arXiv:2301.04736v1 [math.DS] 11 Jan 2023

具有指数相关性衰减的动力系统的扭曲递归

Jiajie Zheng

摘要

我们研究一类点集，这些点会无穷多次回到依赖于起始点的目标序列。假设 L^1 相对于有界变差函数具有相关性衰减，我们证明了 Lipschitz 扭曲下的一个广义定量递归结果。

1 引言

设 (X,d) 是一个可分紧度量空间，且 (X,μ,T) 是一个 Borel 概率保测系统。Poincar´e 回归定理（例如参见 [EW] ）指出，在可测动力系统中，几乎所有点在保测映射作用下都会回到自身附近；即，

$$\liminf_{n\to\infty} d(T^n x, x) = 0 \quad \text{for almost every } x \in X.$$

Boshernitzan 在 [Bo] 中对回归速度进行了定量研究。具体而言，若 X 的 α 维 Hausdorff 测度对某个 $\alpha > 0$ 为 σ-有限，则

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1/\alpha} d(T^n x, x) < \infty \quad \text{for almost every } x \in X.$$

对递归速度的一种自然推广是考虑以下集合

$$R(\psi) := \{x \in X : d(T^n x, x) < \psi(n) \text{ for infinitely many } n\}$$

其中给定函数 $\psi : \mathbb{N} \to (0,\infty)$。此后，关于定量递归理论的研究成果颇丰；例如参见 [BF、CWW、DFL、HLSW、KZ、KKP、Pe]。

与回归理论密切相关的一个主题是所谓的收缩目标问题，它旨在确定一个 μ-泛型点的轨道向固定点 $y \in X$ 聚集的速度。更确切地说，对于 $\psi : \mathbb{N} \to (0,\infty)$ 和给定点 $y \in X$，可以定义集合

$$A(\psi, y) := \{x \in X : d(T^n x, y) < \psi(n) \text{ for infinitely many } n\}.$$

关于特定系统中 $\mu(A(\varphi, y))$ 的零一律，已有大量研究成果；例如，参见 [CK、FMP、HNPV、KM、LLVZ、Ph]。

一种称为扭曲递归的更一般框架由 [KZ, LWW] 提出，它可以特化为收缩目标问题和定量递归。对于 $\psi : \mathbb{N} \to (0,\infty)$ 以及一个博雷尔可测函数 $f : X \to X$，可以考虑集合

$$R(\psi, f) := \{x \in X : d(T^n x, f(x)) < \psi(n) \text{ for infinitely many } n\}.$$

显然，若 f 是恒等函数，则 $R(\psi, f) = R(\psi)$；若 f 是取值为 y 的常值函数，则 $R(\psi, f) = A(\psi, y)$。当 f 是利普希茨函数时， $\mu(R(\psi, f))$ 的零一律已在 [KZ, LWW], 针对一些特殊系统得到证明，其中包括经典动力系统，如 β-变换、高斯变换以及康托集上的左移位。具体而言，在这些情形下

$$\mu(R(\psi, f)) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n, x)^{\delta} < \infty \\ 1 & \text{if } \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n, x)^{\delta} = \infty, \end{cases}$$

其中， δ 是 μ的支撑集的豪斯多夫维数。

本文证明了具有相关性指数衰减的动力系统的定量利普希茨回归性质。为陈述本文的主要结果，我们需要调整并修改 [KKP]中的设定和假设。在本文余下部分，令 $X = [0, 1]$ 和 d 为标准度量，并假设对于任意取值于$(0, 1)$的正实数序列 $\{M_n\}_n$ ，都存在函数序列 $\{r_n : X \to (0, 1)\}_n$ ，使得$r_n(x) = \inf\{r : \mu(B(x, r)) = M_n\}$ 对所有 $x \in X$ 均成立。对于函数 $f\colon X \to X$，我们感兴趣的f-扭曲回归集定义为

$$R(\{M_n\}_n, f) := \{x \in X : T^n x \in B(f(x), r_n(x)) \text{ for infinitely many } n\}.$$

如果存在常数 c、 $\delta > 0$ 使得.....，则称 μ 是阿尔福斯正则的。

$$\frac{1}{c} r^s \le \mu(B(x, r)) \le c r^s \quad \forall x \in \mathrm{Supp} X \text{ and balls } B(x, r) \subset X$$

