arXiv:2301.04738v1 [math.DS] 11 Jan 2023

上限　　魏尔斯特拉斯曲线的豪斯多夫维数上界。

Ted Alexander 和 Tommy Murphy

摘要——我们给出了魏尔斯特拉斯型函数图像的豪斯多夫维数上界。尽管该结果严格弱于已有结果，但其优点在于可直接通过双曲迭代函数系统（IFS）理论计算得到。

1 引言

豪斯多夫维数的概念与分形的研究密切相关；例如，曼德布罗有一个著名论断，认为分形的特征是其豪斯多夫维数严格大于拓扑维数。在某些特殊情形下，计算豪斯多夫维数很容易。科赫曲线可以用自身的四个平移压缩副本来定义。由于缩放因子为 $1/3$ ，且使用了四个不产生扭曲的压缩映射，科赫曲线的豪斯多夫维数恰好为 $\log_3 4$。相比之下，一个令人惊讶的事实是，对于或许是已知最早的分形实例——魏尔尔斯特拉斯怪兽，直到不久前，其豪斯多夫维数的精确计算仍是一个未解决的问题。关键难点在于，定义该分形的压缩映射具有不均匀的扭曲，这使问题复杂得多。

函数图像的豪斯多夫维数

$$W_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x)$$

其中 $x \in \mathbb{R}$， $b \in \mathbb{N}$，且 $\frac{1}{b} < a < 1$，长期以来人们猜想其豪斯多夫维数为 $D := 2 + \log_b a$. 这一问题由 Shen [12] 于2018年解决。魏尔斯特拉斯的经典例子具有如下形式： $b \in \mathbb{N}$ 和 $ab + 1 > \frac{3\pi}{2}$。它们在数学界声名远扬，因为这是最早发表的函数实例：函数处处连续但处处不可微。

在本文中， $b \in \mathbb{N}$ 和$\frac{1}{b} < a < 1$。设 ϕ 是定义在 $[0, 1]$, 上的 C^1 函数，并用 ϕ 表示其在 $\mathbb{R}$上的 $\mathbb{Z}$-周期延拓。令

$$w^{\phi}_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \phi(b^n x).$$

若 $F \subset \mathbb{R}^2$，则用 $\dim_H[F]$ 表示豪斯多夫维数。给定函数 w： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\text{graph}(w) \subset \mathbb{R}^2$ 表示该函数的图像。现在可以陈述Shen定理：

定理　m 1.1（Shen）存在一个 $K_0 = K_0(\phi, b) > 1$ ，使得如果 $1 < ab < K_0$，那么

$$\dim_H[graph(w^{\phi}_{a,b})] = D.$$

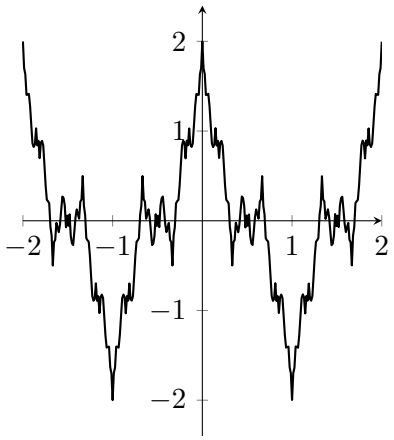

图1：经典的魏尔尔斯特拉斯曲线

显然，令 $\phi(x) = \cos(2\pi x)$，并适当选择 a和 b，即可得到魏尔斯特拉斯的经典例子。由于 $D > 1$，这尤其产生了许多分形的例子。

Shen的工作是多年研究的集大成之作，这项研究始于 Bescovitch- Ursell 的工作[5]。我们尤其关注以下著名估计

$$\dim_H[\mathrm{graph}(w_{a,b}^{\phi})] \leq D. \tag{1}$$

证明这一结论的论证是标准的，但并非直接；详情参见 [1] 第2节。证明中用到了这样一个事实：$\dim_H[F] \leq \dim_B[F]$，其中 $\dim_B$表示盒维数，且 $F \subset \mathbb{R}^2$。随后，通过研究以 H¨older 连续性刻画的局部振荡，估计 graph(w)的盒维数。因此，该领域的主要问题一直是理解豪斯多夫维数的下界，而 Shen定理为一大类例子回答了这个问题。感兴趣的读者还可参阅相关文献 [2], [8], [9], 和 [11]。

