arXiv:2301.04848v1 [math.FA] 12 Jan 2023

τ量化与 Feichtinger 算子的 τ-Cohen 类分布

FEDERICO BASTIANONI 和 FRANZ LUEF

Abstract. 我们研究一类适当的迹类算子（称为 Feichtinger 算子）的 τ量化和科恩类分布，并证明该类算子可以方便地替代施瓦茨算子类。在我们的框架中，时频分析中关于函数的许多熟知概念和结果都有相应的算子类比，例如，科恩类是维格纳函数与分布的卷积，或者将施瓦茨算子类刻画为 Feichtinger 算子类的加权变体之交。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 3 2.1. 一族时频表示 3 2.2. QHA 的基础与新工具 5 2.3. 函数的τ量化 6 3. Feichtinger 算子 7 3.1. 算子的τ量化 9 3.2. QHA 的便捷环境 13 3.3. 算子的τ-Cohen 类 23 4. 施瓦茨算子的刻画 28 致谢 30 参考文献 30

1. Introduction

关于各种量子化方案中某些符号类所对应的伪微分算子的有界性，已有大量文献，研究方向包括 H¨ormander 类，或 Sj¨ostrand 类、Shubin 类等，例如

2010年 数学主题分类。42B35;46E35;47G30;47B10。关键词和短语：科恩类，τ-量子化，Feichtinger 代数，维格纳分布。

[1, 3, 4, 11, 22]。本文着重研究 Shubin 的 τ-量子化及其相关的时频表示，即 τ-Cohen 类。

我们对这一系列思想的研究基于量子调和分析框架，旨在将关于函数的著名结果推广到一类恰当的函数上，我们称之为 Feichtinger 算子， $\mathbb{S}_0$；它是著名的 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0$ 的算子类比。

我们还讨论 Feichtinger 算子 $\mathbb{S}_0$ 与 Keyl、Kiukas 和 Werner 引入的施瓦茨算子类之间的关系，见 [14]。他们提出，应当在算子类的框架下寻找函数空间的类比；这一想法已在 [15]中的 Sobolev 空间情形以及 [6]中的调制空间情形得到实现。

对于 $\tau \in [0,1]$ 符号 $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ 的 τ-量子化，其中 $\mathbb{R}^{2d}$是缓增分布空间，其定义为

$$\mathrm{Op}_\tau(a)f(t) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{2\pi i(t-y)\xi} a((1-\tau)t+\tau y,\xi) f(y)\, dy d\xi \ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

其中，算子 $\mathrm{Op}_\tau(a)$ 被理解为在弱意义下定义。一个众所周知的事实是，可以将 $\langle \mathrm{Op}_\tau(a) f, g\rangle$ 与一种时频表示$W_\tau(f,g)$联系起来，即 f与 g的交叉τ-维格纳分布：

$$\langle \mathrm{Op}_\tau(a) f, g\rangle = \langle a, W_\tau(g,f)\rangle, \qquad \text{for all} \quad f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

给定一个算子 S，我们用 a_τ^S表示它的 τ-符号，即满足 $\mathrm{Op}_\tau\left(\mathsf{a}_\tau^S\right) = S$的温和分布；$\mathrm{Op}_\tau$称为 τ-Shubin 量子化。对于 $f,g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，我们用 $f \otimes g$表示秩一算子，并注意到 $\mathsf{a}_\tau^{f\otimes g} = W_\tau(g,f)$，也就是说，量子化方案与时频表示之间存在内在联系。

我们证明，对于性质良好的算子，例如迹类算子或 Feichtinger 算子，这种关系可以推广到算子。回顾一下，Wigner 在其关于准概率分布的开创性著作中，为某些算子类 [24], 引入了交叉维格纳分布；随后，Moyal 在 [19] 中将其推广到了更一般的算子类。

设 S 是 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0$ 与其连续对偶空间 $\mathcal{S}_0'$之间的连续算子。我们用 K_S 表示 S的核；根据 Feichtinger 核定理，该核存在，且是 $\mathbb{R}^{2d}$上的温和分布。

我们将 Feichtinger 算子 $\mathbb{S}_0$ 定义为以下连续线性算子类： $\mathbb{S}_0 := S\colon \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，它们将 $\mathcal{S}_0'$ 中范数有界且 w-$*$ 收敛的序列映射为 $\mathcal{S}_0$ 中范数收敛的序列。在 [10] 中已证明，这些算子恰好是从 $\mathcal{S}_0'$ 到 $\mathcal{S}_0$ 的线性连续算子，且其核属于 Feichtinger 代数；这就是所谓的内核定理。

我们的主要工具之一是 Feichtinger 算子具有良好的谱分解性质。若 S 属于 $\mathbb{S}_0$，则存在两个（不唯一的）序列 $\{f_n\}_n$、 $\{g_n\}_n \subseteq \mathcal{S}_0$（$\mathbb{R}^d$）

使得

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{S}_0} \|g_n\|_{\mathcal{S}_0} < \infty, \qquad K_S = \sum_{n=1}^{\infty} K_{f_n \otimes g_n}.$$

因此，Feichtinger 算子是迹类算子，我们可以如下计算其迹：$\mathrm{tr}(S) = \int_{\mathbb{R}^d} K_S(x, x)\, dx$。在 [7] 中，具有此类分解的算子已得到研究；当 $\mathrm{tr}(S) = 1$时，它们被称为 Feichtinger 态。但当时尚未确立这些算子与 [10] 的研究之间的联系，而这正是我们的主要发现之一。

于是， S 的 τ-Wigner 分布定义如下

$$W_\tau S(x, \omega) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t\omega} K_S(x + \tau t, x - (1-\tau)t)\, dt. \tag{2}$$

我们的关键发现是以下恒等式:

$$\langle a, W_\tau S \rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{Op}_\tau(a) S^*) =: \langle \mathrm{Op}_\tau(a), S \rangle,$$

对于 $\mathbb{S}_0$或 $\mathcal{J}^1$中的 S， $W_\tau S$是 S的 τ-Wigner 分布。因此，我们将 $W_\tau S$解释为 $\mathbb{S}_0$或 $\mathcal{J}^1$ 中某个算子的 τ- 量化。

注意，若 S 是秩一算子 $f \otimes g$，则这就变成了前述的 τ-Wigner 分布与 Shubin τ-变换之间的关系。

基于这一框架，我们推导出了关于τ-维格纳分布和 τ-Shubin量子化的众所周知结果的算子类比，这表明该框架非常适合开展此类研究。此外，我们将 [17], 中引入的算子Cohen 类扩展到 τ-框架，并证明它可以表示为某个算子的维格纳分布与一个分布的卷积，这与函数情形相同。

最后，我们介绍了 $\mathbb{S}_0$ 的加权版本，并证明所有这些加权版本的交集是 [14]中的施瓦茨算子类。与函数情形一样，我们希望这种对施瓦茨算子的整体描述在后续研究中也将证明是有用的，同时它还暗示了Gelfand-Shilov 类或其他测试函数类的算子类比，以及相应的超分布类。

2. Preliminaries

在本文中，即使未明确说明，参数 τ 也始终属于 $[0, 1]$, 。

2.1. 一族时频表示。对于 $x, \omega \in \mathbb{R}^d$，我们将平移算子和调制算子定义为

$$T_x f(t) \coloneqq f(t - x), \qquad M_\omega f(t) \coloneqq e^{2\pi i \omega t} f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}^d,$$

分别记为。它们的复合记作 $\pi(x, \omega) := M_\omega T_x$。

给定 $\tau \in [0,1]$，在 (x,ω) 处的 τ-时频移位（τ-TFS）$\in \mathbb{R}^{2d}$ 定义为

$$\pi^\tau(x,\omega) \coloneqq e^{-2\pi i\tau x\omega} M_\omega T_x = M_{(1-\tau)\omega} T_x M_{\tau\omega}. \tag{3}$$

对于 $\tau = 0$，我们恢复通常的时频移位 $\pi^0 = \pi$。以下关系可由初等计算得出，留给读者验证：

$$\begin{aligned}
\pi^\tau(x,\omega)\pi^\tau(x',\omega') &= e^{-2\pi i[(1-\tau)x\omega' - \tau x'\omega]}\pi^\tau(x+x',\omega+\omega'),\\
\pi^\tau(x,\omega)\pi^\tau(x',\omega') &= e^{-2\pi i[x\omega' - x'\omega]}\pi^\tau(x',\omega')\pi^\tau(x,\omega),\\
\pi^\tau(x,\omega)^* &= \pi^{1-\tau}(-x,-\omega) = e^{-2\pi i(1-\tau)x\omega}\pi(-x,-\omega).
\end{aligned}$$

本文中，符号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 或表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的内积，或表示巴拿赫空间 X 与其对偶空间 X' 之间的对偶配对；该配对与后者相容，即假定 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一个变量是线性的，关于第二个变量是共轭线性的。特别地，本文所考虑的对偶对分别为 (L^2, L^2)、$(\mathcal{S}_0', \mathcal{S}_0)$、$(\mathbb{S}_0', \mathbb{S}_0)$。

上文中，$\mathcal{S}_0$ 是 Feichtinger 代数 (24)；$\mathbb{S}_0$ 和 $\mathbb{S}_0'$ 的定义见公式 (25)、(26) 和 (28)。对于 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，或任意合适的对偶对，我们定义 f 关于 g 的 τ- 短时傅里叶变换（τ- 短时傅里叶变换）：

$$V_g^\tau f(x,\omega) \coloneqq \langle f, \pi^\tau(x,\omega) g\rangle, \qquad \forall x,\omega \in \mathbb{R}^d. \tag{4}$$

不难验证，映射

$$\pi^\tau \colon \mathbb{R}^{2d} \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^d)),$$

其中 $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^d))$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上的酉算子，对任意 τ，它都是 $\mathbb{R}^{2d}$ 的射影表示。因此，V^τ 是与 π^τ 相关联的小波变换，故 $V_g^\tau f$ 是连续函数。

注 2.1. 对于 $\tau = 0$，我们得到通常的短时傅里叶变换 $V_g^0 f = V_g f$，并且有

$$V_g^\tau f(x,\omega) = e^{2\pi i\tau x\omega} V_g f(x,\omega). \tag{5}$$

[1]根据前述恒等式，我们有 $V_g^{\overline{\tau}} f$ 是 f 和 g 的互模糊函数：

$$V_g^{\frac{1}{2}} f(x,\omega) = A(f,g)(x,\omega). \tag{6}$$

我们回顾另一种常用的时频表示，即所谓的 f 和 g 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中的交叉-τ-维格纳分布，其定义为

$$W_\tau(f,g)(x,\omega) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t\omega} f(x+\tau t)\overline{g(x-(1-\tau)t)}\, dt. \tag{7}$$