如果存在常数 c、 $\delta > 0$ 使得.....，则称 μ 是上阿尔福斯正则的。

$$\mu(B(x, r)) \le c r^s \quad \forall x \in \mathrm{Supp} X \text{ and balls } B(x, r) \subset X. \tag{1}$$

如果 μ 是阿尔福斯正则的，那么 $R(\{M_n\}_n, f) = R(\psi, f)$，其中 $\psi(n) = r_n(x)$。一般而言，这些定义并不相同。在陈述主要定理之前，我们先说明本文方法所处理的函数类 f 。若 $f : X \to X$ 满足以下条件，则称其为利普希茨函数:

$$\sup_{x, y \in X, x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} < \infty. \tag{2}$$

定义 1. 设 (X, μ, T) 是一个保测系统，且 $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ 是一个序列。若该系统的相关性对于有界变差（BV）函数以 p 的速度衰减（ L^1），则称其相关性以 p 的速度衰减:

$$\left| \int (f \circ T^n) \cdot g \, d\mu - \int f \, d\mu \int g \, d\mu \right| \le ||f||_{L^1} \cdot ||g||_{\mathrm{BV}} \cdot p(n)$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有满足 $||f||_1$ 的函数 $f\colon = \int |f| \, d\mu < \infty$，以及满足 $||g||_{\mathrm{BV}}$ 的函数 $g\colon = \sup_{x_i} \sum |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + \sup |g| < \infty$。

注 1。定义 1 弱于[KZ], 中提出的一致混合条件，因为对于任意球 E、$F \subset X$，我们可以取 $f = \chi_E$ 和 $g = \chi_F$，从而得到

$$\left|\mu(T^{-n}E \cap F) - \mu(E)\mu(F)\right| \leq 3\mu(E)p(n).$$

注 2. 对于一个非递增函数 $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$，我们知道存在某个

$\alpha \in \mathcal{W}(\psi) := \{\alpha \in [0,1]\colon |q\alpha - p| < \psi(q)$ 对无穷多个自然数 $p, q\}$.

接着考虑系统

$$T : [0,1] \to [0,1], \quad x \mapsto x + \alpha \,(\mathrm{mod} 1)$$

以及勒贝格测度。于是 $R(\psi, \mathrm{Id}) = [0,1]$，其中 $\mathrm{Id}\colon [0,1] \to [0,1]$ 是恒等函数。定理 1 的收敛情形将不成立；因此，若要使 $R(\psi, f)$ 满足零一律，就需要某种混合条件。更多细节请参见 [KZ, §2]。

我们首先给出 $R(\{M_n\}_n, f) = 0$ 的充分条件，该条件取决于 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 的收敛性。若存在一个子区间的可数划分$\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，使得对于所有 $i \in \mathcal{I}$，$f|_{X_i}$ 都是利普希茨函数，则称 f 为分段利普希茨。若存在一个子区间的可数划分 $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$，使得对于所有 $i \in \mathcal{I}$，$f|_{X_i}$ 都是单调函数，则称 f 为分段单调。

定理 1. 设 $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ 是一个函数，并假设 (X, μ, T) 的相关性以 p 的速度衰减，其中 L^1 相对于具有 $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) < \infty$的有界变差函数。设 $\{M_n\}_n$ 是一个包含于 $(0, 1)$ 的序列。假设 $f\colon X \to X$ 是分段利普希茨且分段单调的。若 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$，则 $\mu(R(\{M_n\}_n, f)) = 0$。

对于全测度部分,

定理 2. 设 $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$、$(X, \mu, T)$、$\{M_n\}_n$ 和 $f\colon X \to X$ 与定理 1 中的相同。此外，假设

- *There exist* $C > 0$ *and* $0 < \gamma < 1$ *such that* $p(n) = C\gamma^n$.
- μ是上阿尔福斯正则的。
- 对于任意 $q > 0$,

$$\limsup_N \sum_{n=\lfloor q \log N \rfloor}^{N} M_n = \infty \tag{3}$$

则 $\mu(R(\{M_n\}_n, f)) = 1$。

在 [KKP], 中，作者证明了当 f 为恒等映射时的定理 1 和定理 2。我们将运用 [KKP], 证明中使用的一些思想和技巧，但由于新的设定，证明有所不同。

我们立即得到关于 Ahlfors 正则系统的一个推论。

推论 3. 设 $p(n) = C\gamma^n$ 对某个 $C > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$ 成立，并假设 (X, μ, T) 的相关性相对于有界变差函数按 p 衰减，其中 L^1。设 μ 是 δ-阿尔福斯正则的。假设 f 是分段利普希茨且分段单调的。那么

1. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)^{\delta} < \infty$，那么 $R(\psi, f)$ 是零测集。

2. 如果对任意 $q > 0$,

$$\limsup_{N} \sum_{n=\lfloor q \log N \rfloor}^{N} M_n = \infty, \tag{4}$$

那么 $R(\psi, f)$ 是全测集。

我们要指出，推论 3 是 [KZ 定理 1.2] 在 $X = [0, 1]$ 情形下收敛部分的推广。尤其值得注意的是，这里省去了扩张性、有界畸变和共形性假设。推论 3 在一定程度上推广了 [KZ 定理 1.2], 的发散情形，但对目标集的测度（4）要求更强的可和性。

本文结构如下。第 2 节将定理 1 和定理 2 的证明归结为 $f : X \to X$ 是利普希茨函数且仅在有限多个点处改变单调性的情形。第 3 节构造一个可测集序列，其上极限集为 $R(\{M_n\}_n, f)$，并估计每个集合的测度，从而得出定理 1。第 4 节研究该序列的拟独立性，并证明定理 2。

致谢

作者谨向 Tomas Persson 致谢，感谢他让作者注意到这个问题，并与作者讨论可能的推广。作者衷心感谢 Dmitry Kleinbock 在整个项目期间给予的宝贵建议和指导。

2 分段利普希茨和分段单调扭曲

根据 $R(\psi, f)$ 的性质，要证明定理 1 和定理 2，只需证明结论对 f 利普希茨且单调的情形成立。

引理 4. 定理 1 和定理 2 对 f 利普希茨且单调的情形成立。

我们将在 §§3-4 中证明引理 4。这里先由该引理推出定理 1 和定理 2。

定理 1 和定理 2 的证明。假设存在一个可数的互不相交的开区间集合 $\{X_i = (a_i, b_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$，使得 $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ 是满的，并且 f 是

在每个 X_i 上都是利普希茨且单调的。那么，对于每个 $i \in \mathcal{I}$， f 在 X_i上有界，因此我们可以定义

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in (a_i, b_i) \\ \lim_{x \to a_i^-} f(x) & \text{if } x \leq a_i \\ \lim_{x \to b_i^+} f(x) & \text{if } x \geq b_i. \end{cases}$$

那么， f_i 是利普希茨且单调的。根据引理 4，定理 1 和定理 2 对每个 $i \in \mathcal{I}$ 的 f_i 都成立。当对所有 $i \in \mathcal{I}$， $\mu(R(\psi, f_i)) = 0$ 时，

$$\mu(R(\psi, f)) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu(R(\psi, f) \cap X_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu(R(\psi, f_i) \cap X_i) = 0;$$

当对所有 $i \in \mathcal{I}$， $\mu(R(\psi, f_i)) = 1$ 时，

$$\mu(R(\psi, f)) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu(R(\psi, f) \cap X_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu(R(\psi, f_i) \cap X_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \mu(X_i) = 1,$$

因此，只要在以下各节中证明引理 4，就证明了这些定理。 □

3 收敛部分

本节证明引理 4 的收敛部分，从而固定 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, (X, μ, T), $\{M_n\}_n$ 和 f，使其为利普希茨且单调。定义

$$R_n(\{M_n\}_n, f) := \{x \in X : T^n x \in B(f(x), r_n(x))\}.$$

不致混淆时，我们将 $R_n(\{M_n\}_n, f)$ 简记为 R_n。显然，$R(\{M_n\}_n, f) = \limsup_{n \to \infty} R_n$。

我们首先证明关于函数 r_n 的一个事实 .

