$A_1^{(1)}$ 型双杨代数的半无限构造

MARIJANA BUTORAC、NAIHUAN JING、SLAVEN KOZIC 和 FAN YANG

Abstract. 我们考察基于 Iohara–Kohn 实现的双杨代数 DY($\mathfrak{gl}_2$) 的某些 1 级无限维模。我们证明这些模具有 Feigin–Stoyanovsky 型拓扑基，即以某些可积算子的半无限单项式表示的基；这些单项式会稳定，并满足差二条件。最后，我们给出这些基在相应量子仿射顶点代数表示论中的若干应用。

arXiv:2301.04732v1 [math.QA] 11 Jan 2023

1. Introduction

可积最高权模是仿射 Kac–Moody 李代数表示论中最基本的概念之一；例如，参见 Kac 的著作[14]。自 Lepowsky 和 Milne 的开创性论文 [16]以来，为这类模及其各种子结构构造不同类型的基，尤其是那些通过特征标公式与 Rogers–Ramanujan 型恒等式建立联系的基，一直受到广泛研究。本文受到著名的 Feigin–Stoyanovsky 半无限单项式基构造[6]的启发，该构造适用于仿射李代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 的某些可积最高权模。该构造依赖于这样一个事实：这些模可以通过 Weyl 平移算子由其主子空间得到。在 1 级时，所得基由以下半无限单项式$x_\alpha(r_1)x_\alpha(r_2)\dots$ 构成，它们是与 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 的正单根 α 相联系的顶点算子 $x_\alpha(z)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}x_\alpha(r)z^{-r-1}$ 的系数。这些单项式的次数 $r_1, r_2, \dots$ 对所有 $j = 1, 2, \dots$ 均满足差二条件 $r_{j+1} \geqslant r_j + 2$，该条件源于 Lepowsky 和 Primc 的可积性关系 $x_\alpha(z)^2 = 0$ [17]。此外，这些单项式会稳定；也就是说，当 n 足够大时，所有次数 $r_n, r_{n+1}, \dots$ 都是连续的奇数或偶数，具体取决于最高权的选择。后来，Ding 和 B. Feigin [1] 利用 I. Frenkel 与第二作者在 [4] 中给出的可积最高权模实现，将半无限构造推广到了量子仿射代数 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ 的情形。

本文旨在为定义在交换环 $\mathbb{C}[[h]]$ 上的中心扩张双杨代数 DY($\mathfrak{gl}_2$) 的某些 1 级无限维模给出一种半无限构造。Iohara 和 Kohno 在 [11] 中为 DY($\mathfrak{gl}_2$) 给出了其玻色实现，这种实现类似于著名的仿射李代数 Frenkel–Kac–Segal 构造 [5, 20]，随后 Iohara [10] 将其推广到高秩情形。我们对 Iohara–Kohno 实现做了轻微修改，因为原平移算子的作用似乎与半无限构造不协调。不过，双杨代数的作用仍定义在同一个 $\mathbb{C}[[h]]$-模上，我们将其记作$\mathcal{F}_i$, $i = 0,1$。与上述仿射李代数和量子仿射代数的情形不同，双杨代数可积表示的一般理论尚未得到充分发展。因此，在我们的构造中，我们常常需要使用

不同且更具技术性的论证，这些论证依赖于双杨代数生成元在 $\mathcal{F}_i$上的作用的显式公式。

受 Ding–Feigin 方法的启发[1], , 我们首先在 $\mathcal{F}_i$, $i = 0,1$ 上定义辅助交换算子$\overline{X}(z)$, 它可视为 1 级仿射顶点算子 $x_\alpha(z)$在杨扬子代数中的对应物。特别地，它满足 h-进可积性关系$\overline{X}(z)\overline{X}(z \pm h) = 0$。我们将它的系数与 [6, 9] 并行使用，引入主子模 $W_i \subset \mathcal{F}_i$ 的概念，并进一步得到 W_i 的拓扑基，为罗杰斯–拉马努金恒等式的求和侧提供一种解释。接下来，我们利用平移算子在 W_i 上的作用，构造双杨代数 $\mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ 的不可约模 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2) \subset \mathcal{F}_i$ ，使其经典极限^恰为最高权为 Λ_i且 $i = 0,1$ 的 1 级可积最高权 $\mathfrak{sl}_2$-模 $L(\Lambda_i)$。最后，我们构造 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2)$的 Feigin–Stoyanovsky 型半无限单项式基，这是本文的主要结果。此外，我们还利用其海森堡子代数的作用，将这一构造推广到双杨代数 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 的相应模 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$；该海森堡子代数由量子行列式的系数生成，并与 $\mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ 对易。

在本文末尾，我们将探讨半无限构造在量子顶点代数理论中的一些应用。特别地，通过利用双杨代数两种实现之间的 Iohara–Kohno 同构 [11] ，我们证明 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ 自然带有相应的 1 级 Etingof–Kazhdan 量子仿射顶点代数的不可约模结构，该结构来自 [3]。

2. Preliminaries

本节回顾一般线性李代数 $\mathfrak{gl}_2$ 的双杨代数，以及其 1 级模的 Iohara–Kohno 玻色实现。

2.1. $\mathfrak{gl}_2$的双杨代数。

我们遵循 Iohara 和 Kohno 的论文 [11] ，介绍李代数 $\mathfrak{gl}_2$ 和 $\mathfrak{sl}_2$ 的中心扩张双杨代数，并回顾它们的一些性质。设 I 为恒等式， P为 $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$上的置换算子。考虑交换环 $\mathbb{C}[[h]]$上的（归一化）杨 R-矩阵,

$$R(u) = \frac{1}{1+h/u}\left(I + \tfrac{h}{u}P\right) \in \operatorname{End}\mathbb{C}^2 \otimes \operatorname{End}\mathbb{C}^2[[h/u]].$$

双杨代数 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 定义为环 $\mathbb{C}[[h]]$ 上由中心元 C 和元素 $t_{ij}^{(r)}$ 生成的结合代数, 其中 i、 $j = 1$、2 和 $r \in \mathbb{Z}.$。其定义关系如下:

$$R_{12}(u-v)T^{\pm}_{13}(u)T^{\pm}_{23}(v) = T^{\pm}_{23}(v)T^{\pm}_{13}(u)R_{12}(u-v), \tag{2.1}$$

$$R_{12}(u-v-hC/2)T^{+}_{13}(u)T^{-}_{23}(v) = T^{-}_{23}(v)T^{+}_{13}(u)R_{12}(u-v+hC/2). \tag{2.2}$$

生成矩阵 $T^{\pm}(u)$ 定义如下:

$$T^{\pm}(u) = \sum_{i,j=1,2} e_{ij} \otimes t^{\pm}_{ij}(u), \tag{2.3}$$

其中 $e_{ij} \in \operatorname{End}\mathbb{C}^2$ 表示矩阵单位，幂级数 $t^{\pm}_{ij}(u)$ 定义如下:

$$t^{+}_{ij}(u) = \delta_{ij} - h\sum_{r\geqslant 0} t^{(r)}_{ij}\,u^{-r-1} \qquad \text{and} \qquad t^{-}_{ij}(u) = \delta_{ij} + h\sum_{r\geqslant 1} t^{(-r)}_{ij}\,u^{r-1}. \tag{2.4}$$

In (2.1) 和 (2.2) 我们用下标表示张量因子，即有

$$T_{13}^{\pm}(u)=\sum_{i,j=1,2} e_{ij}\otimes 1\otimes t_{ij}^{\pm}(u) \qquad \text{and} \qquad T_{23}^{\pm}(u)=\sum_{i,j=1,2} 1\otimes e_{ij}\otimes t_{ij}^{\pm}(u).$$

我们来讨论双杨代数的经典极限。考虑仿射李代数$\widehat{\mathfrak{gl}}_2=\mathfrak{gl}_2\otimes\mathbb{C}[t^{\pm 1}]\oplus\mathbb{C}K$，其中$K$是中心元，李括号为

$$[e_{ij}(r),e_{kl}(s)]=\delta_{kj}e_{il}(r+s)-\delta_{il}e_{kj}(r+s)+r\,\delta_{r+s\,0}\,K\,(\delta_{kj}\delta_{il}-\delta_{ij}\delta_{kl}) \tag{2.5}$$

对于 $e_{ij}(r) = e_{ij}\otimes t^r$。通过如下设定，在 DY($\mathfrak{gl}_2$) 上引入递增滤过

$$\deg t_{ij}^{(r)}=r \quad \text{for} \quad i,j=1,2,\ r\in\mathbb{Z} \qquad \text{and} \qquad \deg C=0. \tag{2.6}$$

双杨代数生成元 $\bar{t}_{ij}^{(r)}$ 和 $\bar{C}$ 在相应分次代数 grDY($t_{ij}^{(r)}$ 和 C)中的像满足（2.5）。因此，指定 e_{ij}（r） $\mapsto \bar{t}_{ij}^{(r)}$ 和 $K\mapsto\bar{C}$定义了代数同态

$$U(\widehat{\mathfrak{gl}}_2)\otimes\mathbb{C}[[h]]\to \operatorname{gr}\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2). \tag{2.7}$$

定理 2.1。 *The map* （2.7） *is an algebra isomorphism.*

证明。映射（2.7）的满射性显然。另一方面，单射性是庞加莱–伯克霍夫–维特定理的推论´（定理 [12, 2.）2]，该定理指出，双杨代数生成元的适当排序单项式构成其基；另见 [13,命题 3。1] 和 [19, 定理 15。3]。更具体地说，尽管我们采用了与 R不同的杨矩阵归一化来定义双杨代数，[12], 定理 2。 [12, 证明相应部分中的论证仍可类似地进行。值得注意的是，这些论证依赖于 Iohara–Kohno 实现 [11], ，它给出了双杨代数的 1 级表示；见下文定理 2.3 。□