我们的目标是将 W_τ 的定义从函数推广到算子，见（15）。

2.2. QHA 基础与新工具。本小节将遵循 Werner [23] 的开创性工作，介绍量子调和分析（QHA）的基本定义。

对于 $z \in \mathbb{R}^{2d}$ 和 $A \in B(L^2(\mathbb{R}^d))$，算子 A 经 z 平移后为

$$\alpha_z(A) := \pi(z) A \pi(z)^*, \tag{8}$$

它满足 $\alpha_z \alpha_{z'} = \alpha_{z+z'}$。奇偶算子定义为

$$Pf(t) := \check{f}(t) := f(-t), \tag{9}$$

对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，它在 $A \in B(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上诱导一个对合：

$$\check{A} := PAP. \tag{10}$$

我们用 $\mathcal{J}^1$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上所有迹类算子构成的空间。给定 $a \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $S \in \mathcal{J}^1$。a 与 S 之间的卷积是算子

$$a \star S := S \star a := \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z) \alpha_z(S)\, dz, \tag{11}$$

其中积分可在弱意义下解释。对于算子 S、$T \in \mathcal{J}^1$，其卷积是对每个 $z \in \mathbb{R}^{2d}$ 定义的函数，形式如下

$$S \star T(z) := \operatorname{tr}\left(S \alpha_z(\check{T})\right). \tag{12}$$

本文中，我们用符号 $\otimes$ 表示秩一算子。也就是说，给定$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$：

$$(f \otimes g)\psi := \langle \psi, g \rangle f, \qquad \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{13}$$

算子 S 的核始终记为 K_S。显然，算子 $f \otimes g$ 的核是函数 $f(x)g(y)$的张量积：

$$(f \otimes g)\psi(t) = \langle \psi, g \rangle f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g(x)}\psi(x)\, dx.$$

下文中，我们用 $f(x)g(y)$表示两个函数的张量积，并采用如下记号

$$K_{f \otimes \overline{g}}(x, y) = f(x)\overline{g}(y). \tag{14}$$

现在，我们将 (7) 解释为秩一算子$f \otimes g$的交叉-τ-维格纳分布。

因此，自然可以如下定义核为K_S 的算子 S 的 τ-维格纳分布：

$$W_\tau S(x, \omega) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i t\omega} K_S(x + \tau t, x - (1-\tau)t)\, dt. \tag{15}$$

对于 $S \in \mathcal{J}^1$ 和 $\tau \in [0, 1]$，我们将 S的傅里叶-τ-Wigner 变换定义为：

$$\mathcal{F}_{W_\tau} S(z) := \operatorname{tr}\left(\pi^\tau(z)^* S\right), \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{16}$$

对于 $\tau = 1/2$ ，我们得到通常的傅里叶-维格纳变换 [23]。 $S \in B(L^2)$ 的 τ- 扩展表示为分解

$$S = \int_{\mathbb{R}^{2d}} h(z)\pi^\tau(z)\, dz, \tag{17}$$

其中积分按弱意义理解。函数 h 称为τ的扩散函数。

下文中，我们将 τ扩散表示视为一种量子化方案，它将函数映射为算子。具体而言， $h \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$与算子

$$\mathrm{SR}^\tau(h) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^{2d}} h(z)\pi^\tau(z)\, dz. \tag{18}$$

令 $\mathcal{F}_\sigma$ 表示辛傅里叶变换。下文引理汇总了这些概念之间若干重要关系。证明只需进行初等计算，并基于迹类算子S 和 T ([21])的谱分解，留给感兴趣的读者完成。

引理 2.2. 设 f、 g、 $\in L^2(\mathbb{R}^d)$、 S、 $T \in \mathcal{J}^1$、 $a \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$和 $\tau \in [0,1]$。则：

- (i) $\mathcal{F}_\sigma(W_\tau(f \otimes g)) = V_g^\tau f$;
- (ii) $\mathcal{F}_{W_\tau}(f \otimes g) = V_g^\tau f$;
- (iii) $W_\tau S = \mathcal{F}_\sigma \mathcal{F}_{W_\tau} S$;
- (iv) $\mathcal{F}_{W_\tau} S(x,\omega) = e^{-2\pi i(1/2-\tau)x\omega}\mathcal{F}_{W_{1/2}} S(x,\omega)$;
- (v) $\mathcal{F}_\sigma(S \star T) = \mathcal{F}_{W_\tau} S \cdot \mathcal{F}_{W_{1-\tau}} T = \mathcal{F}_{W_{1-\tau}} S \cdot \mathcal{F}_{W_\tau} T$;
- (vi) $\mathcal{F}_{W_\tau}(a \star S) = \mathcal{F}_\sigma a \cdot \mathcal{F}_{W_\tau} S$;
- (vii) $\mathcal{F}_{W_\tau} S$ *is the* τ*-spreading function of* S*, i.e.* $S = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{F}_{W_\tau} S(z)\pi^\tau(z)\, dz$.

注意，若考虑秩一算子 $S = f \otimes g$，则前一个引理中的断言（iii）和（ii）意味着

$$W_\tau(f,g) = W_\tau(f \otimes g) = \mathcal{F}_\sigma V_g^\tau f. \tag{19}$$

2.3. 函数的 τ-量子化。符号 $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ 在缓增分布空间上的 τ-量子化，形式上定义为

$$\mathrm{Op}_\tau(a) f(t) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{2\pi i(t-y)\xi} a((1-\tau)t + \tau y, \xi) f(y)\, dy d\xi, \tag{20}$$

其中 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。$\mathrm{Op}_\tau(a)$ 可以在弱意义下严格描述为：

$$\langle \mathrm{Op}_\tau(a) f, g\rangle = \langle a, W_\tau(g,f)\rangle, \qquad \forall f, g, \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

给定一个算子 S，我们用 a_τ^S 表示其 τ-符号，即满足下式的温和分布

$$\mathrm{Op}_\tau\left(\mathrm{a}_\tau^S\right) = S.$$

注 2.3. 在适当的假设下，例如 $a \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$，通过直接计算可得

$$\mathrm{Op}_\tau(a) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{F}_\sigma a(z)\pi^\tau(z)\, dz,$$

并且，由于 $\mathcal{F}_{W_\tau}\mathrm{Op}_\tau(a)$ 也是 $\mathrm{Op}_\tau(a)$ 的 τ-扩散函数，因此我们有

$$a = \mathcal{F}_\sigma \mathcal{F}_{W_\tau} \mathrm{Op}_\tau(a). \tag{21}$$

因此，对于 $S \in \mathcal{J}^1$

$$\mathrm{a}_\tau^S = \mathcal{F}_\sigma \mathcal{F}_{W_\tau} S = W_\tau S. \tag{22}$$

给定 $a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $f, g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，我们回顾一下 f 和 g 的交叉 τ-Cohen 类表示的定义，其核为 a:

$$Q_a^\tau(f,g) \coloneqq a * W_\tau(f,g). \tag{23}$$

3. Feichtinger operators

本节概述文献 [10] 中研究的一类算子的若干重要结果。对于下文引入的这类算子，我们采用“Feichtinger 算子”这一名称，原因稍后便会明了。

我们回顾一下，定义在 $\mathbb{R}^d$ [9] 上的 Feichtinger 代数是巴拿赫空间

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) \coloneqq \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \,|\, V_g f \in L^1(\mathbb{R}^{2d})\}, \tag{24}$$

对于某个 $g \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$，赋予范数

$$\|f\|_{\mathcal{S}_0} \coloneqq \|V_g f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} |V_g f(x,\omega)|\, dxd\omega.$$

有关 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 的详细综述，请参阅 [13] 。在本文中， $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 的共轭对偶。

定义 3.1。Feichtinger 算子集定义为

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_0 \coloneqq \{&S\colon \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) \,|\, S \textit{ is linear, continuous and}\\ &\textit{maps norm bounded } w\text{-}* \textit{ convergent sequences in } \mathcal{S}_0'\\ &\textit{into norm convergent sequences in } \mathcal{S}_0\}.\end{aligned} \tag{25}$$

我们采用以下记号:

$$\mathbb{S}_0' \coloneqq B(\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d), \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)) \tag{26}$$

并陈述所谓的外核定理 [10, 定理 1.1]:

定理 3.2. 巴拿赫空间 $\mathbb{S}_0'$ 通过映射 $T \mapsto K_T$与 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$同构，其中 T 与其核 K_T 之间的关系为

$$\langle Tf, g\rangle = \langle K_T, K_{g\otimes f}\rangle, \qquad \forall\, f, g, \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d).$$

以下命题称为内核定理。我们在当前框架下陈述该定理。为此，我们引入以下记号：给定σ， $\nu \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)$，用 $\nu\widetilde{\otimes}\overline{\sigma}$ 表示 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$中的唯一元素，使得

$$\langle \nu\widetilde{\otimes}\overline{\sigma}, K_{\psi\otimes\overline{\varphi}}\rangle = \langle \nu,\psi\rangle\overline{\langle \sigma,\overline{\varphi}\rangle}, \qquad \forall\, \psi,\varphi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d).$$

另请读者参见 [10,定理 1.3], 引理 3.1 和推论 3.10。

定理 3.3。若赋予 Feichtinger 算子空间 $\mathbb{S}_0$ $B(\mathcal{S}_0', \mathcal{S}_0)$ 的范数，则该空间是巴拿赫空间，并且作为巴拿赫空间，它通过映射 $T \mapsto K_T$ 与 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 自然同构，其中 T 与其核 K_T 之间的关系由下式给出

$$\langle \nu, T\sigma\rangle = \langle \nu\widetilde{\otimes}\overline{\sigma}, K_T\rangle, \qquad \forall\, \sigma,\nu, \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d).$$

此外， $\mathbb{S}_0$ 在复合运算下是巴拿赫代数。若 $S, T \in \mathbb{S}_0$，则

$$K_{S\circ T}(y,u) = \int_{\mathbb{R}^d} K_T(y,t) K_S(t,u)\, dt. \tag{27}$$

根据上述定理 3.2 和 3.3， $\mathbb{S}_0'$ 是 $\mathbb{S}_0$ 的（共轭）拓扑对偶，且对偶由下式给出

$$\langle T, S\rangle = \langle K_T, K_S\rangle. \tag{28}$$

引理 3.4。设 $S \in \mathbb{S}_0$。则存在两个不唯一的序列 $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，使得

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{S}_0} \|g_n\|_{\mathcal{S}_0} < +\infty, \qquad K_S = \sum_{n=1}^{\infty} K_{f_n\otimes g_n}.$$

此外,

$$\mathbb{S}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}^1$$

with

$$\mathrm{tr}(S) = \int_{\mathbb{R}^d} K_S(x,x)\, dx.$$

证明。我们只需证明 Feichtinger 算子连续嵌入$\mathcal{J}^1$，其余所有结论均可在 [10], 中找到，尤其参见推论 3.15 和注 9。该结论可由一个初等计算得出：

$$\|S\|_{\mathcal{J}^1} = |\mathrm{tr}(A)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) g_n(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) g_n(x)|\, dx$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^2} \|g_n\|_{L^2} \lesssim \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{S}_0} \|g_n\|_{\mathcal{S}_0} < \infty.$$

由于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d}) = \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) \,\hat{\otimes}\, \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，例如参见 [10, 引理 2.1], ，我们得到

$$\|S\|_{\mathcal{J}^1} \lesssim \|K_S\|_{\mathcal{S}_0} \asymp \|S\|_{\mathbb{S}_0},$$