引理 5. 对所有 $n \in \mathbb{N}$， r_n 都是 1-利普希茨的。

证明. 设 x， $y \in [0, 1]$。不失一般性，假设 $r_n(x) \leq r_n(y)$。那么

$$B(x, r_n(x)) \subset B(y, r_n(x) + d(x, y)),$$

因此 $\mu(B(y, r_n(x) + d(x, y))) \geq M_n$，从而

$$r_n(y) \leq r_n(x) + d(x, y),$$

也就是说， $|r_n(y) - r_n(x)| \leq |x - y|$。 □

对于每个 n，我们将 Y_n 定义为 $[0, 1]^2$ 的一个子集，使得

$$Y_n = \{(x, y) : y \in B(f(x), r_n(f(x)))\}.$$

于是我们有

引理 6. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$, Y_n 都是 $[0,1]^2$ 的一个开子集。

证明。固定 $n \in \mathbb{N}$。我们证明 Y_n 在 $[0,1]^2$中有闭补集。设 $\{(x_m, y_m)\}_m$ 是 Y_n 的补集中的一个柯西序列，其在 $[0,1]^2$ 中的极限记为 (x, y)。我们证明 $(x, y) \notin Y_n$。设 $\varepsilon > 0$。由于 f 连续，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$|f(x_k) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{L} \quad \text{and} \quad |y_k - y| < \varepsilon.$$

Then

$$\begin{aligned} |f(x) - y| \geq & |f(x_k) - y_k| - |f(x_k) - f(x)| - |y_k - y| \\ \geq & r_n(f(x_k)) - 2\varepsilon \\ \underset{\text{Lemma 5}}{\geq} & r_n(f(x)) - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意选取的，我们必有 $|f(x) - y| \geq r_n(f(x))$，如所需。 □

现在我们可以估计每个 n对应的 R_n 的测度了。

引理 7。对于每个 $n \in \mathbb{N}$,

$$|\mu(R_n) - M_n| \leq 3p(n).$$

证明。定义 $F_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ 为 Y_n的示性函数。由于 Y_n 是开集，我们可以用以下一致连续函数序列 $\{F_{n,k}\}_k$逼近 F_n，其中

$$F_{n,k}(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{if } (x,y) \notin Y_n \\ \min\{1, kd((x,y), \partial Y_n) & \text{if } (x,y) \in Y_n \end{cases}$$

并且 ∂Y_n 表示 Y_n的边界。注意，$\{F_{n,k}\}_k$ 在 k 中单调递增，并逐点收敛到 F_n，因此根据单调收敛定理，对于每个 $\varepsilon > 0$，存在某个 k，使得

$$\left| \int F_n(x, T^n x)\, d\mu(x) - F_{n,k}(x, T^n x)\, d\mu(x) \right| < \varepsilon$$

and

$$\left| \int F_n - \int F_{n,k} \right| < \varepsilon.$$

由于 $F_{n,\ k}$ 是 $2k$-利普希茨的，因此我们可以选取由区间 $\{I_h\}_{h=0}^{m-1}$ 构成的 $[0,1]$ 划分，使得

$$\left| F_{n,k}(x,y) - \sum_{h=0}^{m-1} F_{n,k}(x, y_h) \chi_{I_h}(y) \right| < \varepsilon$$

对于所有 x、 $y \in [0,1]$, 其中 y_h 是 I_h的中点。然后考虑积分

$$\int \sum_{h=0}^{m-1} F_{n,k}(x, y_h)\chi_{I_h}(T^n x) \tag{5}$$

对（5）中的每一项应用相关性衰减可得

$$\left| \int F_{n,k}(x, y_h)\chi_{I_h}(T^n x)\, d\mu(x) - \int F_{n,k}(x, y_h)\, d\mu(x) \int \chi_{I_h}(x)\, d\mu(x) \right| \leq \mu(I_h)||F_{n,k}(x, y_h)||_{BV} p(n)$$

注意，对于每个 y_h,

$$F_{n,k}(x, y_h) = \begin{cases} 1 & \text{if } d(f(x), y_h) < r_n(f(x)) \\ 0 & \text{else} \end{cases} = \chi_{\{x: d(f(x), y_h) < r_n(f(x))\}},$$

因此$||F_{n,\ k}(x, y_h)||_{BV} \leq 3$。然后对 h 求和可得

$$\left| \int \sum_{h=0}^{m-1} F_{n,k}(x, y_h)\chi_{I_h}(T^n x)\, d\mu(x) - \sum_{h=0}^{m-1} \int F_{n,k}(x, y_h)\, d\mu(x) \cdot \mu(I_h) \right| \leq 3p(n).$$

