arXiv:2301.04813v1 [math.AG] 12 Jan 2023

关于有效对数饭田纤维化与补元的存在性

GUODU CHEN、JINGJUN HAN 和 JIHAO LIU

Abstract. 在假设良极小模型猜想成立的前提下，我们研究饭田纤维化与补元存在性猜想之间的关系。一方面，我们证明补元存在性猜想蕴含有效对数 Iitaka 纤维化猜想。因此，有效对数 Iitaka 纤维化猜想在维数 3 中成立。另一方面，对于任意卡拉比–丘类型簇 X，若 $-K_X$是数值有效的，我们证明 X 具有 n补边，其中某个通用常数 n 仅取决于 X 的维数以及 $-K_X$的一个饭田纤维化的一般纤维的两个自然不变量。我们还提出可分解饭田纤维化猜想，这是有效对数 Iitaka 纤维化猜想的一个变体，与具有非有理系数的对的丰模型结构密切相关，并研究它与前述猜想之间的关系。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 5
3. 典范丛公式 12
4. 非消失阶、中间贝蒂数与补边 17
5. 有效 Iitaka 纤维化 21
6. 可分解 Iitaka 纤维化的存在性 22
参考文献 24

1. Introduction

我们在复数域 $\mathbb{C}$上进行研究。

设 X 是一个 Kodaira 维数非负的光滑射影簇。根据饭田的一个著名构造，存在一个双有理态射 $X_\infty \to X$，其来源是一个光滑射影簇 X_∞，以及一个收缩 $f_\infty : X_\infty \to Z_\infty$，其目标为一个射影簇$Z_\infty$，使得 f_∞ 的一般纤维是光滑的，且 Kodaira 维数为零，并且 dim $Z_\infty = \kappa(X, K_X)$。态射 $f_\infty \colon X_\infty \to Z_\infty$ 称为 饭高纤维化 K_X （见定义 2.20 ）。人们猜想，多重典范系 $|mK_X|$ 定义了一个

Date: 2023年1月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 14 C20,14E05,14E30,14J30。

映射；当正整数 m 能被一个仅依赖于 X 的维数的正整数整除时，该映射与饭高纤维化双有理等价：

猜想 1.1 （有效饭田纤维化，参见 [HM06，猜想 1。7]）。 设 d 为一个正整数。则存在一个正整数 m_d ，其仅取决于 d，使得对于任意一个 X 维且具有非负 Kodaira 维数的光滑射影簇 d ，$|mK_X|$ 对于任意被 m 整除的正整数 m_d，都定义一个饭高纤维化。

当 K_X 为大时，猜想 1.1 已得到证明 [HM06、Tak06] （另见 [Tsu99]）；当$d = 2$时，由 Enriques 证明（另见 [Iit70]）；当 $d = 3$ [时，由 Mor85、Kaw86、FM00、VZ07]证明。 [BZ16], 在猜想 1.1 方面取得了一项重要进展，其中作者证明：存在一个正整数 m ，其仅取决于 d 以及 K_X 的饭高纤维化的一般纤维的两个自然不变量（非消失阶和中间 Betti 数），使得 $|mK_X|$ 定义一个饭高纤维化。不幸的是，我们不知道维数为 ≥ 3时中间 Betti 数的有界性，这使得猜想 1.1 在维数 ≥ 4时仍未解决。

在实际应用中，考虑以下猜想的推广版本也很自然1.1，该版本被称为有效对数 Iitaka 纤维化猜想。

猜想 1.2 （有效对数 Iitaka 纤维化，参见 [TX09，猜想 1。1]）。 设 d 为一个正整数，且 $\Gamma \subset [0, 1]$ 为一个下降链条件集。那么存在一个正整数 m ，其仅依赖于 d和 Γ ，并满足以下条件。

假设（X， B）是一个维数为 d的对数典范对，且 $B \in \Gamma$和 κ（X， $K_X + B$） ≥ 0。那么 $||\lfloor m$（$K_X + B$）$\rfloor||$ 定义了一个与 $K_X + B$的饭田纤维化双有理的映射。

当 $K_X + B$ 为大 [时，猜想 1.2 已由 HMX14，定理 1.3]证明。当 $\Gamma \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$且（$X$， B）为 klt 时，若 $d \leq 2$ [，猜想 1.2 已由 Tod10], 证明；当 $d \leq 3$且（ κ，X） K_X时，由 TX09，Tod > 0 [证明；当 10], 且（ $d = 4$， κ） X时，由 TX K_X证明。

近年来，补理论由 Shokurov 在研究三维簇翻转的存在性时提出 [Sho92], ，并逐渐成为双有理几何的主要课题之一。这一理论在 BAB 猜想的证明中发挥了重要作用 [Bir19, Bir21], ，也对奇异 Yau-Tian-Donaldson 猜想和稳定退化猜想的证明 [Xu20, BLX22, LXZ22, XZ22], ，以及近期关于 Shokurov 最小对数不一致数升链条件猜想的研究 [Liu18, HLS19, HL22b, HLL22]发挥了重要作用。关于其他相关工作，读者可参阅 [Sho20, CGN21, CZ21, CHX22, CX22, Liu22]。尽管 Fano 型簇的 n-补边的存在性已得到解决 [Bir19, HLS19] ，但自然会考虑承认对数典范 Calabi-Yau 结构的对的 n-补边是否存在，也就是说，考虑 $\mathbb{R}$-补边簇。我们有如下猜想：

猜想 1.3（补元的存在性）。设 d 为一个正整数， $\Gamma \subset [0, 1]$ 为一个满足下降链条件的集合。那么存在一个正整数 n ，它仅依赖于 d 和 Γ ，并满足以下条件。

假设（$X/Z \ni z, B$）是一个维数为 d 的 $\mathbb{R}$-补对，且满足 $B \in \Gamma$，那么（$X/Z \ni z, B$）有一个 n-补（$X/Z \ni z, B^+$）。此外，如果 Γ 的闭包属于 $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$，那么我们可以选取 $B^+ \geq B$。

猜想之间的关系。一个有趣的问题是，我们能否建立猜想 1.1、1.2 与猜想 1.3之间的某些联系。乍看之下，很难观察到它们之间的关系，因为这些猜想讨论的是簇和对的结构，而它们具有完全不同的正性性质：猜想 1.1、1.2 关注的是典范丛为正的对（即 $K_X + B$ 是有效的），而猜想 1.3 关注的是典范丛为负的簇（即 $-(K_X + B)$ 是有效的）。令人惊讶的是，我们有以下定理，它们表明这些猜想实际上在多个方面彼此密切相关。

从补边到饭田纤维化。首先，我们证明猜想1.3 蕴含猜想 1.2 ，假设良极小模型猜想成立。

定理 1.4。 设 d 为正整数。假设良极小模型猜想（猜想 *2.11*）和补元的存在性（猜想 *1.3*）在维数 d上成立。那么，有效对数饭田纤维化猜想（猜想 *1.2*）在维数 d上成立。

作为直接推论，我们证明猜想 1.2 在维数 ≤ 3上成立：

推论 1.5。 猜想 *1.2* 在 $d \leq 3$时成立。

从饭田纤维化到补边。接下来，我们证明， n-补边的存在性与某些和饭田纤维化相关的不变量密切相关。我们有如下定理：

定理 1.6. 设 d、 b 和 β 是三个正整数。假设良极小模型猜想（猜想 *2.11*）在维数 d成立。那么存在一个正整数 n ，它仅依赖于 d、 b、和 β ，并满足以下条件。

假设 X 是一个维数为 d的 $\mathbb{Q}$-阶乘正规射影簇， $f_\infty \colon X_\infty \to Z_\infty$是 $-K_X$的饭高纤维化， $h \colon X_\infty \to X$ 是诱导的双有理态射，且 F 是 f_∞的一般纤维。设

(1) $-K_X$ 是数值有效的，(2) X 有一个 klt $\mathbb{R}$-补，(3) $\kappa(X, -K_X) \geq 0$，且 b是 $-h^*K_X|_F$的非消失阶，即

$$b = \min\{a \in \mathbb{Z}_{>0} \mid |-ah^*K_X|_F| \neq \emptyset\},$$

and

(4) $\beta := \dim H^{\dim F}(\tilde{F}, \mathbb{C})$，其中 $\tilde{F}$是与 $|-bh^*K_X|_F|$的唯一因子相关联的 F覆盖的光滑模型。

那么 X 有一个 n-补。

我们指出，定理 b 和 β 中的假设 1.6 是自然的，且恰好是 [BZ16中关于有效 Iitaka 纤维化猜想的定理 12] 所附加的假设。我们还注意到，若假设良极小模型猜想成立，则 b 的有界性可直接由 Iitaka 维数为 0 的对数对的有效对数 Iitaka 猜想（猜想1.2）推出。

可分解饭田纤维化。对于任意半丰沛除子 D， D的丰模型显然与 D的某个饭田纤维化双有理。然而，如果 D 仅被假设为

$\mathbb{R}$除子，那么可能没有任何饭田纤维化，尽管 D 的丰模型 D 存在 [CHL22，例1。2]解决这一问题的一种方法是定义不变 Iitaka 纤维化(见定义6.1)。自然会产生一个问题：对于对数对的不变 Iitaka 纤维化，我们是否期望存在某种一致有效性，类似于有效对数 Iitaka 纤维化猜想?

我们预期这个问题有肯定的答案。更确切地说，设 (X, B) 是一个对数典范对，且 $K_X + B$ 诱导的映射 $X \dashrightarrow Z$ 与 $K_X + B$ 的不变 Iitaka 纤维化双有理等价。那么我们预期，在对边界B 的系数作（统一）扰动以得到新的边界 B'后， $X \dashrightarrow Z$ 实际上将与 $K_X + B'$ 的饭田纤维化双有理等价。因此，有效对数 Iitaka 纤维化猜想应当能对由 $K_X + B$ 诱导的不变 Iitaka 纤维化带来某种统一的有效性。

难点在于证明我们可以作统一扰动，将边界 B 改为新的边界 B'。在 [CHL22，定理1。1], 中，作者证明了一个较弱的版本：模去非消失猜想后，存在这样的统一扰动，使得 $K_X + B'$ 的 Iitaka 维数等于 $K_X + B$的不变饭田维数。本文将证明， $K_X + B'$ 的饭田纤维化实际上等于 $K_X + B$的饭田纤维化。为使陈述更加清晰，我们引入可分解 Iitaka 纤维化这一概念。

定义 1.7（可分解饭田纤维化）。设 $\Gamma_0 := \{a_1, \dots, a_k\} \subset (0, 1]$ 为一个有限集，使得 $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$，且 $\Gamma' \subset [0, 1]$ 为一个集合。假设 (X, B) 是一个对数典范对，使得 $\kappa_\iota(X, K_X + B) \geq 0$。如果存在 $\mathbb{R}$-除子 $B_1, \dots, B_k \in \Gamma'$，使得

(1) $B = \sum_{i=1}^{k} a_i B_i$，(2) 对任意 $1 \leq i \leq k$，(X, B_i) 都是对数典范的，并且 (3) 对任意 $1 \leq i \leq k$，$K_X + B$ 的任何不变 Iitaka 纤维化都是 $K_X + B_i$ 的一个饭田纤维化。

此外，如果

(4) 由 $||\lfloor m(K_X + B_i)\rfloor||$ 定义的映射与任意整数 $1 \leq i \leq k$ 对应的 $K_X + B$ 的任一不变 Iitaka 纤维化双有理等价,

那么我们称 (X, B) 具有一个 (m, Γ_0, Γ)-可分解 Iitaka 纤维化。

作为有效对数 Iitaka 纤维化猜想的类比，我们提出以下关于可分解 Iitaka 纤维化存在性的猜想。粗略地说，该猜想指出，我们可以一致地扰动一个不变 Iitaka 纤维化，从而得到一个有效对数 Iitaka 纤维化。

猜想 1.8（可分解 Iitaka 纤维化）。设 d 为正整数， $\Gamma \subset [0, 1]$ 为降链条件集。那么存在正整数 m、有限集 $\Gamma_0 \subset (0, 1],$ ，以及一个仅依赖于 d 和 Γ 的降链条件集 $\Gamma' \subset [0, 1]$，满足以下条件。假设 (X, B) 是一个维数为 d 的 $\mathbb{Q}$- 阶乘对数典范对，使得 $B \in \Gamma$ 且 $\kappa_\iota(X, K_X + B) \geq 0$。那么：

(1)（弱版本）(X, B)具有(Γ_0, Γ')-可分解的饭田纤维化。(2)（强版本）(X, B)具有(m, Γ_0, Γ')-可分解的饭田纤维化 .