由此得到所需的结论。 □

由前述结果以及 [10, 第 4] 页中的观察可得

$$\mathbb{S}_0 \hookrightarrow \mathcal{J}^1 \hookrightarrow \mathcal{J}^2 \hookrightarrow B(L^2(\mathbb{R}^d)) \hookrightarrow \mathbb{S}_0'. \tag{29}$$

所有 Feichtinger 算子均属于迹类这一事实，意味着引理 2.2 成立。

3.1. 算子的 τ 量子化。以下注释是后续关于 Op_τ 和 W_τ 的结果的关键见解。

注 3.5. 设我们考虑 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，满足 $f \neq 0$, $a \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$，且对于 L^2， $\{f_j\}_j$ 为标准正交基，满足 $f_1 = f$。那么我们计算如下：

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Op}_\tau(a)f, g\rangle &= \langle \mathrm{Op}_\tau(a)f, \sum_{j=1}^{\infty}\langle g, f_j\rangle f_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty}\langle \mathrm{Op}_\tau(a)\left(\langle f_j, g\rangle f\right), f_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\langle \mathrm{Op}_\tau(a)(f\otimes g)f_j, f_j\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Op}_\tau(a)(f\otimes g)\right).\end{aligned}$$

考虑到 $\mathrm{Op}_\tau(a)$ 的弱定义以及 (15)，我们可以写作

$$\langle \mathrm{Op}_\tau(a)f, g\rangle = \langle a, W_\tau((f\otimes g)^*)\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Op}_\tau(a)(f\otimes g)\right) = \langle \mathrm{Op}_\tau(a), (f\otimes g)^*\rangle_{(\mathcal{J}^1,\mathcal{J}^\infty)}. \tag{30}$$

通过类似于上述对 $S \in \mathcal{J}^1$ 所做的计算，在将 $\{f_k\}_k$ 扩展为 L^2的标准正交基后，利用谱分解$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k f_k \otimes g_k$，可得（$\mathbb{R}^d$）

$$\langle a, W_\tau S\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathrm{Op}_\tau(a)S^*\right) = \langle \mathrm{Op}_\tau(a), S\rangle_{(\mathcal{J}^1,\mathcal{J}^\infty)}. \tag{31}$$

定理 3.6. 对每个 $\tau \in [0,1]$，以下映射都是线性且连续的：

$$\mathrm{Op}_\tau\colon L^2(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathcal{J}^\infty, \qquad W_\tau\colon \mathcal{J}^1 \to L^2(\mathbb{R}^{2d}).$$

此外，Op_τ是 W_τ 的巴拿赫空间伴随算子：$\mathrm{Op}_\tau = W_\tau^*$。

证明. Op_τ 的有界性显而易见； W_τ 连续性的证明可采用与后续定理 3.7 证明类似的推理。最后一个结论即为（31）。□

定理 3.7. 对每个 $\tau \in [0,1]$，以下映射都是线性且连续的：

$$\mathrm{Op}_\tau\colon \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{S}_0', \qquad W_\tau\colon \mathbb{S}_0 \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d}).$$

此外，Op_τ是 W_τ的巴拿赫空间伴随算子：$\mathrm{Op}_\tau = W_\tau^*$，即对于每个$a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$和 $S \in \mathbb{S}_0$

$$\langle a, W_\tau S\rangle = \langle \mathrm{Op}_\tau(a), S\rangle. \tag{32}$$

证明。根据定义可得 Op_τ 的有界性和线性。利用 $\mathrm{Op}_\tau(a)$ 的形式表示，我们可以推导出其核的表达式：

$$K_{\mathrm{Op}_\tau(a)}(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(t-x)\omega}a((1-\tau)t+\tau x,\omega)\,d\omega. \tag{33}$$

我们先考虑 $f,g\in\mathcal{S}_0$。那么，通过标准论证（例如参见 [5, 命题 1.3.25],）可得

$$W_\tau(f\otimes g)=W_\tau(f,g)\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})\qquad\text{with}\qquad \|W_\tau(f\otimes g)\|_{\mathcal{S}_0}\lesssim\|f\|_{\mathcal{S}_0}\|g\|_{\mathcal{S}_0}.$$

由于引理 2.2 对 $\mathbb{S}_0$ 成立，我们写作 $W_\tau=\mathcal{F}_\sigma\mathcal{F}_{W_\tau}$，并使用 S 的谱分解，其形式为 $\sum_{n=1}^\infty f_n\otimes g_n$，如引理 3.4 所示。现在，我们计算：

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{W_\tau}S(z)&=\mathrm{tr}(\pi^\tau(z)^*S)=\mathrm{tr}(\sum_{n=1}^\infty\pi^\tau(z)^*(f_n\otimes g_n))\\&=\sum_{n=1}^\infty\langle\pi^\tau(z)^*f_n,g_n\rangle=\sum_{n=1}^\infty V_{g_n}^\tau f_n(z).\end{aligned} \tag{34}$$

为 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 上的范数选取一个合适的窗函数 [13, 定理 5.3]，我们有

$$\|\mathcal{F}_{W_\tau}S\|_{\mathcal{S}_0}\le\sum_{n=1}^\infty\left\|V_{g_n}^\tau f_n\right\|_{\mathcal{S}_0}=\sum_{n=1}^\infty\|f_n\|_{\mathcal{S}_0}\|g_n\|_{\mathcal{S}_0}<+\infty.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}_{W_\tau}S\|_{\mathcal{S}_0}&\le\inf\{\sum_{n=1}^\infty\|f_n\|_{\mathcal{S}_0}\|g_n\|_{\mathcal{S}_0},S=\sum_{n=1}^\infty f_n\otimes g_n\}\\&\le\inf\{\sum_{n=1}^\infty\|f_n\|_{\mathcal{S}_0}\|g_n\|_{\mathcal{S}_0},K_S=\sum_{n=1}^\infty K_{f_n\otimes g_n}\}\\&=\|K_S\|_{\mathcal{S}_0}\asymp\|S\|_{\mathbb{S}_0}.\end{aligned}$$

我们证明了 $\mathcal{F}_{W_\tau}$ 的有界性：$\mathbb{S}_0\to\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$。辛傅里叶变换 $\mathcal{F}_\sigma$：$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})\to\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 的连续性是众所周知的，因此

W_τ： $\mathbb{S}_0 \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 的连续性由此可得。关于最后一个结论，我们按如下方式进行：

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Op}_\tau(a), S\rangle &= \langle K_{\mathrm{Op}_\tau(a)}, K_S\rangle = \langle K_{\mathrm{Op}_\tau(a)}, \sum_{n=1}^{\infty} K_{f_\otimes g_n}\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle K_{\mathrm{Op}_\tau(a)}, K_{f_\otimes g_n}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle \mathrm{Op}_\tau(a) g_n, f_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\langle a, W_\tau(f_n\otimes g_n)\rangle = \langle a, \sum_{n=1}^{\infty} W_\tau(f_n\otimes g_n)\rangle \\ &= \langle a, W_\tau S\rangle,\end{aligned}$$

由此证明得证。 □

鉴于定理 3.6 和 3.7，将 $W_\tau S$ 解释为 $\mathbb{S}_0$ 或 $\mathcal{J}^1$ 中某个算子的 τ-量化似乎是合理的。

推论 3.8。（i）对于每个 $\tau \in [0,1]$，映射 W_τ: $\mathbb{S}_0 \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 是一个拓扑同构，其逆映射由 Op_τ: $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{S}_0$ 给出；（ii）线性连续算子 S: $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)$ 属于 $\mathbb{S}_0$，当且仅当对于某个（因而任意）$\tau \in [0,1]$，有 $W_\tau S \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$。

证明。（i）我们在（22）中观察到，$W_\tau S$ 正是迹类算子 S 的 τ-符号 a_τ^S，特别地，这对 $S \in \mathbb{S}_0$ 也成立。因此，

$$\mathrm{Op}_\tau \circ W_\tau S = \mathrm{Op}_\tau(\mathrm{a}_\tau^S) = S.$$

现在说明，若我们从 $a \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 出发，则 $\mathrm{Op}_\tau(a)$ 属于 $\mathbb{S}_0$。由（33）可知，$\mathrm{Op}_\tau(a)$ 的核可以写成

$$K_{\mathrm{Op}_\tau(a)}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(t-x)\omega} a((1-\tau)t+\tau x, \omega)\, d\omega = \Psi_\tau \mathcal{F}_2^{-1} a(t,x),$$

其中，$\mathcal{F}_2^{-1}$ 是关于第二个变量的部分傅里叶变换的逆映射；Ψ_τ 是由矩阵诱导的变量替换

$$\begin{bmatrix} 1-\tau & \tau \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \Psi_\tau F(t,x) \coloneqq F((1-\tau)t+\tau x, t-x). \tag{35}$$

根据假设，a 属于 Feichtinger 代数 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$，我们有 $\mathcal{F}_2^{-1} a \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$，因此 $\Psi_\tau \mathcal{F}_2^{-1} a$ 属于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$，即 $\mathrm{Op}_\tau(a)$ 是 $\mathbb{S}_0$ 的一个元素。由 $\mathcal{F}_2^{-1}$ 和 Ψ_τ 的应用显然可知，Op_τ 从 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 到 $\mathbb{S}_0$ 是连续的。因此我们证明了

$$W_\tau \circ \mathrm{Op}_\tau(a) = \mathrm{a}_\tau^{\mathrm{Op}_\tau(a)} = a.$$

(ii) 该结论可由（i）直接推出。 □

推论 3.9. (*i*) 对每个 $\tau \in [0,1]$ $\mathcal{F}_{W_\tau}: \mathbb{S}_0 \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 都是拓扑同构，其逆映射由 τ-扩展表示给出

$$\mathrm{SR}^\tau : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{S}_0\,, a \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z)\pi^\tau(z)\,dz; \tag{36}$$

(*ii*) 定义

$$\mathrm{SR}^\tau : \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{S}_0'\, a \mapsto \int_{\mathbb{R}^{2d}} a(z)\pi^\tau(z)\,dz, \tag{37}$$

其中，积分应按以下弱意义理解：

$$\langle \mathrm{SR}^\tau(a) f, g\rangle := \langle a, V_f^\tau g\rangle, \qquad a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}),\ f,g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d).$$

因此，SR^τ （如式 (37)）定义良好、线性且连续，它扩展了 (36)，并且是 $\mathcal{F}_{W_\tau}$ 在 (*i*) 中的巴拿赫空间伴随算子：

$$\mathrm{SR}^\tau = \mathcal{F}_{W_\tau}^*, \tag{38}$$

其含义是，对每个 $a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $S \in \mathbb{S}_0$

$$\langle a, \mathcal{F}_{W_\tau} S\rangle = \langle \mathrm{SR}^\tau(a), S\rangle = \langle K_{\mathrm{SR}^\tau(a)}, K_S\rangle;$$

(*iii*) 每个函数 $F \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 都可展开为以下形式：