我们的结果如下。

定理 1.2 若 $|\phi'(x)| \leq 1$ 且$a^2 + \frac{a}{b} < 1$，则

$$\dim_H[graph(w_{a,b}^{\phi})] \leq \log_h(1/b),$$

其中

$$h = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{2}{b^2} + a^2 + \sqrt{\frac{4}{b^4} + a^4}\right]}.$$

不难看出，$\log_h(1/b) > D$；记作 $D = \log_b(b^2 a)$，并改变右侧对数的底数。这意味着我们的上界总是比方程（1）更差。我们已经知道情况必然如此，因为 Shen定理指出， D 实际上 是一大类例子的豪斯多夫维数。我们结果的价值在于，它避免了通过估算盒维数来估算豪斯多夫维数，而是运用了迭代函数系统（迭代函数系统）的理论。我们的主要技术成果是发现，在我们的假设下，由 ϕ确定的迭代函数系统存在一个全局压缩上界。

许多标准的迭代函数系统例子由线性变换给出，可写成 2×2 常系数矩阵（许多此类例子见 [4] ）。我们的证明技巧也适用于这些情况。魏尔斯特拉斯曲线的情形对我们来说更有意思，因为矩阵的系数会变化，因此估算压缩因子更困难。我们认为，也可以用这一框架分析更多分形实例。

2 预备知识

这里我们介绍一些基本记号和定义。全文中，我们在标准度量空间 $W=[0,1]\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$ 中进行讨论。介绍迭代函数系统基础知识的标准教材有 [3] 和 [6],，它们承接了 Hutchinson 的奠基性工作 [10]。设 $\{S_i\}_{i=1}^b$ 是定义在 W 上的压缩映射，其压缩因子为 $\{u_i\}_{i=1}^b$。赋予相应豪斯多夫度量的 W 的非空紧子集类也具有相应的压缩映射，同样记作 S_i，且压缩因子不变。设 F 是 $\{S_i\}$ 的不变集，即

$$F=\bigcup_{i=1}^{b}S_i(F).$$

迭代函数系统 [3] 理论的基本思想是，Banach 不动点定理保证了 F 的存在性和唯一性。

定义 2.1 给定集合 $F\subset\mathbb{R}^2$ 及其 δ-覆盖 U_i，我们将豪斯多夫 s-内容 $H^s(F)$ 定义为 $H^s(F)=\inf\sum_i|U_i|^s$，其中下确界取遍所有此类可能的 δ-覆盖。豪斯多夫维数 $\dim_H(F)$ 定义为使 $H^s(F)$ 有限的最小正 s。

引理 2.2 $\dim_H[F]\le s$，其中 $\sum_{i=1}^b u_i^s=1$。

证明。参见 [6] 中的定理 8.8/习题 8.5。取 V 为 $F\backslash\{x=0,1\}$ 的一个小开管状邻域，即可满足所需的开集条件。□

3 与魏尔斯特拉斯曲线迭代函数系统相关的压缩映射

赋予 $W\subset\mathbb{R}^2$ 通常的度量空间结构。通常可将魏尔斯特拉斯曲线的图像改写为由以下映射构成的迭代函数系统 [1]

$$S_i(x,y)=\left(\frac{x+i-1}{b},ay+\phi\left(\frac{x+i-1}{b}\right)\right)\qquad 1\le i\le b. \tag{2}$$

文献中关于迭代函数系统有多种相关定义。按照 [3],，我们的定义有时称为双曲迭代函数系：每个 S_i 都是压缩映射。在[1] 和 [2],方程（2）定义了一个具有两个负李雅普诺夫指数的光滑非线性系统，他们也将其称为迭代函数系统。这与我们的定义略有不同，因为映射（2）并未假设为压缩映射。不过，在我们额外的假设下，每个 S_i 都是压缩映射，因此我们可以运用一些标准技巧来估计豪斯多夫维数。

