arXiv:2301.04837v1 [math.GR] 12 Jan 2023

p-进解析群的若干刻画

Chaitanya Ambi*

2023年1月13日

摘要

我们给出了 pro-p 群成为 p-进解析群的三个充要条件。我们证明，具有有限链长 的诺特 pro-p 群秩有限，反之亦然。我们进一步推得，诺特 pro-p 群秩有限，当且仅当它满足弱 降链条件。利用这些结果，我们肯定地解决了 Lubotzky 和 Mann 提出的一个猜想，该结论适用于可数基的诺特群。

利用这些结果，我们针对可数基 pro-p 群的情形，回答了一个关于 pro-p 群的相关猜想。具体而言，我们证明：如果一个可数基 pro-p 群的每个闭非开子群都具有有限秩，那么该群是 p-进解析群；反之亦然。

关键词：Pro-p 群， p-进解析群。**MSC[2010]**:
20E18, 20E34.

1 引言。

对于素数 p，考虑一个 pro-p 群 G。若存在整数 $r \geq 0$，使得 G 的每个闭子群都可以由至多 r个元素拓扑生成，则称 G 具有有限秩。在这种情况下， G的秩记为 $rk(G)$，它是满足条件的最小整数。

*金奈数学研究所，H1，SIPCOT 信息技术园，Siruseri，Kelambakkam 603103，印度。电子邮件：chaitanya.ambi@gmail.com

Lazard 的一项著名结果断言，有限秩 pro-p 群恰好是 p-进解析群。因此，这类 pro-p 群是实李群的 p-进类比。人们已知 p-进解析群的若干有趣刻画（参见 [2], 间奏 A，第 97 页）。Lubotzky 和 Mann [6]提出了以下问题，旨在寻找 p-进解析群的另一种刻画。

问题 1. 每个诺特 *pro-*p群都有有限秩吗?

这里，我们将闭子群满足升链条件的 pro-p群称为诺特群。这个性质等价于每个闭子群都是有限生成的。（按照惯例，若一个 pro-p群包含一个有限生成的稠密子群，我们就称它有限生成 。）

定义 1. 设 G 是一个无限 *pro-*p群。在 G 中的闭子群链

$$1 = G_0 \lneq G_1 \lneq_c G_2 \lneq_c \dots \quad \lneq_c G_m = G$$

若对每个 $0 \leq i \leq m-1$ 都有 $[G_{i+1} : G_i] = \infty$，则称该链为真链。 G 的链长 $l(G) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 是所有真链的 m 的上确界。

正如在 [5] （参见第 34 页定理 5.11 后的段落）中已经指出的，只要 G 是 p-adic 解析群，就有 $l(G) \leq \dim(G)$。本文的第一个结果表明，只要一个诺特 pro-p 群具有有限链长，问题 1 的答案就是肯定的。

定理 1.1. 诺特 *pro-*p 群 G 满足 $rk(G) < \infty$ 当且仅当 $l(G) < \infty$。

为了引用下一个结果，我们定义阿廷条件的一个类似概念。

定义 2. 若 *pro-*p 群 G 满足弱降链条件，则称之为满足该条件；也就是说，每个真降闭子群链

$$1 \lneq_c \dots \quad \lneq_c G_1 \lneq_c G_0 = G$$

（其中 $[G_{i+1} : G_i] = \infty$ 对所有 $i \geq 0$成立）都会终止。

下面的结果说明上述性质与秩的关系。

定理 1.2。 一个诺特 *pro-*p 群 G 当且仅当满足弱降链条件时，具有有限秩。

这一结果与 1.1 一起，为问题 1 提供了部分答案。为了得到更强的结果，我们考虑另一个旨在对 p-adic 解析群作出新刻画的猜想（见 [3], 问题 2，第 411 页）。

问题 2. 设 G 是一个 *pro-*p 群，且其每个闭但非开子群都有有限秩。G 是否必有有限秩?

令人惊讶的是，上述猜想最终被证明与问题 1 有关。具体而言，我们考虑 G 为可数基时的问题 2。这里，若一个拓扑群的单位元（因而也包括任何其他元素）有一个可数邻域基，我们就称该群为可数基。等价地，该群只有可数多个有限连续像。我们证明如下结果。

定理 1.3. 设 G 是一个可数基的 *pro-*p 群。若其每个闭但非开子群都有有限秩，则 $rk(G) < \infty$，反之亦然。

我们还注意到，根据引理 2.3，问题 2 的一个可能反例不可能是有限生成的，甚至不可能是可数基的。此外，定理 1.3 使我们能够推出以下结论。

推论 1.1。设 G 是一个诺特 *pro-*p 群。那么，当且仅当 $rk(G) < \infty$ 时，G 是可数基的。

这就在可数基诺特群这一类中回答了问题 1。

2 预备结果。

对于素数 p，我们用 $\mathbb{Z}_p$ 表示 p-进整数环。若 G 是一个 pro-p 群且 $g \in G$，则由 g 生成的 $\mathbb{Z}_p$- 幂闭子群记作 $g^{\mathbb{Z}_p}$。关系 $H \leq K$ 表示 H 是 K 的子群。如果该包含关系是严格的，我们记作 $H \lneq K$。

