arXiv:2301.04864v1 [math.AG] 12 Jan 2023

正特征下曲线模空间的拓扑结构与远阿贝尔几何

ZHI HU、YU YANG 和 RUNHONG ZONG

摘要。本文研究了正特征下关于光滑带标记稳定曲线的一类新的绝对几何现象。这表明，可以从远阿贝尔几何的视角理解曲线模空间的拓扑结构。我们提出了一些新的远阿贝尔几何猜想，将特征为 $p > 0$ 的代数闭域上的曲线的温和基本群与曲线模空间联系起来。这些猜想是 Tamagawa 提出的、关于特征为 $p > 0$ 的代数闭域上的曲线的 Grothendieck 猜想弱同构版本的推广。此外，我们证明，这些猜想对亏格0曲线模空间中的某些点成立。

目录

1. 引言 1
1.1. 正特征下基本群之谜 1
1.2. 曲线模空间的拓扑结构与远阿贝尔几何 2
1.3. 主要结果 3
1.4. 若干进一步发展 4
1.5. 本文结构 6
1.6. 致谢 6
2. 猜想 6
2.1. 弱 Hom 版本猜想 6
2.2. 带标记点集合猜想 7
3. 标记点的重构 8
3.1. 阿贝尔重构 9
3.2. 标记点集 9
3.3. 惯性子群的重构 12
3.4. 通过满射重构惯性子群 14
3.5. 通过满射重构加法结构 21
4. 主要定理 23
4.1. 第一个主要定理 23
4.2. 第二主定理 29
参考文献 31

1. 引言

1.1. 正特征下基本群之谜。

1.1.1. 设 k 是特征为 $p \geq 0$ 的代数闭域，并设 $(X,\ D_X)$ 是一个光滑的、类型为 $(g_X,\ n_X)$ 的带标记稳定曲线，其定义在 k 上（即 $2g_X + n_X - 2 > 0$，见 [K，定义 1.1 (iv)]），其中 X 表示底层曲线，D_X 表示（有序的）标记点有限集，g_X 表示 X 的亏格，而 n_X 表示其基数

#(D_X) 是 D_X 的基数。令 $U_X := X \setminus D_X$。选取 U_X 的一个基点后，我们得到 U_X 的温和基本群$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$。

若 $p = 0$，众所周知，$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 同构于型为 (g_X, n_X) 的黎曼曲面的拓扑基本群的有限群完备化。因此，几乎无法从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 中获取关于 U_X 的几何信息。相比之下，若 $p > 0$，情况则与特征零时截然不同。温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 非常神秘，其结构至今仍不为人所知；尤其是，特征为 $p > 0$ 的代数闭域上的曲线存在远阿贝尔现象。

1.1.2. 首先，让我们介绍一些关于远阿贝尔几何的一般背景。20 世纪 80 年代，A. Grothendieck 提出了一种名为远阿贝尔几何的算术几何理论（[G]）。该理论的核心问题是：能否从代数基本群的各种形式出发，以群论的方式重构簇的几何信息？Grothendieck 最初提出的远阿贝尔几何，关注的是定义在算术域上的簇，尤其是有限生成于 $\mathbb{Q}$之上的域。在特征 零的曲线情形中，远阿贝尔 几何已得到深入研究（例如 [N], [T1]）；尤其是，最重要的情形（即有限生成于 之上的域，或更一般地，亚p-进域）已得到完备解决（[M]）。值得注意的是，基域的伽罗瓦群在几何基本群上的作用，对于恢复算术域上曲线的几何信息起着至关重要的作用。

T 接下来，我们回到 k 为特征 $p > 0$的代数闭域这一情形。在 [T2], A. Tamagawa 发现，特征为 p的代数闭域上的曲线也存在远阿贝尔现象。这一发现颇为出人意料，因为这意味着，在正特征下，无需伽罗瓦作用，仅凭几何基本群就能确定曲线的几何性质。自 20 世纪 90 年代末以来，M. Raynaud（R[R2]）、F. Pop-M. Saïdi（PS[PS]）、Tamagawa（T[T2], T[T4], T[T5]）以及本文第二作者（[Y1], [Y2], [Y4]）进一步研究了这类远阿贝尔现象。更确切地说，他们关注的是 Tamagawa 提出的、针对特征为 $p > 0$ 的代数闭域上的曲线的 Grothendieck 远阿贝尔猜想的所谓弱同构版本（或简称“弱同构版本猜想”）（[T3，猜想 2.2]），该猜想断言，当且仅当曲线的驯 ramified（或 étale）基本群同构时，这些曲线才同构。迄今为止，这一猜想仍悬而未决。