因此

$$\begin{aligned} & |\mu(R_n) - M_n| \\ =& \left| \int F_n(x, T^n x)\, d\mu(x) - \int F_n\, d\mu\, d\mu \right| \\ \leq& \left| \int F_n(x, T^n x)\, d\mu(x) - \int F_{n,k}(x, T^n x)\, d\mu(x) \right| \\ &+ \left| \int F_{n,k}(x, T^n x)\, d\mu(x) - \sum_{h=0}^{m-1} \int F_{n,k}(x, y_h)\, d\mu(x) \cdot \mu(I_h) \right| \\ &+ \left| \sum_{h=0}^{m-1} \int F_{n,k}(x, y_h)\, d\mu(x) \cdot \mu(I_h) - \int F_{n,k}\, d\mu\, d\mu \right| \\ &+ \left| \int F_{n,k}\, d\mu\, d\mu - \int F_n\, d\mu\, d\mu \right| \\ \leq& \varepsilon + (\varepsilon + 3p(n)) + \varepsilon + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 引理得证。 □

收敛/零测度情形将由引理 7 立即得出。定理 1 的证明。由引理 7, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(M_n + 3p(n)) < \infty$, 因此由博雷尔-坎泰利引理可得$\mu(R(\{M_n\}_n, f)) = 0$。 □

4 发散部分

本节将证明引理 ?? 的发散部分，因此在整个本节中，我们假设 (X, μ, T)、$\{M_n\}_n$ 和 $f\colon\ X \to X$ 满足定理 2 中所述的条件，并且 $\lim_{n\to\infty} p(n) = 0$。发散情形证明的关键要素是每个 R_n 的测度估计（已在引理 7 中证明），以及 $\{R_n\}_n$ 的准独立性，我们将在下文证明这一点。

引理 8. 存在正常数 K_1、K_2 和 K_3，使得对于所有 n、$m \in \mathbb{N}$,

$$\mu(R_n \cap E_{R+m}) \le M_n M_{n+m}(1+K_1\sqrt{p(n)})+K_2(M_n p(n)^{s/2}+M_{n+m}(p(n)^{s/2}+p(m)))+K_3 p(n)^s$$

对于某些正常数 K_1、K_2 和 K_3。

证明. 令 n、$m \in \mathbb{N}$。定义

$$E_{n,m}(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{if } y \in B(f(x), r_n(f(x))), z \in B(f(x), r_{n+m}(f(x))) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

注意到

$$\mu(R_n \cap R_{n+m}) = \int F_{n,m}(x, T^n x, T^{n+m}x)\, d\mu(x)$$

我们将用区间示性函数乘积之和来近似 $E_{n,\ m}$。对于每个 $\ell \in \mathbb{N}$，我们首先将 X 等分为 ℓ 个子区间 $\{I_h\}_{h=0}^{\ell-1}$，并将每个 $h = 0$ 对应的 I_h 的中点记为 x_h，....., $\ell - 1$。定义

$$F_{n,m,\ell}(x,y,z) := \sum_{h=0}^{\ell-1} \chi_{I_k}(x) \cdot \chi_{B(f(x_h), r_n(f(x_h))+\frac{L}{\ell})}(y) \cdot \chi_{B(f(x_h), r_{n+m}(f(x_h))+\frac{L}{\ell})}(z)$$

注意，对于每个 $x \in I_h$和 $w \in B(f(x)\ r_n(f(x)))$，$|x - x_h| < \frac{1}{2\ell}$, $|f(x) - f(x_h)| < \frac{L}{2\ell}$和 $|r_n(f(x)) - r_n(f(x_h))| < \frac{L}{2\ell}$，因此 $w \in B(f(x_h)\ r_n(f(x_h)) + \frac{L}{\ell})$，从而 $F_{n,m,\ell} \ge F_{n,m}$。接着

$$\begin{aligned}
&\int F_{n,m}(x, T^n x, T^{n+m}x)\, d\mu(x) \\
&\le \int F_{n,m,\ell}(x, T^n x, T^{n+m}x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{h=0}^{\ell-1} \int \chi_{I_k}(x) \cdot \chi_{B(f(x_h), r_n(f(x_h))+\frac{L}{\ell})}(T^n x) \cdot \chi_{B(f(x_h), r_{n+m}(f(x_h))+\frac{L}{\ell})}(T^{n+m}x)\, d\mu(x) \\
&\underset{\mathrm{BV}}{\le} \sum_{h=0}^{\ell-1} \int \chi_{B(f(x_h), r_n(f(x_h))+\frac{L}{\ell})}(x) \cdot \chi_{B(f(x_h), r_{n+m}(f(x_h))+\frac{L}{\ell})}(T^m x)\, d\mu(x) \cdot (\mu(I_h) + 3p(n)) \\
&\underset{\mathrm{BV}}{\le} \sum_{h=0}^{\ell-1} \left(\mu\left(B\left(f(x_h), r_n(f(x_h)) + \frac{L}{\ell}\right)\right) + 3p(m)\right)\left(\mu\left(B\left(f(x_h), r_{n+m}(f(x_h)) + \frac{L}{\ell}\right)\right)\right) \\
&\quad \cdot (\mu(I_k) + 3p(n))
\end{aligned}$$