此外，这些关系中的后缀 $'c'$ 和 $'o'$ 分别表示“闭子群”和“开子群”。例如，若 $H \lneq_c K$ 且 H 不是开子群，则必有 $[K : H] = \infty$（见 [2], 命题 1.2(i)，第 15 页）。最后，对于子集 $X \subseteq G$，我们用 $\langle X \rangle$ 表示由 X 生成的 G 的闭 子群。

如果存在一个可数（分别为有限）子集 $X \subset G$，使得每个元素 $g \in G$ 都等于有限个乘积，我们就称 pro-p 群 G 可数生成（分别为有限生成）的 $\mathbb{Z}_p$-幂群

$$g = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i^{\lambda_i}, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}_p$$

其中 $\{x_1, x_2, \ldots x_n\} \subseteq X$ 取某个值。我们在此引用一个结果；证明见 [2]（定理 3.17，第 53 页）。

引理 2.1. 一个 *pro-*p 群 G 具有有限秩，当且仅当 G 作为 $\mathbb{Z}_p$-幂群是可数生成的。在这种情况下， G 是有限多个自身逆循环子群的乘积，因此是有限生成的 $\mathbb{Z}_p$-幂群。

在下面的引理中，如果一个 pro-p群含有一个有限指数的逆循环子群，我们就称它为几乎逆循环。

引理 2.2. 一个有限生成的 *pro-*p 群 G ，若满足 $l(G) = 1$ ，则几乎逆循环。

证明。
形如 $g^{\mathbb{Z}_p}, g \in G$ 的每个闭子群都是逆循环的（见 [2], 命题 1.28，第 30 页）。如果对所有 $g \in G$ 都有 $|g^{\mathbb{Z}_p}| < \infty$ ，那么 G 就是挠群。由于 G 是有限生成的，根据 Zelmanov 的一个结果（见 [3],第 1 章，推论 2.4，第 4 页），可得 $|G| < \infty$。这与我们的假设 $l(G) = 1$ 矛盾。

因此， G 包含一个无限子群$x^{\mathbb{Z}_p} \leq_c G$ ，其中某个 $x \in G$成立。由于$l(G) = 1$, 我们必有 $[G : x^{\mathbb{Z}_p}] < \infty$。根据 [2] （见命题 1.28(c)，第 30 页）， G几乎逆循环。 □

引理 2.3。 设 G 是一个可数基的 *pro-*p 群，且不是有限生成的。存在一个闭但非开的子群 $H \leq_c G$ ，使得$rk(H) = \infty$。

证明。 根据 [2] （命题 1.14，第 24 页），Frattini 子群 $\Phi(G) \trianglelefteq_c G$ 是闭的，但不是开的。考虑可数基的阿贝尔 pro-p群 $G/\Phi(G)$。这类群已在 [4] 中分类（见定理 1.4）。因此， $G/\Phi(G)$是一个 p-初等阿贝尔群，具有可数无穷多个生成元。将其生成元集合分成两个不相交的无限子集。舍去其中一个子集，便得到一个无限真子群 $K \lneq_c G/\Phi(G)$。它对应于一个闭子群 $H := K\Phi(G) \leq_c G$。由于指数 $[G/\Phi(G) : K]$ 是无限的，K 不可能是 $G/\Phi(G)$中的开子群。因此，H 在 G 中也不是开子群。最后，$rk(H)$也是无限的，因为 H 不是有限生成的。 □

下面的引理基于 Zelmanov 对受限*Burnside*问题的解决。

引理 2.4. 设 G 是一个诺特 *pro-*p 群。设 $H \trianglelefteq_c G$ 是一个闭正规子群，满足 $[G : H] = \infty$。那么存在一个元素 $x \in G$，使得对于每个 $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$，都有 $x^k \notin H$。

证明。如果每个 $y \in G$ 的某个非零整数次幂都属于 H，那么商群G/H 将是一个挠 pro-p群。由于 G 是诺特的， G/H 也是有限生成的。 G/H 的有限性可由 Zelmanov[3]的一项结果推出（见第 1 章，推论 2.4，第 4 页）。因此， $[G : H] < \infty$，这与引理的假设相矛盾。 □

给定的诺特 pro-p群中，所有指数无限的闭子群组成的族包含一个极大闭非开子群。这一观察是下面引理的基础。

引理 2.5. 设 G 是一个无限诺特 *pro-*p群。设 H 是 G 的一个闭子群，且在所有指数无限的闭子群中极大。若 $rk(H) < \infty$，则 $rk(G) < \infty$。