1.2. 曲线模空间的拓扑结构与远阿贝尔几何。本文研究一种关于代数闭域上特征为 $p > 0$ 的曲线的新型绝对几何现象，该现象表明，可以通过曲线模空间的基本群来理解其拓扑结构。

1.2.1. 设 $\mathbb{F}_p$ 为特征 $p > 0$ 的素域，设 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g\,n,,\mathbb{Z}}$ 为 $\mathbb{Z}$ 上参数化类型为 (g, n) 的光滑 n 点带标记稳定曲线的模叠（定义见 [K]）。令 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g\,n,,\mathbb{F}_p} := \mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g\,n,,\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$。注意，$n$-光滑带标记稳定曲线的标记点集具有 n 阶对称群的自然作用 S_n。此外，我们用 $\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{F}_p} := [\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g,n,\mathbb{F}_p}/S_n]$ 表示商叠，并用 $M_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 表示 $\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 的粗模空间。

令 $q \in M_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 为任意一点，$k(q)$ 为 q 的剩余域，k_q 为包含 $k(q)$ 的代数闭域，并令 $V_q := \overline{\{q\}}$ 为 $\{q\}$ 在 M_g 中的拓扑闭包，$_{n,\mathbb{F}_p}$。记 $(X_{k_q}, D_{X_{k_q}})$ 为由自然态射 Spec$k_q \to M_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 确定的、定义在 k_q 上的类型为 (g, n) 的光滑带标记稳定曲线，并设 $U_{X_{k_q}} := X_{k_q} \setminus D_{X_{k_q}}$。特别地，若 k_q 是 $k(q)$ 的代数闭包，则记 $(X_{k_q}, D_{X_{k_q}}) := (X_q, D_{X_q})$ 且 $U_{X_q} := X_q \setminus D_{X_q}$。由于温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_{k_q}})$ 的同构类仅取决于 q，我们将温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_{k_q}})$ 记作 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$。

1.2.2. 我们沿用上文引入的记号。Tamagawa 的弱同构版本猜想可改述如下：

弱同构版本猜想。设 $q_i \in M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$, $i \in \{1,2\}$ 是 $M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$ 的任意一个点。有限生成群之间的连续同构集合

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$$

当且仅当 $V_{q_1} = V_{q_2}$ 时非空（即，作为概形的 $U_{X_{q_1}} \cong U_{X_{q_2}}$）。

弱同构版本猜想是指，可以从曲线温和基本群的同构类“作为集合”重构曲线模空间。这一猜想仅由 Tamagawa （[T4，定理 0.2]）在以下情形中得到证实：

> 假设 q_1 是M_0的一个闭点，$n,\,\mathbb{F}_p$。那么弱同构版本猜想成立。

接下来，我们提出如下新猜想，即对于特征为 $p > 0$ 的代数闭域上的曲线的 Grothendieck 猜想的弱 Hom 版本（也称为单纯性弱 Hom 版本猜想），它是弱同构版本猜想的推广。

弱 Hom 版本猜想。令 $q_i \in M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$, $i \in \{1,2\}$ 为 $M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$ 的任意一点。有限生成群之间的开连续同态集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$$

非空，当且仅当 $V_{q_1} \supseteq V_{q_2}$.

弱 Hom 版本猜想意味着，可以从光滑带标记稳定曲线的变形集合中，以群论方式重构其温和基本群的开连续同态集合。因此，它带来了一种新的绝对几何现象：

> 正特征下的曲线模空间，不仅可以从正特征下曲线的温和基本群的开连续同态集合中理解为集合，还可以将其理解为“拓扑空间”。

粗略地说，这意味着，对应于 q_2 上某个几何点的光滑带标记稳定曲线，可以变形为对应于 q_1 上某个几何点的光滑带标记稳定曲线，当且仅当温和基本群的开连续同态集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1)\ \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$ 非空。

1.3. 主要结果。

1.3.1. 主要结果如下（更一般的陈述见定理4.6 (iv)）：

定理 1.1。 弱 Hom 版本猜想成立，当 q_1 是 M_0 的一个闭点，$n,\mathbb{F}_p$.