注 2.2. 与（2.7）类似的对应关系也可以通过取双杨代数的经典极限 DY($\mathfrak{gl}_2$)/hDY($\mathfrak{gl}_2$) 来建立，其中用到了 $\mathbb{C}$ 上的包络代数。事实上，从其定义关系（2.1）和（2.2）中提取矩阵元素的系数后可以看出，关于（2.6）的最高次项，与含有 h 最低次幂的项相同。

从现在起，我们假设 $\mathfrak{gl}_2$ 的双杨代数已按 h-进完备化。利用级数（2.4），可得到其 Drinfeld 生成元 [2]如下：

$$k_1^{\pm}(u)=t_{11}^{\pm}(u), \qquad k_2^{\pm}(u)=t_{22}^{\pm}(u)-t_{21}^{\pm}(u)t_{11}^{\pm}(u)^{-1}t_{12}^{\pm}(u), \tag{2.8}$$

$$X^{+}(u)=t_{11}^{+}(u-hC/4)^{-1}t_{12}^{+}(u-hC/4)-t_{11}^{-}(u+hC/4)^{-1}t_{12}^{-}(u+hC/4), \tag{2.9}$$

$$X^{-}(u)=t_{21}^{+}(u+hC/4)t_{11}^{+}(u+hC/4)^{-1}-t_{21}^{-}(u-hC/4)t_{11}^{-}(u-hC/4)^{-1}. \tag{2.10}$$

这些生成元的交换关系见 [11, 定理 2.1]。

双杨代数 DY($\mathfrak{gl}_2$) 可分解为两个子代数：双杨代数 DY($\mathfrak{sl}_2$)，它由中心元 $C_1 := C$ 以及幂级数的所有系数生成

$$E(u)=\frac{1}{h}X^{+}(u+h/2), \quad F(u)=\frac{1}{h}X^{-}(u+h/2),$$
$$H^{\pm}(u)=k_2^{\pm}(u+h/2)k_1^{\pm}(u+h/2)^{-1}, \tag{2.11}$$

and 海森堡子代数 H，它由级数的系数生成 es

$$K^{\pm}(u) = k_1^{\pm}(u - h/2)\, k_2^{\pm}(u + h/2)$$

和中心元 $C_2 = -2C$。海森堡子代数的生成元与 DY($\mathfrak{sl}_2$) 的所有元素均可交换，并满足 [11, 推论 22],中的关系。

$$\big[K^{\pm}(u), K^{\pm}(v)\big] = 0,$$

$$\frac{u - v - h + hC_2/4}{u - v + h + hC_2/4} K^{+}(u) K^{-}(v) = K^{-}(v) K^{+}(u) \frac{u - v - h - hC_2/4}{u - v + h - hC_2/4}.$$

H 的生成元级数具有如下形式： $K^{\pm}(u) = 1 \mp h\kappa^{\pm}(u)$，其中

$$\kappa^{+}(u) = \sum_{r \geqslant 0} \kappa^{(r)} u^{-r-1} \qquad \text{and} \qquad \kappa^{-}(u) = \sum_{r \geqslant 1} \kappa^{(-r)} u^{r-1}.$$

考虑海森堡李子代数 $\widehat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \otimes \mathbb{C}K_2 \subset \widehat{\mathfrak{gl}}_2$，其中 $K_2 = -2K$是中心元，而 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}I$ 是 $\mathfrak{gl}_2$中由单位矩阵 $I = e_{11} + e_{22}$张成的一维交换子代数。根据（2.5），其李括号为

$$[I(r), I(s)] = r\, \delta_{r+s\,0}\, K_2,$$

其中 $I(r) = I \otimes t^r$。注意，映射（2.7）的限制给出了同构

$$U(\widehat{\mathfrak{h}}) \otimes \mathbb{C}[[h]] \to \operatorname{gr} \mathrm{H}, \tag{2.12}$$

其中 grH 是 H 对应的分次代数。它由 $I(r) \mapsto \bar{\kappa}^{(r)}$ 给出，对所有$r \in \mathbb{Z}$ 和 $K_2 \mapsto \bar{C}_2$均成立；其中 $\bar{\kappa}^{(r)}$ 和 $\bar{C}_2$ 分别表示海森堡子代数生成元 $\kappa^{(r)}$ 和 C_2 在 grH 对应分量中的像。

2.2. Iohara–Kohno 实现。我们遵循 [11] 来介绍双杨代数 DY($\mathfrak{gl}_2$) 的 1 级模的一种实现。设 $\mathfrak{s} = \mathbb{C}e_{11} \oplus \mathbb{C}e_{22}$ 为 $\mathfrak{gl}_2$的嘉当子代数。记 ε_j, $j = 1, 2$ 为线性映射 $\mathfrak{s} \to \mathbb{C}$，其定义为 $\varepsilon_j(e_{kk}) = \delta_{jk}$。对偶 $\mathfrak{s}^*$配备由 $(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \delta_{jk}$确定的标准双线性形式 $(\cdot, \cdot)$。令 $Q = \mathbb{Z}\alpha$，其中 $\alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 为单李代数 $\mathfrak{sl}_2$ 的根格，而$\lambda_i = \Lambda_i - \Lambda_0$ 为第 i个基本仿射权 Λ_i的经典部分。

考虑由中心元 C 和元素 $a_j(r)$生成的李代数 $\widehat{\mathfrak{s}}$，其中 $j = 1, 2$ 和 $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$，并满足以下关系

$$[a_j(r), a_k(s)] = r\, \delta_{jk}\, \delta_{r+s\,0}\, C. \tag{2.13}$$

设 $\widehat{\mathfrak{s}}^{-}$ 是由所有满足 $j = 1$、2 和 $r \in \mathbb{Z}_{<0}$ 的 $a_j(r)$ 生成的（交换）子代数。记 $\mathbb{C}[Q]$ 为根格 Q 的群代数。对于任意 $i = 0$、1 和 $s \in \mathbb{C}$，定义

$$\mathcal{F}_{is} = U(\widehat{\mathfrak{s}}^{-})[[h]] \otimes \mathbb{C}[Q][[h]] e^{\lambda_i + \frac{s}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \tag{2.14}$$

(2.14) 中的张量积按 h-进完备意义理解，因此$\mathbb{C}[[h]]$-模 $\mathcal{F}_{is}$是拓扑自由的。定义 C, $a_j(r)$, ∂_{ε_j}以及 e^{ε_j}的作用，其中$j = 1,2$ 和 $r \neq 0$, 在 $\mathcal{F}_{is}$ 上的作用，使得对于任意 $f \otimes e^{\mu} \in \mathcal{F}_{is}$，都有

$$C \cdot f \otimes e^{\mu} = f \otimes e^{\mu}, \qquad a_j(r) \cdot f \otimes e^{\mu} = \begin{cases} a_j(r)\, f \otimes e^{\mu}, & \text{if } r < 0, \\ [a_j(r), f] \otimes e^{\mu}, & \text{if } r > 0, \end{cases}$$

$$\partial_{\varepsilon_j} \cdot f \otimes e^{\mu} = (\varepsilon_j, \mu) f \otimes e^{\mu}, \qquad e^{\varepsilon_j} \cdot f \otimes e^{\mu} = f \otimes e^{\varepsilon_j + \mu}.$$

Let 记 $X_{\pm\alpha}(u) = h^{-1}X^{\pm}(u)$。在 $\mathcal{F}_{is}$ 上引入以下算子级数：

$$E^-(u) = \exp\left(\sum_{r>0}\left(-\frac{a_1(-r)}{r}\left(u-\frac{3}{4}h\right)^r + \frac{a_2(-r)}{r}\left(u+\frac{h}{4}\right)^r\right)\right),$$

$$E^+(u) = \exp\left(\sum_{r>0}\left(\frac{a_1(r)-a_2(r)}{r}\left(u+\frac{h}{4}\right)^{-r}\right)\right), \qquad E^0(u) = e^{\alpha}\left(u+\frac{h}{4}\right)^{\partial_\alpha}.$$

最后，我们回顾 Iohara–Kohno 实现 [11, 定理 3。1]。

定理 2.3. *The following assignments define a structure of DY($\mathfrak{gl}_2$)-module on $\mathcal{F}_{is}$:*

$$X_\alpha(u) \mapsto E^-(u)E^+(u)E^0(u),$$

$$X_{-\alpha}(u) \mapsto E^-(u+h/2)^{-1}E^+(u-h/2)^{-1}E^0(u-h/2)^{-1},$$

$$k_j^+(u) \mapsto \exp\left(-\sum_{r>0}\frac{a_j(r)}{r}\left(\left(u+\frac{h}{2}\right)^{-r}-\left(u-\frac{h}{2}\right)^{-r}\right)\right)\left(1-\frac{h}{u+\frac{h}{2}}\right)^{\partial_{\varepsilon_j}}, j=1,2,$$

$$k_j^-(u) \mapsto \exp\left(\sum_{r>0}\left(\frac{\delta_{1j}\,a_2(-r)}{r}\left((u+h)^r-u^r\right)+\frac{\delta_{2j}\,a_1(-r)}{r}\left(u^r-(u-h)^r\right)\right)\right), j=1,2.$$

3. Semi-infinite construction

在本文余下部分中，我们假设 $s=0$ in(2.14)，并记 $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{i0}$为 $i=0,1$。此外，从现在起，我们假设双杨代数 DY($\mathfrak{sl}_2$) 和海森堡子代数 H（如第 2.1 小节中所给出）均已 h-进完备化。我们的目标是构造某些 DY($\mathfrak{gl}_2$)-模的拓扑基，与仿射 Kac–Moody 李代数 ^的半无限构造 [6] 相对应 $\mathfrak{sl}_2$。

3.1. 规范化 Iohara–Kohno 实现。现在，我们通过修改定理 2.3 中的原始公式，引入另一种在 $\mathfrak{gl}_2$ 上的 1 级 DY($\mathcal{F}_i$)-模结构。

定理 3.1. *The following assignments define a structure of DY($\mathfrak{gl}_2$)-module on $\mathcal{F}_i$:*

$$X_\alpha(u) \mapsto E^-(0)^{-1}E^-(u)E^+(u)E^0(u)\frac{u^{\partial_{\alpha/2}}(u+h)^{\partial_{\alpha/2}}}{(u+h/4)^{\partial_\alpha}},$$

$$X_{-\alpha}(u) \mapsto E^-(0)E^-(u+h/2)^{-1}E^+(u-h/2)^{-1}E^0(u-h/2)^{-1}\frac{(u-h/4)^{\partial_\alpha}}{(u-h/2)^{\partial_{\alpha/2}}(u+h/2)^{\partial_{\alpha/2}}},$$

$$k_1^+(u) \mapsto \exp\left(-\sum_{r>0}\frac{a_1(r)}{r}\left(\left(u+\frac{h}{2}\right)^{-r}-\left(u-\frac{h}{2}\right)^{-r}\right)\right)\left(\frac{u+h/4}{u+5h/4}\right)^{\partial_{\alpha/2}},$$

$$k_2^+(u) \mapsto \exp\left(-\sum_{r>0}\frac{a_2(r)}{r}\left(\left(u+\frac{h}{2}\right)^{-r}-\left(u-\frac{h}{2}\right)^{-r}\right)\right)\left(\frac{u+h/4}{u-3h/4}\right)^{\partial_{\alpha/2}}$$

and the action of $k_1^-(u)$ $k_2^-(u)$ is given by Theorem 2.3.