证明。 由于 G 本身是有限生成的，对于 Frattini 子群 G，我们有 $\Phi(G) \trianglelefteq_o G$。因此，定义子群 $N \leq_c H$ 如下：

$$N := \Phi(G) \cap H$$

在 H 中是开集（由 [2], 命题 1.2(v)，第 16 页）。由于 H 是有限生成的，我们必有 $[H : N] < \infty$。另请注意，由 [1]（见第 7.5 章，引理 7.12，第 293 页），我们有 $N \trianglelefteq_c G$，且同构 $\Phi（G/N） \approx \Phi（G）/N$。因此，事实上，

$$N \trianglelefteq_c \Phi(G).$$

我们还有

$$\frac{\Phi(G)H}{H} \approx \frac{\Phi(G)}{N} \approx \Phi(G/N).$$

在上面的等式中， $\Phi（G）H$ 显然是一个群。注意，$[G : \Phi（G）]$ 和 $[H : N]$ 都是有限的。但 $\Phi（G）H$ 在 G 中是开集（因此，$[G : \Phi（G）H] < \infty$）。由于 $[G : H]$ 是无限的，群 $\Phi（G）H/H$ 也必然是无限的。

但现在， H 在 $\Phi(G)H$ 中仍然是极大的，所依据的性质是具有无限指数和有限秩。诺特的原-p群$\Phi(G)H/H$ 不可能包含任何具有无限指数和有限秩的真闭子群（否则， H 在 G中将不再是极大的）。

我们利用引理 2.4 得到 $x \in \Phi(G)H$，使得 x 的所有非零整数幂都不属于 H。令 $\bar{x} := xH \in \Phi(G)H/H$，前一段中的论证表明，闭拟循环子群 $\bar{x}^{\mathbb{Z}_p} \leq_c \Phi(G)H/H$ 不可能具有无限指数。因此，

$$[\Phi(G)H/H : \bar{x}^{\mathbb{Z}_p}] < \infty,$$

这表明 $l(\Phi(G)H/H) = 1$。根据引理 2.2，$rk(\Phi(G)H/H) = 1$。因此，

$$rk(\Phi(G)H) \leq rk(H) + rk(\Phi(G)H/H) < \infty.$$

只需注意到 $[G : \Phi(G)H] < \infty$，即可完成证明。 □

3 定理 1.1 的证明。

证明。

若 $rk(G) < \infty$，则 G 是 p-进解析的，且 $l(G) \leq$ 维数$(G) < \infty$。反过来，我们将对链长 $l(G)$ 进行归纳。当 $l(G) = 1$ 时的情形已由引理 2.2 处理，因为所有几乎拟循环群的秩均为一。

接下来，令 $2 \leq l(G) < \infty$. 定义

$$\mathcal{G} := \{H : H \lneq_c G, \quad l(H) = l(G) - 1\}.$$

根据链长的定义，显然有 $\mathcal{G} \neq \emptyset$。由于 G 也是诺特的，$\mathcal{G}$ 含有一个指数无限的极大闭子群 $H_{max} \lneq_c G$。但归纳假设是，每个具有 $1 \leq l(K) \leq l(G) - 1$ 的闭 pro-p 子群 $K \lneq_c G$ 都是有限秩的。特别地，这一结论适用于 H_{max}。将引理 2.5 应用于 G，即可完成证明。

□

4 定理 1.2 的证明。

证明。

如果 $rk(G) < \infty$，那么 G 中不存在链长超过 dim(G) 的真降链。现在证明反向蕴含。

假设 G 是一个满足弱下降链条件的无限诺特群。换言之，在 G 中，不存在无限的上升或下降真链。我们在所有有限真

链上通过细化定义偏序，其中闭子群均为 G 的子群。更确切地说，给定两个有限真链 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$,

$$\mathcal{A}: \quad 1 \lneq_c \ldots \quad \lneq_c A_{m-1} \lneq_c A_m = G$$
$$\text{and}$$
$$\mathcal{B}: \quad 1 \lneq_c \ldots \quad \lneq_c B_{n-1} \lneq_c B_n = G,$$

我们定义偏序 $\preceq$ 如下:

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \quad \{A_i : 1 \leq i \leq m\} \subseteq \{B_j : 1 \leq j \leq n\}.$$

接下来，任意一条有限真链组成的链

$$\mathcal{C}_1 \preceq \mathcal{C}_2 \preceq \ldots,$$

在给定的假设下都必须终止（即由于 G上的诺特条件和弱降链条件）。注意，平凡真链 $1 \lneq_c G$ 使所有有限链组成的集合非空。根据佐恩引理，我们得到一条极大有限真链；将其记为 $\mathcal{C}_{max}$。

$$\mathcal{C}_{max}: \quad 1 \lneq_c G_1 \ldots \quad \lneq_c G_{l-1} \lneq_c G_l = G.$$