定理 1.1 可由以下“Hom 型”单远几何结果推出（更精确的表述见定理 4.4 ），它是 Tamagawa 结果的推广（即 [T4，定理 0。2]）：

定理 1.2。令 $q_i \in M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$, $i \in \{1,2\}$ 为 $M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$ 的任意一个点。假设 q_1 是 $M_{g,\,n,\,\mathbb{F}_p}$ 的一个闭点。那么开连续同态的集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$$

非空，当且仅当 $U_{X_{q_1}} \cong U_{X_{q_2}}$ 作为概形。

请注意，定理1.2 与本质上不同于 [T4，定理 0。2]。原因如下：我们先验地并不知道是否

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$$

即使 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1)\ \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$ 非空，也可能为空。事实上，对于任意 $q_i \in M_{g,\ n,\ \mathbb{F}_p}$, $i \in \{1,2\}$，我们有

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1),\pi_1^{\mathrm{t}}(q_2)) = \emptyset,\ \mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1),\pi_1^{\mathrm{t}}(q_2)) \neq \emptyset$$

通常〔[T5，定理 0。3]〕。

另一方面，为了证明定理 1.2，我们需要建立各种关于阿贝尔重构的结果，这些结果基于温和基本群的开连续同态，其难度远高于通常的同构情形。下文将更详细地说明这一点。

1.3.2. 我们来说明 Tamagawa 的结果（即 [T4，定理 0。2]）的证明与 我们的结果（即定理 1.2）的证明之间的主要区别，以及我们证明中的新要素。首先，我们回顾 Tamagawa 结果证明中的关键要点。粗略地说，Tamagawa 的证明由两部分组成：

(1) 他证明了，对于光滑带标记稳定曲线，其标记点的惯性子群集合以及与这些惯性子群相关联的域结构，可以从温和基本群中通过群论方法重构。这是 Tamagawa 证明中最困难的部分。(2) 通过使用惯性子群及其相关联的域结构，当 $g = 0$ 时，他证明了标记点的坐标可以通过群论方法计算得出。

Tamagawa 在证明 (1) 和 (2) 中的群论重构属于同构版本的重构。这意味着，这些重构应当固定一个温和基本群的同构类。为说明这一点，我们举一个例子。设 U_{X_i}, $i \in \{1,2\}$ 是上文所引入的特征 $p > 0$ 代数闭域 k 上类型为 (g_X, n_X) 的曲线，$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 是 U_{X_i} 的温和基本群，ϕ: $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 是一个开连续同态，$H_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 是一个开子群，且 $H_1 := \phi^{-1}(H_2)$。在 Tamagawa 的证明中，由于 ϕ 是同构，我们有 $H_1 \simeq H_2$。于是，类型的群论重构表明，分别对应于 H_1 和 H_2 的曲线，其类型 $(g_{X_{H_1}}, n_{X_{H_1}})$ 与 $(g_{X_{H_2}}, n_{X_{H_2}})$ 相同。这是 Tamagawa 对标记点的惯性子群进行群论重构证明中的关键一点。遗憾的是，他的方法无法应用于本文。原因在于，我们需要处理 ϕ 是任意开连续同态的情形。由于一般而言 H_1 与 H_2 并不同构（例如特化同态），我们不知道 $(g_{X_{H_1}}, n_{X_{H_1}})$ 是否等于 $=(g_{X_{H_2}}, n_{X_{H_2}})$。这是远阿贝尔几何中“Hom 型”问题的主要难点之一。如果尝试重构与标记点的惯性子群相关联的域结构，那么广义哈斯-维特不变量也会出现类似的困难。

为克服上述困难，我们有如下关键观察：

Avr 的不等式$_p(H_i)$（即 p-广义哈斯-维特不变量的平均值（见 3.4.3）由 ϕ 导出，在代数闭域上特征为 $p > 0$ 的曲线的远阿贝尔几何理论中，发挥了比较（外）伽罗瓦表示的作用。

在本文中，我们重构标记点的惯性子群所采用的方法，与 Tamagawa 的重构完全不同。我们发展了一种新的 群论算法，用于重构标记点的惯性子群；其输入数据是一个同构于 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 的有限生成群 $i \in \{1,2\}$，而其输出 数据则是标记点的惯性子群（定理 3.18）。此外，我们证明，群论算法以及域结构的重构与任意满射 ϕ（命题 3 19。）相容。利用定理 3 18 。和命题 319， 。我们可以证明，Tamagawa 对坐标的计算与我们的 重构相容。这意味着定理1.2。

1.4. 一些进一步的发展。

1.4.1. 基本群模空间。 我们来说明关于绝对几何现象的一些进一步进展， 涉及弱 Hom 版本猜想。在 [Y6], 本文第二作者引入了一个拓扑空间 $\Pi_{g,\ n}$（或更一般地，$\overline{\Pi}_{g,\ n}$），它由光滑带标记稳定曲线的驯 ramified 基本群在群论意义下决定