猜想 1.8 将有助于我们理解实系数对的良好极小模型及其丰模型的结构。我们证明，猜想 1.8 可由非消失猜想（猜想 2.12）和有效对数 Iitaka 纤维化猜想（猜想 1.8(2)）推出。

定理 1.9。 设 d 为正整数。假设非消失猜想（猜想 *2.12*）在维数 d中成立。则：

（1）猜想 *1.8*（1）在维数 d中成立。（2）假设猜想 *1.2* 在维数 d中成立。则猜想 *1.8*（2）在维数 d中成立。

作为一个直接推论，我们有：

推论 1.10。 猜想 *1.8* 在 $d \leq 3$时成立。

结合定理 1.4 和 1.9，我们证明猜想 1.8 可由良极小模型猜想和补边的存在性推出。

定理 1.11。设 d 为正整数。假设良极小模型猜想（猜想*2.11*）和补元的存在性（猜想*1.3*）在维数 d成立。则猜想*1.8* 在维数 d成立。

最后，我们指出，预期本文中的所有定理在相对情形下均成立。也就是说，除了考虑射影簇和射影对的饭田纤维化外，我们还可以考虑相对情形下的饭田纤维化（参见 [Li22，定义 3。19]）。

论文结构。第2节介绍本文将用到的一些记号和工具。第3节回顾典范丛公式，并证明命题 3.1。第5节证明定理1.4。第4节证明定理1.6。第6节引入不变伊塔卡纤维化，并证明定理 1.9 和1.11。

致谢。第二位和第三位作者在 [HL20] 2020 年夏从事这项工作时，开始了本研究。第一位作者于 2022 年夏访问洛桑联邦理工学院的 Chuyu Zhou 期间，完成了本研究的部分工作。他谨此感谢对方的热情接待。作者谨向 Qianyu Chen、Christopher D. Hacon、Fei Hu、Chen Jiang、Junpeng Jiao、Zhan Li、Haidong Liu、Wenfei Liu、Yuchen Liu、Yujie Luo、Fanjun Meng、Lingyao Xie、Qingyuan Xue 和 Chuyu Zhou 致谢，感谢他们提供宝贵的讨论和建议。作者谨感谢 Enrica Floris 解答有关定理1.6的问题。第一位作者获得中国博士后科学基金资助，项目编号为 BX2021269 和 2021M702925。第二位作者获得国家重点研发计划资助（项目编号：2020YFA0713200）。第二位作者是复旦大学 LMNS 的成员。

2. Preliminaries

我们采用 [KM98、BCHM10] 中的标准记号和定义，并将不加说明地使用它们。

2.1. 除子。

定义 2.1. 设 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 为一个集合。若 Γ 中的任意递增序列都会稳定，则称 Γ 满足升链条件（ACC）。若 Γ 中的任意递减序列都会稳定，则称 Γ 满足降链条件（DCC）。

定义 2.2 （[PS09，3.2], [Bir19，2.2]）。设 $\mathfrak{R} \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 为一个有限集，我们定义

$$\Phi(\mathfrak{R}) := \left\{ 1 - \frac{\gamma}{n} \mid \gamma \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}.$$

若存在一个有限集 $\mathfrak{R} \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得 0、$1 \in \mathfrak{R}$ 以及 $\Gamma = \Phi(\mathfrak{R})$，则称集合 $\Gamma \subset [0,1]$ 为超标准集。

定义 2.3。称 $f : X \to Z$ 为收缩，如果 π 是射影态射，且$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$。称双有理映射 $\phi : X \dashrightarrow Y$为双有理压缩，如果 ϕ 是射影的，并且 ϕ^{-1} 不收缩任何除子。

定义 2.4。设 $\Gamma \subset \mathbb{R}$ 为一个集合， X 为一个簇，且 $B := \sum_{i=1}^{s} b_i B_i$ 为 X上的一个 $\mathbb{R}$-除子，其中 B_i 是 B的不可约分支。若对于每个 i都有 $b_i \in \Gamma$，我们记作 $B \in \Gamma$。我们定义

$$|B| := \max_{1 \leq i \leq s} |b_i|, \lfloor B \rfloor := \sum_{i=1}^{s} \lfloor b_i \rfloor B_i, \text{ and } \{B\} := \sum_{i=1}^{s} \{b_i\} B_i.$$

我们可以用 $\mathcal{K}(X)$ 表示 X 的有理函数域。

设 $f : X \to Z$ 是正规拟射影簇之间的收缩，且 D 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-除子。若 D 在 Z 上是垂直的，则称 D 为垂直的；若 $f(\mathrm{Supp}\ D)$ 是 Z 的真子集，则称其为垂直的。若 D 在 Z 上不是垂直的，则称 D 在 Z 上是水平的。我们可以唯一地写成 $D = D^h + D^v$，使得 D^v 在 Z 上是垂直的，且 D^h 的每个分支在 Z 上都是水平的。我们称 D^h 为 D 的水平 $/Z$ 部分，称 D^v 为 D 的垂直 $/Z$ 部分。

引理 2.5. 设 $f : X \to Z$ 是正规拟射影簇之间的收缩，且 L 是 X 上满足 $L \sim_Z 0$ 的一个卡蒂埃除子。假设 L 在 Z 上是垂直的，或者 $L \geq 0$。那么存在 Z 上的一个卡蒂埃除子 L_Z，使得 $L = f^*L_Z$。

证明. 若 $L \geq 0$，则 L 在 Z 上是垂直的。因此，只需在 L 在 Z 上垂直的条件下证明该结论。根据假设，存在有理函数 $s \in \mathcal{K}(X)$ 和 Z 上的卡蒂埃除子 L'_Z，使得 $L - f^*L'_Z = (s)$。由于 L 在 Z 上是垂直的，我们可以找到一个开子集 $V \subset Z$，使得 $(s)|_U \geq 0$，其中 $U := f^{-1}V \subset X$。特别地，$s \in \mathcal{O}_X(U)$，因此 $s \in \mathcal{O}_Z(V)$，因为 f 是收缩，且 $\mathcal{O}_Z(V) = (f_*\mathcal{O}_X)(V) = \mathcal{O}_X(U)$。于是 $s \in \mathcal{K}(V) = \mathcal{K}(Z) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$，且 $\phi(s) = s$，其中 $\phi : \mathcal{K}(Z) \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$。因此 $f^*(s) = (\phi(s)) = (s)$。令 $L_Z := L'_Z + (s)$，即得证。□

引理 2.6. 设 $f : X \to Z$ 是正规拟射影簇之间的收缩，D 是 X 上的除子， U_1、$U_2 \subset Z$ 是两个开子集，且 $D|_{f^{-1}(U_i)} \sim_{U_i} 0$ 对于 $i = 1$ 成立，2. 那么 $D|_{f^{-1}(U_1 \cup U_2)} \sim_{U_1 \cup U_2} 0$。

证明。将 Z 替换为 $U_1 \cup U_2$后，我们可以假设 $Z = U_1 \cup U_2$。根据假设，

$$D|_{f^{-1}(U_i)} = f_i^* D_i + (s_i)$$

对于某个卡蒂埃除子 D_i（定义在 U_i 上）以及 $s_i \in \mathcal{K}(X)$，其中 $f_i := f|_{f^{-1}(U_i)}$，适用于 $i = 1, 2$。令 $f_{12} := f|_{f^{-1}(U_1 \cap U_2)}$。那么在 $f^{-1}(U_1 \cap U_2)$ 上有 $(f_{12})^*(D_1 - D_2) = (\frac{s_2}{s_1})$。由投影公式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{U_1\cap U_2} &\cong (f_{12})_* \left((\frac{s_2}{s_1}) \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(U_1\cap U_2)} \right) \\ &= (f_{12})_* (f_{12})^* \mathcal{O}_{U_1\cap U_2}(D_1 - D_2) \\ &= \mathcal{O}_{U_1\cap U_2}(D_1 - D_2).\end{aligned}$$

因此，$(D_1 - D_2)|_{U_1\cap U_2} = (s_Z)$ 且 $(f_{12})^*(s_Z)$ 在 $U_1 \cap U_2$ 上 $= (\frac{s_2}{s_1})$，其中 $s_Z \in \mathcal{K}(Z)$。特别地，$(\frac{s_2}{s_1}) - f^*(s_Z)$ 在 Z 上是垂直的。注意，$(\frac{s_2}{s_1}) - f^*(s_Z) \sim_Z 0$。由引理 2.5，存在 Z 上的卡蒂埃除子 L_Z，使得

$$(\frac{s_2}{s_1}) - f^*(s_Z) = f^* L_Z.$$

此外，我们有 Supp $L_Z \cap (U_1 \cap U_2) = \emptyset$，且 $L_Z + (s_Z) = D_1 - D_2$ 在 $U_1 \cap U_2$ 上，因为 $(D_1 - D_2)|_{U_1\cap U_2} = (s_Z)$。因此，存在 Z 上的卡蒂埃除子 D'，使得

$$D' = D_1 \text{ on } U_1 \quad \text{and} \quad D' = D_2 + (s_Z) + L_Z \text{ on } U_2.$$

由此可知，在 U_1 上的 $f^*D' = f^*D_1 = D - (s_1)$ 以及 $f^*D' = f^*(D_2 + (s_Z) + L_Z) = D - (s_2) + (\frac{s_2}{s_1}) = D - (s_1)$ 在 U_2 上成立。因此 $D = f^*D' - (s_1)$，从而 $D \sim_Z 0$。□

2.2. 对与奇点。

定义 2.7（对，参见 [CH21，定义 2.2]）。一对 $(X/Z \ni z, B)$ 由以下数据组成：正规拟射影簇之间的一个收缩 $f\colon X \to Z$，一个（不一定是闭的）点 $z \in Z$，以及 X 上的一个 $\mathbb{R}$-除子 $B \geq 0$，满足 $K_X + B$ 在 z 的某个邻域上是 $\mathbb{R}$-卡蒂埃的。我们也称其为一个 $\mathbb{R}$-对。如果 $B \in \mathbb{Q}$，则称 $(X/Z \ni z, B)$ 为一个 $\mathbb{Q}$-对。如果 $f = id$ 且 $z = x \in X$，则可以用 $(X \ni x, B)$ 代替 $(X/Z \ni z, B)$。如果 $(X/Z \ni z, B)$（分别地，$(X \ni x, B)$）对于任意点 $z \in Z$（分别地，$x \in X$）都是一对，则称 $(X/Z, B)$（分别地，(X, B)）为一对。

定义 2.8（对的奇点）。设 $(X/Z \ni z, B)$ 是与收缩 $f\colon X \to Z$ 相关联的一个对，且设 E 是位于 X 上方的一个素除子，使得 $z \in f(\text{center}_X E)$。设 $g\colon Y \to X$ 是 (X, B) 的一个对数解消，使得 $\text{center}_Y E$ 是一个除子，并假设在 z 的某个邻域上 $K_Y + B_Y = g^*(K_X + B)$。我们定义 $a(E, X, B) := 1 - \text{mult}_E B_Y$ 为 E 关于 (X, B) 的对数不一致度。

如果 E 是位于 X 上方的一个素除子，且 $f(\text{center}_X E) = \bar{z}$，我们称素除子 E 位于 $X/Z \ni z$ 上方。如果对于位于 $X/Z \ni z$ 上方的任意素除子 E，$(X/Z \ni z, B)$ 都满足 $a(E, X, B) \geq 0$（分别地，> 0），则称 $(X/Z \ni z, B)$ 是对数典范的（分别地，klt）。如果对于任意余维为 ≥ 1 的点 $x \in X$，$(X \ni x, B)$ 都是对数典范的（分别地，klt），则称 $(X/Z, B)$ 是对数典范的（分别地，klt）。如果存在 (X, B) 的一个对数解消 $g\colon Y \to X$，使得对于任意 g-例外素除子 E，均有 $a(E, X, B) > 0$，则称 $(X/Z, B)$ 是除子对数终端的。

引理 2.9. 假设 $(X/Z, B)$ 是一个对数典范对，且 D 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子，使得 $K_X + B \sim_{\mathbb{R},Z} D$，并且 D 在 Z 上垂直。设 $\psi\colon X \dashrightarrow X'$ 是一个

在 Z. 上的部分 $(K_X + B)$-极小模型纲领。则存在一个真开子集 $U \subset Z$，使得对于任意 $z \in U$，X_z 都与 X'_z 同构，其中 X_z（分别地，X'_z）是 $X \to Z$（分别地，$X' \to Z$）在 z 上的纤维。

证明。令 $f\colon X \to Z$ 为相应的态射。由于 $K_X + B \sim_{\mathbb{R}} 0$ 在 $Z\backslash f$（Supp D）上，ψ 是 $Z\backslash f$（Supp D）上的同构，因此我们可以选择 $U\colon = Z\backslash f$（Supp D）。□

引理 2.10。假设（$X/Z \ni z$，B）是一个对数典范对，满足 Z 是一条曲线，$K_X + B \sim_{\mathbb{R}} 0$ 在 z 的某个邻域上，$B^h \in \mathbb{Q}$，且 z 是一个闭点。那么 $B + sf^*z$ 是 z 的某个邻域上的 $\mathbb{Q}$-除子，其中 $s\colon = $ 对数典范阈值（$X/Z \ni z$，B；f^*z），且 $f\colon X \to Z$。

证明。通过可能缩小 Z，我们可以假设 $K_X + B \sim_{\mathbb{R},\, z} 0$ 和 f（Supp B^v）$= \{z\}$。存在实数 r_1、……、r_c，$\mathbb{Q}$-线性函数 s_1、……、$s_m\colon \mathbb{R}^{c+1} \to \mathbb{R}$，以及 X 上的魏尔除子 B_1、……、B_m，使得 $\mathbf{1}$、r_1、……、r_c 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，并且 $B = \sum_{i=1}^m s_i(\mathbf{1}, \boldsymbol{r}_0) B_i$，其中 $\boldsymbol{r}_0\colon = (r_1、……、r_c)$。对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^c$，令 $B(\boldsymbol{v})\colon = \sum_{i=1}^m s_i(\mathbf{1}, \boldsymbol{v}) B_i$。由于对于任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^c$，$B^h \in \mathbb{Q}$，$B^h = B(\boldsymbol{v})^h \in \mathbb{Q}$。