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} V_{g_n}^\tau f_n,$$

对于某些序列 $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，使得 $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_{\mathcal{S}_0} \|g_n\|_{\mathcal{S}_0} < \infty$。

证明。(*i*) 首先注意，若从 $a \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 出发，则 $\mathrm{SR}^\tau(a)$ 是核为

$$K_{\mathrm{SR}^\tau(a)}(y,u) = \int_{\mathbb{R}^d} a(y-u,\omega) e^{2\pi i y\omega}\,d\omega = \mathcal{F}_2^{-1}[a(y-u,\cdot)](y).$$

显然，SR^τ 从 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 到 $\mathbb{S}_0$ 是连续的。
由于我们有 $W_\tau = \mathcal{F}_\sigma \mathcal{F}_{W_\tau}$，且 $\mathcal{F}_\sigma$ 是 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 的自同构，因此可以写成 $\mathcal{F}_{W_\tau} = \mathcal{F}_\sigma W_\tau$，这是根据推论 3.8 得到的同构。为证明 SR^τ

是 $\mathcal{F}_{W_\tau}$ 的逆映射，我们使用 (34)，取 $S=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\otimes g_n\in\mathbb{S}_0$ 和 $\psi,\varphi\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}\langle(\mathrm{SR}^\tau\circ\mathcal{F}_{W_\tau}S)\psi,\varphi\rangle&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\mathcal{F}_{W_\tau}S(z)\langle\pi^\tau(z)\psi,\varphi\rangle\,dz\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}}V_{g_n}^\tau f_n(z)\overline{V_\psi^\tau\varphi(z)}\,dz\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n,\varphi\rangle\overline{\langle g_n,\psi\rangle}\\&=\langle\sum_{n=1}^{\infty}\langle\psi,g_n\rangle f_n,\varphi\rangle\\&=\langle\sum_{n=1}^{\infty}(f_n\otimes g_n)\psi,\varphi\rangle\\&=\langle S\psi,\varphi\rangle,\end{aligned}$$

在第三个等式中，我们使用了 Moyal 恒等式。对于复合 $\mathcal{F}_{W_\tau}\circ\mathrm{SR}^\tau$，注意到根据引理 2.2（$vii$），它在 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 上是恒等映射。

(ii) SR^τ 从 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 到 $\mathbb{S}_0'$ 的适定性、线性和连续性是标准结论。显然，(37) 扩展了 (36)。为说明 SR^τ 是从 $\mathbb{S}_0$ 到 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 的 $\mathcal{F}_{W_\tau}$ 的巴拿赫空间伴随算子，取 $a\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $S\in\mathbb{S}_0$。在以下计算中，我们使用：前述 (34)、引理 3.4 中给出的 Feichtinger 算子及其核的表示，以及外核定理与内核定理:

$$\begin{aligned}\langle a,\mathcal{F}_{W_\tau}S\rangle&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle a,V_{g_n}^\tau f_n\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle\mathrm{SR}^\tau(a)g_n,f_n\rangle\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\langle K_{\mathrm{SR}^\tau(a)},K_{f_n\otimes g_n}\rangle=\langle K_{\mathrm{SR}^\tau(a)},K_S\rangle\\&=\langle\mathrm{SR}^\tau(a),S\rangle.\end{aligned}$$

(iii) 最后一个结论直接由 (34) 中的计算以及 $\mathcal{F}_{W_\tau}$ 的满射性推出。□

3.2. QHA 的一个方便环境。第 2 节中，我们介绍了函数与算子之间以及两个算子之间的卷积。Keyl、Kiukas 和 Werner [14]证明，这类卷积对于更广泛的（广义）函数和算子类也有意义。这里我们总结主要结果；下文中，$\mathfrak{S}$ 表示 Weyl 符号属于 Schwartz 类 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ 的伪微分算子，而 $\mathfrak{S}'$ 表示 Weyl 符号属于 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ 的伪微分算子。根据 Schwartz 核定理，我们可以将 $\mathfrak{S}'$ 识别为从 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 到 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 的连续线性算子。

命题 3.10. (i) 设 $S,T\in\mathfrak{S}$, $A\in\mathfrak{S}'$, $b\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ 且 $a\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$。那么，下列卷积均定义良好，并且扩展了第 2.2 小节中定义的卷积：

$$S\star T\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}),\quad S\star A\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d}),\quad b\star S\in\mathfrak{S},\quad a\star S,b\star A\in\mathfrak{S}';$$

(ii) 傅里叶-维格纳变换可以扩展为一个拓扑同构$\mathcal{F}_{W_{1/2}}$: $\mathfrak{S}'\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$；$(iii)$ 我们有 $\mathcal{F}_\sigma(S\star T)=\mathcal{F}_{W_{1/2}}S\cdot\mathcal{F}_{W_{1/2}}T$ 以及 $\mathcal{F}_{W_{1/2}}(b\star S)=\mathcal{F}_\sigma b\cdot\mathcal{F}_{W_{1/2}}S$，只要 S、T 和 b 满足卷积按第 (i) 部分中的定义存在；(iv) $A\in\mathfrak{S}'$ 的 Weyl 符号由 $\mathcal{F}_\sigma\mathcal{F}_{W_{1/2}}A$给出。

[14] 的作者证明了所谓的施瓦茨算子类 $\mathfrak{S}$ 具有 Fr´echet 空间的结构。我们提出，Feichtinger 算子的巴拿赫空间 $\mathbb{S}_0$ 可以作为 $\mathfrak{S}$ 的替代；后者是一个大得多的“良好”算子类。我们从关于 $\mathcal{S}_0$ 和 $\mathbb{S}_0$的一些预备知识开始。

引理 3.11. 给定 $f\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)$，存在一个序列 $\{f_n\}_n\subseteq\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，其 w-$*$收敛于 f，且由 $\|f\|_{\mathcal{S}_0'}$ 有界，即

$$\lim_{n\to+\infty}\langle f_n,g\rangle=\langle f,g\rangle\qquad\forall\, g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d),\qquad\sup_n\|f_n\|_{\mathcal{S}_0}\le\|f\|_{\mathcal{S}_0'}.$$

证明. 固定 $f\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$并令 $R:=\|f\|_{\mathcal{S}_0'}$。根据 [13, 命题 6.15]，存在一个网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，其在 $\mathcal{S}_0'$ 中 w-$*$ 收敛于 f，并且对每个 $\alpha\in A$ 都满足 $\|f_\alpha\|_{\mathcal{S}_0'}\le R$。令

$$B_R:=\left\{f\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)\mid\|f\|_{\mathcal{S}_0'}\le R\right\}\quad\text{and}\quad E_R:=\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)\cap B_R,$$

其中，将 $\mathcal{S}_0$ 视为其在 $\mathcal{S}_0'$ 中的自然嵌入，即

$$E_R\subseteq B_R\subseteq\overline{E_R}^{w-*}.$$

$\overline{E_R}^{w-*}$ 在 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)$ 中有界。

事实上，若 $f_0\in\overline{E_R}^{w-*}$，则存在一个网 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq E_R$，其 w-$*$收敛于 f_0。因此，我们得到

$$\|f_0\|_{\mathcal{S}_0'}\le\liminf_{\alpha\in A}\|f_\alpha\|_{\mathcal{S}_0'}=\lim_{\alpha\in A}\inf\{\|f_\beta\|_{\mathcal{S}_0'}\mid\alpha\preceq\beta\}\le\lim_{\alpha\in A}R=R.$$

特别地，这表明 $\overline{E_R}^{w-*}\subseteq B_R$，我们得到

$$\overline{E_R}^{w-*}=B_R.$$

由于 $\mathcal{S}_0$ 可分，且 B_R 上的相对 w-$*$ 拓扑由度量诱导，依据 [18, 定理 2.6.23]，E_R 的拓扑 w-$*$ 闭包等于其序列 w-$*$ 闭包。因此，存在一个序列 $\{f_n\}_n\subseteq E_R$，它在 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d)$ 中 w-$*$收敛到 f。□

注 3.12. 对于任意局部紧可数基群 $\mathcal{G}$，上述引理也成立，只需用它替换 $\mathbb{R}^d$；关于 $\mathcal{S}_0(\mathcal{G})$ 的可分性，参见 [8,定理 2] 。

引理 3.13. 对任意 $S \in \mathbb{S}_0'$，存在一个序列 $\{S_n\}_n \subseteq \mathbb{S}_0$ 使得

(*i*) $\|S_n\|_{\mathbb{S}_0'} \lesssim \|S\|_{\mathbb{S}_0'}$; (*ii*) $\lim_{n\to+\infty} |\langle (S - S_n)f, g\rangle| = 0$ 对所有 $f, g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$。

证明. 这是核定理 3.2 和 3.2 以及引理 3.11 的直接应用。 □

上述引理第 (*ii*) 项中的收敛也记作

$$S_n \xrightarrow[n]{w-*} S \quad \text{in} \quad \mathbb{S}_0' \qquad \text{or} \qquad S = w\text{-}*\text{-}\lim_n S_n \qquad \text{in} \quad \mathbb{S}_0'.$$

引理 3.14. 设 $S\colon \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0'$ 属于 $\mathbb{S}_0$。那么，巴拿赫空间伴随算子 $S^*\colon \mathcal{S}_0' \to \mathcal{S}_0$ 属于 $\mathbb{S}_0$，其核为

$$K_{S^*}(y,u) = \overline{K_S(u,y)}. \tag{39}$$

证明。取 $f, g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，则

$$\begin{aligned}\langle Sf, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} K_T(y,u)\overline{g(y)}f(u)\,dydu \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\overline{\int_{\mathbb{R}^d} \overline{K_S(y,u)}g(y)\,dy\,du} \\ &= \langle f, S^*g\rangle.\end{aligned}$$

因此，$S^*g(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{K_S(u,y)}g(u)\,du$，即 $K_{S^*}(y,u) = \overline{K_S(u,y)}$，它属于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$。 □

推论 3.15. $\mathbb{S}_0$ 是一个 Banach $*$-代数。

注意到 $(S^*)\check{} = (\check{S})^*$，因此从现在起，必要时我们将简记为 $\check{S}^*$。

引理 3.16. (*i*) 以下映射是满射等距映射：

($i-a$) $\alpha_z\colon \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}_0$，对任意 $z = (x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}$，以及

$$K_{\alpha_z S}(y,u) = e^{2\pi i(y-u)\omega} K_S(y-x, u-x); \tag{40}$$

($i-b$) $\check{}\colon \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}_0$ 和

$$K_{\check{S}}(y,u) = K_S(-y-u); \tag{41}$$

($i-c$) $\alpha_z\colon \mathbb{S}_0' \to \mathbb{S}_0'$，对任意 $z \in \mathbb{R}^{2d}$；($i-d$) $\check{}\colon \mathbb{S}_0' \to \mathbb{S}_0'$; (*ii*) 设 S、$T \in \mathbb{S}_0$ 和 $b \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$。则

$$S \star T \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d}), \qquad b \star S \in \mathbb{S}_0;$$

(*iii*) 混合态局部化算子 $b \star S$ 的核为

$$K_{b\star S}(y,u) = \int_{\mathbb{R}^d} b(x,\omega) e^{2\pi i(y-u)\omega} K_S(y-x,u-x)\, dxd\omega; \tag{42}$$