证明。与定理 2.3中的原始 Iohara–Kohno 实现一样，直接计算可验证，给定的算子满足双杨代数的定义关系，这些关系已在 [11, 定理 2。1]中确立。作为示例，我们将证明这些算子满足 1 级定义关系

$$[X_\alpha(u), X_{-\alpha}(v)] = \frac{1}{h}\left(\delta(u-v-h/2)\,k_2^+(u-h/4)\,k_1^+(u-h/4)^{-1}\right.$$

$$-\delta(u-v+h/2)k_2^-(v-h/4)k_1^-(v-h/4)^{-1}\big), \tag{3.1}$$

参见 [11, 定理 2。1], 其中 $\delta(u-v)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}u^{-r-1}v^r$ 是 δ-函数。在整个证明过程中，我们用 $X'^{\pm}_{\pm\alpha}(u)$ 和 $k'^{\pm}_j(u)$ 表示定理 2.3中的相应算子，以便与定理 3.1给出的算子区分开来。

首先，我们将（3.1）的左端改写为

$$[X_\alpha(u),X_{-\alpha}(v)]=\left[X'_\alpha(u),X'_{-\alpha}(v)\right]f(u,v), \tag{3.2}$$

其中

$$f(u,v)=\frac{u^{\partial_{\alpha/2}}(u+h)^{\partial_{\alpha/2}}}{(u+h/4)^{\partial_\alpha}}\frac{(v-h/4)^{\partial_\alpha}}{(v-h/2)^{\partial_{\alpha/2}}(v+h/2)^{\partial_{\alpha/2}}}.$$

接下来，考虑（3.1）的右端。利用 δ-函数的性质，我们得到

$$\delta(u-v+h/2)=f(u,u+h/2)\delta(u-v+h/2)=f(u,v)\delta(u-v+h/2)$$

由于 $f(u,u+h/2)=1$。此外，我们有 $k'^-_j(u)=k^-_j(u)$ 对于 $j=1,2$。因此，（3.1）中的第二项可以写成

$$\begin{aligned}&-\delta(u-v+h/2)k_2^-(v-h/4)k_1^-(v-h/4)^{-1}\\&=-f(u,v)\delta(u-v+h/2)k_2'^-(v-h/4)k_1'^-(v-h/4)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

最后，我们考虑（3.1）右端的第一项。注意到，算子 $k^+_j(u)$ 和 $k'^+_j(u)$ 通过以下恒等式相联系

$$\begin{aligned}k_1^+(u)&=k_1'^+(u)\left(\frac{u+h/2}{u-h/2}\right)^{\partial_{\varepsilon_1}}\left(\frac{u+h/4}{u+5h/4}\right)^{\partial_{\alpha/2}},\\k_2^+(u)&=k_2'^+(u)\left(\frac{u+h/2}{u-h/2}\right)^{\partial_{\varepsilon_2}}\left(\frac{u+h/4}{u-3h/4}\right)^{\partial_{\alpha/2}}.\end{aligned}$$

因此，我们得到等式

$$\begin{aligned}&\delta(u-v-h/2)k_2^+(u-h/4)k_1^+(u-h/4)^{-1}\\&=\delta(u-v-h/2)\left(\frac{u-3h/4}{u+h/4}\right)^{\partial_\alpha}\left(\frac{u+h}{u-h}\right)^{\partial_{\alpha/2}}k_2'^+(u-h/4)k_1'^+(u-h/4)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

然而，δ-函数的性质表明

$$\begin{aligned}&\delta(u-v-h/2)\left(\frac{u-3h/4}{u+h/4}\right)^{\partial_\alpha}\left(\frac{u+h}{u-h}\right)^{\partial_{\alpha/2}}\\&=f(u,u-h/2)\delta(u-v-h/2)=f(u,v)\delta(u-v-h/2),\end{aligned}$$

因此我们由（3.4）可得，右端（3.1）中的第一项等于 ls

$$f(u,v)\delta(u-v-h/2)k_2'^+(u-h/4)k_1'^+(u-h/4)^{-1}. \tag{3.5}$$

由于定理 2.3 中的算子满足（3.1），交换关系（3.1）现可通过比较（3.2）、（3.3）和（3.5）中的表达式得到。□

定理 $X_\alpha(u)$ 中给出的 3.1 的作用公式表明

$$X_\alpha(u)1\otimes 1\in 1\otimes e^\alpha+u\mathcal{F}_0[[u]] \tag{3.6}$$

在 $\mathcal{F}_0$。另一方面，定理2.3给出的 $X_\alpha(u)$ 作用并不满足（3.6）。由于这一性质是第 3.5 小节中半无限构造所必需的，因此在

本文其余部分我们只考虑定理 3.1 中的 DY($\mathfrak{gl}_2$) 作用；此外，我们将 $X_{\pm\alpha}(u)$ 和 $k_j^{\pm}(u)$ 记作相应的顶点算子。

3.2. 交换算子。本小节中，我们将定理 3.1 中的算子$X_\alpha(u)$与某些交换算子 $\overline{X}(u)$联系起来，它们满足 Lepowsky 和 Primc [17]提出的可积性关系的一个 h-进版本。与 Ding 和 B. Feigin [1], 构造的、与某些 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$-模的 Frenkel–Jing 实现 [4] 相关联的交换算子类似，我们将由湮灭算子 $a_j(r)$组成的项$E^+(u)$乘以 $r > 0$。然而，与量子仿射代数的情形不同，项 $E^0(u)$ 也需要重新归一化。

考虑定义在 $\mathcal{F}_i$, $i = 0, 1$ 上的算子级数，由下式给出

$$\overline{X}(u) = X_\alpha(u)\overline{E}^+(u)\overline{E}^0(u), \qquad \text{where} \qquad \overline{E}^0(u) = (1 - h/u)^{\partial_{\alpha/2}}, \tag{3.7}$$

作用 $X_\alpha(u)$ 由定理 3.1 给出，而项 $\overline{E}^+(u)$ 为

$$\overline{E}^+(u) = \exp\left(\sum_{r>0}\left(\frac{a_1(r)}{r}\left(u - \frac{7}{4}h\right)^{-r} + \frac{a_2(r)}{r}\left(u + \frac{1}{4}h\right)^{-r}\right)\right).$$

命题 3.2。 *The following identities hold for operators on $\mathcal{F}_i$, $i = 0, 1$:*

$$\overline{X}(u)\overline{X}(v) = \overline{X}(v)\overline{X}(u), \tag{3.8}$$

$$\overline{X}(u)\overline{X}(u - h) = \overline{X}(u)\overline{X}(u + h) = 0. \tag{3.9}$$

证明。 利用 (2.13) 容易验证以下关系：

$$E^+(u)E^-(v) = \frac{(u - v)(u - v + h)}{(u + h/4)^2}E^-(v)E^+(u), \tag{3.10}$$

$$E^0(u)E^0(v) = \frac{(u + h/4)^2}{(v + h/4)^2}E^0(v)E^0(u). \tag{3.11}$$

交换关系 (3.8) 可利用 (3.10)、(3.11) 以及恒等式验证

$$\overline{E}^+(u)E^-(v) = \frac{u - v - h}{u - v}\frac{u + h/4}{u - 7h/4}E^-(v)\overline{E}^+(u), \tag{3.12}$$

$$\overline{E}^0(u)E^0(v) = (1 - h/u)\,E^0(v)\overline{E}^0(u), \tag{3.13}$$

这些也可由 (2.13) 得出。至于等式 (3.9)，只需注意到，由于关系 (3.10)、(3.11)、(3.12) 和 (3.13)，我们有如下分解

$$\overline{X}(u)\overline{X}(v) = f(u, v)\overline{X}(u, v), \qquad \text{where} \qquad f(u, v) = (u - v - h)(u - v + h),$$

$$\overline{X}(u, v) = E^-(0)^{-2}E^-(u)E^-(v)E^+(u)\overline{E}^+(u)E^+(v)\overline{E}^+(v)e^{2\alpha}(u^2 - h^2)^{\partial_{\alpha/2}}(v^2 - h^2)^{\partial_{\alpha/2}}.$$

将 $\overline{X}(u, v)$ 作用于 $\mathcal{F}_i$ 的任意元素，可知对于任意 $n \geqslant 1$，模 h^n 意义下，变量 u 和 v 的负幂只有有限多个。因此， $\overline{X}(u, v)$ 的形式极限 $v \to u \pm h$ 定义良好。故乘积 $\overline{X}(u)\overline{X}(v)$ 的极限 $v \to u \pm h$ 也定义良好。此外，由于 $f(u, u \pm h) = 0$，它等于零，正如所需。□

3.3. 主子模 主子模 W_0。记算子级数 $X_\alpha(u)$ 和 $\overline{X}(u)$ a s

$$X_\alpha(u)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}x(r)u^{-r-1}\quad\text{and}\quad\overline{X}(u)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}\overline{x}(r)u^{-r-1}.$$

令 $\mathbf{1}=1\otimes 1\in\mathcal{F}_0$。受[6,9], 中仿射李代数模的主子空间概念启发，我们定义 主子模 W_0 为 $\mathcal{F}_0$ 的 h-进完备化，它是由所有 $\mathbb{C}[[h]]$张成的

$$x(r_n)\dots x(r_1)\,\mathbf{1},\qquad\text{where}\qquad n\geqslant 0\quad\text{and}\quad r_1,\dots,r_n\in\mathbb{Z}.\tag{3.14}$$

在本小节中，我们使用单项式（3.14）为 W_0构造一个拓扑基 .