类型为（g， n）的稳定曲线（或更一般地，任意带标记稳定曲线的几何对数 étale 基本群）的基本群模空间（称为曲线的基本群模空间），其底层集合是基本群同构类的集合，而其拓扑由基本群的有限商所决定。此外，他提出了所谓的同胚猜想。粗略地说，该猜想认为，对 Frobenius 作用所诱导的某个等价关系取商后，曲线模空间与基本群模空间同胚。

在现有文献中，“远阿贝尔”一词意指可以由其基本群确定一个几何对象。此外，关于基本群模空间的同胚猜想为我们理解远阿贝尔现象提供了一个新视角，具体如下：

> “远阿贝尔”一词意指，不仅可以由几何对象的基本群确定几何对象，而且还可以由几何对象的基本群确定某个几何对象的模空间。

从这一视角来看，同胚猜想可视为经典 Teichmüller 空间理论中一个著名定理的类比。该定理指出，复双曲曲线的 Teichmüller 空间与底曲面的拓扑基本群到群 $PSL_2(\mathbb{R})$ 的离散忠实表示空间同胚。

主要定理 现在，定理 1.1 意味着 $M_{0,4,\mathbb{F}_p}$ 作为拓扑空间同胚于 $\Pi_{0,4}$（注意，Tamagawa 的 T4 结果（即 [T4，定理 0.2]）仅说明自然映射 $M_{0,4,\mathbb{F}_p} \to \Pi_{0,4}$ 是集合之间的双射）。此外，基于 [Y1], [Y3], [Y4], [Y5], 以及本文的主要结果，带标记稳定曲线的 1 维模空间的同胚猜想在 [Y6] 和 [Y7] 中得到证实。对于更高维曲线模空间情形下的同胚猜想，弱 Hom 版本猜想和带标记点集猜想（见本文第 pcc2.2 节）也是理解该猜想的重要步骤（见 [Y8，第 1.2.3] 节）。

1.4.2. 温和基本群的有限商集合。我们沿用 1.1.1 中引入的记号。本文第 § 3 节中发展的技术，对于理解温和基本群有限商的集合具有重要应用$\pi_A^{\mathrm{t}}(U_X)$ $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$的 U_X。

注意，若 U_X是仿射的，则 étale 基本群 $\pi_1^{\text{ét}}(U_X)$ 的有限商集合 $\pi_A^{\text{ét}}(U_X)$ 可由其类型 (g_X, n_X) 完全确定（即由 Raynaud 和 D. Harbater 证明的 Abhyankar 猜想）。然而，无法由 $\pi_A^{\text{ét}}(U_X)$ 推知 $\pi_1^{\text{ét}}(U_X)$ 的结构，因为当 U_X 是仿射的时， $\pi_1^{\text{ét}}(U_X)$ 并非拓扑有限生成。

相比之下， $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 的同构类可由 $\pi_A^{\mathrm{t}}(U_X)$ 完全确定，因为 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 是拓扑有限生成的；而我们不能指望对整个集合 $\pi_A^{\mathrm{t}}(U_X)$ 给出明确描述，因为存在上文提到的绝对几何现象（即 $\pi_A^{\mathrm{t}}(U_X)$ 取决于 U_X 的同构类）。另一方面，为了更准确地理解正特征背景下温和基本群的结构与远阿贝尔现象之间的关系，自然会提出以下有趣的问题：

> U_X 的概形结构会如何明确地影响有限商 $\pi_A^{\mathrm{t}}(U_X)$的集合?

在 [Y9], 通过应用本文第 § 3 节中发展的技巧以及 [Y5，定理 1。2], 我们得到以下结果：

> 令 $q_1 \in M_{g_1, n_1, \mathbb{F}_p}$ 和 $q_2 \in M_{0, n_2, \mathbb{F}_p}$ 为任意点，并令 $\pi_A^{\mathrm{t}}(q_i)$ 为温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q_i)$ 的有限商集合。假设 q_2 是 $M_{0, n_2, \mathbb{F}_p}$ 的一个闭点，且 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1) \not\cong \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2)$。那么，我们可以显式构造一个有限群 G_{q_2}，它取决于 q_2，使得 $G_{q_2} \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q_1)$ 且 $G_{q_2} \notin \pi_A^{\mathrm{t}}(q_2)$。