接下来，由于 $\mathcal{C}_{max}$的链长是极大的，对于所有 $1 \leq k \leq$，必有 $l(G_k) = k$。特别地，由定理 1.1 可知，这意味着 $rk(G_{l-1}) < \infty$ 。

我们有 $[G: G_{l-1}] = \infty$ （因为 $\mathcal{C}_{max}$ 是真子群）。我们可以将 G_{l-1} 替换为闭子群 H，该闭子群包含 G_{l-1}，在 G 中具有无限指数，并且在满足这些条件的闭子群中极大。（这是由 G的诺特性质保证的。）因此，我们可以用另一条极大真链替换 $\mathcal{C}_{max}$

$$\mathcal{C}': \quad 1 \lneq_c G_1 \ldots \quad \lneq_c H \lneq_c G_l = G.$$

$\mathcal{C}'$ 的长度等于 $\mathcal{C}_{max}$的长度；因此我们得到

$$l(G_{l-1}) = l(H) < \infty.$$

再次，由定理 1.1 可知 $rk(H) < \infty$。但现在，引理 2.5 适用于 G 中的 H，并推出 $rk(G) < \infty$。证明至此完成。 □

5 定理 1.3 的证明。

证明。
设 G 是一个满足定理 1.3 假设的 pro-p 群。根据引理 2.3， G 必定是有限生成的。由 [2]（见命题 1.7，第 21 页）可知， G 的每个开子群都是有限生成的。另一方面，已知每个闭但非开的子群都是有限秩的。因此，所有闭子群都是有限生成的 pro-p 群。于是，G 是诺特的。

因此，根据定理 1.2，只需证明 G 满足弱降链条件。由 [2] （见命题 1.2(i)，第 15 页）可知， G 的每个有限指数闭子群也是开子群。因此，任何真降链都不可能包含开子群。所以，在某条真降链中先于 G 的每个子群都是闭但非开的（因而具有有限秩）。

但是， G 的所有有限秩闭子群都满足弱降链条件（如定理 1.2 所示）。因此， G 满足弱降链条件，定理 1.2 也就如所述适用。于是，我们得到 $rk(G) < \infty$。反向蕴含显然成立；因此证明完毕。

□

6 推论 1.1 的证明。

证明。
有限秩的诺特 pro-p 群几乎都是 p-进解析的，因而具有可数基。现在证明反向蕴含。

因此，假设 G 是诺特的并且具有可数基。定义如下集合，该集合由 G 的闭子群组成。

$$\mathcal{H} := \{H \leq_c G : \quad [G : H] = \infty \text{ and } rk(H) < \infty.\}$$

由于 G 是诺特的， $\mathcal{H}$ 包含一个有限秩的极大闭子群 H_{max} 。接下来考虑

$$H_\infty := \bigcap_{H_{max} \leq_c K \leq_c G} K.$$

如果 $rk(G) = \infty$，那么上述交集中的每个子群 K 都将具有无限秩（这是由于 H_{max} 的极大性）。此外，每个闭的但

H_∞ 的非开子群都必须具有有限秩。我们注意到， H_∞ 在 G 中是闭的；因此 H_∞ 也是诺特的且具有可数基。因此，定理 1.3 适用，并表明 $rk(H_\infty) < \infty$。事实上，由于 $H_{max} \leq_c H_\infty$，根据 H_{max} 在有限秩子群中的极大性，我们有 $H_{max} = H_\infty$。

但是现在，将引理 2.5 应用于 G，可得 $rk(G) < \infty$。这一矛盾完成了证明。 □

致谢。 作者谨此感谢金奈数学研究所提供的博士后奖学金资助。

参考文献

[1] Anthony E. Clement、Stephen Majewicz 和 Marcos Zyman。幂零群理论。Birkhäuser/Springer，Cham，2017 年。[2] J. D. Dixon、M. P. F. du Sautoy、A. Mann 和 D. Segal。解析 *pro-p* 群，剑桥高等数学研究丛书第 61 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，1999 年。[3] Marcus du Sautoy、Dan Segal 和 Aner Shalev（编）。*pro-p* 群新视野，数学进展第 184 卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2000 年。[4] Jonathan A. Kiehlmann。可数基阿贝尔有限群的分类。群论杂志，16(1):141–157，2013 年。[5] Benjamin Klopsch。紧 p-进李群导论。载于群论中有限群主题讲座，第 77 卷《伦敦数学会学生教材》，第 7–61 页。剑桥大学出版社，剑桥，2011 年。[6] Alexander Lubotzky 和 Avinoam Mann。强 p-群。II。 p-进解析群。代数杂志，105(2):506–515，1987 年。