注 3.3. 注意到， W_0 与所有 $\mathbb{C}[[h]]$ 的 h-进完备化张成空间一致

$$\overline{x}(r_n)\dots\overline{x}(r_1)\,\mathbf{1},\qquad\text{where}\qquad n\geqslant 0\quad\text{and}\quad r_1,\dots,r_n\in\mathbb{Z}.\tag{3.15}$$

事实上，（3.15）中的项是 $u_n^{-r_n-1}\dots u_1^{-r_1-1}$ 在 $\overline{X}(u_n)\dots\overline{X}(u_1)\,\mathbf{1}$中的系数。然而，利用（3.12）和（3.13），以及 $\overline{E}^+(u)\,\mathbf{1}=\overline{E}^0(u)\,\mathbf{1}=\mathbf{1}$，我们得到

$$\overline{X}(u_n)\dots\overline{X}(u_1)\,\mathbf{1}=F\cdot X_\alpha(u_n)\dots X_\alpha(u_1)\,\mathbf{1}\ \text{ for }\ F=\prod_{1\leqslant r<s\leqslant n}\left(1-\frac{h}{u_s-u_r}\right).\tag{3.16}$$

由于 F在 $\mathbb{C}((u_n))$ 中可逆 $\dots((u_1))[[h]]$ 且 (3.16) 的两边都属于 h-进完备化 $\mathcal{F}_0((u_n))\dots((u_1))$, 我们得出结论，(3.14) 中的每个元素都可以用 (3.15) 形式的元素表示，反之亦然。此外，将 (3.16) 改写为

$$\begin{aligned}&h^{-1}\left(\overline{X}(u_n)\dots\overline{X}(u_1)\,\mathbf{1}-X_\alpha(u_n)\dots X_\alpha(u_1)\,\mathbf{1}\right)\\&=h^{-1}(F-1)X_\alpha(u_n)\dots X_\alpha(u_1)\,\mathbf{1}=h^{-1}(1-F^{-1})\overline{X}(u_n)\dots\overline{X}(u_1)\,\mathbf{1},\end{aligned}$$

我们得出结论，形如 $h^{-1}\left(x(r_n)\dots x(r_1)\,\mathbf{1}-\overline{x}(r_n)\dots\overline{x}(r_1)\,\mathbf{1}\right)$ 的表达式也可以写成 $\mathbb{C}[[h]]$-线性组合，即 (3.14) 或 (3.15) 中元素的线性组合。注意，这种线性组合可以是无限的，但它们是良定义的，因为对于所有 h^m，模 $m\geqslant 1$ 意义下它们都是有限的，且 $\mathbb{C}[[h]]$-模 $\mathcal{F}_0$ 是 h-进完备的。

在下述引理中，我们考察形如 (3.15) 的单项式。与 (3.14) 相比，它们更容易处理，因为其因子 $\overline{x}(r)$ 彼此交换；回顾 (3.8)。令$\overline{B}_{W_0}$ 为所有满足以下条件的 (3.15) 形式元素的集合，其中 $n\geqslant 0$ 的指标满足

$$r_1\leqslant -1\qquad\text{and}\qquad r_{j+1}\leqslant r_j-2\quad\text{for all}\quad j=1,\dots,n-1.\tag{3.17}$$

引理3.4. *The h-adic completion of the $\mathbb{C}[[h]]$-span of $\overline{B}_{W_0}$ coincides with W_0.*

证明. 首先，注意到 $\overline{X}(u)\mathbf{1}$ 仅含变量 u 的非负幂，即有 $\overline{x}(r)\,\mathbf{1}=0$ 当 $r\geqslant 0$ 时。因此，根据交换性（3.8），各项

$$\overline{x}(r_n)\dots\overline{x}(r_1)\,\mathbf{1}\qquad\text{such that}\qquad r_1,\dots,r_n\in\mathbb{Z}_{<0}\quad\text{and}\quad r_n\leqslant\dots\leqslant r_1.\tag{3.18}$$

张成一个 h-进稠密的 $\mathbb{C}[[h]]$-子模 W_0。接下来，我们利用 h-进可积性关系，建立（3.17）中的差二条件，使（3.18）中的各项满足该条件。尽管这只是将源自$\widehat{\ }$的（可积）$\mathfrak{sl}_2$表示论中的经典论证调整到 h-进情形，为完整起见，我们仍给出一些细节。从（3.9）中提取 u^{-2r-3} 和 u^{-2r-2} 的系数，并利用（3.8），可得

$$\overline{x}(r)\overline{x}(r+1)=-\sum_{l\geqslant 1}\overline{x}(r-l)\overline{x}(r+l+1)\mod h,\tag{3.19}$$

$$\overline{x}(r)\overline{x}(r) = -2\sum_{l\geqslant 1}\overline{x}(r-l)\overline{x}(r+l) \mod h, \tag{3.20}$$

分别地。假设（3.18）的元素$\overline{x}(r_n)\ldots\overline{x}(r_1)$ 1中有两个相邻算子$\overline{x}(r_{j+1})\overline{x}(r_j)$不满足差二条件 $r_{j+1}\leqslant r_j-2$。那么，若 $r_{j+1}=r_j-1$ （分别地，若 $r_{j+1}=r_j$），利用恒等式（3.19）（分别地，（3.20）），它们可以模 h 替换为满足该条件的若干项之和。由（3.9）可知，（3.19）和（3.20）中左端与右端之差属于 hW_0。换言之，它是由（3.18）中的单项式构成的 $\mathbb{C}[[h]]$-线性组合，且其系数属于 $h\mathbb{C}[[h]]$。因此，对任意 $m\geqslant 1$，通过充分多次重复这一过程，可以将原元素$\overline{x}(r_n)\ldots\overline{x}(r_1)$ 1模 h^m表示为满足差二条件（3.17）的元素的 $\mathbb{C}[[h]]$-线性组合。由于W_0 是 h-进完备的，这就证明了该引理。□

在级数 3.7 的定义 $\overline{X}(u)$ 中，我们将 $X_\alpha(u)$ 乘以项 $\overline{E}^+(u)$，因此改变了所得算子的经典极限。所以，我们无法立即通过经典极限证明前引理中生成集的线性无关性。接下来，我们转而考察算子 3.14 的单项式。令 B_{W_0} 为所有满足 3.14 的元素构成的集合，其中 $n\geqslant 0$ 满足 3.17 所施加的条件。

引理 3.5。 *The set B_{W_0} is linearly independent over $\mathbb{C}[[h]]$.*

证明。 定理 $h\to 0$ 中算子 $X_{\pm\alpha}(u)$ 的经典极限 3.1 在 $i=\widehat{0}$ 时，给出了 $\mathfrak{sl}_2$ 在其 1 级可积最高权模 $L(\Lambda_0)$ 上的作用，其最高权为 Λ_0，如 Frenkel–Kac–Segal 实现 [5,20]所示。因此， B_{W_0} 的经典极限给出了 $L(\Lambda_0)$ 主子空间众所周知的准粒子基；参见 [6,9]。因此，特别地， B_{W_0} 在 $\mathbb{C}[[h]]$ 上线性无关。□

最后，我们结合引理 3.4 和 3.5 得到 W_0的一个基。

定理 3.6。 *The set B_{W_0} forms a topological basis of W_0.*

证明。根据引理 3.5，只需验证 $\mathbb{C}[[h]]$ 的 B_{W_0} -张成空间在 h-进拓扑下稠密于 W_0。任取 $w\in W_0$。根据引理3.4，它可以表示为 $w=\sum_j a_j\overline{b}_j$，其中 $a_j\in\mathbb{C}[[h]]$ 和 $\overline{b}_j\in\overline{B}_{W_0}$。接下来，根据注 3.3，我们有模 h 的 $w=\sum_j a_jb_j$，其中 $b_j\in B_{W_0}$ 表示与 $\overline{b}_j$ 对应的元素，即更准确地说，若 $\overline{b}_j=\overline{x}(r_n)\ldots\overline{x}(r_1)1$，则令 $b_j=x(r_n)\ldots x(r_1)1$。此外，该注表明，$h^{-1}(w-\sum_j a_jb_j)$ 再次是 $\mathbb{C}[[h]]$-线性组合，组合中的元素来自 $\overline{B}_{W_0}$。因此，对于任意 $m\geqslant 1$，我们可以重复这一过程，直到将 w 表示为 $\mathbb{C}[[h]]$-线性组合，组合中的元素来自 B_{W_0}，模 h^m，故定理得证。□

3.4. DY($\mathfrak{sl}_2$)-模 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2)$. 考虑集合

$$B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)}=\left\{e^{k\alpha}b\,:\,k\in\mathbb{Z},\,b\in B_{W_0}\right\}\subset\mathcal{F}_0.$$

令 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 为 h-进完备的 $\mathbb{C}[[h]]$-张成空间$B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)}$。在本小节中，我们证明 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 关于定理 3.1 中 DY($\mathfrak{sl}_2$)-作用下是闭的。

引理 3.7. *For any integer m we have*

$$E^+(u)^m\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\subset\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{-1}]]. \tag{3.21}$$