对于任意 $z = (x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}$，$S\alpha_z \check{}T$ 的核为

$$K_{S\alpha_z\check{T}}(y,u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(y-t)\omega} K_T(x-y,x-t) K_S(t,u)\, dt. \tag{43}$$

证明。**(*i*)** 我们将初等计算留给感兴趣的读者，并指出，为了证明 $\alpha_z S, \check{}S \in \mathbb{S}_0$，结果 [10, 推论 3.3] 很有用。连续线性算子 $S\colon \mathcal{S}_0 \to \mathcal{S}_0'$ 是 Feichtinger 算子，当且仅当

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle S\pi(z)g_1, \pi(w)g_2\rangle|\, dzdw$$

对于任意 $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，其值均有限。

(*ii*) 我们首先讨论两个 Feichtinger 算子之间的卷积。根据条目 **(*i*)** 以及 $\mathbb{S}_0$ 在复合下构成巴拿赫代数这一事实，对于任意 $z = (x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}$，我们有 $S\alpha_z \check{}T$ 属于 $\mathbb{S}_0$。根据 [10, 推论 3.15], 可得:

$$\begin{aligned} S \star T(z) = \operatorname{tr}(S\alpha_z \check{T}) &= \int_{\mathbb{R}^d} K_{S\alpha_z\check{T}}(y,y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^{2d}} K_{\alpha_z\check{T}}(y,t) K_S(t,y)\, dtdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{2\pi i(y-t)\omega} K_T(x-y,x-t) K_S(t,y)\, dtdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} K_T(x-y,x-t) K_S(t,y) e^{-2\pi i t\omega}\, dt \right) e^{2\pi i y\omega}\, dy \\ &= \mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_1 \left(\Phi T_{(x,x)} K_T \cdot K_S \right)(\omega,\omega), \end{aligned}$$

其中 $\Phi F(t,y) := F(-y,-t)$，$\mathcal{F}_1$和 $\mathcal{F}_2$分别是关于第一和第二个变量的部分傅里叶变换。现在考虑 $f,g,h,l \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，计算下式会很有用，其中 P 是奇偶算子:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_1 \left(\Phi T_{(x,x)} K_{h\otimes l} \cdot K_{f\otimes g} \right)(\omega,\omega) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)\overline{l(x-t)} f(t) \overline{g(y)} e^{-2\pi i t\omega}\, dt \right) e^{2\pi i y\omega}\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-2\pi i t\omega} \overline{l(x-t)}\, dt \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \overline{g(y)} e^{2\pi i y\omega} h(x-y)\, dy \\ &= V_{Pl} f(-x,\omega) \cdot \overline{V_{Ph} g(-x,\omega)}. \end{aligned}$$

因此，作为 (x,ω) 的函数，$\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_1 \left(\Phi T_{(x,x)} K_{h\otimes l} \cdot K_{f\otimes g} \right)(\omega,\omega)$ 属于 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$。现在我们考虑两个表示 $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n$ 和 $T = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes l_n$，见

引理 3.4，因此

$$K_S = \sum_{n=1}^{\infty} K_{f_n \otimes g_n}, \qquad K_T = \sum_{n=1}^{\infty} K_{h_n \otimes l_n}.$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} S \star T(z) &= \mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_1 \left(\Phi T_{(x,x)} \sum_{M}^{\infty} K_{h_m \otimes l_m} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} K_{f_n \otimes g_n} \right)(\omega,\omega) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{F}_1 \left(\Phi T_{(x,x)} K_{h_m \otimes l_m} \cdot K_{f_n \otimes g_n} \right)(\omega,\omega) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{Pl_m} f_n(-x,\omega) \cdot \overline{V_{Ph_m} g_n(-x,\omega)} \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d}), \end{aligned}$$

收敛性由引理 3.4 保证。
关于 g $b \star S$，对于任意 $f, g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，以下估计证明了 $b \star S \in \mathbb{S}_0'$:

$$|\langle (b \star S) f, g \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} |b(z)| \, |\langle S\pi(z)^* f, \pi(z)^* g \rangle| \, dz \lesssim \|b\|_{L^1} \, \|S\|_{\mathbb{S}_0'} \, \|f\|_{\mathcal{S}_0} \, \|g\|_{\mathcal{S}_0}.$$

我们利用 $[10,$ 定理 3.2 (ii)$]$ 证明 $b \star S$ 属于 $\mathbb{S}_0$。对于 $g_1, g_2 \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle (b \star S)\pi(w) g_1, \pi(u) g_2 \rangle| \, dw du &\leq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |b(z)| \\ &\quad \times |\langle S\pi(w-z) g_1, \pi(u-z) g_2 \rangle| \, dz dw du \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\langle S\pi(w') g_1, \pi(u') g_2 \rangle| \, dw' du' \cdot \int_{\mathbb{R}^{2d}} |b(z)| \, dz < +\infty. \end{aligned}$$

(iii) 我们计算由卷积 $b \star S$ 给出的算子的核:

$$\begin{aligned} \langle (b \star S) f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(x,\omega) \int_{\mathbb{R}^{2d}} K_S(y,u) \overline{\pi(-z) g(y)} \pi(-z) f(u) \, dy du \, dx d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(x,\omega) e^{2\pi i (y-u)\omega} K_S(y,u) \overline{g(y+x)} f(u+x) \, dx d\omega \, dy du, \end{aligned}$$

对于 $z = (x,\omega) \in \mathbb{R}^{2d}$。变量替换 $y' = y+u, u' = u+x$ 得到所需结果。最后一个结论直接应用 (40)、(41) 以及 $\mathbb{S}_0$ $[10,$ 引理 3.10$]$ 中的 Banach 代数性质即可。□

推论 3.17. 设 $S, T \in \mathbb{S}_0$ 具有谱分解 $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n$ 和 $T = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes l_n$，其中 $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n, \{h_n\}_n, \{l_n\}_n \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{S}_0} \|g_n\|_{\mathcal{S}_0} <$

$+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_{\mathcal{S}_0} \|l_n\|_{\mathcal{S}_0} < +\infty$. 那么，采用引理 3.16 的证明中引入的记号，对每个 $z = (x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$\begin{aligned} S \star T(z) &= \mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_1 \left(\Phi T_{(x,x)} K_T \cdot K_S \right) (\omega, \omega) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{Pl_m} f_n(-x, \omega) \cdot \overline{V_{Ph_m} g_n(-x, \omega)}. \end{aligned} \tag{44}$$

定义 3.18。设 $A \in \mathbb{S}_0'$、 $a \in \mathcal{S}_0'$（$\mathbb{R}^{2d}$）、 $S \in \mathbb{S}_0$ 和 $b \in \mathcal{S}_0$（$\mathbb{R}^{2d}$）。考虑满足以下条件的任意序列 $\{A_n\}_n \subseteq \mathbb{S}_0$ 和 $\{a_n\}_n \subseteq \mathcal{S}_0$（$\mathbb{R}^{2d}$）：

$$A_n \xrightarrow[n]{w-*} A \quad in \quad \mathbb{S}_0' \qquad and \qquad a_n \xrightarrow[n]{w-*} a \quad in \quad \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}).$$

然后我们定义：

$$S \star A \coloneqq w\text{-}*\text{-}\lim_n S \star A_n \qquad in \quad \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}); \tag{45}$$

$$a \star S \coloneqq S \star a \coloneqq w\text{-}*\text{-}\lim_n a_n \star S \qquad in \quad \mathbb{S}_0'; \tag{46}$$

$$b \star A \coloneqq A \star b \coloneqq w\text{-}*\text{-}\lim_n b \star A_n \qquad in \quad \mathbb{S}_0'. \tag{47}$$

注 3.19。读者记住以下简单恒等式可能会有所帮助，这些恒等式将在后续命题的证明中使用。考虑 $S \in \mathbb{S}_0$、 ψ、 φ、 f、 $g \in \mathcal{S}_0$（$\mathbb{R}^d$）和 $z \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$\begin{aligned} \alpha_z(\psi \otimes \varphi) &= \pi(z)\psi \otimes \pi(z)\varphi; \\ (\psi \otimes \varphi)(K_{f \otimes \overline{g}}) &= \langle f, \varphi \rangle (\psi \otimes g); \\ (\psi \otimes \varphi) \star \check{S}(z) &= \langle \pi(z) S \pi(z)^* \psi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

命题 3.20。定义 3.18 中引入的卷积:

(*i*) 它们不依赖于所选的序列；此外，取 A, a, S, b 如定义 3.18 所示：

$$\langle S \star A, b \rangle = \langle K_A, K_{b \star \check{S}^*} \rangle; \tag{48}$$

$$\langle (a \star S) f, g \rangle = \langle a, (g \otimes f) \star \check{S}^* \rangle; \tag{49}$$

$$\langle (b \star A) f, g \rangle = \langle K_A, K_{b^* \star (g \otimes f)} \rangle, \tag{50}$$

其中 $b^*(z) : \overline{= b}(-z)$； (ii) 这些扩展了第 2.2 小节中的定义； (iii) 它们满足交换律；

(iv) 此外，它们满足结合律。特别地，若 $z \in \mathbb{R}^{2d}$, $T, Q \in \mathbb{S}_0$, $\sigma \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 且 A, a, S, b 如定义 3.18 所示，则：

$$(S \star (T \star b))(z) = ((S \star T) * b)(z); \tag{51}$$

$$S \star (T \star Q) = (S \star T) \star Q; \tag{52}$$

$$(S \star b) \star \sigma = S \star (b * \sigma); \tag{53}$$

$$S \star (T \star a) = (S \star T) * a; \tag{54}$$

$$A \star (T \star b) = (A \star T) \star b; \tag{55}$$

$$S \star (T \star A) = (S \star T) \star A; \tag{56}$$

在上述恒等式中，$*$ 表示两个函数之间，或函数与分布之间通常意义下的卷积。

证明。（i）只需证明（48）、（49）和（50），因为（i）中的其他断言显而易见。

我们从(48)开始。令 $b \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $z = (x, \omega) \in \mathbb{R}^{2d}$，在后续计算中我们使用引理 3.14 和3.16：

$$\begin{aligned}
\langle S \star A, b\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \langle S \star A_n, b\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}(S\alpha_z \check{A}_n)\overline{b(z)}\, dz \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} K_{S\alpha_z \check{A}_n}(y, y)\, dy \overline{b(z)}\, dz \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(y-t)\omega} K_{A_n}(x-y, x-t) K_S(t, y)\, dt dy\, \overline{b(z)}\, dz \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i(t'-y')\omega} K_{A_n}(y', t') K_S(x-t', x-y')\, dt' dy'\, \overline{b(z)}\, dz \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_{A_n}(y', t') \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} \overline{K_S(x-t', x-y')} e^{2\pi i(y'-t')\omega} b(z)\, dz \right)} dy' dt' \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_{A_n}(y', t') \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} \overline{K_{\check{S}}(t'-x, y'-x)} e^{2\pi i(y'-t')\omega} b(z)\, dz \right)} dy' dt' \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_{A_n}(y', t') \overline{\left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} K_{\check{S}^*}(y'-x, t'-x) e^{2\pi i(y'-t')\omega} b(z)\, dz \right)} dy' dt' \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_{A_n}(y', t') \overline{K_{b\star\check{S}^*}(y', t')}\, dy' dt'.
\end{aligned}$$