1.5. 本文的结构。本文的组织结构如下。第 2节中，我们提出弱 Hom 版本猜想和带标记点集猜想。第 3节中，我们给出一种群论算法，用于重构与标记点相关联的惯性子群，并证明该群论算法与温和基本群之间任意的开满同态相容。第4节中，我们证明主要结果。

1.6. 致谢。第二作者获得了日本学术振兴会青年科学家研究资助金，资助编号为 16J08847和 20K14283。

2. 猜想

本节将提出两个关于特征为 $p>0$ 的代数闭域上曲线的远阿贝尔几何的新猜想。

2.1. 弱 Hom 版本猜想。本小节将提出本文的第一个猜想，我们称之为“弱 Hom 版本猜想”。

2.1.1. 设 k 是特征为 $p>0$ 的代数闭域，并设

$$(X, D_X)$$

是一个类型为 (g_X, n_X) 的光滑带标记稳定曲线，其定义在 k上，其中 X表示亏格为 g_X的（光滑）底层曲线，而 D_X表示基数为 n_X的（有序）有限标记点集：$=\#(D_X)$满足 [K，定义 1.1 (iv)]（即 $2g_X+n_X-2>0$）。注意，$U_X:=X\setminus D_X$ 是定义在 k上的双曲曲线。

设 (Y, D_Y) 和 (X, D_X) 是定义在 k 上的光滑带标记稳定曲线，并设 $f\colon (Y, D_Y)\to(X, D_X)$ 是光滑带标记稳定曲线之间的一个态射，且定义在 k 上。若 f 在 X 上是 étale 的（分别地，若 f 在 U_X 上是 étale 的，且在 D_X 上至多温和分歧；若 f 是伽罗瓦覆盖且是 étale 的；若 f 是伽罗瓦覆盖且是驯 ramified 的），则称 f 是 étale 的（分别地，是驯 ramified 的、伽罗瓦 étale 的、伽罗瓦驯 ramified 的）。

选取 $x\in U_X$ 的一个基点后，我们得到 U_X 的温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X, x)$，以及 X 的 étale 基本群 $\pi_1(X, x)$。由于本文只关注基本群的同构类，为简化记号，我们省略基点，分别用 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 和 $\pi_1(X)$ 表示 U_X 的温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X, x)$，以及 X 的 étale 基本群 $\pi_1(X, x)$。注意，存在一个自然的连续满同态 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)\twoheadrightarrow\pi_1(X)$。

2.1.2. 令 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 为 $\mathbb{F}_p$ 的一个代数闭包，并令 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g\,n,\,\mathbb{F}_p}$ 为定义在 $\mathbb{Z}$ 上、参数化 K [K 定义 1.1] 意义下类型为 (g, n) 的光滑带标记稳定曲线的模叠。光滑带标记稳定曲线的标记点集上有 n-对称群 S_n 的自然作用，记 $\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{Z}}:=[\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g,n,\mathbb{Z}}/S_n]$ 为相应的商叠。此外，我们记 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g,n}:=\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{Z}}\times_{\mathbb{Z}}\overline{\mathbb{F}}_p$, $\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{F}_p}:=\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{Z}}\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_p$, 以及 $\mathcal{M}_{g,n}:=\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{Z}}\times_{\mathbb{Z}}\overline{\mathbb{F}}_p$，并分别将 $M^{\mathrm{ord}}_{g\,n,}$, $M_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 和 $M_{g,n}$ 记为 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g\,n,}$, $\mathcal{M}_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 以及 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的粗模空间。

令 $q\in M^{\mathrm{ord}}_{g,\,n}$ 为任意一点，$k(q)$ 为 q 的剩余域，并令 k_q 为包含$k(q)$ 的代数闭域。将由自然态射 $\mathrm{Spec}k_q\to\mathrm{Spec}k(q)\to M^{\mathrm{ord}}_{g\,n,}$ 确定的、定义在 k_q 上的类型为 (g, n) 的光滑带标记稳定曲线记作 $(X_{k_q}, D_{X_{k_q}})$，并将 $U_{X_{k_q}}$ 记作 $X_{k_q}\setminus D_{X_{k_q}}$。特别地，若 k_q 是 $k(q)$ 的代数闭包，我们将 $(X_{k_q}, D_{X_{k_q}})$ 记作 (X_q, D_{X_q})。