证明。 设 $m = 1$。只需证明 $E^+(u)e^{k\alpha}b$ 属于 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{-1}]]$对所有 $e^{k\alpha}b \in B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)}$成立。利用定理 3.1 中的公式以及 $E^+(u)\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ，可得

$$E^+(u)e^{k\alpha}\,X_\alpha(v_n)\dots X_\alpha(v_1)\,\mathbf{1} = F\cdot e^{k\alpha}\,X_\alpha(v_n)\dots X_\alpha(v_1)\,\mathbf{1}, \tag{3.22}$$

其中，由于关系式 (3.10)，因子 $F \in \mathbb{C}[u^{-1}][[v_n,\dots,v_1,h]]$ 由下式给出

$$F = \prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{v_r}{u}\right)\left(1-\frac{v_r}{u+h}\right).$$

对于任意整数 $s_1,\dots,s_n$，从 (3.22) 右端提取 $v_1^{s_1}\dots v_n^{s_n}$的系数，可得到变量 u^{-1}的一个幂级数。显然，其系数是形如 $e^{k\alpha}x(r_n)\dots x(r_1)\,\mathbf{1}$ 的元素的$\mathbb{C}[[h]]$-线性组合。此外，由定理 3.6，每个 $x(r_n)\dots x(r_1)\,\mathbf{1}$ 都可以用 B_{W_0} 中的元素表示，因此每个 $e^{k\alpha}x(r_n)\dots x(r_1)\,\mathbf{1}$ 都属于 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$。另一方面，对于合适选取的 $s_1,\dots,s_n$，从 (3.22) 左端提取 $v_1^{s_1}\dots v_n^{s_n}$ 的系数，可得 $E^+(u)e^{k\alpha}b$ ，其中 $e^{k\alpha}b \in B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)}$。因此，我们得出结论：所有满足$e^{k\alpha}b \in B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)}$ 的 $E^+(u)e^{k\alpha}b$ 都属于 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{-1}]]$，证毕。

若 $m=-1$，我们可以使用 $E^+(u)^{-1}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ，并以类似方式验证包含关系（3.21）。最后，若 m 是任意整数，则容易通过对 $|m|$ 进行归纳证明，我们有

$$E^+(u_1)^{\pm1}\dots E^+(u_{|m|})^{\pm1}\,\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2) \subset \mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u_1^{-1},\dots,u_{|m|}^{-1}]]. \tag{3.23}$$

因此，在 $(u_1 = \dots = u_{|m|} = u\,)$ 中令3.23，即可得出引理的结论。 □

引理 3.7 的证明依赖于这样一个事实： $E^+(u)$ 的系数是 $\mathbb{C}[[h]]$-线性湮灭算子单项式的线性组合 $a_j(r)$，其中 $r>0$，这意味着$E^+(u)^{\pm}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$。由于 $k_j^+(u)^{\pm1}\,\mathbf{1} = \mathbf{1}$ 对于 $j=1,\ 2$，可以类似地证明下一个引理。

引理 3.8. *For any integer m and $j = 1, 2$ we have*

$$k_j^+(u)^m\,\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2) \subset \mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{-1}]].$$

结合引理 3.8 和恒等式（2.11），得到

推论 3.9. $H^+(u)\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2) \subset \mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{-1}]]$.

我们来考察定理 3.1 中其作用还涉及产生算符 $a_j(r)$ 以及 $r<0$ 的其余算子。首先，注意到

$$X_\alpha(u)e^{k\alpha} = u^{2k}(u+h)^{2k}e^{k\alpha}X_\alpha(u) \qquad \text{推出} \qquad X_\alpha(u)\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2) \subset \mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{\pm1}]]. \tag{3.24}$$

接下来，写作 $\mathcal{E}^-(u) = E^-(0)^{-1}E^-(u)$，于是根据定理 3.1，可得

$$X_\alpha(u) = \mathcal{E}^-(u)\,E^+(u)e^{\alpha}\,u^{\partial_{\alpha/2}}(u+h)^{\partial_{\alpha/2}}. \tag{3.25}$$

引理 3.10. *For any integer m we have*

$$\mathcal{E}^-(u)^m\,\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2) \subset \mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u]]. \tag{3.26}$$

*Pro*由。 设 $m=1$。我们可以利用定理 3.1 和（3.10）中的公式来证明

$$\mathcal{E}^-(u)e^{k\alpha}\,X_\alpha(v_n)\dots X_\alpha(v_1)\,\mathbf{1} = F\cdot e^{k\alpha}\,X_\alpha(v_n)\dots X_\alpha(v_1)\mathcal{E}^-(u)\,\mathbf{1}, \tag{3.27}$$

其中因子 $F \in \mathbb{C}[v_n^{-1},\dots,v_1^{-1}][[u,h]]$ 由下式给出

$$F = \prod_{r=1}^{n}\left(1-\frac{u}{v_r}\right)^{-1}\left(1-\frac{u}{v_r+h}\right)^{-1}.$$

由于 $E^+(u)\,e^{\alpha}u^{\partial_{\alpha/2}}(u+h)^{\partial_{\alpha/2}}\mathbf{1}=e^{\alpha}\mathbf{1}$，由（3.25），（3.27）中最右边的一项等于 s

$$\mathcal{E}^-(u)\,\mathbf{1}=e^{-\alpha}\mathcal{E}^-(u)E^+(u)e^{\alpha}u^{\partial_{\alpha/2}}(u+h)^{\partial_{\alpha/2}}\mathbf{1}=e^{-\alpha}X_{\alpha}(u)\,\mathbf{1}\,.$$

因此，(3.27) 的右端等于

$$F\cdot e^{k\alpha}X_{\alpha}(v_n)\dots X_{\alpha}(v_1)e^{-\alpha}X_{\alpha}(u)\,\mathbf{1}=G\cdot e^{(k-1)\alpha}X_{\alpha}(v_n)\dots X_{\alpha}(v_1)X_{\alpha}(u)\,\mathbf{1}\,. \tag{3.28}$$

(3.28) 的右端是将算子 $e^{-\alpha}$ 一直移到最左边后得到的，由此产生的项 $G\in\mathbb{C}[v_n^{-1},\dots,v_1^{-1}][[u,h]]$ 为

$$G=F\cdot\prod_{r=1}^{n}v_r^{-1}\,(v_r+h)^{-1}=\prod_{r=1}^{n}(v_r-u)^{-1}\,(v_r-u+h)^{-1}\,.$$

因此，我们证明了 (3.27) 的左端与 (3.28) 的右端一致。然而，显然 (3.28) 右端的所有系数都属于 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$。因此，3.26) 中的包含关系对 $m=1$ 成立，证明与引理 3.7中的证明相同。此外，一般情形 $m>1$ 也可再次通过对 m作归纳来验证。

令 $m=-1$。注意到 $\mathcal{E}^-(u)$ 可写为 $\mathcal{E}^-(u)=1-e^-(u)$，其中 $e^-(u)$ 属于 $uU(\widehat{\mathfrak{s}}^-)[[h,u]]$。因此 $\mathcal{E}^-(u)$ 可逆，且其逆元的形式为

$$\mathcal{E}^-(u)^{-1}=\big(1-e^-(u)\big)^{-1}=\sum_{l\geqslant 0}e^-(u)^l=\sum_{l\geqslant 0}\big(1-\mathcal{E}^-(u)\big)^l\,. \tag{3.29}$$

(3.29) 中的每一项都由 $\mathcal{E}^-(u)$ 的非负幂表示，它们满足 (3.26)，因此可得 $E^-(u)^{-1}\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\subset\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u]]$，正如所需。最后，与之前一样，通过归纳可将其推广到任意负整数 m。□

利用 (2.11) 以及定理 $k_j^-(u)$ 中给出的作用，容易验证恒等式$H^-(u-h/4)=\mathcal{E}^-(u)\,\mathcal{E}^-(u+h)^{-1}$，该恒等式适用于 $\mathcal{F}_0$上的算子。因此，由引理 3.10可得

推论 3.11. $H^-(u)\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\subset\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u]]$.

现在来考察算子 $X_{-\alpha}(u)$，它具有如下形式

$$X_{-\alpha}(u)=\mathcal{E}^-(u+h/2)^{-1}E^+(u-h/2)^{-1}e^{-\alpha}(u-h/2)^{-\partial_{\alpha/2}}(u+h/2)^{-\partial_{\alpha/2}}. \tag{3.30}$$

引理 3.12. $X_{-\alpha}(u)\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\subset\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)[[u^{\pm 1}]]$.

证明。 该引理可通过与引理证明平行的论证得出3.7。更具体地说，它依赖于恒等式

$$X_{-\alpha}(u)e^{k\alpha}X_{\alpha}(v_n)\,\dots X_{\alpha}(v_1)\,\mathbf{1}=F\cdot\mathcal{E}^-(u+h/2)^{-1}e^{(k-1)\alpha}X_{\alpha}(v_n)\,\dots X_{\alpha}(v_1)\,\mathbf{1}, \tag{3.31}$$

其中级数 $F\in\mathbb{C}[u^{-1}][[v_n,\dots,v_1,h]]$ 由下式给出

$$F=(u-h/2)^{-k}\,(u+h/2)^{-k}\prod_{r=1}^{n}(u-v_r-h/2)^{-1}\,(u-v_r+h/2)^{-1}\,.$$

此外，还用到了引理 3.10，它说明（3.31）右端的所有系数都属于 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$。至于（3.31）中的等式，则可利用算子 $X_{\pm\alpha}(u)$的表达式（3.25）和（3.30），以及关系式（3.10）。□

F最后，推论 3.9 和 3.11、包含关系（3.24）以及引理 3.12 表明

定理 3.13。 *The $\mathbb{C}[[h]]$-module $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ is a module for the double Yangian $DY(\mathfrak{sl}_2)$*。

考虑 $\mathbb{C}[[h]]$-模 $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)=\{e^{\lambda_1}v:\ v\in\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\}$。下一个引理可通过直接计算验证。