引理 3.1 在定理 *1.2*的假设下，每个 S_i 都是压缩映射。

证明。取 W 中两个不同的点 $\mathbf{x_1} = (x_1, y_1)$ 和 $\mathbf{x_2} = (x_2, y_2)$。我们需要证明

$$d(S_i(\mathbf{x_1}), S_i(\mathbf{x_2})) < d(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}). \tag{3}$$

左边为

$$d(S_i(\mathbf{x_1}), S_i(\mathbf{x_2})) = \sqrt{\left[\frac{\Delta x}{b}\right]^2 + \left[a\Delta y + \phi\left(\frac{x_1 + i}{b}\right) - \phi\left(\frac{x_2 + i}{b}\right)\right]^2}$$

其中 $\Delta x = x_1 - x_2$ 和 $\Delta y = y_1 - y_2$。由于 $\phi \in C^1$，应用中值定理可知，存在一个正数 $c < 1$，使得

$$\left|\phi\left(\frac{x_1 + i - 1}{b}\right) - \phi\left(\frac{x_2 + i - 1}{b}\right)\right| = \frac{c}{b}|\Delta x|.$$

代入并展开后，等式（3）变为

$$\sqrt{\frac{1 + c^2}{b^2}(\Delta x)^2 + a^2(\Delta y)^2 + \frac{2ac}{b}\Delta x \Delta y} < \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{4}$$

应用算术几何平均不等式，

$$\left|\frac{2ac}{b}\Delta x \Delta y\right| \leq \frac{ac}{b}\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right). \tag{5}$$

将等式（4）两边平方，应用三角不等式和等式（5），并拆分（Δx）^{2} 和（Δy）^{2} 项，可知只需证明以下结论，等式（3）便成立：

$$\frac{1 + c^2}{b^2} + \frac{ac}{b} < 1 \quad \text{and} \quad a^2 + \frac{ac}{b} < 1. \tag{6}$$

注意到这两个不等式的左边都是关于 c的增函数； c是 ϕ 在某点处的导数值，且 $|\phi'| \leq 1$，由此可知 $c \leq 1$，进而得到

$$\frac{2}{b^2} + \frac{a}{b} < 1 \quad \text{and} \quad a^2 + \frac{a}{b} < 1. \tag{7}$$

第一个等式始终成立，因为 $|a| < 1$ 和 $b \in \mathbb{N} > 1$。第二个等式成立，因为这正是主定理陈述中对系数的假设。□

定理1.2的证明 4

现在我们知道映射 S_i 是压缩映射，证明的策略是应用引理2.2 来估计豪斯多夫维数。

证明。 由引理2.2可知，我们需要估计压缩因子 u_i。按照引理 3.1证明中的思路，取互不相同的点 $\mathbf{x_1} = (x_1, y_1)$ 和 $\mathbf{x_2} = (x_2, y_2) \in W$。那么 $d^2(S_i(\mathbf{x_1}) \; S_i(\mathbf{x_2}))$ 可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \Delta x & \Delta y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+c^2}{b^2} & \frac{ac}{b} \\ \frac{ac}{b} & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}. \tag{8}$$

现在将 $v=(\Delta x,\Delta y)$ 视为 $\mathbb{R}^2$ 的一个元素：问题在于如何使 $\sqrt{v^TAv}$ 达到极值，其中 T 表示转置， A 是正定对称矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{1+c^2}{b^2} & \frac{ac}{b} \\ \frac{ac}{b} & a^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

细心的读者会注意到，这不是一个常系数矩阵，因为 c 由 x_1 和 x_2 通过中值定理确定，因此最终取决于 $\mathbf{x_1}$ 和 $\mathbf{x_2}$。我们的证明通过固定 c来进行，这样方程（9）就被视为一个固定的对称矩阵A。众所周知，正定对称矩阵具有正实特征值，并且 $\sqrt{v^TAv}\leq\sqrt{\lambda}\|v\|$，其中 λ 表示 A 的最大特征值。然后我们改变参数，得到一个与 c无关的上界。对于两个不同的点 $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}\in W$，在 $d(S_i(\mathbf{x_1})\ S_i(\mathbf{x_2}))$ 的公式中会有一个相应的 c，因而会得到一个形式如（9）的相应矩阵。由于我们的上界与 c 无关，因此可以据此估计 S_i的压缩因子。