根据 [HLS19，引理 5.3]，$K_X + B(\boldsymbol{v}) \sim_{\mathbb{R},\, z} 0$ 对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^c$，因此 $B(\boldsymbol{v}) - B \sim_{\mathbb{R},\, z} 0$。此外，由于 $f(\mathrm{Supp}(B(\boldsymbol{v}) - B)) = f(\mathrm{Supp}\ B^v) = \{z\}$，我们可知，对于某个实数 $l_{\boldsymbol{v}}$，有 $B - B(\boldsymbol{v}) = l_{\boldsymbol{v}} f^*z$。取 $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{Q}^c$，则

$$s + l_{\boldsymbol{v}_0} = \mathrm{lct}(X/Z \ni z, B(\boldsymbol{v}_0); f^*z) \in \mathbb{Q}$$

因为 $B(\boldsymbol{v}_0) \in \mathbb{Q}$。由于

$$B + sf^*z = B(\boldsymbol{v_0}) + (s + l_{\boldsymbol{v}_0}) f^*z,$$

$B + sf^*z$ 是一个 $\mathbb{Q}$-除子。证明完毕。□

猜想 2.11（良好极小模型猜想）。设 d 为正整数。假设 $(X/Z, B)$ 是一个维数为 d 的对数典范对，且 $K_X + B$ 在 Z 上伪有效。那么，$(X/Z, B)$ 在 Z 上有一个良好极小模型。

猜想 2.12（非消失猜想）。设 d 为正整数。假设 $(X/Z, B)$ 是一个维数为 d 的对数典范对，且 $K_X + B$ 在 Z 上伪有效。那么$|(K_X + B)/Z|_{\mathbb{R}} \neq \emptyset$。

2.3. 补边。

定义 2.13。令 n 为正整数，$\Gamma \subset (0, 1]$ 为一个集合，且 $(X/Z \ni z, B)$ 和 $(X/Z \ni z, B^+)$ 为两对。若 $(X/Z \ni z, B^+)$ 是 $(X/Z \ni z, B)$ 的 $\mathbb{R}$-补边，意指 (X, B^+) 是对数典范的，$B^+ \geq B$，并且 $K_X + B^+ \sim_{\mathbb{R}} 0$ 在 z的某个邻域上。若 $(X/Z \ni z, B)$ 是 $\mathbb{R}$-互补的，意指 $(X/Z \ni z, B)$ 具有一个 $\mathbb{R}$-补边。

若 $(X/Z \ni z, B^+)$ 是 $(X/Z \ni z, B)$ 的 n-补边，意指

- $(X/Z \ni z, B^+)$ 是对数典范的，
- $nB^+ \geq \lfloor (n+1)\{B\} \rfloor + n\lfloor B \rfloor$，并且
- $n(K_X + B^+) \sim 0$ 在 z 的一个邻域上。

如果存在实数 $a_1, \ldots, a_k \in \Gamma$，以及定义在 X 上的 $\mathbb{Q}$-除子 $B_1^+, \ldots, B_k^+$，使得我们称 $(X/Z \ni z, B^+)$ 是 (n, Γ)-可分解的（$\mathbb{R}$)-补对象（complement）：

- $\sum_{i=1}^k a_i = 1$ and $\sum_{i=1}^k a_i B_i^+ = B^+$,

• $(X/Z \ni z, B^+)$ 是 $(X/Z \ni z, B)$ 的 $\mathbb{R}$-补对象（complement），并且

对于任意整数 $1 \leq i \leq k$，• $(X/Z \ni z, B_i^+)$ 都是自身的一个 n-补边。

猜想 1.3 在 $d = 3$ 时成立。更确切地说，我们有如下 g.

定理 2.14. 设 l 为正整数，$\Gamma \subset [0,1]$ 为降链条件集。那么存在一个正整数 n，它能被仅依赖于 l 和 Γ 的 l 整除，并满足以下条件。

假设 $(X/Z \ni z, B)$ 是一个维数 3 且具有 $B \in \Gamma$ 的 $\mathbb{R}$-补边对。那么 $(X/Z \ni z, B)$ 有一个 n-补边 $(X/Z \ni z, B^+)$。此外，若 $\mathrm{Span}^{\mathbb{Q}_{\geq 0}}(\bar{\Gamma}\backslash\mathbb{Q}) \cap (\mathbb{Q}\backslash\{0\}) = \emptyset$，则我们可以选取 $B^+ \geq B$.

证明。这由 [FMX19，定理 1] 和 [HLS19，定理 8 得出。25]。 □

2.4. 饭田维数与不变饭田维数。

定义 2.15（饭田维数，参见 [Nak04，II 3.2 定义]）。设 X 为正规射影簇，D 为 $\mathbb{R}$-除子，且定义在 X上。对于满足 $||\lfloor mD \rfloor|| \neq \emptyset$的任意正整数 m，记 Φ_m： $X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \lfloor mD \rfloor))$. D 的饭田维数 $\kappa(X, D)$ 定义如下。若对于某个正整数 m有 $||\lfloor mD \rfloor|| \neq \emptyset$，则

$$\kappa(X, D) := \max\{\dim \Phi_m(X) \mid m \in \mathbb{Z}_{>0}, ||\lfloor mD \rfloor|| \neq \emptyset\}.$$

否则，令 $\kappa(X, D) := -\infty$。注意，若 $||\lfloor mD \rfloor|| \neq \emptyset$，则根据 [Nak04，II 3.8 推论]，

$$\kappa(X, D) = \max\left\{k \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \limsup_{m \to +\infty} \frac{\dim H^0(X, \lfloor mD \rfloor)}{k^m} > 0\right\}.$$

定义 2.16（不变饭田维数，参见 [Cho08，定义 2.2。1]）。设 X 是一个正规射影簇，且 D 是 $\mathbb{R}$上的一个 X除子。不变饭田维数κ_ι（X，D）定义如下。若 D，则定义

$$\kappa_\iota(X, D) := \kappa(X, D')$$

对于某个 $\mathbb{R}$除子 $D' \in |D|_{\mathbb{R}}$。否则，令 κ_ι（X，D）：$= -\infty$。注意，κ_ι（X，D）与 D' [Cho08中的选择无关，推论 2.1。4]。

我们汇 总一些 κ 和 κ_ι 的基本性质，这些性质将在本文其余部分中使用 .

命题 2.17（[Cho08，命题 2.1.2、2.2.2，推论 2.1。4]）。设 X 是一个正规射影簇，且 $D \sim_{\mathbb{R}} D'$ 是 $\mathbb{R}$上的两个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃除子 X。则

(1) $\kappa(X, D) \leq \kappa_\iota(X, D) = \kappa_\iota(X, D')$，且 $\kappa(X, D) < \kappa_\iota(X, D)$ 当且仅当 $\kappa(X, D) = -\infty$ 且 $\kappa_\iota(X, D) \geq 0$。(2) 若 $D' \geq 0$，则 $\kappa(X, D) \leq \kappa(X, D')$。

[CHL22，例 2。10] 表明命题 2.17(1) 中可能出现严格不等式。

引理 2.18 ([Sho03，命题 3。20]，[Nak04，II 引理 3。11])。设 g： $Y \to X$ 是正规射影簇之间的满射态射，且 D 是一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子，定义在X上。则

(1) $\kappa(X, D) = \kappa(Y, g^*D)$ 和 $\kappa_\iota(X, D) = \kappa_\iota(Y, g^*D)$，并且 (2) 如果 g是双有理的，那么对于 Y上的任意 g-例外 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子 $E \geq 0$， $\kappa(X, D) = \kappa(Y, g^*D + E)$ 和 $\kappa_\iota(X, D) = \kappa_\iota(Y, g^*D + E)$。

2.5. R-除子的饭田纤维化。

定义 2.19。假设 $f\colon\ X \dashrightarrow Z$ 是一个有理映射，且 $f_\infty\colon\ X_\infty \to Z_\infty$ 是一个射影态射。如果存在一个双有理态射$h\colon\ X_\infty \to X$和一个双有理映射 $g\colon\ Z_\infty \dashrightarrow Z'$，使得 $f\circ h = g\circ f_\infty$，则称 f 与 f_∞ 双有理等价，即下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X_\infty & \xrightarrow{\ h\ } & X \\ {\scriptstyle f_\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Z_\infty & \overset{g}{- - \to} & Z. \end{array}$$

定义 2.20 （参见 [Li22，定义 3.19]）。设 X 是一个正规射影簇，且D 是一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子，定义在 X 上，并满足 $\kappa(X,D) \geq 0$。准射影光滑簇之间的射影态射 $f_\infty\colon X_\infty \to Z_\infty$ 称为饭高纤维化， D 若满足以下条件:

(1) $\dim Z_\infty = \kappa(X,D)$，(2) $f_m\colon\ X \dashrightarrow Z_m \subset \mathbb{P}H^0(X,\lfloor mD\rfloor)$，由完全线性系 $|\lfloor mD\rfloor|$关联的映射与 f_∞ 通过态射 $h\colon\ X_\infty \to X$双有理等价，其中任意充分可整除的大整数 m 均成立；并且 (3) 对任意充分大的整数 n，有

$$\kappa\left(F, \left(h_*^{-1}D + nE\right)|_F\right) = 0,$$

其中， F 是 f_∞ 的一般纤维， E 是所有 h-例外素除子的和。

根据 [Li22，命题 3。20], 对于任意 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子 D 满足 $\kappa(X,D) \geq 0$，总存在一个的饭高纤维化。以下引理为专家所熟知。

引理 2.21。记号同定义*2.20*。

(1) 假设 D_∞ 是 X_∞ 上的一个 $\mathbb{R}$-除子，满足 $D_\infty - h^*D \geq 0$ 且为 h-例外，则 f_∞ 是 D_∞.的饭高纤维化。(2) 假设 $X'_\infty \to X_\infty$ 是从一个光滑簇出发的双有理态射，则 $X'_\infty \to Z_\infty$ 是 D的饭高纤维化。

证明。(1) 根据假设， $H^0(X,\lfloor mD\rfloor) = H^0(X_\infty,\lfloor mD_\infty\rfloor)$，且 $X_\infty \dashrightarrow Z_m$ 也是由完全线性系 $|\lfloor mD_\infty\rfloor|$确定的映射。于是(1)由定义立即得到。

(2) 我们只需证明，对于任意充分大的整数n， $\kappa(F', ((h')_*^{-1}D + nE')|_{F'}) = 0$，其中 $h'\colon X'_\infty \to X$， F' 是 $X'_\infty \to Z_\infty$ 的一般纤维，而 E' 是所有h'-例外素除子的总和。设 $\psi'_\infty\colon W \to X'_\infty$ 是一个消解$X \dashrightarrow Z_m$的消解，并记 $\psi\colon\ W \to X$ 为诱导态射。根据Li22，引理3.10], ，对于任意充分大的整数 n，我们有

$$\kappa\left(F_m, \left((\psi)_*^{-1}D + nE_W\right)|_{F_m}\right) = 0,$$

其中 F_m 是 $W \to Z_m$ 的非常一般纤维， E_W 是所有 ψ-例外素除子的总和。设 E_1 为所有 ψ'_∞-例外素除子的总和。由于 $E_W = (\psi'_\infty)_*^{-1}E' + E_1$ 并且

$$\psi_*^{-1}D + n\left(\psi'_\infty\right)_*^{-1}E' + (n+m)E_1 - \left(\psi'_\infty\right)^*\left(\left(h'\right)_*^{-1}D + nE'\right) \geq 0$$

对于任意充分大的整数 n 和 m，我们可知

$$\kappa\left(F_m, \left(\left(\psi'_\infty\right)^*\left(h_*^{-1}D + nE_1\right)\right)|_{F_m}\right) = 0.$$

注意， Z_∞ 与 Z_m双有理，因此存在从 F_m 到 F'的双有理态射。因此 $\kappa(F', ((h')_*^{-1}D + nE')|_{F'}) = 0$。证明完毕。□

引理 2.22. 记号同定义 *2.20*。设 $\phi : X' \to X$ 是从一个正规射影簇出发的双有理态射，且 D' 是一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子，定义在 X' 上，使得 $D' - \phi^*D \geq 0$ 且是 ϕ-例外的。则

(1) 可能用一个高模型替换 X_∞ 后， f_∞ 是 D'的饭田纤维化；且 (2) D' 的任意饭田纤维化都是 D的饭田纤维化。

证明。根据我们的假设， $H^0(X, \lfloor mD \rfloor) = H^0(X_\infty, \lfloor mD_\infty \rfloor)$，并且 $X \dashrightarrow Z_m$ 是与完全线性系 $||\lfloor mD \rfloor||$ 相关联的映射，当且仅当 $X' \dashrightarrow Z_m$ 是与完全线性系 $||\lfloor mD' \rfloor|$相关联的映射。

(1) 由引理 2.21(2)，必要时以高模型替换 X_∞ ，可设映射 $X_\infty \dashrightarrow X'$ 是一个态射，并记为 h_0。只需证明，对于任意充分大的整数 n，

$$\kappa\left(F, \left((h_0)_*^{-1}D' + nE_0\right)|_F\right) = 0,$$

其中 E_0 是所有 h_0-例外素除子的和。这是由以下事实得出的：

$$(h_0)_*^{-1}D' + nE_0 \leq h_*^{-1}D + nE$$

对于任意充分大的整数 n。

(2) 假设 $f'_\infty : X'_\infty \to Z'_\infty$ 是 D'的饭高纤维化。令 $W \to X'_\infty$ 和 $W \to X_\infty$ 为 X_∞ 与 X'_∞的公共解消。由引理 2.21(2)， $W \to Z_\infty$ 也是 D的饭高纤维化。因此， $X'_\infty \to Z_\infty$ 也是 D 的饭高纤维化。由于Z_∞ 与 Z'_∞双有理， $X'_\infty \to Z'_\infty$ 是 D的饭高纤维化。□