引理 3.14。 *The following commutation relations hold:*

$$X_\alpha(u)e^{\lambda_1} = u^{1/2}(u+h)^{1/2}e^{\lambda_1}X_\alpha(u),$$
$$X_{-\alpha}(u)e^{\lambda_1} = (u-h/2)^{-1/2}(u+h/2)^{-1/2}e^{\lambda_1}X_{-\alpha}(u),$$
$$H^+(u)e^{\lambda_1} = (u+7h/4)^{1/2}(u-h/4)^{-1/2}e^{\lambda_1}H^+(u), \quad H^-(u)e^{\lambda_1} = e^{\lambda_1}H^-(u).$$

利用引理3.14，容易验证 $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$ 在双杨代数 $\mathbf{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ 的作用下也封闭，因此我们有

定理 命题 3.15. *The $\mathbb{C}[[h]]$-module $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$ is a module for the double Yangian $DY(\mathfrak{sl}_2)$.*

3.5. $\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2)$ 的半无限单项式基。本小节中，我们为 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 和 $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$ 构造拓扑基。先从 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 开始。引入算子

$$\widetilde{X}(u) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \widetilde{x}(r)u^{-r-1} = X_\alpha(u)\,(1+h/u)^{-\partial_{\alpha/2}}\,, \tag{3.32}$$

其中 $X_\alpha(u)$ 的作用由定理 3.1 给出。它满足恒等式

$$\widetilde{X}(u_n)\dots\widetilde{X}(u_1)\,\mathbf{1} = F\cdot X_\alpha(u_n)\dots X_\alpha(u_1)\,\mathbf{1} \quad \text{for} \quad F = \prod_{r=2,\dots,n}(1+h/u_r)^{1-r}\,. \tag{3.33}$$

~令 B_{W_0} 为所有元素的集合 $\widetilde{x}(r_n)\dots\widetilde{x}(r_1)\,\mathbf{1}$，其中 $n\geqslant 0$ 且整数 r_1、……、r_n满足式（3.17）给出的条件。

~推论 3.16。 *The set B_{W_0} forms a topological basis of W_0.*

证明。 给定集合是线性无关的，因为其经典极限与经典~基 B_{W_0}（定理 3.6）的经典极限相重合。事实是，$\mathbb{C}[[h]]$-张成的 B_{W_0} 在 h-进拓扑下稠密于 W_0，这一点可仿照定理 3.6的证明来论证。然而，其中的论证依赖于恒等式（3.16），而这里使用的是（3.33）。□

~ ~对于任意整数 m，令 $B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\,m}$ 表示所有满足 $e^{m\alpha}b$ 的元素 $b\in B_{W_0}$所组成的集合。~显然，并集 $\cup_{m\in\mathbb{Z}}B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\,m}$ 张成一个 h-进拓扑下稠密的 $\mathbb{C}[[h]]$-子模。我们现在运用 Feigin–Stoyanovsky 型构造 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 将其化为一个线性无关集。由（3.6）和（3.32），我们有

$$\widetilde{x}(-1)\,\mathbf{1} = e^{\alpha}\,\mathbf{1}\,. \tag{3.34}$$

~ ~此外，通过提取关系式 $X(u)e^{-\alpha} = e^{-\alpha}X(u)u^{-2}$中的系数（通过直接计算很容易验证），我们得到

$$\widetilde{x}(r)e^{-\alpha} = e^{-\alpha}\widetilde{x}(r-2) \quad \text{for all} \quad r\in\mathbb{Z}. \tag{3.35}$$

~设 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)_m$ 为 $B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\,m}$的 h-进完备 $\mathbb{C}[[h]]$-张成空间。注意到并集$\cup_{m\in\mathbb{Z}}\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)_m$ 与 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 一致。此外，对于所有整数~ ~m，我们有 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)_m\subset\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)_{m-1}$。事实上，这是包含关系 $B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\,m}\subset B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)\,m-1}$的直接推论；该关系可利用恒等式 (3.34) 和 (3.35) 如下证明:

$$e^{m\alpha}\widetilde{x}(r_n)\dots\widetilde{x}(r_1)\,\mathbf{1} = e^{m\alpha}\widetilde{x}(r_n)\dots\widetilde{x}(r_1)e^{-\alpha}e^{\alpha}\,\mathbf{1} = e^{m\alpha}\widetilde{x}(r_n)\dots\widetilde{x}(r_1)e^{-\alpha}\widetilde{x}(-1)\,\mathbf{1}$$
$$= e^{(m-1)\alpha}\widetilde{x}(r_n-2)\dots\widetilde{x}(r_1-2)\widetilde{x}(-1)\,\mathbf{1}\in\widetilde{B}_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2),m-1}.$$

最后，我们得到 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$ 的拓扑基。

定理 3.17. *The direct limit*

$$\widetilde{B}_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)} = \varinjlim \widetilde{B}_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2),m}$$

forms a topological basis of $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$.

~证明。显然，$B_{\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)}$ 中的元素张成了 h-进稠密的 $\mathbb{C}[[h]]$-子模 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2$。另一方面，它们的经典极限给出了^可积最高权 $\mathfrak{sl}_2$-模 $L(\Lambda_0)$的半无限基，其最高权为 Λ_0，由 B. Feigin 和 Stoyanovsky 建立 [6], ，因此它们线性无关。□

~考虑 DY($\mathfrak{sl}_2$)-模 $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$。对于任意整数 m ，令 $B_{\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)\,m}$ 为 ~ ~所有满足 $b \in B_{W_0}$的元素 $e^{\lambda_1+m\alpha}b$ 构成的集合。并集 $\cup_{m\in\mathbb{Z}}B_{\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)\,m}$ 张成了 $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$的一个 h-进稠密$\mathbb{C}[[h]]$-子模。 $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$的半无限基仿照 $\mathcal{L}_0(\mathfrak{sl}_2)$的情形建立。在此情形下，其线性无关性自然可由以下观察得出：它的经典极限给出了来自[6]、最高权为 Λ_1 的可积^最高权 $\mathfrak{sl}_2$-模 $L(\Lambda_1)$的半无限基。因此，我们有

定理 3.18. *The direct limit*

$$\widetilde{B}_{\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)} = \varinjlim \widetilde{B}_{\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2),m}$$

forms a topological basis of $\mathcal{L}_1(\mathfrak{sl}_2)$.

~注 3.19. 在本注中，我们将讨论如何用半无限单项式 [6] 来解释基 $B_{\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2)}$ 。首先，记 $v_{i,m} = e^{\lambda_i+m\alpha}\,\mathbf{1}$ 为 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $i = 0, 1$，从而特别有 $v_{i,0} = e^{\lambda_i}\,\mathbf{1}$。我们可以将元素 $v_{i,0} = e^{\lambda_i}\,\mathbf{1}$ 表示为

$$v_{i,0} = e^{\lambda_i}\,\mathbf{1} = e^{\lambda_i-\alpha}e^{\alpha}\,\mathbf{1} = e^{\lambda_i-\alpha}\widetilde{x}(-1)\,\mathbf{1} = \widetilde{x}(1-i)e^{\lambda_i-\alpha}\,\mathbf{1} = \widetilde{x}(1-i)v_{i,-1}.$$

接下来，通过类似的计算（从 $v_{i,-1}$ 开始），我们得到

$$v_{i,-1} = e^{\lambda_i-\alpha}\,\mathbf{1} = e^{\lambda_i-2\alpha}e^{\alpha}\,\mathbf{1} = e^{\lambda_i-2\alpha}\widetilde{x}(-1)\,\mathbf{1} = \widetilde{x}(3-i)e^{\lambda_i-2\alpha}\,\mathbf{1} = \widetilde{x}(3-i)v_{i,-2}.$$

结合上述等式，我们得到 $v_{i,0} = \widetilde{x}(1-i)\widetilde{x}(3-i)v_{i,-2}$。重复这样的计算，我们得到

$$v_{i,0} = \widetilde{x}(1-i)\widetilde{x}(3-i)\ldots\widetilde{x}(2m-1-i)\,v_{i,-m} \quad \text{for any} \quad m > 0. \tag{3.36}$$

注意，根据（3.36），定理 3.17 和3.18 中的直接极限对应于取极限 $m \to \infty$，其中元素具有如下形式

$$e^{m\alpha}\,bv_{i,0} = e^{m\alpha}\,b\widetilde{x}(1-i)\widetilde{x}(3-i)\ldots\widetilde{x}(2m-1-i)\,v_{i,-m}, \quad \text{where} \quad b \in \widetilde{B}_{W_0}$$

因此，按照上述方法将项 $e^{m\alpha}$ 移至右侧可知，~基 $B_{\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2)}$ 中的元素可以表示为半无限单项式

$$\widetilde{x}(r_1)\widetilde{x}(r_2)\ldots v_{i,-\infty} \qquad \text{such that}$$

（1）它们的次数 r_1、r_2、$\ldots \in \mathbb{Z}$ 满足差二条件

$$r_j \leqslant r_{j+1} - 2 \quad \text{for all} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

（2）对于每个单项式，都存在一个指标 n ，使得当 $i = 0$ （分别为 $i = 1$）时，所有次数 r_n、r_{n+1}、.....都是连续的奇数（分别为偶数）。

3.6. $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ 的半无限单项式基。考虑 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$-模

$$\mathcal{L}_0(\mathfrak{gl}_2) = \mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)\cdot \mathbf{1} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_1(\mathfrak{gl}_2) = \mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)\cdot e^{\lambda_1},$$

其中，与前面一样，双杨代数的作用由定理 3.1给出。回忆一下，海森堡子代数 H 与 $\mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)$ 的所有元素对易，因此我们有

$$\mathcal{L}_0(\mathfrak{gl}_2) = \mathrm{H}\cdot\mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)\cdot\mathbf{1} = \mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)\cdot\mathrm{H}\cdot\mathbf{1} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_1(\mathfrak{gl}_2) = \mathrm{H}\cdot\mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)\cdot e^{\lambda_1} = \mathrm{DY}(\mathfrak{sl}_2)\cdot\mathrm{H}\cdot e^{\lambda_1}.$$