关于(49)，我们取 $f,g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 并直接计算，同时牢记注 3.19：

$$\begin{aligned}\langle (a\star S)f,g\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}} a_n(z)\langle \pi(z)S\pi(z)^*f,g\rangle\,dz\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}} a_n(z)\overline{\langle \pi(z)S^*\pi(z)^*g,f\rangle}\,dz\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}} a_n(z)\overline{(g\otimes f)\star \check{S}^*(z)}\,dz.\end{aligned}$$

我们来处理（50）：

$$\begin{aligned}\langle (b\star A)f,g\rangle &= \lim_{n\to+\infty}\langle K_{b\star A_n},K_{g\otimes f}\rangle\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}} b(x,\omega)e^{2\pi i(y-u)\omega}K_{A_n}(y-x,u-x)\,dxd\omega\Big)\\ &\times\overline{g(y)}f(u)\,dyd u\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}} K_{A_n}(y',u')\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}}\overline{b(x,\omega)}e^{-2\pi i(y'-u')\omega}}\\ &\times\overline{g(y'+x)\overline{f(u'+x)}\,dxd\omega\Big)}\,dy'du'\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}} K_{A_n}(y',u')\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}^{2d}} b^*(x',\omega')e^{2\pi i(y'-u')\omega'}}\\ &\times\overline{g(y'-x')\overline{f(u'+x')}\,dx'd\omega'\Big)}\,dy'du'\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^{2d}} K_{A_n}(y',u')\overline{K_{b^*\star(g\otimes f)}(y',u')}\,dy'du',\end{aligned}$$

为简洁起见，我们令 $b^*(z):=b(-z)$。

（ii）和（iii）是显然的。

(iv) 我们仅证明 (51)、(52) 和 (53)。其余恒等式可用类似方法推导。

为证明 (51)，我们对 $z \in \mathbb{R}^{2d}$ 进行计算：

$$\begin{aligned}(S \star (T \star b))(z) &= \operatorname{tr}\left(S \circ \alpha_z \left(\left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} b(z)\alpha_w T\, dw\right)^{\check{}}\right)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(S \circ \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} b(w)\alpha_z\left((\alpha_w T)^{\check{}}\right)\, dw\right)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(S \circ \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(w)\alpha_z\alpha_{-w}\check{T}\, dw\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(S \circ \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(-w')\alpha_{w'}\alpha_z\check{T}\, dw'\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(-w')\operatorname{tr}\left(S\alpha_{w'+z}\check{T}\right)\, dw',\end{aligned}$$

其中，最后一个等式可由例如 [20, 命题 2.9] 得出。于是，我们可以将最后一个右侧项改写为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2d}} b(z-w'')\operatorname{tr}\left(S\alpha_{w''}\check{T}\right)\, dw'' &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(z-w'')(S\star T)(w'')\, dw'' \\ &= ((S\star T) * b)(z).\end{aligned}$$

证明（52）时，迹的以下性质很有用：

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}(S\alpha_w T)\, dw = \operatorname{tr}(S)\operatorname{tr}(T),$$

其中 S、$T \in \mathcal{J}^1$。现在取 f、$g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$：

$$\begin{aligned}\langle (S\star(T\star Q))f,g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}(T\alpha_z\check{Q})\langle \alpha_z Sf,g\rangle\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}(Q\alpha_z\check{T})\operatorname{tr}((\alpha_z S)(f\otimes g))\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}(Q(\alpha_z\check{T})\alpha_w((\alpha_z S)(f\otimes g)))\, dwdz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}((f\otimes g)(\alpha_w Q)\alpha_z((\alpha_w\check{T})S))\, dzdw \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \operatorname{tr}(S\alpha_w\check{T})\operatorname{tr}((\alpha_w Q)(f\otimes g))\, dw \\ &= \langle((S\star T)\star Q)f,g\rangle.\end{aligned}$$

此外，最后一个恒等式（53）也可以通过直接计算得到。对于 f、$g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned}
\langle((S\star b)\star\sigma)f,g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma(z)\langle\alpha_z(S\star b)f,g\rangle\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma(z)\int_{\mathbb{R}^{2d}} b(w)\langle(\alpha_w S)\pi(z)^* f,\pi(z)^* g\rangle\,dwdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma(z)b(w)\langle(\alpha_{w+z}S)f,g\rangle\,dwdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma(z)b(w)\,\mathrm{tr}((\alpha_{w+z}S)(f\otimes g))\,dwdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} b(w)\int_{\mathbb{R}^{2d}} \sigma(z'-w)\,\mathrm{tr}((\alpha_{z'}S)(f\otimes g))\,dz'dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} (\int_{\mathbb{R}^{2d}} b(w)\sigma(z'-w)\,dz')\,\mathrm{tr}((\alpha_{z'}S)(f\otimes g))\,dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} b*\sigma(z')\langle(\alpha_{z'}S)f,g\rangle\,dz' \\
&= \langle(S\star(b*\sigma))f,g\rangle.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

推论 3.21。在 $\mathbb{S}_0$ 上定义的映射 $\mathcal{F}_{W_\tau}$ 和 W_τ 可延拓为拓扑同构

$$\mathcal{F}_{W_\tau}\colon \mathbb{S}_0' \to \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}) \qquad and \qquad W_\tau\colon \mathbb{S}_0' \to \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$$

通过对偶：

$$\langle\mathcal{F}_{W_\tau}S,a\rangle := \langle S,\mathrm{SR}^\tau a\rangle, \qquad \langle W_\tau S,a\rangle := \langle S,\mathrm{Op}_\tau\, a\rangle, \tag{57}$$

其中 $S\in\mathbb{S}_0'$ 和 $a\in\mathcal{S}_0$（$\mathbb{R}^{2d}$）。逆映射分别为

$$\mathrm{SR}^\tau\colon \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{S}_0' \qquad and \qquad \mathrm{Op}_\tau\colon \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{S}_0',$$

。

证明。（57）中的定义依赖于以下事实：$\mathrm{Op}_\tau = W_\tau^*$和 $\mathrm{SR}^\tau = \mathcal{F}_{W_\tau}^*$，参见定理 3.7 和推论 3.9。显然，如果 $S\in\mathbb{S}_0'$，那么按（57）定义的 $\mathcal{F}_{W_\tau}S$ 和 $W_\tau S$ 属于 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$。此外，也很容易验证 $\mathcal{F}_{W_\tau}\colon\mathbb{S}_0'\to\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $W_\tau\colon\mathbb{S}_0'\to\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 的线性性与有界性，以及它们扩张了 $\mathcal{F}_{W_\tau}\colon\mathbb{S}_0\to\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $W_\tau\colon\mathbb{S}_0\to\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$ 这一事实。

我们证明 W_τ 是一个同构，其逆映射为 Op^τ，然后以同样的方式处理 $\mathcal{F}_{W_\tau}$。W_τ 是单射，因为 $\mathrm{Op}^\tau\colon\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})\to\mathbb{S}_0$ 是一个同构。现在固定 $a\in\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$，存在一个序列 $\{a_n\}_n\subseteq\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$，使得 $a_n \xrightarrow{w-*}_n$

a 属于 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$。由于 W_τ 是 $\mathbb{S}_0$ 与 $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$之间的同构，存在$\{A_n\}_n \subseteq \mathbb{S}_0$ 使得 $a_n = W_\tau A_n$。我们看到存在 $A \in \mathbb{S}_0'$ 使得 $A_n \xrightarrow{w-*}_n A$ 属于 $\mathbb{S}_0'$，事实上，取 $b \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$

$$\langle a,b\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle W_\tau A_n,b\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle A_n, \mathrm{Op}_\tau\, b\rangle.$$

因此 $a = W_\tau A$，这证明 W_τ 是满射。现在我们证明 $W_\tau \circ \mathrm{Op}_\tau$ 在 $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 上是恒等映射，取 $a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $b \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^{2d})$:

$$\langle W_\tau \circ \mathrm{Op}_\tau\, a,b\rangle = \langle \mathrm{Op}_\tau\, a, \mathrm{Op}_\tau\, b\rangle = \langle a,W_\tau \circ \mathrm{Op}_\tau\, b\rangle = \langle a,b\rangle.$$

第一个等式就是 (57)，第二个是 (32)，最后一个是推论 3.8 中的 (i)。对于另一个方向，取 $S \in \mathbb{S}_0'$ 和 $T \in \mathbb{S}_0$:

$$\langle \mathrm{Op}_\tau \circ W_\tau S,T\rangle = \langle W_\tau S,W_\tau T\rangle = \langle S, \mathrm{Op}_\tau \circ W_\tau T\rangle = \langle S,T\rangle.$$

第一个等式是 (32)，第二个是 (57)，最后一个是推论 3.8 中的 (i)。□

3.3. τ-算子的 Cohen 类。在本小节中，我们定义 $Q_a^\tau(S)$，并回顾 [17] 中 $Q_S^\tau(f)$ 的定义。我们将看到 $Q_a^\tau(S)$ 与一些著名对象相关，并注意到它与混合态局域化算子 $a \star S$ 的 τ-符号一致。接下来，我们将陈述一些关于算子 G_T^φ 的 Gabor矩阵、τ-Cohen 类、迹和 τ-Wigner 分布之间相互关系的结论。

定义 3.22. 对于 $a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$，我们将算子 $S \in \mathbb{S}_0$ 的 τ-科恩类分布定义为其核为 a 的分布:

$$Q_a^\tau(S) \coloneqq a * W_\tau S. \tag{58}$$

当然，秩一情形 $f \otimes g$ 可化为式 (23) 中给出的定义。我们还回顾一下 [17] 中给出的函数 $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 关于算子 $S \in \mathbb{S}_0'$ 的科恩类分布定义:

$$Q_S f \coloneqq (f \otimes f) \star \check{S}. \tag{59}$$

容易看出，对于每个 $z \in \mathbb{R}^{2d}$

$$Q_S f(z) = (f \otimes f) \star \check{S}(z) = \langle (\alpha_z S)f, f, \rangle.$$

注 3.23. 若 $a \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^{2d})$ 且 $S \in \mathbb{S}_0$，则可知， S 关于 a 的 τ-科恩类表示恰好是混合态局部化算子$a \star S$的 τ-符号:

$$\mathrm{a}_\tau^{a\star S} = W_\tau(a \star S) = a * W_\tau S = Q_a^\tau(S).$$

引理 3.24. 设 $S \in \mathbb{S}_0$ 的谱分解为 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n$，对于 $f, \varphi, \psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$ 和 $\{h_n\}_n \subseteq \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_{\mathcal{S}_0}^2 < +\infty.$$