引理 2.23。 记号同定义 *2.20*。设 $\psi : X \dashrightarrow X'$ 是一个 D-非负双有理收缩。则可能需要将 X_∞ 替换为一个高模型， f_∞ 是一个饭高纤维化 D'。

证明。 由引理 2.21(2)，可能需要将 X_∞ 替换为一个高模型，我们可以假设映射 $h' : X_\infty \dashrightarrow X'$ 是一个态射。根据假设， $0 \leq h^*D - h'^*D'$ 是 h'-例外的，并且 $X' \dashrightarrow Z_m$ 是由完全线性系 $||\lfloor mD' \rfloor|$所关联的映射。由引理 2.21(1)， f_∞ 是一个饭高纤维化 h^*D。再由引理 2.22(2)， f_∞ 也是一个饭高纤维化 D'。□

注记 2.24. 在本文余下部分中，我们将频繁使用引理 2.21、2.22 和 2.23 ，在不加引用的情况下将 X 替换为另一个双有理模型。

引理 2.25. 假设 (X, C) 是一个射影 klt 对，满足 $K_X + C \sim_{\mathbb{R}} 0$。假设猜想 2.12 在维数 $\leq \dim X$ 上成立。设 D 是 X 上的一个 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃 $\mathbb{Q}$-除子，且 $\kappa(X, D) \geq 0$，并且 $f_\infty \colon X_\infty \to Z_\infty$ 是 D 的一个饭高纤维化。则 $\kappa(F, h^*D|_F) = 0$，其中 F 是 f_∞ 的一般纤维，$h \colon X_\infty \to X$ 是诱导的双有理态射。

证明。根据 Shokurov 型多面体，我们可以假设 $C \in \mathbb{Q}$，从而有 $K_X + C \sim_{\mathbb{Q}} 0$。取一个正有理数 ϵ，使得 $(X_\infty, h_*^{-1}C + (1-\epsilon)E)$ 是 klt，并且

$$E' := K_{X_\infty} + h_*^{-1}C + (1-\epsilon)E - h^*(K_X + C) \geq 0,$$

其中 E 是所有 h-例外素除子的和。由于 $\kappa(X, D) \geq 0$，可以找到一个 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃 $\mathbb{Q}$-除子 $D' \geq 0$，使得 $D' \sim_{\mathbb{Q}} D$。令 ϵ' 为一个正有理数，使得 $(X_\infty, h_*^{-1}C + (1-\epsilon)E + \epsilon' h^*D')$ 仍为 klt。由于 f_∞ 是 D 的饭高纤维化，且 E' 是 h- 例外的，可以看出

$$\kappa\left(F_v, \left(K_{X_\infty} + h_*^{-1}C + (1-\epsilon)E + \epsilon' h^*D'\right)|_{F_v}\right) = \kappa\left(F_v, \left(E' + \epsilon' h^*D'\right)|_{F_v}\right) = 0,$$

其中 F_v 是 f_∞ 的非常一般纤维。根据 [HMX18，推论 1。4], 我们有 e

$$\kappa\left(F, \left(K_{X_\infty} + h_*^{-1}C + (1-\epsilon)E + \epsilon' h^*D'\right)|_F\right) = 0.$$

因此 $\kappa(F, h^*D|_F) = 0$。 □

3. Canonical bundle formulas

关于广义对（简称 g-对）的定义和基本性质，请参阅 [BZ16、Bir19、HL21a、HL22a]；本文中，我们用 $(X/Z, B + \mathbf{M})$ 表示一个 g-对。关于典范丛公式的定义和基本性质，请参阅 [Bir19、HL21b、JLX22]。总而言之，给定一个对数典范对 $(X/Z, B)$，以及一个收缩 $\phi \colon X \to T$，其中 Z 上的正规准射影正规簇满足 $K_X + B \sim_{\mathbb{R},\, T} 0$。那么我们可以找到一个 $\mathbb{R}$-除子 $B_T \geq 0$，以及一个在 Z 上数值有效的 b-$\mathbb{R}$-除子 $\mathbf{M}_\phi$，定义在 T 上，使得 $(T/Z, B_T + \mathbf{M}_\phi)$ 是一个广义对数典范 g-对，并且

$$K_X + B \sim_{\mathbb{R}} \phi^*\left(K_T + B_T + \mathbf{M}_{\phi,T}\right).$$

这里，B（分别地，$\mathbf{M}_\phi$）称为关于 T 上的 $(X/Z, B)$ 的典范丛公式的判别部分（分别地，模部分），前者唯一确定（分别地，后者仅在 $\mathbb{R}$-线性等价意义下确定）。我们也称 $\mathbf{M}_{\phi,T}$ 为关于 T 上的 $(X/Z, B)$ 的典范丛公式的模部分。此外，若 $(X/Z, B)$ 是 klt，则 $(T/Z, B_T + \mathbf{M}_\phi)$ 是 gklt。

这里我们强调，$\mathbf{M}_\phi$ 有许多种选择，其中一些可能表现不佳。但在以下结果中，我们总能选择一个具有所需性质的 $\mathbf{M}$。

为方便起见，我们称两个广义对 $(X/Z, B + \mathbf{M})$ 和 $(X'/Z, B' + \mathbf{M}')$ 是相 crepant 的，如果 X 与 X' 双有理，$\mathbf{M} = \mathbf{M}'$，且对某个公共解消 $p \colon W \to X$ 和 $q \colon W \to X'$，有 $p^*(K_X + B + \mathbf{M}_X) = q^*(K_{X'} + B' + \mathbf{M}'_{X'})$。我们也称 $(X'/Z, B' + \mathbf{M})$ 是 $(X/Z, B + \mathbf{M})$ 的保典范模型。

命题 3.1。设 d 为正整数，且 $\Phi \subset [0, 1]$ 为一个下降链条件集。假设猜想 *1.3*和 *2.11* 在维数 d 中成立。则存在正整数 p 和下降链条件集 Φ'，它们仅依赖于 d 和 Φ，并满足以下条件。

设 $(X/Z, B)$ 是维数为 d 的对数典范对，且 $\phi\colon X \to T$ 是定义在Z上的收缩，使得在 T 的泛点上，$\dim T > 0$, $B \in \Phi$, $K_X + B \sim_{\mathbb{R},\, T} 0$，以及 $K_X + B \sim_{\mathbb{Q},\, T} 0$。那么，我们可以选择 $(X/Z, B)$ 在 T 上的典范丛公式中的一个模部分 $\mathbf{M}_\phi$，使得 $B_T \in \Phi'$, $p\mathbf{M}_\phi$ 是 $\boldsymbol{b}$-Cartier，并且

$$p(K_X + B) \sim p\phi^*(K_T + B_T + \mathbf{M}_{\phi,T}),$$

其中 B_T是 $(X/Z, B)$ 关于 T 的典范丛公式的判别部分。

此外，若 Φ 是超标准集，则 Φ' 也是超标准集。

证明与 [Bir19，命题 63]类似。为方便读者，我们在此给出证明。我们还指出，本命题的此外部分在本文中不会用到，但在其他一些情形下很有用（参见 [CHX22]）。

证明。步骤 1。在这一步中，我们构造 p 并选择 $\mathbf{M}_{\phi,\, T}$。注意，这里我们只选择 $\mathbf{M}_{\phi,\, T}$，而不是 $\mathbf{M}_\phi$。

根据 [HLS19 定理 1.8 和 8.25], ，存在一个正整数 p 和一个有限集$\Gamma_0 \subset$（仅依赖于 d和 Φ），使得对于任意 $t \in T$，$(X/T \ni t, B)$ 都有一个 (p, Γ_0)-可分解的 $\mathbb{R}$-补元 $(X/T \ni t, B + G)$，其中某个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子$G \geq 0$，此外，若 $B \in \Gamma \cap \mathbb{Q}$，则 $(X/T \ni t, B)$ 有一个单调的 p-补元。特别地， $G \sim_{\mathbb{R}} 0$ 在 t 的某个邻域上成立，因而 G 在 T 上是垂直的。由于$K_X + B \sim_{\mathbb{Q},\, T} 0$在 T 的泛点 η_T 上， $p(K_X + B)$ 在 η_T 的某个邻域上成立，并且存在 $\alpha \in \mathcal{K}(X)$，使得 $pL := p(K_X + B) + (\alpha)$ 在 η_T 附近为零。特别地，$pL \sim p(K_X + B) \sim_{\mathbb{R},\, T} 0$ 且 L 在 T 上是垂直的。根据 [Li20 引理 2.11], ，我们可以在 T 上找到一个$\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子 L_T，使得 $L = \phi^* L_T$。令 B_T为 (X, B) 关于 T 的典范丛公式的判别部分，并令 $\mathbf{M}_\phi$，$_T := L_T - K_T - B_T$. 于是

$$p(K_X + B) \sim pL = p\phi^* L_T = p\phi^*(K_T + B_T + \mathbf{M}_{\phi,T}).$$

步骤 2。在此步骤中，我们证明可以归约到 $\dim T = 1$ to 的情形，以证明 Φ' 的存在性，并证明 $p\mathbf{M}_{\phi,T}$ 是整的。

假设 $\dim T > 1$。令 H 为 T 的一般超平面截面， $G := \phi^* H$，且 $g\colon G \to H$ 为诱导态射。我们可以写成 $K_G + B_G = (K_X + G + B)|_G$. 。显然，$(G, B_G)$ 是一个对数典范对，其中 $K_G + B_G \sim_{\mathbb{Q},H} 0$。设 B_H 是 (G, B_G) 在 H 上的典范丛公式的判别部分。注意，由于 G 是一个无基点线性系的一般成员，(G, B_G) 的每个对数典范中心 S_G 都是某个对数典范中心 S_0 的 $S_0 \cap G$ 的一个分支，其中该对数典范中心属于 (X, B)。

我们断言，对于 $D \cap H$的任意分支C 上的任意素除子 D，有$\mathrm{mult}_D B_T = \mathrm{mult}_C B_H$。事实上，令 s_D 为 $\phi^* D$ 相对于(X, B)在 D的泛点上的对数典范阈值。则存在$(X, B + s_D\phi^* D)$的一个对数典范中心 F，使得 $\phi(F) = D$。注意，由于 G是一般的， F也是$(X, B+G+s_D\phi^* D)$的对数典范中心。因此，根据伴随反演， $F \cap G$是$(G, B_G + s_D g^* C)$的对数典范中心 [Kaw07]。此外，由于 $\phi(F \cap G) = C$，我们看到 s_D 是 $g^* C$ 相对于(G, B_G)在C的泛点上的对数典范阈值，故断言成立。由于 Φ 是一个降链条件集，存在一个仅依赖于Φ 的降链条件集 Φ_1，使得 $B_G \in \Phi_1$ （参见 [Kol+92，推论16.7]）。若 Φ 是一个超标准集，那么我们

可以取 Φ_1 为一个超标准集，依据 [Bir19，引理3。3]。在两种情况下，由归纳可知，存在一个降链条件集（分别为超标准集） Φ_1' ，使得 $B_Z \in \Phi_1'$。

取一个一般的 $H' \sim H$，并令 $K_H := (K_T + H')|_H$。注意，由于 H 是一般超平面截面，且 K_H 被确定为一个魏尔除子，因此限制是良定义的，尽管 K_T 可能不是 $\mathbb{Q}$- 卡蒂埃。令

$$\mathbf{M}_{g,H} := (L_T + H')|_H - (K_H + B_H).$$

于是 $B_H + \mathbf{M}_{g,\ H} = (B_T + \mathbf{M}_{\phi,\ T})|_H$，并且

$$p(K_G + B_G) \sim p(L + G)|_G \sim pg^*(L_T + H')|_H \sim pg^*(K_H + B_H + \mathbf{M}_{g,H}).$$

因此，$\mathbf{M}_{g,\ H}$ 是 (G, B_G) 在 H 上的典范丛公式中的模部分，并且

$$\mathrm{mult}_C(B_H + \mathbf{M}_{g,H}) = \mathrm{mult}_D(B_T + \mathbf{M}_{\phi,T})$$

这意味着 $\mathbf{mult}_C \mathbf{M}_{g,\ H} = \mathbf{mult}_D \mathbf{M}_{\phi,\ T}$，因为 $\mathbf{mult}_C B_H = \mathbf{mult}_D B_T$。因此，$p\mathbf{mult}_D \mathbf{M}_{\phi,\ T}$是整数，当且仅当 $p\mathbf{mult}_C \mathbf{M}_{g,\ H}$是整数。重复这一过程即可完成此步骤。

步骤 3。在此步骤中，我们证明 Φ' 的存在，并证明 $p\mathbf{M}_{\phi,\ T}$是整数。注意，根据步骤 2，我们可以假设 $\dim T = 1$。