考虑由 $\mathbf{1}$ 和所有满足 $r \geqslant 1$ 的元素 $\kappa^{(-r)}$ 生成的子代数 $\mathrm{H}^- \subset \mathrm{H}$。代数 H^- 拥有 Poincar´e–Birkhoff–Witt 基

$$B_{\mathrm{H}^-} = \left\{\kappa^{(-r_n)}\dots\kappa^{(-r_1)} \,:\, n \geqslant 0,\, r_n \geqslant \dots \geqslant r_1 \geqslant 1\right\}. \tag{3.37}$$

事实上，B_{H^-} 张成 H^-，因为所有 $\kappa^{(-r)}$ 满足 $r \geqslant 1$ 的元素彼此对易。另一方面，它们的线性无关性由映射（2.12）以及 Poincar´e–Birkhoff–Witt 定理确立，其中 $U(\mathfrak{h}^-)$ 表示由所有 $\mathfrak{h}^-$ 生成的 $\mathfrak{h}$ 李子代数$I(-r) = I\otimes t^{-r}$ 满足 $r \geqslant 1$ 的元素。对于 $i = 0,\, \mathbf{1}$ 引入集合

$$\widetilde{B}_{\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)} = \left\{hb \,:\, h \in B_{\mathrm{H}^-},\, b \in \widetilde{B}_{\mathcal{L}_i(\mathfrak{sl}_2)}\right\}.$$

定理 3.20。 *Let $i = 0,1$. The set $B_{\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)}$ forms a topological basis for $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$。*

证明。定理 3.17 和 3.18，以及本定理之前的讨论，表明集合 $B_{\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)}$ 张成了 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ 中一个关于 h 进拓扑稠密的 $\mathbb{C}[[h]]$-子模。另一方面，由于观察到$\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ 的经典极限等于 $U(\mathfrak{h}^-)\otimes L(\Lambda_i)$，可知它们线性无关。□

4. Modules for the quantum vertex algebra $\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$

本节研究半无限构造的底层（量子）顶点代数框架。特别地，我们得到 $\mathfrak{gl}_2$的量子化万有仿射顶点代数的不可约模的例子。

4.1. 量子仿射顶点代数 $\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$。 $\mathfrak{gl}_2$ 的对偶杨代数 $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_2)$ 定义为环 $\mathbb{C}[[h]]$ 上由元素 $t_{ij}^{(-r)}$ 生成的结合代数，其中 $i,j = 1,2$ 和 $r = 1,2\dots$. 其定义关系为

$$R_{12}(u-v)T^-_{13}(u)T^-_{23}(v) = T^-_{23}(v)T^-_{13}(u)R_{12}(u-v),$$

其中记号与（2.3）和（2.4）中的相同。由于 Poincar´e–Birkhoff–Witt 定理，我们对对偶杨代数的生成元及双杨代数中相应的生成元使用相同的符号，因为 $\mathrm{Y}^+(\mathfrak{gl}_2)$ 可自然地视为 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 的子代数。此外，对任意 $c \in \mathbb{C}$，对偶杨代数的 h-进完备化自然带有 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 作用，使得中心元 C 的作用为乘以标量 c。我们将此 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 模记为 $\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$。此外，借助 Etingof–Kazhdan构造，$\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$ 可如下赋予量子顶点代数结构；更多信息请参见定理 2。。

定理 4.1。 *There exists a unique quantum vertex algebra structure on $\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$ so that the unit 1 is the vacuum vector and the vertex operator map satisfies*

$$\begin{aligned} Y(T^-_{1n}(u_1)\dots T^-_{n-1\,n}(u_{n-1}),z) = {} & T^-_{1n}(z+u_1)\dots T^-_{n-1\,n}(z+u_{n-1}) \\ & \times T^+_{n-1\,n}(z+u_{n-1}-hc/2)^{-1}\dots T^+_{1n}(z+u_1-hc/2)^{-1}. \end{aligned}$$

证明。 与原始结果 [3, 定理 2。3], 相比，我们对 Yang R-矩阵采用了不同的规范化方式，该矩阵控制算子 $T^{\pm}(u)$ 之间的关系（2.2）。然而，该定理仍可通过类似的论证再次得到证明，这些论证也可以从 [9, 定理 2.3。8] 和 [12, 定理 4。1]的证明中还原出来。 □

注 4.2. 映射 $Y(\cdot, z)$ 模 h 可表示如下。记

$$t^{\pm}(u) = \pm h^{-1}(I - T^{\pm}(u)) \quad \text{and} \quad t(u) = t^{-}(u) + t^{+}(u).$$

利用对 n 的归纳法，可以证明恒等式

$$Y(t_{1n}^{-}(u_1) \dots t_{n-1\,n}^{-}(u_{n-1}), z) = :t_{1n}(u_1) \dots t_{n-1\,n}(u_{n-1}): \quad \mod h,$$

其中，算子的正规序乘积按通常方式定义：

$$:t(u_1)t(u_2): = t^{-}(u_1)t(u_2) + t(u_2)t^{+}(u_1) \quad \text{and} \quad :t(u_1) \dots t(u_r): = :t(u_1) :t(u_2) \dots t(u_r)::.$$

因此，容易看出，量子顶点代数 $h \to 0$ 的经典极限 $\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$ 与万有仿射顶点代数 $V^c(\mathfrak{gl}_2)$ 一致。这一理论可追溯至 I. Frenkel 和 Zhu [7] 以及 Lian [18] 的论文；回顾注 2.2。

设 $c_2 = -2c$。记 $\mathcal{V}^{c_2}(\mathfrak{h})$ 为海森堡子代数 $\mathrm{H} \subset \mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 的层 c_2 模，其定义在 H^- 的 h-进完备化上。显然，有 $\mathcal{V}^{c_2}(\mathfrak{h}) \subset \mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$，且 $\mathcal{V}^{c_2}(\mathfrak{h})$ 的拓扑基由 (3.37) 给出。H 的生成元级数 $K^{\pm}(u)$ 可表示为来自 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$ 的 RTT-实现中矩阵 $T^{\pm}(u)$ 的量子行列式，因此有 $K^{\pm}(u) = \mathrm{qdet}\, T^{\pm}(u)$；见 [10, 定理 B.15]。利用这一观察，可得到定理 4.1 的以下简单推论。

推论 4.3. *The $\mathbb{C}[[h]]$-module $\mathcal{V}^{c_2}(\mathfrak{h})$ is a quantum vertex subalgebra of $\mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$ for $c = -c_2/2$. Its vacuum vector is $1 \in \mathcal{V}^c(\mathfrak{gl}_2)$ and its vertex operator map satisfies*

$$Y(K^{-}(u_1) \dots K^{-}(u_n), z) = K^{-}(z + u_1) \dots K^{-}(z + u_n) \times K^{+}(z + u_n + hc_2/4)^{-1} \dots K^{+}(z + u_1 + hc_2/4)^{-1}.$$

注 4.4. 本小节的结果是针对 $\mathfrak{gl}_2$ 给出的，以便更好地契合本文的设定。不过，将它们推广到 $\mathfrak{gl}_N$ 且取 $N > 2$ 的情形是显而易见的。受限模的概念以及下面给出的定理 4.6 也同样如此。

4.2. 双杨代数的受限模。若 $\mathrm{DY}(\mathfrak{gl}_2)$-模 V 是一个拓扑自由的 $\mathbb{C}[[h]]$-模，并且对任意 $v \in V$ 和 $n \geqslant 1$，表达式 $T^{+}(u)v$ 模 h^n 意义下只含有限个关于 u 的负幂，则称其为受限模。最后一个条件等价地可表述为

$$T^{+}(u)v \in \mathrm{End}\, \mathbb{C}^2 \otimes V[u^{-1}]_h \quad \text{for all} \quad v \in V, \tag{4.1}$$

其中，$V[u^{-1}]_h$ 表示 $\mathbb{C}[[h]]$-模 $V[u^{-1}]$的 h-进完备化。扩展这一记号，我们也将 $V((u))_h$ 记作 h-进完备化 $V((u))$。

命题 4.5。 *The $DY(\mathfrak{gl}_2)$-modules $\mathcal{F}_{is}$ and $\mathcal{F}_i$ established by Theorems 2。3 and 3.1 respectively are restricted.*

证明。显然，底层的 $\mathbb{C}[[h]]$-模结构是拓扑自由的。此外，通过考察上述定理中的显式公式，我们发现

$$X^{\pm}(u) \in \mathrm{Hom}(F, F((u))_h), \quad k_j^{-}(u) \in \mathrm{Hom}(F, F[[u]]), \quad k_j^{+}(u) \in \mathrm{Hom}(F, F[u^{-1}]_h),$$

其中 $F=\mathcal{F}_{is}$, $\mathcal{F}_{i}$。现在我们利用（2.8）–（2.10）中的恒等式来证明该命题。首先注意到，由（2.8）中的第一个等式可得 t_{11}^{+}（u） $\in \mathrm{Hom}(F,\ F[u^{-1}]_{h})$。接下来，由（2.10）可得

$$t_{21}^{+}(u)=X^{-}(u-hC/4)t_{11}^{+}(u)+t_{21}^{-}(u-hC/2)t_{11}^{-}(u-hC/2)^{-1}t_{11}^{+}(u),$$

这意味着 $t_{21}^{+}(u)\in \mathrm{Hom}(F,F[u^{-1}]_{h})$。至于 $t_{12}^{+}(u)$，我们将关系式 (2.9) 改写为

$$t_{11}^{+}(u)^{-1}t_{12}^{+}(u)=X^{+}(u+hC/4)+t_{11}^{-}(u+hC/2)^{-1}t_{12}^{-}(u+hC/2)$$

