$ 的约化模型）

To 证明 (32) 和 (33)，首先由 (28) 可得 $\Delta_{\mathcal{I}}(\alpha_s, b_{n-1}^{(s)}) = {}^{n}_{(n-1)\,2}$ 计算

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{J}}(\alpha_s, b_{n-1}^{(s)}) &= \mathcal{J}(\alpha_s) - \mathcal{J}(b_{n-1}^{(s)}) + \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2},\end{aligned}$$

这证明了 (32)，而 (33) 则由命题 3.2 给出的对称性推出。

为证明 (34) 和 (35)，首先由 (28) 和 (30) 可得 $\Delta_{\mathcal{I}}(\alpha_s, b_{n}^{(s-1)}) = {}^{n}_{(n+1)\,2} \quad -s+1$ 计算

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{J}}(\alpha_s, b_{n}^{(s-1)}) &= \mathcal{J}(\alpha_s) - \mathcal{J}(b_{n}^{(s-1)}) + \frac{n(n+1)}{2} - s + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2},\end{aligned}$$

其中 p 而 (35) 则由命题 3.2 给出的对称性得出。

其余结果可通过类似的计算得出，留给读者完成。

□

生成元	$\mathcal{J}$–过滤	范围
α_s	$f(n,s-1)$	$1\le s\le 2n-1$
$\widetilde{\alpha}_s$	$f(n,s-1)\ +n-1-s$	$1\le s\le n-2$
	$f(n,s-1)$	$n+1\le s\le 2n-2$
$b_n^{(s)}$	$f(n,s)\ -s$	$1\le s\le 2n-2$
$b_{n-1}^{(s)}$	$f(n,s-1)$	$1\le s\le n-2$
$b_{n+1}^{(s)}$	$f(n,s)\ +2n+1-s$	$n+1\le s\le 2n-2$

TABLE 1. $\bigoplus_{s=0}^{2n-1} A_s$ 的约化基中生成元的滤过。

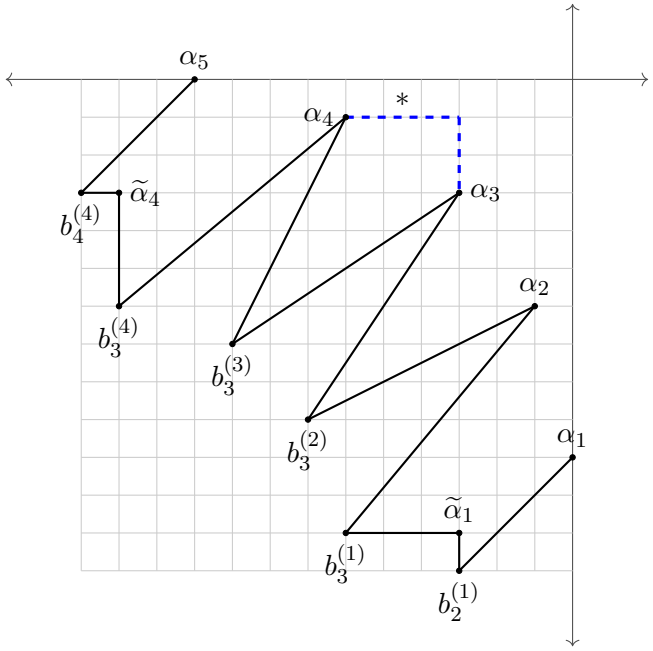

FIGURE 3. 复形 $X_5^{\infty}(-T_{6,7})\langle 5\rangle$ 的约化基，其中坐标由 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 滤过给出。生成元以抽象方式标记，不带 U 次幂。边表示微分；带有 $*$ 的边描绘了这样一个事实的实例：$\Delta_{\mathcal{I}}(\alpha_n, b_n^{(n)}) = \Delta_{\mathcal{I}}(\alpha_{n+1}, b_n^{(n)}) + n$。

当 $n=1$ 和 2 时，复形 $X_n^{\infty}(-T_{2n,\ 2n+1})$ 的局部等价类可沿用类似思路判定。我们将在下一个引理中陈述这一结果，计算过程留作练习，交由读者完成。

引理 4.5. 当 $n=1$ 时，复形 $X_1^\infty(-T_{2,3})$ 是局部平凡的。当 $n=2$ 时，复形 $X_2^\infty(-T_{4,5})$ 具有如下特征的局部复形。

$$\begin{aligned}
\partial\alpha_1 &= U^3 b_2^{(1)},\\
\partial\alpha_2 &= U^2 b_2^{(1)} + U^3 b_2^{(2)},\\
\partial\alpha_3 &= U b_2^{(1)};\\
\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_1, b_2^{(1)}) &= (3,1),\\
\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_2, b_2^{(1)}) &= (2,3),\\
\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_2, b_2^{(2)}) &= (3,2),\\
\Delta_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\alpha_3, b_2^{(2)}) &= (1,3).
\end{aligned}$$

References

[Akb91] S. Akbulut, 《Zeeman 猜想》的一个解答，Topology 30 (1991), no. 3, 513–515. MR 1113692[DHST21] Irving Dai、Jennifer Hom、Matthew Stoffregen 和 Linh Truong, 《同调共边与结 Floer 同调》，arXiv 预印本 arXiv:2110.14803 (2021).[HL19] Matthew Hedden 和 Adam Simon Levine, 《结 Floer 同调的手术公式》，arXiv 预印本 arXiv:1901.02488 (2019).[HLL22] Jennifer Hom、Adam Simon Levine 和 Tye Lidman, 《同调配边中的结一致》，Duke 数学杂志 171 (2022), no. 15, 3089–3131. MR 4497224[Lev16] Adam Simon Levine, 《非满射卫星算子与分段线性一致》，Forum Math. Sigma 4 (2016), Paper No. e34, 47. MR 3589337[LOT18] Robert Lipshitz、Peter S. Ozsvath 和 Dylan P. Thurston, 《边界 Heegaard Floer 同调》，Mem. Amer. Math. Soc. 254 (2018), no. 1216, viii+279. MR 3827056[OS04a] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o, 《全纯圆盘与结不变量》，Adv. Math. 186 (2004), no. 1, 58–116. MR 2065507[OS04b] ———, 《闭三维流形的全纯圆盘与拓扑不变量》，Ann. of Math. (2) 159 (2004), no. 3, 1027–1158. MR 2113019[OS05] ———, 《关于结 Floer 同调与透镜空间手术》，Topology 44 (2005), no. 6, 1281–1300. MR 2168576[Ras03] Jacob Andrew Rasmussen, 《Floer 同调与结补空间》，ProQuest LLC, 安娜堡, MI, 2003, 博士论文–哈佛大学。MR 2704683[Tru21] Linh Truong, 《Ozsv´ath-Szab´o 大整数手术公式的一个精化及结一致》，Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), no. 4, 1757–1771. MR 4242330[Zee64] E. C. Zeeman, 《论邓斯帽》，Topology 2 (1964), 341–358. MR 156351[Zem19] Ian Zemke, 《链环余边界与链环 Floer 同调上的绝对分次》，Quantum Topol. 10 (2019), no. 2, 207–323. MR 3950650[Zho22] Hugo Zhou, 《结子午线缆结的滤过映射锥公式》，arXiv 预印本 arXiv:2208.11289 (2022)。

School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA电子邮箱：hom@math.gatech.edu

Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI, USA电子邮箱：stoffre1@msu.edu

School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA电子邮箱：hzhou@gatech.edu