步骤 3.1。我们构造集合 Φ'。若 Φ 是一个非超标准集的超标准集，则根据 [HMX14，定理 1。1]，$B_T \in \Phi'$ 对于某个仅取决于 Φ' 和 d 的下降链条件集 Φ。若 $\Phi = \Phi(\mathfrak{R})$ 是一个超标准集，则我们证明 $B_T \in \Phi' := \Phi(\mathfrak{R}')$，其中

$$\mathfrak{R}' := \left\{ r, \frac{r}{l_1} - \frac{l_2}{p} \mid r \in \mathfrak{R},\ l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_{>0} \right\} \cap [0, 1]$$

是一个由有理数组成的有限集。

断言 3.2. 假设 $t \in T$是一个闭点。那么 $(X/T \ni t, B + s\phi^*t)$ 是 $(X/T \ni t, B)$ 的单调p-补，其中 $s := (X/T \ni t, B; \phi^*t)$ 的对数典范阈值。特别地，$B + s\phi^*t$ 在 t 的某个邻域上是一个 $\mathbb{Q}$-除子。

断言 3.2 的证明。根据引理 2.10，$B_t := B + s\phi^*t$ 在t的某个邻域上是一个 $\mathbb{Q}$-除子。将 T 在 t 周围适当缩小后，我们可以假设 $B_t \in \mathbb{Q}$。设 (X', B_t') 是 (X, B_t) 的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修正。则 $\lfloor B_t' \rfloor$ 有一个分支映射到 t，并且 $K_{X'} + B_t' \sim_{\mathbb{Q}, T} 0$。存在一个 $\mathbb{Q}$-除子 B'，位于 X' 上，使得 $B' \in \Phi \cap \mathbb{Q}$, $\lfloor B' \rfloor = \lfloor B_t' \rfloor$，且 $B_{X'} \le B' \le B_t'$，其中 $B_{X'}$ 是 B 在 X' 上的严格变换。根据假设，$(X'/T \ni t, B')$ 有一个单调的 p-补 $(X'/T \ni t, B'^+)$。令 B^+ 为 B'^+ 在 X 上的严格变换。则 $(X/T \ni t, B^+)$ 是 $(X/T \ni t, B)$ 的单调 p-补。由于 $B^+ - B \ge 0$ 和 $B^+ - B \sim_{\mathbb{Q}} 0$ 在 t 的某个邻域上，$B^+ - B$ 在 T 上是垂直的。此外，由于 $B'^+ \ge B'$，$\lfloor B'^+ \rfloor$ 有一个分支映射到 t，因此 (X, B^+) 有一个对数典范中心映射到 t。因此 $B^+ - B = s\phi^*t$ 在 t 上。断言得证。□

取一个闭点 $t \in T$。根据命题 3.2，$(X/T \ni t,\ B^+ := B + s\phi^*t)$ 是 $(X/T \ni t,\ B)$ 的 p- 补，满足 $s := \mathrm{lct}(X/T \ni t,\ B; \phi^*t)$。对于 S 的任一分支 ϕ^*t，令

$b := \operatorname{mult}_S B$, $b^+ := \operatorname{mult}_S B^+$ 以及 $m := \operatorname{mult}_S \phi^* t$。于是 $b^+ = b + sm$，因此 $s = \frac{b^+ - b}{m}$。由于 $b \in \Phi$，我们可以写成 $b = 1 - r/l$，其中 $r \in \mathfrak{R}$ 且 $l \in \mathbb{Z}_{>0}$。特别地，

$$s = \frac{b^+ - 1 + r/l}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{r}{l} - \left(1 - b^+\right)\right).$$

于是 $\operatorname{mult}_t B_T = 1 - s \in \Phi'$，如 $b^+ \in \frac{1}{p}\mathbb{Z} \cap [0,1]$。

步骤 3.2。我们证明 $p\mathbf{M}_{\phi,\, T}$ 是整数。

我们可以假设 $p(K_X + B) \sim 0$ 在某个非空开子集 $U_0 \subseteq T$ 上成立，使得 $\operatorname{Supp} B_T \subseteq T \setminus U_0$。令

$$\Theta := B + \sum_{t \in T \setminus U_0} s_t \phi^* t,$$

其中 $s_t := \operatorname{lct}(X/T \ni t, B; \phi^* t)$。令 Θ_T为 (X, Θ) 在 T 上的典范丛公式的判别部分。那么

$$\Theta_T = B_T + \sum_{t \in T \setminus U_0} s_t t$$

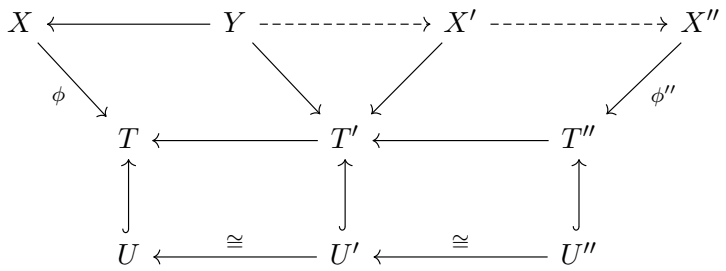
这是一个约化除子。此外，$(X/T \ni t,\ \Theta)$ 是 p-补边，适用于每个 $X/T \ni t,\ B)$。对每个 $t \in T \setminus U_0$，根据断言 3.2，因此 $p(K_X + \Theta) \sim_T 0$ 根据引理 2.6。由于

$$\begin{aligned} p(K_X + \Theta) &= p(K_X + B) + p(\Theta - B) \\ &\sim p\phi^*(K_T + B_T + \mathbf{M}_{\phi,T}) + p\phi^*(\Theta_T - B_T) \\ &= p\phi^*(K_T + \Theta_T + \mathbf{M}_{\phi,T}), \end{aligned}$$

$p(K_T + \Theta_T + \mathbf{M}_{\phi,\, T})$ 是卡蒂埃。因此，$p\mathbf{M}_{\phi,\, T}$是整数，因为 $K_T + \Theta_T$ 是约化的。

步骤 4。在这一步中，我们通过证明 $p\mathbf{M}_{\phi}$ 是 b-Cartier 且数值有效来完成证明。注意，在这一步中我们不假设 $\dim T = 1$。

根据 [Bir19，定理 3.6]，，我们只需证明 $p\mathbf{M}_{\phi}$ 是 b-Cartier。设$T' \to T$为一个高阶解消，$Y \to X$为（X, B）的一个对数解消，使得 $Y \to T'$是一个态射。设 $U \subseteq T$ 为一个非空开子集，使得在 $U' \subseteq T'$为 U的逆像时，$U' \to U$ 是同构。设 B_Y为B 的严格变换与 $Y \to X$ 的约化例外除子的和，但移除所有映射到 U 之外的分支。特别地，（Y, B_Y）的任意对数典范中心的泛点都映射到U中。我们可以在 $X \times_T T'$ 上对 $K_Y + B_Y$运行带某个充足除子缩放的极小模型纲领。由 [Bir12，定理 1.9]，，该极小模型纲领在 U'上终止。事实上，我们得到一个模型 X'，使得在 U'上，偶对（X', B'）是（X, B）的一个 $\mathbb{Q}$-阶乘除子对数终端修改，其中 B'是 B_Y在 X'上的严格变换。因此 $K_{X'} + B' \sim_{\mathbb{Q}} 0$在 U'上。现在根据 [HX13，定理 1.1]（另见 [Bir12，定理 1.1]），我们可以在 T'上对 $K_{X'} + B'$运行极小模型纲领；由于（X', B'）的每个对数典范中心的泛点都映射到 U'中，该极小模型纲领终止于 T'上的一个良好极小模型 X''。设 B'' 为 B' 在 X'' 上的严格变换。则 $K_{X''} + B''$ 在 T' 上是半丰沛的。



设 $\phi''\colon\ X''\to T''$为由 $K_{X''}+B''$在 T'上定义的收缩。注意，由于 $K_{X'}+B'\sim_{\mathbb{Q}}0$在 U'上，$T''\to T'$是双有理的。假设（$T'',B''_{T''}+\mathbf{M}_{\phi}$）是（$T,B_T+\mathbf{M}_{\phi}$）的相 crepant 模型。那么 $L_{T''}=K_{T''}+B''_{T''}+\mathbf{M}_{\phi,T''}$，其中 $L_{T''}$是 L_T在 T''上的拉回。设 $f\colon\ W\to X$和 $f''\colon\ W\to X''$为一个公共解消，$K_{X''}+\Delta'':=f''_*f^*(K_X+B)$。由于 K_X+B和 $K_{X''}+B''$在 U上相 crepant，我们看到 $B''-\Delta''$在 T''上是垂直的。注意，根据引理 2.5，对于某个 $\mathbb{R}$-Cartier $\mathbb{R}$-除子 $P_{T''}$在 T''上，有 $B''-\Delta''\sim_{\mathbb{R},T''}0$, $B''-\Delta''=(\phi'')^*P_{T''}$。记（$X'',B''$）在 T'' 上的典范丛公式的判别部分为 $B_{T''}$。于是 $B_{T''}=B''_{T''}+P_{T''}$，并且

$$\begin{aligned}p\left(K_{X''}+B''\right)&=p\left(K_{X''}+\Delta''+B''-\Delta''\right)\sim p\left(f''_*f^*L+B''-\Delta''\right)\\&=p\left(\phi''\right)^*\left(L_{T''}+P_{T''}\right)=p\left(\phi''\right)^*\left(K_{T''}+B_{T''}+\mathbf{M}_{\phi,T''}\right).\end{aligned}$$

现在由步骤 3.2，$p\mathbf{M}_{\phi,\ T''}$是一个整除子，因此 $p\mathbf{M}_{\phi,\ T'}$是整的。由于 T'是光滑的，我们得出 $p\mathbf{M}_{\phi}$ 是 b-Cartier。□

引理 3.3。假设 $X\to Z$ 是簇之间的适当态射。令 X^{ν} 为 X的正规化。那么，对于任意一般点 $z\in Z$，X^{ν}_z 是 X_z 的正规化，其中 X_z （分别地，X^{ν}_z）是 z上的纤维。特别地，若 X_z 是正规的，则 X^{ν}_z 与 X_z同构。

证明。根据假设，$X^{\nu}\to X$ 是双有理且有限的。因此，$X^{\nu}_z\to X_z$ 是双有理的，且˜是有限的。令 X_z 为 X_z的正规化。正规化的泛性质˜˜意味着存在一个态射 $X_z\to X^{\nu}_z$。此外，态射 $X_z\to X^{\nu}_z$是双有理的˜˜且有限。由于 X_z 和X^{ν}_z 都是正规的，我们可知 X_z 与X^{ν}_z同构。□

命题 3.4. 设 d、b、β 是三个正整数，$\Gamma\subset[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 是一个有限集。那么存在一个正整数 p 和一个仅依赖于 d、b、β 和 Γ^{-} 的下降链条件集 $\Gamma'\subseteq[0,1]$，使得 $\Gamma'\subseteq[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 且满足以下条件。

假设 (X,B) 是一个维数为 d 的对数典范对，$\phi\colon\ X\to T$ 是准射影正规簇之间的收缩，且 F 是 ϕ 的一般纤维。假设

(1) $B\in\Gamma$，且 $K_X+B\sim_{\mathbb{Q},\ T}0$，(2) $\dim T>0$且 (X,B) 在 T 的泛点上为 klt，(3) b 是 $(K_X+B)|_F$的非消失阶，且 (4) $\beta:=\dim H^{\dim F}(\tilde{F},\mathbb{C})$，其中 $\tilde{F}$是与 $|b(K_X+B)|_F|$的唯一因子相关联的 F 的覆盖的光滑模型。

那么，我们可以为 (X, B) 在 T 上的典范丛公式选择一个模部分 $\mathbf{M}_\phi$，使得 $B_T \in \Gamma'$，$p\mathbf{M}_\phi$ 是 b-Cartier，并且

$$p\left(K_X + B\right) \sim p\phi^*\left(K_T + B_T + \mathbf{M}_{\phi,T}\right),$$

其中 B_T 是 (X, B) 在 T 上的典范丛公式中的判别部分 .