由于温和基本群 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_{k_q}})$ 的同构类仅取决于 q（即该同构类不取决于 k_q 的选择），我们将分别用 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$ 和 $\pi_A^{\mathrm{t}}(q)$ 表示 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_{k_q}})$ 及 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_{k_q}})$ 的有限商集合。 [FJ，命题 16.10.7] 表明，对于任意点 q_1, $q_2\in M^{\mathrm{ord}}_{g\,n,}$，$\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1)$ 与 $\cong\pi_1^{\mathrm{t}}(q_2)$ 作为有限生成群同构，当且仅当 $\pi_A^{\mathrm{t}}(q_1)$ 与 $=\pi_A^{\mathrm{t}}(q_2)$ 作为集合相等。

另一方面，令 $q \in M^{\mathrm{ord}}_{g\,n}$,和 $q' \in M_{g,n,\mathbb{F}_p}$为任意点。我们分别将 q 和 q' 在 $M^{\mathrm{ord}}_{g\,n}$,及 $M_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 中的拓扑闭包记为 $V_q \subseteq M_{\mathrm{ord}g,n}$ 和 $V_{q'} \subseteq M_{g,n,\mathbb{F}_p}$。

2.1.3. 我们有如下定义。

定义 2.1。

(1) 设 $c_1, c_2 \in M^{\mathrm{ord},\ g\,n\ ^{\mathrm{cl}},}$ 为闭点，其中 $(-)^{\mathrm{cl}}$ 表示 $(-)$ 的闭点集合。则 $c_1 \sim_{fe} c_2$ 当且仅当存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $\nu(c_2) = \nu(c_1^{(m)})$，其中 $c_1^{(m)}$ 表示通过对对应曲线进行 m 次弗罗贝尼乌斯扭曲所得曲线对应的闭点。这里，“fe”表示“弗罗贝尼乌斯等价”。(2) 设 $q_1, q_2 \in M^{\mathrm{ord}}_{g\,n,}$ 为任意点。我们将 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$ 记为：对于每个闭点 $c_2 \in V_{\mathrm{cl}q_2}$，都存在一个闭点 $c_1 \in V_{\mathrm{cl}q_1}$ 使得 $c_1 \sim_{fe} c_2$。此外，若 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$ 且 $V_{q_1} \subseteq_{fe} V_{q_2}$，我们记为 $V_{q_1} =_{fe} V_{q_2}$。此外，若 $V_{q_1} =_{fe} V_{q_2}$，我们也记为 $q_1 \sim_{fe} q_2$。

我们有如下命题。

命题 2.2. 令 $\omega : M^{\mathrm{ord}}_{g,\ n} \to M_{g,\ n,\ \mathbb{F}_p}$ 为由自然态射 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{g,\ n} \to \mathcal{M}_{g,\ n,\ \mathbb{F}_p}$诱导的态射。令 $i \in \{1, 2\}$，并令 $q_i \in M_{\text{序}g,\ n}$ 以及 $q_i' := \omega(q_i) \in M_{g,\ n,\ \mathbb{F}_p}$。那么，当且仅当 $V_{q_1'} \supseteq V_{q_2'}$时，我们有 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$。特别地，当且仅当 $V_{q_1'} = V_{q_2'}$时，我们有 $V_{q_1} =_{fe} V_{q_2}$。也就是说，当且仅当 $U_{X_{q_1}} \cong U_{X_{q_2}}$ 时，我们有 $V_{q_1} =_{fe} V_{q_2}$ 作为概形。

证明。假设 $q_i, i \in \{1, 2\}$, 是 $M^{\mathrm{ord}}_{g\,n,}$ 的一个闭点。若 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$，我们立即得到 $q_1 \sim q_2$。因此，我们得到 $U_{X_{q_1}} \cong U_{X_{q_2}}$ 作为概形。这意味着 $q_1' = q_2'$。反之，若 $V_{q_1'} \supseteq V_{q_2'}$，则我们有 $q_1' = q_2'$。因此，我们得到 $q_1 \sim q_2$。

假设 $q_i, i \in \{1, 2\}$ 是 $M_{\mathrm{ord}g,n}$ 的任意一点。若 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$，则闭点的情形推出$V_{\mathrm{cl}q_1'} \supseteq V_{\mathrm{cl}q_2'}$.。由于 $V_{q_1'}$ 和 $V_{q_2'}$ 不可约，我们得到 $V_{q_1'} \supseteq V_{q_2'}$.。反过来，若 $V_{q_1'} \supseteq V_{q_2'}$，注意到 V_{q_i} 是 $(\omega)^{-1}(V_{q_i'})$ 的一个不可约分支。于是闭点的情形推出 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$。□