直接计算可得，该矩阵的特征值为

$$\lambda_{\pm}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+c^2}{b^2}+a^2\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+c^2}{b^2}+a^2\right)^2-\frac{4a^2}{b^2}}.$$

如果只有一个特征值，$\left(\frac{1+c^2}{b^2}+a^2\right)^2-\frac{4a^2}{b^2}=0$ 这意味着 $ab=1\pm\sqrt{-c^2}$，这显然矛盾，因为 ab 是实数。因此，不可能只有一个重特征值，故必有两个不同的特征值。就我们的目的而言，只需利用较大的特征值来建立上界。因此，我们重点考察

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{1+c^2}{b^2}+a^2\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+c^2}{b^2}+a^2\right)^2-\frac{4a^2}{b^2}}.$$

注意，这是关于 c 的增函数。由于 $|\phi'|\leq 1$，我们令 $c=1$，得到

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{b^2}+a^2+\sqrt{\frac{4}{b^4}+a^4}\right].$$

这直接给出了每个 S_i 对应的压缩因子的上界：

$$u_i=\sqrt{\lambda_{\max}}:=h\qquad 1\leq i\leq b.$$

因此，根据引理 3.1，图像 w 的豪斯多夫维数上界可通过求解 $bh^s=1.$ 等价地，

$$s=\log_h(1/b).$$

由此即可得到结论。 □

致谢

我们感谢加州州立大学富勒顿分校数学系鼓励本科生开展研究，并为 T.A. 提供暑期研究奖学金。T. M. 感谢加州大学欧文分校数学系在撰写本文期间给予的热情接待。两位作者感谢 K. Bara´nski 和匿名审稿人提出的宝贵意见。

参考文献

[1] K. Bara´nski, 《魏尔斯特拉斯型函数图的维数》, *Fractal geometry and stochastics* V, 77–91, 概率学进展, 70, Birkh¨auser/Springer, 沙姆, 2015年。[2] K. Bara´nski、B. B´ar´any 和 J. Romanowska, 《经典魏尔斯特拉斯函数图的维数》, *Adv. Math*, 265（2014）, 32–59。[3] M.F. Barnsley, 《处处分形》, *Academic Press*, 1993年。[4] M.F. Barnsley 和 S. Demko, 《迭代函数系统与分形的整体构造》,*Proc. Roy. Soc. London A* **399** 243 275 1985 , -（）。[5] A.S. Besicovitch 和 H. D. Ursell, 《分数维集合（V）：关于某些连续曲线的维数》, *J. London Math. Soc*。1（1937）, 第1期, 18–25。[6] K. Falconer, 《分形集的几何学》, *Cambridge University Press*, 2010年。[7] K. Falconer, 《分形几何：数学基础与应用》, *Wiley & Sons*, 2014年。[8] T.Y. Hu 和 K.S. Lau, 《魏尔斯特拉斯型函数的分形维数与奇点》, *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** 1993 2, 649 665 ,（）, 第–期。[9] B. R. Hunt, 《魏尔斯特拉斯函数图的豪斯多夫维数》, *Proc. Amer. Math. Soc* **126**（1998）, 第3期, 791–800。[10] J. Hutchinson, 《分形与自相似性》, *Indiana Univ. J. Math*。30, 713–747（1981）。[11] J. Thim, 《处处不可导的连续函数》, 硕士论文, *Lulea University of Technology*, （2003）。[12] W. Shen, 《经典魏尔斯特拉斯函数图的豪斯多夫维数》, *Math. Zeit*, 289（2018）, 第1–2期, 223–266

*Tommy Murphy*数学系、加州州立大学富勒顿分校, 800 N.State College Blvd., 富勒顿, 加利福尼亚州 92831。电子邮箱: tmurphy@fullerton.edu
http://www.fullerton.edu/math/faculty/tmurphy/

*Ted Alexander*数学系、加州州立大学富勒顿分校, 800 N.State College Blvd., 富勒顿, 加利福尼亚州 92831。电子邮箱: tedforpresident@gmail.com