证明。令 B_T为 (X, B) 在 T上的典范丛公式中的判别部分。由 [HMX14，定理 111]，$B_T \in \Gamma'$ 对于某个下降链条件集 Γ'，它仅依赖于d 和 Γ，使得 $\Gamma' \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$。只需证明存在 p 满足所需性质。

令 $T' \to T$为一个消解，X'为 $X \times_T T'$的主分支的正规化，并记 $\phi' \colon X' \to T'$。令 (X', B') 为 (X, B) 的保典范模型。于是 $K_{X'}+B' \sim_{\mathbb{Q},\, T'} 0$且 (X', B') 是次对数典范的，并且在 T'的泛点处为 klt。由引理 3.3，F'的 ϕ'一般纤维同构于 F。因此有

- b是（$K_{X'} + B'$）$|_{F'}$的非消失阶，且~
- F是与 $|b(K_{X'} +B')|_{F'}|$的唯一因子相关的 F' 覆盖的光滑模型。

根据[Flo14定理 5.1]，，可以找到一个仅依赖于 β的正整数 p_0，以及关于（X'，B'）在 T'上的典范丛公式的模部分 $\mathbf{M}_\phi$的一种选取，使得 $p_0\mathbf{M}_{\phi,\, T'}$是整的。特别地，$p_0\mathbf{M}_{\phi,\, T'}$是卡蒂埃除子，因而 $p_0\mathbf{M}_\phi$是 b-Cartier。由于 b 是（$K_X + B$）$|_F$的非消失阶，再次根据 $\mathbf{M}_\phi$ 的选取，我们可知

$$b\left(K_X + B\right) \sim b\phi^*\left(K_T + B_T + \mathbf{M}_{\phi,T}\right).$$

因此我们可以得出结论：$p\colon = bp_0$ 和 Γ' 具有所需的性质。 □

4. Non-vanishing orders, middle Betti numbers, and complements

在本节中，我们证明定理 1.6。更一般地，我们证明定理 4.1。

定理 4.1。设 d，b，β是三个正整数，且 $\Gamma \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$是一个下降链条件集。假设良极小模型猜想（猜想 2.11）在维数 d上成立。那么存在一个正整数 n，仅依赖于 d、b、β和 Γ，满足以下条件。

假设 (X, B) 是一个维数为 d 的 $\mathbb{Q}$-阶乘射影对，$f_\infty \colon X_\infty \to Z_\infty$ 是 $-(K_X + B)$ 的饭高纤维化，$h \colon X_\infty \to X$ 是诱导的双有理态射，并且 F 是 f_∞ 的一般纤维。设

(1) $B \in \Gamma$，(2) $-(K_X + B)$ 是数值有效的，(3) (X, B) 有一个 klt $\mathbb{R}$-补，(4) $\kappa(X, -(K_X + B)) \geq 0$，且 b 是 $-h^*(K_X + B)|_F$ 的非消失阶，即，

$$b = \min\left\{a \in \mathbb{Z}_{>0} \,|\, |-ah^*(K_X + B)|_F| \neq \emptyset\right\},$$

and

(5) β:=维 $H^{\dim F}\left(\tilde{F}, \mathbb{C}\right)$，其中 $\tilde{F}$是与 $|-bh^*(K_X + B)|_F|$的唯一因子相关联的 F 的覆盖的光滑模型。

那么 (X, B) 有一个 n-补边。

我们在此指出，$\kappa(F, -h^*(K_X+B)|_F) = 0$ 由引理 2.25 得出。首先，我们证明在定理 4.1 的假设下，存在可分解的 (n_0, Γ_0)- $\mathbb{R}$-补边。

定理 4.2。采用定理 *4.1*中的记号和假设。则 (X, B) 具有一个 (n_0, Γ_0)-可分解的 $\mathbb{R}$-补，其中 n_0 是一个正整数，且 $\Gamma_0 \subset [0,1]$ 是一个仅依赖于 d、b、β和 Γ的有限集。

证明。步骤 1。在这一步中，我们证明 $-(K_X+B)$ 是半丰沛的。

设 (X, C) 是 (X, B) 的一个 klt $\mathbb{R}$-补，其中某个有效 $\mathbb{R}$除子为 $C \geq B$。取某个正实数 ϵ_0，使得 $(X, C+\epsilon_0(C-B))$ 是 klt。由于 $K_X + C + \epsilon_0(C-B) \sim_{\mathbb{R}} -\epsilon_0(K_X+B)$ 是数值有效的，由 [HMX18，引理 2.9.1] 可知，$K_X + C + \epsilon_0(C-B)$ 是半丰沛的，因此 $-(K_X+B)$ 也是半丰沛的。记 $f\colon X \to Z$ 为 $-(K_X+B)$ 的丰模型，F_0 为 f 的一般纤维。此外，由 [Li22，命题 3.21]，f_∞ 与 f 双有理，因此存在一个自然诱导的态射 $h\colon F \to F_0$，使得$b(K_X+B)|_{F_0} \sim 0$。

若 $\dim Z = 0$，则 $b(K_X+B) \sim 0$，因此 (X, B) 有一个 $(b, \{1\})$-可分解的 $\mathbb{R}$-补。故我们可以假设 $\dim Z > 0$。

步骤 2. 在此步骤中，我们构造仅依赖于 d, b 和 Γ 的有限集 $\Gamma_0 \subset (0,1]$ 和 $\Gamma_2' \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$。

设 α 为一个正实数，使得

$$\alpha < \min\left\{ |\gamma - \frac{i}{b}| > 0 \mid \gamma \in \bar{\Gamma}, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

根据 [HLS19，定理 5。20]，存在一个有限集 Γ_1，它仅依赖于 d、α 和 Γ，并且存在一个 $\mathbb{R}$-除子 B 在 X 上，使得

- $B \in \Gamma_1$，
- $\alpha \operatorname{Supp} B \geq B - B \geq 0$，且
- (X, B) 是 $\mathbb{R}$-互补的。

特别地，对于 B 的任意分支 S，使得 $b\operatorname{mult}_S B \in \mathbb{Z}$，$\operatorname{mult}_S B = \operatorname{mult}_S B$。因此 $(\bar{B})^h = B^h$。根据 [HLS19，定理 5.16]，，存在一点 $\boldsymbol{v}_0 := (v_1^0, \ldots, v_m^0)$ 以及 V，其中 V 是 $\boldsymbol{v}_0$ 的有理包络的开子集（即包含 $\boldsymbol{v}_0$ 且定义在 $\mathbb{Q}$ 上的最小仿射子空间），位于 $\mathbb{R}^m$ 中，仅取决于 d 和 Γ_1；还存在魏尔除子 $B_1, \ldots, B_m \geq 0$，它们位于 X 上，使得 $B(\boldsymbol{v}_0) = B$，并且对于任意 $\boldsymbol{v} \in V$，$(X, B(\boldsymbol{v}))$ 是 $\mathbb{R}$-互补的，其中对于任意 $\boldsymbol{v} := (v_1, \ldots, v_m)$，$B(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^m v_i B_i \in \mathbb{R}^m$。此外，在必要时替换 V 后，我们可以假设

$$B(\boldsymbol{v}) \geq D := \bar{B} - B, \text{ and } |B(\boldsymbol{v}) - \bar{B}| < \alpha$$

对任意 $\boldsymbol{v} \in V$。我们注意到，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V$，$(B(\boldsymbol{v}))^h = (\bar{B})^h = B^h$。

取点 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V \cap \mathbb{Q}^m$，使得 $\boldsymbol{v}_0$ 位于由 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ 张成的凸包内部。对于任意整数 $1 \leq i \leq k$，令

$$B^{(i)} := B(\boldsymbol{v}_i) - D \text{ and } \bar{B}^{(i)} := B(\boldsymbol{v}_i).$$

存在有限集 $\Gamma_0 := \{a_1, \dots, a_k\} \cup \{1\} \subset (0,1]$ 和 $\Gamma_2' \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$，使得$\bar{B}^{(i)} \in \Gamma_2'$ 对任意整数 $1 \le i \le k$、$\sum_{i=1}^k a_i = 1$ 和 $\sum_{i=1}^k a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0$ 均成立。特别地，$\sum_{i=1}^k a_i B^{(i)} = B$。

步骤 3。在这一步，我们运行一个极小模型纲领 P.

对于任意整数 $1 \le i \le k$，设 $(X, \bar{B}^{(i)} + \bar{G}_i)$ 是 $(X, \bar{B}^{(i)})$ 的一个 $\mathbb{R}$-补边，其中 $\mathbb{R}$ 是某个有效 $\mathbb{R}$-卡蒂埃除子_ _G_i。取一个正实数 ϵ，使得 $(X, C + \epsilon G_i)$ 是 klt。¯那么我们可以在 $K_X + C + \epsilon G_i$ 上运行一个极小模型纲领，使其在 Z 上终止于模型 W_i¯ ¯，且 $K_{W_i} + C_{W_i} + \epsilon G_{W_i}$ 在 Z 上半丰沛，其中 C_{W_i} 和 G_{W_i} 分别是 C 和 $\bar{G}_i$ 在 W_i 上的严格变换。这个极小模型纲领也是在 Z 上对 $-(K_X + \bar{B}^{(i)})$ 运行的极小模型纲领，因此 $-(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 在 Z 上半丰沛。令 $g_i \colon W_i \to T_i$ 为 $-(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 在 Z 上的丰模型。回顾一下，根据构造及引理 5.1，$B - \bar{B}^{(i)}$ 在 Z 上是垂直的。由于 $-(K_X + \bar{B}^{(i)}) \sim_{\mathbb{R}, Z} B - \bar{B}^{(i)}$，由引理 2.9 可知，$F_0$ 同构于 $W_i \to Z$ 的一般纤维，而 T_i 与 Z 双有理。

步骤 4。在这一步中，我们构造一个正整数 p 和一个超标准集 Γ_2，它们仅取决于 d、b、β 和 Γ_2'；并选择典范丛公式中 $(W_i, \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 在 T_i 上的一个模部分 $\mathbf{M}_i$，使得

$$p\left(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i}\right) \sim p g_i^* \left(K_{T_i} + B_{T_i} + \mathbf{M}_{i,T_i}\right),$$

$B_{T_i} \in \Gamma_2$，且 $p\mathbf{M}_i$ 是 b-Cartier，其中 B_{T_i} 是典范丛公式中 $(W_i, \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 在 T_i 上的判别部分。

为证明这一点，我们首先断言

(i) b 是 $-(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i})|_{F_i'}$ 和 $b(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i})|_{F_i'} \sim 0$ 的非消失阶，并且 (ii) F 是与 $|b(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i})|_{F_i'}|$ 的唯一因子相关联的 F_i' 覆盖的光滑模型，其中 F_i' 是 g_i 的一般纤维。

假设 b_0 是 $(K_X + B)|_{F_0} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ 的非消失阶。那么 $b_0(K_X + B)|_{F_0} \sim 0$ 和 $b_0 \le b$。由于 $h_0^*((K_X + B)|_{F_0}) = h^*(K_X + B)|_F$，我们有 $b_0 = b$ 和 $bh^*(K_X + B)|_F \sim 0$。因此，b 也是 $(K_X + B)|_{F_0}$ 的非消失阶。注意

$$\operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{i=0}^{b-1} \mathcal{O}_F\left(\lfloor i h^*(K_X + B)|_F \rfloor\right)\right) \to F \quad \left(\text{resp., } \operatorname{Spec}\left(\bigoplus_{i=0}^{b-1} \mathcal{O}_{F_0}\left(\lfloor i(K_X + B)|_{F_0} \rfloor\right)\right) \to F_0\right)$$

是与 $\lfloor h^*(K_X + B)|_F \rfloor$相关联的唯一元素所对应的覆盖，参见 [Kol13，§2。3]。根据 [Nak04，II 引理 2，11], 存在一个自然同构

$$(h_0)_* \mathcal{O}_F\left(\lfloor i(h^*(K_X + B)|_F) \rfloor\right) \to \mathcal{O}_{F_0}\left(\lfloor i((K_X + B)|_{F_0}) \rfloor\right).$$

¯因此，F 是 F_0 的唯一除子所对应的覆盖的一个光滑模型 $|b(K_X + B)|_{F_0}|$。此外，根据我们的构造，X 与 W_i 同构，且在 $B = \bar{B}^{(i)}$ 的泛点处，Z，并且 F_i' 与 F_0 同构（见引理 2.9）。因此结论成立。

由于 (X, B) 具有 klt $\mathbb{R}$-补，(W_i, B_{W_i}) 具有 klt $\mathbb{R}$-补，其中 B_{W_i} 是 B 在 W_i 上的严格变换。此外，由于 $B_{W_i} = \bar{B}^{(i)}_{W_i}$ 在 T_i 的泛点上，我们

可以看到（W_i， $\bar{B}^{(i)}_{W_i}$）在 T_i 的泛点上是 klt 的。回顾一下， $\Gamma'_2 \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$ 是一个有限集，而 $\bar{B}^{(i)}_{W_i} \in \Gamma'_2$。根据命题 3.4，我们可以找到一个正整数 p 和一个仅依赖于 d、b、β 和 Γ'_2 的下降链条件集 Γ_2，使得 $\bar{\Gamma}_2 \subset [0,1] \cap \mathbb{Q}$，并选取典范丛公式中关于 $\mathbf{M}_i$ 的模部分，该典范丛公式对应于（W_i， $\bar{B}^{(i)}_{W_i}$）在 T_i 上，使得

$$p\left(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i}\right) \sim pg_i^*\left(K_{T_i} + B_{T_i} + \mathbf{M}_{i,T_i}\right),$$

$B_{T_i} \in \Gamma_2$，且 $p\mathbf{M}_i$ 是 b-Cartier，其中 B_{T_i} 是 $(W_i, \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 在 T_i 上的典范丛公式的判别部分。注意，$(T_i, B_{T_i} + \mathbf{M}_i)$ 是广义对数典范的。

步骤 5. 在这一步中，我们找出一个仅取决于 d、bp 和 Γ_2 的整数 n_0，使其满足我们的要求，从而完成证明。

我们首先证明 T_i 是 Fano 型。事实上，根据 [Amb05，定理 0。2]，存在 KLT 对 (Z, Δ) 和 $(T_i, \Delta_{T_i}$，使得

$$K_X + B \sim_{\mathbb{R}} f^*(K_Z + \Delta) \text{ and } K_{W_i} + B_{W_i} \sim_{\mathbb{R}} g_i^*(K_{T_i} + \Delta_{T_i}).$$

特别地， $K_{T_i} + \Delta_{T_i} \sim_{\mathbb{R}} \tau_i^*(K_Z + \Delta)$，其中 τ_i 表示诱导态射 $T_i \to Z$。由于 Z 是 $-(K_X+B)$ 的丰模型， $-(K_Z+\Delta)$ 是丰的。由此可得， $-(K_{T_i}+\Delta_{T_i})$ 是大且数值有效的，因为 τ_i 是双有理态射。因此， T_i 是 Fano 型。