从而得出乘积 $t_{11}^{+}(u)^{-1}t_{12}^{+}(u)$ 属于 $\mathrm{Hom}(F,F[u^{-1}]_{h})$。将该乘积乘以 $t_{11}^{+}(u)\in \mathrm{Hom}(F,F[u^{-1}]_{h})$，得到 $t_{12}^{+}(u)\in \mathrm{Hom}(F,F[u^{-1}]_{h})$，如所需。最后，(2.8) 中的第二个等式意味着

$$t_{22}^{+}(u)=k_{2}^{+}(u)+t_{21}^{+}(u)t_{11}^{+}(u)^{-1}t_{12}^{+}(u).$$

由于 $t_{11}^{+}(u)^{-1}\in \mathrm{Hom}(F,F[u^{-1}]_{h})$，我们得出结论，$t_{22}^{+}(u)$ 的矩阵剩余项$T^{+}(u)$ 属于 $\mathrm{Hom}(F,F[u^{-1}]_{h})$，从而验证了 (4.1) 所施加的要求。□

下一个定理是我们引入受限模概念的主要动机。其证明依赖于双杨代数的 RTT-实现，并且与定理 4.1 的证明过程平行。

定理4.6. *Let V be a restricted $DY(\mathfrak{gl}_2)$-module of level c. Then there exists a unique structure of $\mathcal{V}^{c}(\mathfrak{gl}_2)$-module over V such that for all $n\geqslant 1$ we have*

$$Y_V(T_{1n}^{-}(u_1)\dots T_{n-1\,n}^{-}(u_{n-1}),z)=T_{1n}^{-}(z+u_1)_V\dots T_{n-1\,n}^{-}(z+u_{n-1})_V \\ \times T_{n-1\,n}^{+}(z+u_{n-1}-hc/2)_V^{-1}\dots T_{1n}^{+}(z+u_1-hc/2)_V^{-1}.$$

下面的推论可由命题 4.5 和定理 4.6直接推出。

推论 4.7. *There exists a unique structure of $\mathcal{V}^{1}(\mathfrak{gl}_2)$-module over $\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ with $i=0$, 1 such that for all $n\geqslant 1$ we have*

$$Y_{\mathcal{L}_i}(T_{1n}^{-}(u_1)\dots T_{n-1\,n}^{-}(u_{n-1}),z)=T_{1n}^{-}(z+u_1)_{\mathcal{L}_i}\dots T_{n-1\,n}^{-}(z+u_{n-1})_{\mathcal{L}_i} \\ \times T_{n-1\,n}^{+}(z+u_{n-1}-h/2)_{\mathcal{L}_i}^{-1}\dots T_{1n}^{+}(z+u_1-h/2)_{\mathcal{L}_i}^{-1}.$$

^考虑层为 -2 的玻色 Fock $\mathfrak{h}$-模 $M(-2)$ 的标准结构。特别地，回想一下，$M(-2)$ 是一个不可约 $\mathfrak{h}$-模，作为向量空间，它与 $U(\mathfrak{h}^{-})$ 相同。对于 $i=0,1$，张量积 $L_i=M(-2)\otimes L(\Lambda_i)$ 自然带有 $\mathfrak{gl}_2$ 的不可约模结构，其中 $L(\Lambda_i)$ 是最高权为 Λ_i 的可积最高权 $\mathfrak{sl}_2$-模。因此，L_i 具有层为 1 的万有仿射顶点代数 $V^{1}(\mathfrak{gl}_2)$ 的不可约模结构。另一方面，$\mathcal{V}^{1}(\mathfrak{gl}_2)$-模 $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ 的经典极限与 $V^{1}(\mathfrak{gl}_2)$-模 L_i 相同。

在下一个推论中，我们按以下意义使用不可约模这一概念。若拓扑自由的 $\mathbb{C}[[h]]$-模 V 不含任何非平凡的拓扑自由 $\mathbb{C}[[h]]$-子模 W，且该子模在相应的结合代数（分别为量子顶点代数）作用下不变，并满足：对于$n\geqslant 1$，若 $h^{n}v\in W$ 且 $v\in V$，则 $v\in W$，则称 V 关于结合代数（分别为量子顶点代数）的作用不可约。

推论 4.8. *The $\mathbb{C}[[h]]$-modules $\mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ are irreducible both as modules for the quantum vertex algebra $\mathcal{V}^{1}(\mathfrak{gl}_2)$ and as level 1 modules for the double Yangian $DY(\mathfrak{gl}_2)$.*

证明。 关于 $\mathcal{V}^1(\mathfrak{gl}_2)$ 作用的不可约性可由推论前面的讨论得出。至于双杨代数的作用，若 $\mathbb{C}[[h]]$-子模$W \subset \mathcal{L}_i(\mathfrak{gl}_2)$ 是 DY($\mathfrak{gl}_2$)-不变的，根据推论 4.7 可得

$$Y_{\mathcal{L}_i}(T_{1n}^-(u_1)\dots T_{n-1\,n}^-(u_{n-1}),z)W \subset (\operatorname{End}\mathbb{C}^N)^{\otimes(n-1)} \otimes W[[z^{\pm 1},u_1,\dots,u_{n-1}]]$$

对所有 $n \geqslant 1$ 都成立。由于 $T_{1n}^-(u_1)\dots T_{n-1\,n}^-(u_{n-1})$ 的矩阵元系数连同 $n \geqslant 1$ 张成了 $\mathcal{V}^1(\mathfrak{gl}_2)$ 中一个关于 h-进拓扑稠密的 $\mathbb{C}[[h]]$-子模，显然 W 也具有 $\mathcal{V}^1(\mathfrak{gl}_2)$-不变性，因此第二个断言得证。□

注 4.9. Ding–Feigin 构造半无限单项式基 [1]的做法^量子仿射代数 $U_q(\mathfrak{sl}_2$表明，或许可以为与 4.7 和4.8 类似的推论建立相应结果。另一方面，Etingof–Kazhdan 的量子顶点代数 [3] 与三角 R矩阵对应，其类型为 $A_1^{(1)}$。近期，Kong 采用不同的方法，在一大类非扭量子仿射化代数的不可约模上构造了 h-进量子顶点代数结构 [15]。

Acknowledgement

M.B. 和 S.K. 谨向 Mirko Primc 致谢，感谢他进行的有益讨论。本研究部分得到中国国家自然科学基金项目（批准号：12101261 和 12171303）以及克罗地亚科学基金会项目 UIP-2019-04-8488 的资助。

References

[1] J. Ding, B. Feigin, 《交换量子流算子、半无限构造与函数模型》, Represent. Theory 4 (2000), 330–341；arXiv:q-alg/9612009。[2] V. G. Drinfeld, 《杨代数与量子化仿射代数的新实现》, Soviet. Math. Dokl. 36 (1988), 212–216。[3] P. Etingof, D. Kazhdan, 《李双代数的量子化，V》, Selecta Math. (N.S.) 6 (2000), 105–130；arXiv:math/9808121 [math.QA]。[4] I. B. Frenkel, N. Jing, 《量子仿射代数的顶点表示》, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 85 (1988), 9373–9377。[5] I. Frenkel, V. Kac, 《仿射李代数的基本表示与对偶共振模型》, Invent. Math. 62 (1980/81), 23–66。[6] A. V. Stoyanovsky,B. L. Feigin, 《流代数表示的函数模型与半无限舒伯特胞腔》, Funktsional Anal. i Prilozhen. 28 (1994), 68–90, 96（俄文）；译文发表于 Funct. Anal. Appl. 28 (1994), 55–72；arXiv:hep-th/9308079。[7] I. B. Frenkel and Y.-C. Zhu, 《与仿射代数和 Virasoro 代数表示相关的顶点算子代数》, Duke Math. J. 66 (1992), 123–168。[8] M. Gardini, 《量子顶点代数》, 博士论文, 罗马智慧大学，2018。[9] G. Georgiev, 《无限维李代数模的组合构造，I：主子空间》, J. Pure Appl. Algebra 112 (1996), 247–286；arXiv:hep-th/9412054。[10] K. Iohara, 《杨代数双 $DY_\hbar(\mathfrak{g})$ 的玻色表示，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N, \mathfrak{sl}_N$》, J. Phys. A 29 (1996), 4593–4621；arXiv:q-alg/9603033。[11] K. Iohara, M. Kohno, 《$DY_h(\mathfrak{gl}_2)$ 的中心扩张及其顶点表示》, Lett. Math. Phys. 37 (1996), 319–328；arXiv:q-alg/9603032。[12] N. Jing, S. Ko˘zi´c, A. Molev, F. Yang, 《A 型量子仿射顶点代数的中心》, J. Algebra 496 (2018), 138–186；arXiv:1603.00237 [math.QA]。[13] N. Jing, F. Yang, 《A 型杨代数双的中心》, arXiv:2207.01712 [math.QA]。[14] V. G. Kac, 《无限维李代数》, 第3版, 剑桥大学出版社，剑桥，1990。[15] F. Kong, 《与非扭量子仿射化代数相关的量子仿射顶点代数》, arXiv:2212.04888 [math.QA]。

[16] J. Lepowsky, S. Milne，经典分拆恒等式的李代数方法，《数学进展》**29**(1978), 15–59。[17] J. Lepowsky,M. Primc，仿射李代数 $A_1^{(1)}$ 的标准模结构，《当代数学》46，美国数学会，普罗维登斯，1985。[18] B.-H. Lian，单顶点算子代数的分类，《数学物理通讯》**163** (1994), 307–357。[19]M. Nazarov，双杨代数与普适 R 矩阵，《日本数学杂志》**15** (2020), 169–221；arXiv:1904.02517 [math.QA]。[20] G. Segal，某些无限维群的酉表示，《数学物理通讯》**80**(1981), 301–342。

Marijana Butorac:Faculty of Mathematics,
University of Rijeka,Radmile Matejčić 2, 51000 Rijeka,
Croatia电子邮箱地址：mbutorac@math.uniri.hr

Naihuan Jing:Department of Mathematics,
North Carolina State University,Raleigh, NC 27695, USA电子邮箱地址：jing@ncsu.edu

Slaven Kožić:Department of Mathematics, Faculty of Science,
University of Zagreb,Bijenička cesta 30, 10000 Zagreb, Croatia电子邮箱地址：kslaven@math.hr

Fan Yang:Department of Mathematics,
Jiaying University,Meizhou, Guangdong 514000,
China电子邮箱地址：1329491781@qq.com