根据上阿尔福斯正则性（??），

$$\mu\left(B\left(f(x_h), r_n(f(x_h)) + \frac{L}{\ell}\right)\right) \le M_n + 2c\left(\frac{L}{\ell}\right)^s$$

and

$$\mu\left(B\left(f(x_h), r_{n+m}(f(x_h)) + \frac{L}{\ell}\right)\right) \le M_{n+m} + 2c\left(\frac{L}{\ell}\right)^s.$$

现在我们选取 ℓ，使得 $\sqrt{p(n)}/2 < \frac{L}{\ell} < \sqrt{p(n)}$。于是

$$\begin{aligned}
&\int F_{n,m}(x, T^n x, T^{n+m}x)\, d\mu(x) \\
\le&(M_n + 2cp(n)^{s/2} + 3p(m))(M_{n+m} + 2cp(n)^{s/2}) \cdot (1 + 6L\sqrt{p(n)}) \\
\le&M_n M_{n+m}(1 + K_1\sqrt{p(n)}) + K_2(M_n p(n)^{s/2} + M_{n+m}(p(n)^{s/2} + p(m))) + K_3 p(n)^s
\end{aligned}$$

where $K_1 = 6L$, $K_2 = (1+6L\sqrt{\sup_n p(n)})(2c+3)$ and $K_3 = 4c^2(1+6L\sqrt{\sup_n p(n)})$. □

为了证明发散情形，我们需要 Chung-Erd¨os 不等式。

引理 9。在一个概率空间中，对于可测集 $A_1, .., A_n$,

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \ge \frac{\left(\sum_{j=1}^n \mu(A_j)\right)^2}{\sum_{j,k=1}^n \mu(A_j \cup A_k)}$$

现在我们完成定理 2 的证明。

定理 2 的证明。除本节开头的假设外，我们还假设对于某些 $C > 0$ 和 $0 < \gamma < 1$, $p(n) = C\gamma^n$。令

$$I_N = \left\{j : -\frac{2}{s}\log_\gamma N \le j \le N\right\}$$

and

$$U_N = \bigcup_{j \in I_N} R_j.$$

注意，$\limsup_n R_n = \limsup_N U_N$。

Let

$$S_N = \sum_{j \in I_N} \mu(R_j)$$

and

$$\sigma_N = \sum_{j \in I_N} M_j$$

由引理 7 可得

$$\sigma_N - c_1 \le S_N \le \sigma_N + c_1$$

其中常数 $c_1 = C\gamma^{-1}$。另一方面，令

$$C_N = \sum_{j,k\in I_N} \mu(R_j \cap R_k)$$

根据引理 8，我们有

$$\begin{aligned} C_N =& S_N + 2 \sum_{j,k\in I_N, j>k} \mu(E_j \cap E_k) \\ \leq& S_N + (1 + K_1 C N^{-1/s})\sigma_N^2 + 2K \sum_{j,k\in I_N, j>k} (M_k \gamma^{ks/2} + M_j(\gamma^{ks/2} + \gamma^{j-k}) + \gamma^{ks/2}) \end{aligned}$$

其中 $K = K_2 + K_3$。记

$$D_N := \sum_{j,k\in I_N, j>k} (M_k \gamma^{ks/2} + M_j(\gamma^{ks/2} + \gamma^{j-k}) + \gamma^{ks/2})$$

我们逐项证明 R_N 有界。前两个和最后一个求和项均小于或等于

$$\sum_{j=-\frac{2}{s}\log_\gamma N}^{N} \sum_{k=-\frac{2}{s}\log_\gamma N}^{j-1} \gamma^{ks/2} \leq \sum_{j=-\frac{2}{s}\log_\gamma N}^{N} c_2 e^{-\log N} \leq c_2$$