由于 $(W_i, \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 是 $\mathbb{R}$-补充，$(T_i, B_{T_i} + \mathbf{M}_i)$ 是 $\mathbb{R}$-补充，也就是说，存在一个 $\mathbb{R}$-除子 $P_i \geq 0$，使得 $(T_i, B_{T_i} + P_i + \mathbf{M}_i)$ 是广义对数典范，且 $K_{T_i} + B_{T_i} + P_i + \mathbf{M}_{i,\ T_i} \sim_{\mathbb{R}} 0$。由于 T_i 是 Fano 型，根据 [Bir19，定理 1.10]（另见 [Che20，定理 1.3]），存在一个可被 bp 整除的正整数 n_0，其仅取决于 d、bp 和 Γ_2，以及 T_i 上的一个 $\mathbb{Q}$-除子 $B^+_{T_i} \geq B_{T_i}$，使得 $(T_i, B^+_{T_i} + \mathbf{M}_i)$ 是广义对数典范，且 $n_0(K_{T_i} + B^+_{T_i} + \mathbf{M}_{i,\ T_i}) \sim 0$。

只需证明 $(W_i, \bar{B}^{(i),\ }_{\ W_i}{}^{+} := \bar{B}^{(i)}_{W_i} + g_i^*(B^+_{T_i} - B_{T_i}))$ 是 $(W_i, \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 的单调 n_0-补充。事实上，根据 [PS09，推论 7.18(1)]，$(W_i, \bar{B}^{(i),\ }_{\ W_i}{}^{+})$ 是对数典范。由于

$$\begin{aligned} n_0\left(K_{W_i} + \bar{B}^{(i),+}_{W_i}\right) &= n_0\left(K_{W_i} + \bar{B}^{(i)}_{W_i}\right) + n_0 g_i^*\left(B^+_{T_i} - B_{T_i}\right) \\ &\sim n_0 g_i^*\left(K_{T_i} + B_{T_i} + \mathbf{M}_{i,T_i}\right) + n_0 g_i^*\left(B^+_{T_i} - B_{T_i}\right) \\ &= n_0 g_i^*\left(K_{T_i} + B^+_{T_i} + \mathbf{M}_{i,T_i}\right) \sim 0, \end{aligned}$$

可以看出，$(W_i, \bar{B}^{(i)}_{,W_i}{}^{+})$ 是 $(W_i, \bar{B}^{(i)}_{W_i})$ 的单调 n_0-补。注意，根据步骤 3， $X \dashrightarrow W_i$ 是 $-(K_X + \bar{B}^{(i)})$-负的。因此，$(X, \bar{B}^{(i)})$ 也有一个单调 n_0-补 $(X, \bar{B}^{(i),+})$。这立即意味着，$(X, \sum_{i=1}^k a_i \bar{B}^{(i),+})$ 是 (X, B) 的一个 (n_0, Γ_0)-可分解 $\mathbb{R}$-补。证明至此完成。□

定理 4.1 的证明。根据定理 4.2，存在一个正整数 n_0 和一个有限集 $\Gamma_0 \subset (0,1]$ 仅依赖于 d, b, β, Γ），使得 (X, B) 有一个 (n_0, Γ_0)-可分解 $\mathbb{R}$-补。定理 4.1 可由丢番图逼近推出，论证与[HLS19 的定理 1 的证明相同。8]（详情见 [HLS19 的第 6] 节）。□

定理的证明 *1.6*。 由定理 4.1可得。 □

5. Effective Iitaka fibrations

本节中，我们证明定理 1.4。

引理 5.1. 假设 $f: X \to Z$ 是正规拟射影簇之间的一个收缩，且 D 是 X 上的一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子。设以下条件之一成立：

- 维数 $Z = 0$，且 $D \sim_{\mathbb{R}} 0$；或者
- 维数 $Z > 0$，且对于某个大 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子 D_Z，有 $D \sim_{\mathbb{R}} f^*D_Z$。

那么，$\kappa(X, D)$ 当且仅当 D^h 是一个 $\mathbb{Q}$-除子。

证明。我们首先假设 $\kappa(X, D) \geq 0$。反设 D^h 不是一个 $\mathbb{Q}$-除子。设 F为 f的非常一般纤维。那么，对任意正整数 m，$\{mD|_F\} = \{mD^h|_F\} \neq 0$。根据我们的假设，$D|_F \sim_{\mathbb{R}} 0$ 并且

$$\lfloor mD|_F \rfloor = mD|_F - \{mD|_F\} \sim_{\mathbb{R}} -\{mD|_F\}$$

对任意正整数 m 都不是伪有效的。因此，对任意正整数 m，$\lfloor mD \rfloor$ 都不是伪有效的，这意味着 $\kappa(X, D) = -\infty$，矛盾。因此，D^h是一个 $\mathbb{Q}$-除子。

现在假设 D^h 是一个 $\mathbb{Q}$-除子。若 $\dim Z = 0$，则 $D \sim_{\mathbb{Q}} 0$，从而 $\kappa(X, D) = 0$。假设 $\dim Z > 0$。取正整数 b，使得 $bD \sim 0$ 在f的一般纤维上成立。于是存在 $\alpha \in K(X)$，使得 $bD+(\alpha)$在 Z 上垂直。由于 $bD+(\alpha) \sim_{\mathbb{R}}$，根据 Li20 的引理 2.11]，存在定义在 Z 上的某个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子 D'_Z，使得 $_Z\ 0$,$bD + (\alpha) = f^*D'_Z$。因此$D'_Z \sim_{\mathbb{R}} bD_Z$，故 D'_Z 是大除子。由引理 2.18,

$$\kappa(X, D) = \kappa(X, bD) = \kappa(X, bD + (\alpha)) = \kappa(Z, D'_Z) = \dim Z > 0,$$

这样就完成了。 □

定理 1.4 的证明。设 $\Gamma \subset [0, 1]$ 是一个下降链条件集。不失一般性，我们可以假设 $1 \in \Gamma$。假设（X，B）是一个维数为 d 的射影对数正则对，且κ（X，$K_X + B$）≥ 0并且 $B \in \Gamma$。由于我们假设维数为 d时猜想 2.11 成立，因此（X，B）有一个良好极小模型（X'，B'）。可能需要将（X，B）替换为（X'，B'），此后我们可以假设 $K_X + B$ 是半丰沛的。令 f：$X \to Z$ 为 $K_X + B$的丰模型。

假设维数 $Z = 0$。那么 $B \in \Gamma_0$ 对于某个有限集 $\Gamma_0 \subset \Gamma \cap \mathbb{Q}$，该集合仅依赖于 d 和 Γ，由全局升链条件[HMX14、定理 D] 和引理5.1，以及 $K_X + B \sim_{\mathbb{R}} 0$。由于猜想1.3 在维数 d成立，我们可以找到一个正整数 m_0，它仅依赖于 d和 Γ_0，使得 $m_0(K_X + B) \sim 0$。下文中，我们可以假设维数 $Z > 0$。

根据命题 3.1，存在一个正整数 p 和一个降链条件集 $\Gamma' \subset [0, 1]$，它们仅依赖于 d 和 Γ，以及典范丛公式中模部分 $\mathbf{M}_f$ 的一个选取，其中该公式对应于 X、B）在 Z之上，满足 $B_Z \in \Gamma'$，$p\mathbf{M}_f$ 是 b-Cartier，并且

$$p(K_X + B) \sim pf^* (K_Z + B_Z + \mathbf{M}_{f,Z}),$$

其中 B_Z 是（X, B）关于 Z的典范丛公式中的判别部分。回想一下，Z 是 $K_X + B$的丰模型，因此 $K_Z + B_Z + \mathbf{M}_{f,Z}$ 是大的。根据 [BZ16，定理 1。3]，存在一个正整数 m_1，它仅取决于 d, p和 Γ'，使得

$||\lfloor m_1(K_Z+B_Z+\mathbf{M}_{f,Z})\rfloor||$ 定义了一个双有理映射。根据 [Nak04，II 2.11 引理]，，我们有

$$\begin{aligned} H^0\left(X,\lfloor pm_1(K_X+B)\rfloor\right) &= H^0\left(X,\lfloor pm_1 f^*\left(K_Z+B_Z+\mathbf{M}_{f,Z}\right)\rfloor\right) \\ &\cong H^0(Z,\lfloor pm_1(K_Z+B_Z+\mathbf{M}_{f,Z})\rfloor). \end{aligned}$$

因此 $||\lfloor pm_1(K_X+B)\rfloor||$ 定义了一个与 f_∞ 双有理的映射。

设 $m:=pm_0m_1$，则 m 满足我们所要求的性质。 □

推论的证明 *1.5*。 由定理1.4、维数 ≤ 3 [KMM87 中良好极小模型的存在性、 KMM94], 以及定理 2.14 可得。 □

6. Existence of decomposable Iitaka fibrations

在本节中，我们回顾不变饭田纤维化的定义，它将饭田纤维化推广到所有具有非负不变饭田维数的对的范畴。然后，我们证明可分解 Iitaka 纤维化的存在性。

定义 6.1（不变伊塔卡纤维化）。设 X 是一个正规射影簇，且 X 上有一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子D ，满足 $\kappa_\iota(X,D)\geq 0$。称光滑簇之间的态射 $f_\infty: X_\infty\to Z_\infty$是 D 的不变伊塔卡纤维化，若存在 X上的一个 $\mathbb{R}$-卡蒂埃 $\mathbb{R}$-除子 D' ，使得 $D\sim_{\mathbb{R}} D'$, $\kappa(X,D')\geq 0$，且 f_∞ 是 D'的饭高纤维化。

根据 [Hu20，引理 2，3]，总存在的不变伊塔卡纤维化，且其与 D'的选取无关。

We 提出以下猜想，它比猜想 1.稍强。 8.

猜想 6.2。设 d 是一个正整数， $\Gamma\subset[0,1]$ 是一个下降链条件集。则存在正整数 m、有限集 $\Gamma_0\subset(0,1]$, 以及一个仅依赖于d 和 Γ 的下降链条件集 $\Gamma'\subset[0,1]$ ，满足以下条件。设 (X,B)是一个维数为 d 的对数典范对，满足 $B\in\Gamma$, $\kappa_\iota(X,K_X+B)\geq 0$，并且 Γ 是一个有限集，或者 B 的所有分支都是$\mathbb{Q}$-卡蒂埃的。则

(1)（弱版本）(X,B)具有一个(Γ_0,Γ')-可分解饭高纤维化。(2)（强版本）(X,B)具有一个(m,Γ_0,Γ')-可分解饭高纤维化。

定理 6.3。 设 d 为正整数。假设非消失猜想（猜想 *2.12*）在维数 d中成立。那么：

(1) 猜想 *6.2*(1) 在维数 d中成立。(2) 假设有效对数 Iitaka 猜想（猜想 *1.2*）在维数 d 中成立。那么猜想 *6.2*(2) 在维数 d中成立。

定理 *6.3*的证明。 设 $\Gamma\subset[0,1]$ 为一个下降链条件集，并且可能将 Γ 替换为 $\Gamma\cup\{1\}$后，我们可以假设 $1\in\Gamma$。

假设（X， B）是一个维数为 d 的对数典范对，使得 $B\in\Gamma$， $\kappa_\iota(X,K_X+B)\geq 0$，并且 Γ 是一个有限集，或 B 的每个分支都是 $\mathbb{Q}$-卡蒂埃的。设 $f_\infty: X_\infty\to Z_\infty$ 是 K_X+B 的不变 Iitaka 纤维化， $h: X_\infty\to X$ 为诱导态射，并设 F 是一个非常一般

纤维 f_∞。设 $B_\infty := h_*^{-1}B + E$，其中 E 是所有 h-例外素除子的和。则（X_∞，B_∞）是对数光滑的，$\kappa_\iota(X_\infty, K_{X_\infty}+B_\infty) = \kappa_\iota(X, K_X+B)$，且$\kappa_\iota(F, (K_{X_\infty}+B_\infty)|_F) = 0$。

若 Γ 是有限集，则令 $\tilde{\Gamma} := \Gamma$；否则令 $\tilde{\Gamma} := \emptyset$。令 $\boldsymbol{v}_0 := (v_1^0, \ldots\ldots, v_m^0)$ g，并令 V如 [CHL22命题 5 中所述，1] 它们仅取决于 d、Γ、$\tilde{\Gamma}$。可写作 $B_\infty = \sum b_j B_\infty^{(j)}$，其中 $B_\infty^{(j)}$是 B_∞的不可约分支。于是，在 X_∞上存在互不相同的魏尔除子 $B_{\infty,1}, \ldots\ldots, B_{\infty,m} \geq 0$，使得

- $g(\gamma) \geq \gamma$ 对任意 $\gamma \in \Gamma$均成立，而 $g(\gamma') = \gamma'$ 对任意 $\gamma' \in \tilde{\Gamma}$均成立，
- $B_\infty(\boldsymbol{v}_0) = \sum g(b_j) B_{(j)\infty}$，其中 $B_\infty(\boldsymbol{v}) := \sum_{i=1}^m v_i B_{\infty,i}$对任意 $\boldsymbol{v} := (v_1, \ldots\ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$均成立，
- 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$，$(X_\infty, B_\infty(\boldsymbol{v}))$ 和 $(X_\infty, B_\infty(\boldsymbol{v}) - D_\infty)$ 均为对数典范，其中 $D_\infty := B_\infty(\boldsymbol{v}_0) - B_\infty \geq 0$，且
- $\kappa(X_\infty, K_{X_\infty} + B_\infty(\boldsymbol{v}) - D_\infty) = \kappa_\iota(X_\infty, K_{X_\infty}+B_\infty) = \dim Z$对任意 $\boldsymbol{v} \in V \cap \mathbb{Q}^m$。