。那么对每个 $z \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$Q^{\tau}_{W_{1-\tau}(\check{\psi},\check{\varphi})}(S)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{\varphi} f_n(z) \overline{V_{\psi} g_n(z)}; \tag{60}$$

$$Q^{\tau}_{W_{1-\tau}(\check{\varphi},\check{\varphi})}(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \otimes h_n)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} |V_{\varphi} h_n(z)|^2 . \tag{61}$$

证明。显然，只需证明第一个恒等式。我们首先证明，对于 $f, g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d)$

$$Q^{\tau}_a(f,g) = (f \otimes g) \star \mathrm{Op}_{1\text{-}\tau}(a). \tag{62}$$

事实上，首先将 $\mathcal{F}_{\sigma}$ 作用于右侧，可得

$$\mathcal{F}_{\sigma}((f \otimes g) \star \mathrm{Op}_{1\text{-}\tau}(a)) = \mathcal{F}_{W_{\tau}}(f \otimes g) \cdot \mathcal{F}_{W_{1-\tau}} \mathrm{Op}_{1\text{-}\tau}(a) = V_g^{\tau} f \cdot \mathcal{F}_{\sigma} a.$$

我们再应用一次 $\mathcal{F}_{\sigma}$：

$$(f \otimes g) \star \mathrm{Op}_{1\text{-}\tau}(a) = \mathcal{F}_{\sigma} V_g^{\tau} f * \mathcal{F}_{\sigma} \mathcal{F}_{\sigma} a = W_{\tau}(f,g) * a.$$

现在我们可以如下进行:

$$\begin{aligned} Q^{\tau}_{W_{1-\tau}(\check{\psi},\check{\varphi})}(S) &= W_{1-\tau}(\check{\psi},\check{\varphi}) * W_{\tau}(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{1-\tau}(\check{\psi},\check{\varphi}) * W_{\tau}(f_n, g_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \otimes g_n) \star \mathrm{Op}_{1\text{-}\tau}(W_{1-\tau}(\check{\psi},\check{\varphi})) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \otimes g_n) \star (\check{\psi} \otimes \check{\varphi}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{\varphi} f_n(z) \overline{V_{\psi} g_n(z)}, \end{aligned}$$

其中最后一个等式得益于 [17]。 □

如果有界算子 T 作用于 $L^2(\mathbb{R}^d)$且满足以下条件，我们称其为正算子，记作 $T \geq 0$:

$$\langle Tf, f \rangle \geq 0, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

算子 $T \in \mathcal{J}^1$ 和 $T \geq 0$ 在量子力学中也称为态。取 $T \in \mathbb{S}_0'$ 和 $\varphi \in \mathcal{S}$，则 T 的 Gabor矩阵（关于 φ）定义为

$$G_T^{\varphi}(z,w) \coloneqq \langle T\pi(w)\varphi, \pi(z)\varphi \rangle, \qquad z = (x,\omega), w = (u,v) \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{63}$$

我们注意到，算子的 Gabor矩阵不依赖于 τ，即

$$G_T^{\varphi}(z,w) = \langle T\pi(w)\varphi, \pi(z)\varphi\rangle = \langle T\pi^{\tau}(w)\varphi, \pi^{\tau}(z)\varphi\rangle, \qquad \forall\, \tau \in [0,1].$$

注 3.25. 我们指出，算子 T 相对于 φ 的 Gabor 矩阵的对角线，是 φ 相对于 T 的 Cohen 类表示，至多相差一个反射：

$$G_T^{\varphi}(-z,-z) = Q_T\varphi(z). \tag{64}$$

事实上

$$\begin{aligned} G_T^{\varphi}(-z,-z) &= \langle T\pi(-z)\varphi, \pi(-z)\varphi\rangle = \langle T\pi(z)^*\varphi, \pi(z)^*\varphi\rangle \\ &= \langle (\alpha_z T)\varphi, \varphi, \rangle = Q_T\varphi(z). \end{aligned}$$

设 F 和 H 是 $(z,w) \in \mathbb{R}^{4d}$ 的函数，且 Θ 是一个实 $4d \times 4d$ 矩阵。那么，由 Θ 诱导的扭卷积定义如下：

$$F \natural_{\Theta} H(z,w) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} F(z',w') H(z-z', w-w') e^{2\pi i (z,w)\Theta(z',w')}\, dz' dw'. \tag{65}$$

引理 3.26. 设 $T, S \in \mathcal{J}^1$, $T, S \geq 0$。那么，对于任意 $\tau \in [0,1]$，有

$$\operatorname{tr}(TS) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_\tau T(z) \overline{W_\tau S(z)}\, dz. \tag{66}$$

证明. 由于 T 和 S 是正的迹类算子，它们可表示为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \otimes f_n, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n g_n \otimes g_n$$

对于某些正交归一集 $\{f_n\}_n$ 和 $\{g_n\}_n$，它们属于 L^2 和 λ_n、$\mu_n \geq 0$。设 $\{e_n\}_n$ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$的一组标准正交基：

$$\operatorname{tr}(TS) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle TSe_n, e_n\rangle = \sum_{i,j}^{\infty} \lambda_j \mu_i \left|\langle f_j, g_i\rangle\right|^2.$$

另一方面，

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} W_\tau T(z) \overline{W_\tau S(z)}\, dz = \sum_{i,j}^{\infty} \lambda_j \mu_i \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_\tau f_j(z) \overline{W_\tau g_i(z)}\, dz = \sum_{i,j}^{\infty} \lambda_j \mu_i \left|\langle f_j, g_i\rangle\right|^2,$$

其中最后一个等式源自 Moyal 恒等式。至此，证明完毕。 □

注 3.27. 由于我们假设 $S \geq 0$, S 自伴，并且对于 $\tau = 1/2$，有 $W_{1/2}S$ 为实值。事实上，利用引理 3.26 证明中给出的表示：

$$W_{1/2}S = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n W_{1/2} g_n$$

其中每个 $W_{1/2}g_n$ 都是实值的，且 $\mu_n \geq 0$。因此，对于 $\tau = 1/2$ ，我们得到 [12, 引理 2.7]。

引理 3.28. 设 $T \in \mathcal{J}^1$ ，并考虑满足 $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ 的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。那么

$$\operatorname{tr} T = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \langle (\alpha_z T)\varphi, \varphi \rangle \, dz = \int_{\mathbb{R}^{2d}} Q_T\varphi(z) \, dz = \int_{\mathbb{R}^{2d}} G_T^{\varphi}(z,z) \, dz. \tag{67}$$

证明。证明可由直接计算得到，计算中使用证明引理 3.26 时给出的表示以及涉及函数 φ 的 Moyal 恒等式:

$$\langle f_j, g_i \rangle = \langle V_\varphi f_j, V_\varphi g_i \rangle,$$

细节留给感兴趣的读者。 □

引理 3.29. 设 $T \in \mathcal{J}^1$、 $T \geq 0$ ，并设满足 $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ 的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。那么对于每个 $z \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$Q_T\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_\tau T(w) \overline{W_\tau \varphi(z+w)} \, dw = W_\tau T * (W_\tau \varphi)^*(z), \tag{68}$$

其中 $(W_\tau\varphi)^*(w) = \overline{W_\tau\varphi(-w)}$。

证明。我们直接计算

$$\begin{aligned} Q_T\varphi(z) &= \langle \pi(z) T \pi(z)^* \varphi, \varphi \rangle = \operatorname{tr}(T(\pi(z)^*\varphi \otimes \pi(z)^*\varphi)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} W_\tau T(w) \overline{W_\tau(\pi(z)^*\varphi \otimes \pi(z)^*\varphi)(w)} \, dw, \end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为引理 3.26。经过简单计算可得

$$W_\tau(\pi(z)^*\varphi \otimes \pi(z)^*\varphi)(w) = W_\tau\varphi(z+w),$$

这也称为协变性质，由此证明得证 f. □

引理 3.30。设 $T \in \mathcal{J}^1$, $T \geq 0$ ，并考虑满足 $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ 的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。那么对任意 $z, w \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$|G_T^{\varphi}(z,w)|^2 \leq Q_T\varphi(-z) Q_T\varphi(-w).$$

证明。结论可由正算子 T 所诱导的内积对应的柯西-施瓦茨不等式以及注 3.25 得出。□

引理 3.31. 令 0_d 和 I_d 分别表示零矩阵和单位 $d \times d$ 矩阵。定义

$$\Theta := \begin{bmatrix} 0_d & 0_d & 0_d & 0_d \\ I_d & 0_d & 0_d & 0_d \\ 0_d & 0_d & 0_d & 0_d \\ 0_d & 0_d & -I_d & 0_d \end{bmatrix}.$$

令 $T \in \mathcal{J}^1$，并考虑满足 $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ 的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。对于 $z = (x, \omega)$ $w = (u, v) \in \mathbb{R}^{2d}$，我们有

$$
\begin{aligned}
(69) \quad G_T^{\varphi}(z,w) &= G_T^{\varphi} \natural_{\Theta} (G_{\varphi\otimes\varphi}^{\varphi})^*(z,w) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} G_T^{\varphi}(z',w') (G_{\varphi\otimes\varphi}^{\varphi})^*(z-z', w-w') e^{2\pi i(\omega x' - u'v)}\, dz' dw',
\end{aligned}
$$

其中 $z' = (x', \omega')$ $w' = (u', v') \in \mathbb{R}^{2d}$。

证明。我们两次应用 Moyal 恒等式：

$$
\begin{aligned}
G_T^{\varphi}(z,w) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} V_{\varphi}[T\pi(w)\varphi](z') \overline{V_{\varphi}[\pi(z)\varphi](z')}\, dz' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} V_{\varphi}[\pi(w)\varphi](w') \overline{V_{\varphi}[T^*\pi(z')\varphi](w')} \langle \pi(z')\varphi, \pi(z)\varphi\rangle\, dz' dw' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} G_T^{\varphi}(z',w') \langle \pi(w)\varphi, \pi(w')\varphi\rangle \langle \pi(z')\varphi, \pi(z)\varphi\rangle\, dz' dw'.
\end{aligned}
$$

接下来，通过直接但繁琐的计算即可证明

$$
\langle \pi(z)\varphi, \pi(z')\varphi\rangle \langle \pi(w')\varphi, \pi(w)\varphi\rangle = (G_{\varphi\otimes\varphi}^{\varphi})^*(z-z', w-w') e^{2\pi i(\omega x' - u'v)}.
$$

证明至此完成。 □

引理 3.32。设 $T \in \mathcal{J}^1$, $T \geq 0$，并考虑满足 $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ 的 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$。那么对任意 $\tau \in [0,1]$:

$$
(70) \quad W_{\tau} T(z) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i[(\omega x' - \omega' x) + (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\tau) x'\omega' + x'v]} G_T^{\varphi}\left(\frac{z'}{2} - w, -\frac{z'}{2} - w\right) dw dz',
$$

其中 $z = (x, \omega)$ $z' = (x', \omega')$ $w = (u, v) \in \mathbb{R}^{2d}$。

证明。我们首先重新表述 T 的 τ-Wigner 分布：

$$
W_{\tau} T(z) = \mathcal{F}_{\sigma} \mathcal{F}_{W_{\tau}} T(z) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi i(\omega x' - \omega' x)} \operatorname{tr}(\pi^{\tau}(z')^* T)\, dz'.
$$