其中某个常数 c_2 取决于式 (3) 中的界。对于第三个求和项,

$$\sum_{j,k\in I_N, j>k} M_j \gamma^{j-k} = \sum_{j=-\frac{2}{s}\log_\gamma N} M_j \sum_{k=-\frac{2}{s}\log_\gamma N}^{j-1} \gamma^{j-k} \leq c_3 \sigma_N$$

因此

$$\begin{aligned} C_N \leq& S_N + (1 + K_1 C N^{-1/2})\sigma_N^2 + 2K(3c_2 + c_3\sigma_N) \\ \leq& \sigma_N + c_1 + (1 + K_1 C N^{-1/2})\sigma_N^2 + 2K(3c_2 + c_3\sigma_N) \end{aligned}$$

现在可以利用 Chung-Erd¨os 不等式得出

$$\mu(U_N) \geq \frac{S_N^2}{C_N} \geq \frac{(\sigma_N - c_1)^2}{(1 + K_1 C N^{-1/2})\sigma_N^2 + c_4\sigma_N + c_5} \tag{6}$$

对某些常数 c_4、c_5；当我们在 (6) 中取 $\limsup_{N\to\infty}$ 时，有

$$\limsup_N \mu(U_N) \geq 1$$

因此我们证明了 $\limsup_n R_n = \limsup_N U_N = 1$。 □

参考文献

[BF] S. Baker 和 M. Farmer, 《自共形集的定量回归性质》, 美国数学会会刊 149 (2021), no. 3, 1127–1138.[Bo] M. Boshernitzan, 《定量回归结果》, 数学发明 113 (1993), no. 3, 617–631.[CK] N. Chernov 和 D. Kleinbock, 《吉布斯测度的动力系统中的博雷尔-坎泰利引理》, 以色列数学杂志 122 (2001), 1–27.[CWW] Y. Chang、M. Wu 和 W. Wu, 《定量回归性质与齐次自相似集》, 美国数学会会刊 147 (2019), 1453–1465.[DFL] D. Dolgopyat、B. Fayad 和 S. Liu, 《动力系统中的多重博雷尔-坎泰利引理与回归的多重对数律》, 预印本 (2021), arXiv:2103.08382.[EW] M. Einsiedler 和 T. Ward, 《面向数论的遍历理论》, 数学研究生教材, 259, 施普林格-维拉格伦敦有限公司, 伦敦, 2011, xviii+481页。[FMP] L. Fern´andez、M. V. Mel´ıan 和 D. Pestana, 《定量混合结果与内函数》, 数学年刊 337 (2007), no. 1, 233–251.[HLSW] M. Hussain、B. Li、D. Simmons 和 B.-W. Wang, 《回归理论的动力系统中的博雷尔-坎泰利引理》, Ergodic Theory Dynam. Systems, DOI: https://doi.org/10.1017/etds.2021.23 (2021), 15 pp.[HNPV] N. Haydn、M. Nicol、T. Persson 和 S. Vaienti, 《关于非一致双曲动力系统的博雷尔-坎泰利引理》, Ergodic Theory Dynam. Systems 33 (2013), no. 2, 475–498.[KKP] M. Kirsebom、P. Kunde 和 T. Persson, 《关于收缩目标与自回归点》, 预印本 (2020), arXiv:2003.013613.[KM] D. Kleinbock 和 G. A. Margulis, 《齐次空间上流的对数律》, 数学发明 138 (1999), no. 3, 451–494.[KZ] D. Kleinbock 和 J. Zheng, 《Lipschtiz 扭曲下回归的动力系统中的博雷尔-坎泰利引理》, 预印本 (2022), arXiv:2205.12366.[Ku] J. Kurzweil, 《非齐次丢番图逼近的度量理论》, 数学研究 15 (1955), 84–112.[LLVZ] B. Li、L. Liao、S. Velani 和 E. Zorin, 《环面上矩阵变换的收缩目标问题：重新审视标准问题》, 预印本 (2022), arXiv:2208.06112。

[LWW] F. L¨u、B-W. Wang 和 J. Wu，《连续统多个基数下不动点展开的丢番图分析》，预印本（2021），arXiv:arXiv:2103.00546。[Pe] T. Persson，《关于回归的强博雷尔–坎泰利引理》，预印本（2022），arXiv:2202.07344。[Ph] W. Philipp，《数论中的一些度量定理》，《太平洋数学杂志》20（1967），第1期，109–127页。