令 $D_F := D_\infty|_F$, $D := h_* D_\infty$, $B_F(\boldsymbol{v}) := B_\infty(\boldsymbol{v})|_F$以及对任意 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$，$B(\boldsymbol{v}) := h_* B_\infty(\boldsymbol{v})$。根据 $\boldsymbol{v}_0, g$ 和 V 的构造，我们有

- $(X, B(\boldsymbol{v}) - D)$ 对任意 $v \in V$ 均为对数典范，且
- $\kappa(F, K_F + B_F(\boldsymbol{v}) - D_F) = \kappa_\iota(F, (K_{X_\infty}+B_\infty)|_F) = 0$对任意 $\boldsymbol{v} \in V \cap \mathbb{Q}^m$。

注意，若 Γ 是有限集，则 $D_\infty = 0$ 和 $D_F = 0$。根据饭田纤维化的定义，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V \cap \mathbb{Q}^m$，$f_\infty$ 都是$K_{X_\infty} + B_\infty(\boldsymbol{v}) - D_\infty$ 的饭田纤维化。由于对于任意 $\boldsymbol{v} \in V$，$(X, B(\boldsymbol{v}) - D)$都是对数典范的，

$$K_{X_\infty} + B_\infty(\boldsymbol{v}) - D_\infty - h^*(K_X + B(\boldsymbol{v}) - D) \geq 0$$

并且对于任意 $\boldsymbol{v} \in V$，它是 h-例外的。因此，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V \cap \mathbb{Q}^m$，$f_\infty$ 都是 $K_X + B(\boldsymbol{v}) - D$的饭田纤维化。

设 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V \cap \mathbb{Q}^m$ 为有理点，且 $\boldsymbol{v}_0$ 包含在 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$的凸包内部。存在一个降链条件集 $\Gamma' \ni 1$和一个有限集 $\Gamma_0 := \{a_1, \ldots, a_k\} \subset (0, 1]$ 仅依赖于 d和 Γ，使得对于任意整数 $1 \leq i \leq k$，$B_i := B(\boldsymbol{v}_i) - D \in \Gamma'$，且$\sum_{i=1}^k a_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_0$。特别地，

$$K_X + B = \sum_{i=1}^k a_i (K_X + B_i).$$

回忆一下，对于任意 $\boldsymbol{v} \in V \cap \mathbb{Q}^m$，$f_\infty$ 是 $K_X + B(\boldsymbol{v}) - D$ 的饭高纤维化。因此，对于任意整数 $1 \leq i \leq k$，f_∞ 是 $K_X + B_i$ 的饭高纤维化。我们得出结论，(X, B) 具有一个 (Γ_0, Γ')-可分解饭高纤维化，即 (1)。

现在假设猜想 1.2 在维数 d 上成立。那么存在一个正整数 m，它仅依赖于 d 和 Γ'，使得由 $||\lfloor m(K_X + B_i)\rfloor||$ 定义的映射与 f_∞ 双有理，对于任意整数 $1 \leq i \leq k$ 均成立。因此 (2) 成立。□

推论 6.4。猜想 *6.2* 在 $d \leq 3$ 时成立。

证明。由定理 6.3 以及维数≤ 3 [KMM87中良极小模型的存在性，94]。□

定理 6.5。 设 d 为正整数。假设良极小模型猜想（猜想 *2.11*）和补元的存在性（猜想 *1.3*）在维数 d成立。那么猜想 *6.2* 在维数 d成立。

证明。 由定理 1.4 和 6.3可知。 □

定理 *1.9*的证明。 这是定理 6.3的特例。 □

推论 *1.10*的证明。 这是推论 6.4的特例。 □

定理 *1.11*的证明。 这是定理 6.5的特例。 □

References

[Amb05] F. Ambro, *The moduli b-divisor of an lc-trivial fibration*, 《Compos. Math.》141 (2005), 第 2 期, 385–403。[Bir12] C. Birkar, *Existence of log canonical flips and a special LMMP*, 《Pub. Math. IHES.》115 (2012), 325–368。[Bir19] C. Birkar, *Anti-pluricanonical systems on Fano varieties*, 《Ann. of Math.》190 (2019), 第 2 期, 345–463。[Bir21] C. Birkar, *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties*, 《Ann. of Math.》193 (2021), 第 2 期, 347–405。[BCHM 10] c *Existence of minimal models for varieties* C. Birkar、P. Cascini、C. D. Hacon 和 J. M Kernan, *Effectivity of Iitaka fibrations and pluricanonical systems of polarized pairs*, 《J. Amer. Math. Soc.》（）, 第 – 期。[BZ16] C. Birkar 和 D.-Q. Zhang, *Boundedness of K-semistability for Fano varieties*, 《Duke Math. J.》171 (2022), 2753–2797。[Che20] G. Chen, *Boundedness of n-complements for generalized pairs*, arXiv:2003.04237v2。[CH21] G. Chen 和 J. Han, *Boundedness of* （ϵ, n）*-complements for surfaces*, arXiv:2002.02246v2。简版发表于《Adv. Math.》383 (2021), 107703, 40 页。[CHL22] G. Chen、J. Han 和 J. Liu, *Uniform rational polytopes for Iitaka dimensions*, 即将在 LMS Lecture Notes 出版, 收录于纪念 Shokurov教授七十寿辰的特刊, arXiv:2208.04663。[CHX22] G. Chen、J. Han 和 Q. Xue, *Boundedness of complements fo log Calabi-Yau threefolds*, 即将在 Peking Mathematical Journal 出版。[CX22] G. Chen 和 Q. Xue, *Boundedness of* ϵ n *-complements for projective generalized pairs of Fano* （, ）, *type* **226** 2022 7, 106988 《J. Pure Appl. Algebra》（）, 第 期。[CZ21] G. Chen 和 C. Zhou, *Weakly special test configurations of log canonical Fano varieties*, 即将在 Algebra Number Theory 出版, arXiv:2107.08004。[CGN21] W. Chen、Y. Gongyo 和 Y. Nakamura, *On generalized minimal log discrepancy*, arXiv:2112.09501。[Cho08] R. Choi, *The geography of log models and its applications*, 博士论文, 约翰·霍普金斯大学（2008）。[FMX19] S. Filipazzi、J. Moraga 和 Y. Xu, *Log canonical 3-fold complements*, arXiv:1909.10098v2。[Flo14] E. Floris, *Inductive approach to effective b-semiampleness*, 《Int. Math. Res. Not.》6 (2014), 1465–1492。[FM00] O. Fujino 和 S. Mori, *A canonical bundle formula*, 《J. Differential Geom.》56 (2000), 第 1 期, 167–188。[HL21a] C. D. Hacon 和 J. Liu, *Existence of flips for generalized lc pairs*, arXiv:2105.13590v3。[HM06] C. Hacon 和 J. McKernan, *Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type*, 《Invent. Math.》166 (2006), 第 1 期, 1–25。[HMX14] C. D. Hacon、J. McKernan 和 C. Xu, *ACC for log canonical thresholds*, 《Ann. of Math. 180》180 (2014), 第 2 期, 523–571。

[HMX18] C. D. Hacon、J. McKernan 和 C. Xu, *Boundedness of moduli of varieties of general type*, 《J. Eur. Math. Soc.》20 (2018), 第 4 期, 865–901。[HX13] C. D. Hacon 和 C. Xu, *Existence of log canonical closures* **192** 2013 1, , 《 161 195 Invent. Math.》 (), 第 – 期。[HL22a] J. Han 和 Z. Li, *Weak Zariski decompositions and log terminal models for generalized pairs*, 《Math. Z.》302 (2022), 707–741。[HL20] J. Han 和 J. Liu, *Effective birationality for sub-pairs with real coefficients*, arXiv:2007.01849。[HL22b] J. Han 和 J. Liu, *On ACC for minimal log discrepancies for exceptionally non-canonical pairs*, arXiv:2209.13122。[HLL22]J. Han、J. Liu 和 Y. Luo, *ACC for minimal log discrepancies of terminal threefolds*, arXiv:2202.05287v2。[HLS19] J. Han、J. Liu 和 V. V. Shokurov, *ACC for minimal log discrepancies of exceptional singularities*, arXiv:1903.04338v2。[HL21b] J. Han 和 W. Liu, *On a generalized canonical bundle formula for generically finite morphisms*, 《Ann. Inst. Fourier》71 (2021), 第 5 期, 2047–2077。[Hu20] Z. Hu, *Existence of canonical models for Kawamata log terminal pairs*, arXiv:2004.03895。[Iit70] S. Iitaka, *Deformations of compact complex surfaces II*, 《J. Math. Soc. Japan》22 (1970), 第 2 期, 247–261。[JLX22] J. Jiao、J. Liu 和 L. Xie, *On generalized lc pairs with b-log abundant nef part*, arXiv:2202.11256v2。[Kaw07] M. Kawakita, *Inversion of adjunction on log canonicit*, 《Invent. Math.》167 (2007), 第 1 期, 129–133。[Kaw86] Y. Kawamata, *On the Plurigenera of Minimal Algebraic 3-Folds with $K \equiv 0$*, 《Math. Ann.》275 (1986), 539–546。[KMM87] Y. Kawamata、K. Matsuda 和 K. Matsuki, *Introduction to the minimal model problem*, 《代数几何》, 仙台, 1985, 283–360, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1987。[KMM94] S. Keel、K. Matsuki 和 J. McKernan, *Log abundance theorem for threefolds*, 《Duke Math. J.》75 (1994), 99–119。[Kol^{+}92] J ´anos Koll ´ar。 *Flips and abundance for algebraic threefolds*。法国数学会, 巴黎, 1992。本文集收录了第二届代数几何夏季研讨会的论文, 该研讨会于1991年8月在犹他州盐湖城的犹他大学举行; Ast ´erisque 第211期（1992）。[Kol13] J. Koll ´ar, *Singularities of the minimal model program*, Cambridge Tracts Math. 200 (2013), 剑桥大学出版社。[KM98] J. Koll ´ar 和 S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. 134 (1998), 剑桥大学出版社。[Laz04] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, I 和 II, Ergebnisse Math. Grenzg. 48&49 (2004), Springer。[Li20] Z. Li, *A variant of the effective adjunction conjecture with applications*, arXiv:2007.04107。[Li22] Z. Li, *On finiteness of log canonical models*, 《Internat. J. Math.》33 (2022), 第 2 期, 第 2250012 号, 27 页。[Liu18] J. Liu, *Toward the equivalence of the ACC for a-log-canonical thresholds and the ACC for minimal log discrepancies* 1809 04839 3 , arXiv: . v 。[Liu22] J. Liu, *Remark on complements on surfaces*, arXiv:2208.09184。[LXZ 22] *Finite generation for valuations computing stability thresholds and applications to K-stability* 2 **196** 2 507 566, 2022 Y. Liu、C. Xu 和 Z. Zhuang, 《Ann. of Math.》 (), (): –。[Mor85] S. Mori, *Classification of higher-dimensional varieties*, 《代数几何》, 鲍登（1985）（布伦瑞克, 缅因州, 1985）, 269–331, Proc. Sympos. Pure Math., 46 (1987), 第 1 部分, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛。[Nak04] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, 第14卷, 日本数学会, 东京, 2004。[PS09] Y. G. Prokhorov 和 V. V. Shokurov, *Towards the second main theorem on complements*, 《代数几何杂志》18 (2009), 第 1 期, 151–199。

[Sho92] V. V. Shokurov, *Threefold log flips*, 附有 Y. Kawamata 撰写的英文附录, 《苏联科学院数学系列通报》56 (1992), 第 1 期, 105–203。[Sho03] V. V. Shokurov, *Prelimiting flips*, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》240 (2003), 82–219。[Sho20] V. V. Shokurov, *Existence and boundedness of n-complements*, arXiv:2012.06495。[Tak06] S. Takayama, *Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type*, Invent. Math. 165 (2006), 第 3 期, 551–587。[Tod10] G. T. Todorov, *Effective log Iitaka fibrations for surfaces and threefolds*, 《数学手稿》133 (2010), 183–195。[TX09] G. T. Todorov 和 C. Xu, *On effective log Iitaka fibration for 3-folds and 4-folds*, Algebra Number Theory 3 (2009), 第 6 期, 697–710。[Tsu99] H. Tsuji, *Pluricanonical systems of projective varieties of general type*, arXiv:math.AG/9909021。[VZ07] E. Viehweg 和 D.-Q. Zhang, *Effective Iitaka fibrations* **18** 2009 4, , 711 730 《代数几何杂志》 （） , 第 – 期。[Xu20] C. Xu, *A minimizing valuation is quasi-monomial*, Ann. of Math. (2) 191 (2020), 第 3 期, 1003–1030。[XZ22] C. Xu 和 Z. Zhuang, *Stable degenerations of singularities*, arXiv:2205.10915。

Institute for Theoretical Sciences, Westlake University, Hangzhou, Zhejiang, 310024,China*Email address*: chenguodu@westlake.edu.cnShanghai Center for Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai, 200438, China*Email address*: hanjingjun@fudan.edu.cnDepartment of Mathematics, Northwestern University, 2033 Sheridan Rd, Evanston, IL60208, USA*Email address*: jliu@northwestern.edu