2.1.4. 记 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(-,-)$ 为有限生成群之间开连续同态的集合，记 $\mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(-,-)$ 为有限生成群之间同构的集合。我们有如下猜想。

弱 Hom 版本猜想。设 $q_i \in M_{g,n}$ （分别为 $q_i \in M_{g,n,\mathbb{F}_p}$），$i \in \{1, 2\}$ 是任意一个点。则有

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$$

非空，当且仅当 $V_{q_1} \supseteq_{fe} V_{q_2}$（分别为 $V_{q_1} \supseteq V_{q_2}$）。

弱 Hom 版本猜想意味着，模空间的拓扑结构可以通过曲线的驯分基本群来理解。特别地，弱 Hom 版本猜想 蕴含了以下猜想，该猜想实质上由 Tamagawa 提出（[T3]）。

弱同构版本猜想。设 $q_i \in M_{g,n}$ （分别为 $q_i \in M_{g,n,\mathbb{F}_p}$），$i \in \{1, 2\}$ 是任意一个点。则有

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$$

非空，当且仅当 $V_{q_1} =_{fe} V_{q_2}$（分别为 $V_{q_1} = V_{q_2}$）。

弱同构版本猜想意味着，可以通过曲线的驯分基本群来理解光滑带标记稳定曲线模空间的集合结构。

2.2. 带标记点集猜想。 在本小节中，我们提出本文的第二个猜想，我们称之为“带标记点集合猜想”。我们沿用 2.1.2中引入的记号。

2.2.1. 令 q 为 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 中的任意一个点，并令 $G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q)$ 为任意一个有限群。我们 pu t

$$U_G := \{q' \in M_{g,n}^{\mathrm{ord}} \mid G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q')\} \subseteq M_{g,n}^{\mathrm{ord}}.$$

于是我们得到以下结果。

命题 2.3. 设 q 是 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 中任意一个点，且 $G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q)$ 是任意一个有限群。那么集合 U_G 包含 q 在 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 中的一个开邻域。

证明。 命题 2.3 由 K. Stevenson 在 $n = 0$ 且 q 是 M_g 的闭点时证明，0 (参见 [Ste，命题 4.2])。此外，借助与证明 [Ste，命题 4.2], 命题 2.3 对 $n \geq 0$ 也成立。 □

定义 2.4。我们将 $q_{\mathrm{gen}} M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 的泛点记为，并令

$$\mathcal{C} \subseteq \pi_A^{\mathrm{t}}(q_{\mathrm{gen}}) = \bigcup_{q \in M_{g,n}^{\mathrm{ord,cl}}} \pi_A^{\mathrm{t}}(q)$$

为 $\pi_A^{\mathrm{t}}(q_{\mathrm{gen}})$ 的一个子集。若满足以下条件，我们称 $\mathcal{C}$ 为带点集合：(i)$0 < \#((\bigcap_{G\in\mathcal{C}} U_G) \cap M_{g,n}^{\mathrm{ord,cl}}) < \infty$；(ii) 对每个满足 $G' \notin \mathcal{C}$ 的 $G' \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q_{\mathrm{gen}})$，$U_{G'} \cap (\bigcap_{G\in\mathcal{C}} U_G) \cap M_{g,n}^{\mathrm{ord,cl}} = \emptyset$。另一方面，对于每个闭点 $t \in M_{g,n}^{\mathrm{ord,cl}}$，我们可以如下定义与 t 相关联的集合：

$$\mathcal{C}_t := \{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q_{\mathrm{gen}}) \mid t \in U_G\}.$$

注意，若 $t \in V_{\mathrm{cl}q}$，则 $\mathcal{C}_t \subseteq \pi_A^{\mathrm{t}}(q)$。此外，我们将

$$\mathscr{C}_q := \{\mathcal{C} \text{ is a pointed collection} \mid \mathcal{C} \subseteq \pi_A^{\mathrm{t}}(q)\}.$$

2.2.2. 目前，尚无已发表的结果涉及非闭点的弱 Hom 版本猜想（或弱同构版本猜想）。证明 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 的非闭点的弱 Hom 版本猜想（或弱同构版本猜想）的主要困难如下：对于每个 $q \in M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$，我们不知道如何从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$ 群论地重构 V_q 闭点的温和基本群。

一旦能够从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$ 群论地重构 V_q 的闭点的温和基本群，那么关于 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 的闭点的弱 Hom 版本猜想就意味着能够从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$ 群论地重构 V_q 的闭点集合。因此，关于 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 的非闭点的弱 Hom 版本猜想，可以由关于 $M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$ 的闭点的弱 Hom 版本猜想推导出来。