回顾 π^{τ} 的性质（见第 2 节），我们可知

$$
\begin{aligned}
\pi^{\tau}(z'/2 + z'/2) &= e^{2\pi i[(1-\tau)\frac{x'\omega'}{4} - \tau\frac{x'\omega'}{4}]} \pi^{\tau}(z'/2)\pi^{\tau}(z'/2) \\
&= e^{\frac{\pi}{2} i(1-2\tau) x'\omega'} \pi^{\tau}(z'/2)\pi^{\tau}(z'/2).
\end{aligned}
$$

取伴随后得到 $\pi^\tau(z')^* = e^{-\frac{\pi}{2}i(1-2\tau)^{x'\omega'}}\pi^\tau(z'/2)^*\pi^\tau(z'/2)^*$，根据引理 3.28，我们写作：

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\pi^\tau(z')^*T) &= e^{-\frac{\pi}{2}i(1-2\tau)x'\omega'}\operatorname{tr}(\pi^\tau(z'/2)^*T\pi^\tau(z'/2)^*) \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}i(1-2\tau)x'\omega'}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\langle T\pi^\tau(z'/2)^*\pi^\tau(w)^*\varphi, \pi^\tau(z'/2)\pi^\tau(w)^*\varphi\rangle\, dw \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}i(1-2\tau)x'\omega'}e^{-\frac{\pi}{2}i(1-\tau)x'\omega'} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^{2d}}\langle T\pi^\tau(-z'/2)\pi^\tau(-w)\varphi, \pi^\tau(z'/2)\pi^\tau(-w)\varphi\rangle\, dw \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}i(2-3\tau)x'\omega'}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\langle T\pi(-z'/2)\pi(-w)\varphi, \pi(z'/2)\pi(-w)\varphi\rangle\, dw \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}i(2-3\tau)x'\omega'}\int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-2\pi ix'v}\langle T\pi(-z'/2-w)\varphi, \pi(z'/2-w)\varphi\rangle\, dw.
\end{aligned}$$

论证至此结束。 □

4. A characterization of Schwartz operators

本节介绍 Feichtinger 算子的加权版本，并给出类 $\mathfrak{S}$ 的另一种描述。我们使用多项式权函数

$$v_s(z) \coloneqq (1+|z|^2)^{\frac{s}{2}}, \qquad z \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{71}$$

其中 $s \geq 0$。为避免符号极其繁复，对于权函数 v_s，我们仅在此处采用以下记法：

$$v_s \otimes v_s(z,w) \coloneqq K_{v_s\otimes\overline{v_s}} = v_s(z)v_s(w), \qquad \forall z,w \in \mathbb{R}^{2d}.$$

定义 4.1。对于 $s \geq 0$，我们将 Feichtinger 算子的加权类定义为

$$\mathbb{M}^1_s \coloneqq \{S\colon \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^d) \mid S\text{是线性连续映射，其核为 } K_S \in M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d})\}.\text{对于 } S \text{ 中的 } \mathbb{M}^1_s, \text{我们定义映射} \tag{72}$$

$$\|S\|_{\mathbb{M}^1_s} \coloneqq \|K_S\|_{M^1_{v_s\otimes v_s}}. \tag{73}$$

注 4.2. (*i*) 当 $s=0$ 时，我们得到 Feichtinger 算子 $\mathbb{S}_0$；

(*ii*) 在 $\mathbb{M}^1_s$ 上，由 (73) 定义的映射是一个范数，并且不难看出，$(\mathbb{M}^1_s, \|\cdot\|_{\mathbb{M}^1_s})$ 是一个巴拿赫空间，且对每个 $s \geq 0$，以下连续嵌入成立：

$$\mathbb{M}^1_s \hookrightarrow \mathbb{S}_0. \tag{74}$$

Lemma 4.3. 对于任意 $S \in \mathbb{M}^1_s$，存在 $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n \subseteq M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d})$，使得 $\quad at$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes g_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_{M^1_{v_s}}\|g_n\|_{M^1_{v_s}} \leq +\infty, \quad K_S = \sum_{n=1}^{\infty} K_{f_n\otimes g_n}.$$

证明。证明基于以下事实：

$$M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d}) = M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}M^1_{v_s}(\mathbb{R}^d).$$

另请参见引理 3.4 的证明。 □

定理 4.4。对于每个 $\tau \in [0,1]$，映射 W_τ：$\mathbb{M}^1_s \to M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d})$ 是一个拓扑同构，其逆映射为 Op_τ：$M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d}) \to \mathbb{M}^1_s$。

证明。该证明沿用了定理 3.7 和推论 3.8 的证明思路。□

推论 4.5。算子 S 属于 $\mathbb{M}^1_s$，当且仅当对于某个（从而对于每个）$\tau \in [0,1]$ $W_\tau S \in M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d})$。

定理 4.6。以下结论成立：

$$\mathfrak{S} = \bigcap_{s\geq 0} \mathbb{M}^1_s. \tag{75}$$

证明。根据推论 4.5，S 属于右侧集合，当且仅当

$$W_\tau S \in \bigcap_{s\geq 0} M^1_{v_s\otimes v_s}(\mathbb{R}^{2d}) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d}).$$

该结论成立，因为 $W_{1/2}S$ 是 S的 Weyl 符号，即 $\mathsf{a}^S_{1/2} = W_{1/2}S$。 □

回顾一下，如果函数 F定义在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上，且对每个多重指标α，$\beta \in \mathbb{N}^d_0$ 都满足

$$\sup_{x,\omega\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \omega^\beta F(x,\omega)\right| < +\infty,$$

其中，若 $x = (x_1, \ldots, x_d)$ 且 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$，则 x^α 表示 $x_1^{\alpha_1}\cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$。

在 [12, 定理 1.1]中，给出了一个充分条件，使正的迹类算子属于 $\mathfrak{S}$。具体而言，若 $T \in B(L^2)$，$T \geq 0$满足：对某个 $\tau \in [0,1]$，$W_\tau T$ 存在且快速衰减，则 $T \in \mathfrak{S}$，并且对每个$\tau \in [0,1]$，$W_\tau T$都存在。本着这一思路，我们为一般的 $S \in B(L^2)$给出以下充分条件。注意，我们不要求 S 为正。

推论 4.7. 设 $S \in B(L^2)$，并假设存在某个 $\tau \in [0,1]$ $W_\tau S$。此外，假设相对于 $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ 中的某个非零窗函数，$W_\tau S$ 的短时傅里叶变换快速衰减。那么对每个 $\tau \in [0,1]$，$W_\tau S$ 都存在，且 S 属于 $\mathfrak{S}$。

证明。令我们选取 $G \in L^2(\mathbb{R}^{2d}) \setminus \{0\}$。如果 $V_G W_\tau S$ 是快速衰减的，那么对每个 $s \geq 0$ 都有 $S \in \mathbb{M}^1_s$。由定理 4.6 可得结论。□

Acknowledgments

第一作者感谢 Eduard Ortega 提供资金支持，使其得以访问特隆赫姆，并由此促成了这项工作。

References

[1] F. Bastianoni、E. Cordero 和 F. Nicola。局部化算子特征函数的衰减性与光滑性。J. Math. Anal. Appl. 492, 124480, 2020。[2] O. Christensen。《框架与 Riesz 基导论》。应用与数值调和分析，Birkh¨äuser Basel，第二版，2016。[3] E. Cordero 和 K. Gr¨öchenig。局部化算子的时频分析。J. Funct. Anal., 205(1):107–131, 2003。[4] E. Cordero 和 F. Nicola。维格纳分布的精确积分界。Int. Math. Res. Not. IMRN, (6):1779–1807, 2018。[5] E. Cordero 和 L. Rodino。《算子的时频分析》。De Gruyter Studies in Mathematics 75，柏林/波士顿，2020。[6] M. D¨örfler、F. Luef、H. McNulty 和 E. Skrettingland。算子的时频分析与 Coorbit 空间。arXiv 预印本 arXiv:2210.04844，2022。[7] C. de Gosson 和 M. de Gosson。论定义密度算子的统计系综的非唯一性，以及具有可积维格纳分布的一类混合量子态。Quantum Reports, 3(3):473-81, 2021。[8] J. De Vries。有效局部紧变换群的局部权重及其维数 og $L^2(G)$。Colloq. Math. 39(2): 319–3323, 1978。[9] H. G. Feichtinger。论一种新的 Segal 代数。Monatshefte f¨ür Mathematik 92, 269–289, 1981。[10] H. G. Feichtinger 和 M. S. Jakobsen。某种 Segal 代数的内核定理。Monatsh. Math., 2022。[11] K. Gr¨öchenig 和 T. Strohmer。局部紧阿贝尔群上的伪微分算子与 Sj¨östrand 符号类。Journal f¨ür die reine und angewandte Mathematik, 2007(613), 121–146, 2007。[12] F. Hern´ández 和 C. J. Riedel。快速衰减的维格纳函数是施瓦茨函数。J. Math. Phys. 63, 022104, 2022。[13] M. S. Jakobsen。论一种（已不再）新的 Segal 代数：Feichtinger 代数综述。J. Fourier Anal. Appl., 24:1579–1660, 2018。[14] M. Keyl、J. Kiukas 和 R. Werner。施瓦茨算子。Rev. Math. Phys. 28(3), 1630001, 60, 2016。[15] L. Lafleche。论量子 Sobolev 不等式。arXiv 预印本 arXiv:2210.03013，2022。[16] F. Luef 和 E. Skrettingland。论累积的科恩类分布与混合态局部化算子。Constr. Approx. 52, 31–64, 2020。[17] F. Luef 和 E. Skrettingland。混合态局部化算子：科恩类与迹类算子。J. Fourier Anal. Appl., 25(4):2064–2108, 2019。[18] R. Megginson。《巴拿赫空间理论导论》。Graduate Texts in Mathematics，第183卷，第 xx+596页。Springer，纽约，1998。[19] J. E. Moyal。作为统计理论的量子力学。Proc. Cambridge Phil. Soc., 45:99– 124, 1949。[20] E. Skrettingland。局部化算子的卷积。硕士论文，NTNU，2017。[21] B. Simon。《迹理想及其应用》。剑桥大学出版社，剑桥，1979。

[22] J. Toft。拟巴拿赫空间或 H¨ormander 类中符号所对应伪微分算子的连续性与紧性。Anal. Appl. (Singap.), 15(3):353–389,2017。[23] R. F. Werner。相空间上的量子调和分析。J. Math. Phys. 25(5), 1404–1411, 1984。[24] E. P. Wigner。论热力学平衡的量子修正。Phys. Rev. 40, 749–759, 1932。Dipartimento di Scienze Matematiche,
Politecnico di Torino, corso Duca degliAbruzzi 24, 10129 Torino, Italy电子邮箱: federico.bastianoni@polito.itDepartment of Mathematics,
NTNU Norwegian University of Science and Tech-nology, NO-7491 Trondheim,
Norway电子邮箱：franz.luef@ntnu.no