设 $q \in M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$。由于 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$ 作为有限生成群的同构类可以由集合 $\pi_A^{\mathrm{t}}(q)$ 确定，以下猜想告诉我们如何从 $\pi_A^{\mathrm{t}}(q)$ （或 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q)$ ）群论地重构 V_q 的一个闭点的有限商集合。

带标记点集猜想。对于每个 $t \in M_{g,n}^{\mathrm{ord,cl}}$，与 t 相关联的集合 $\mathcal{C}_t$ 是一个带点集合。此外，设 $q \in M_{g,n}^{\mathrm{ord}}$。那么自然映射

$$\mathrm{colle}_q : \mathscr{V}_q^{\mathrm{cl}} \to \mathscr{C}_q,\ [t] \mapsto \mathcal{C}_t,$$

是一个双射，其中 $[t]$ 表示 t 在 $\mathscr{V}_{\mathrm{cl}q} := V_q^{\mathrm{cl}}/\sim_{fe}$ 中的像。

将 $q' \in M_{g,n,\mathbb{F}_p}$ 记作像 $\omega(q)$。那么我们有 $\mathscr{V}_{\mathrm{cl}_q} = V_{q'}^{\mathrm{cl}}$。这意味着，带标记点集猜想成立，当且仅当弱 Hom 版本猜想成立。

3. 标记点的重构

本节的主要目的如下：我们将给出 $\mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X))$ 的一种新的单远阿贝尔重构，并证明该单远阿贝尔重构（即群论算法）与任意两个具有固定类型的光滑带标记稳定曲线的温和基本群之间的开连续同态相容。

3.1. 阿贝尔重构。 我们沿用 2.1.1.

3.1.1. 让我们回顾有关“阿贝尔重构”的定义。

定义 3.1. 设 $\mathcal{F}$ 是一个几何对象， $\Pi_{\mathcal{F}}$ 是与对象 $\mathcal{F}$ 相关联的有限生成群。假设给定一个不变量 $\mathrm{Inv}_{\mathcal{F}}$，它取决于 $\mathcal{F}$（在某个范畴中）的同构类；并且给定一个附加结构 $\mathrm{Add}_{\mathcal{F}}$（例如一个子群族、一个商群族），它定义在有限生成群 $\Pi_{\mathcal{F}}$ 上，并函子性地依赖于 $\mathcal{F}$。

我们称 $\mathrm{Inv}_{\mathcal{F}}$ 可由 $\Pi_{\mathcal{F}}$ 进行单绝对单性重构，如果存在一个群论算法，其输入数据为 $\Pi_{\mathcal{F}}$，输出数据为 $\mathrm{Inv}_{\mathcal{F}}$。我们称 $\mathrm{Add}_{\mathcal{F}}$ 可由 $\Pi_{\mathcal{F}}$ 进行单绝对单性重构，如果存在一个群论算法，其输入数据为 $\Pi_{\mathcal{F}}$，输出数据为 $\mathrm{Add}_{\mathcal{F}}$。

设 $\mathcal{F}_i$、 $i \in \{1, 2\}$是一个几何对象， $\Pi_{\mathcal{F}_i}$ 是与 $\mathcal{F}_i$相关联的一个有限生成群。假设我们给定了有限生成群 $\Pi_{\mathcal{F}_i}$ 上的一个附加结构 $\mathrm{Add}_{\mathcal{F}_i}$，且该结构函子性地依赖于 $\mathcal{F}_i$。我们称映射（或态射）$\mathrm{Add}_{\mathcal{F}_1} \to \mathrm{Add}_{\mathcal{F}_2}$ 可由开连续同态$\Pi_{\mathcal{F}_1} \to \Pi_{\mathcal{F}_2}$ 进行单绝对单性重构，如果存在一个群论算法，其输入数据为 $\Pi_{\mathcal{F}_1} \to \Pi_{\mathcal{F}_2}$，输出数据为 $\mathrm{Add}_{\mathcal{F}_1} \to \mathrm{Add}_{\mathcal{F}_2}$。

3.1.2. 令 K 为 X的函数域，并令 K 为 K 在固定的可分闭包$\widetilde{\ }$中的最大伽罗瓦扩张，它在 U_X 上非分歧，且在 D_X上至多温和分歧。于是我们可以将 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 与 $\mathrm{Gal}(K/K)$ 等同。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$我们将与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 相关联的 (X, D_X) 的通用温和覆盖定义为 $(X, D_{\widetilde{X}})$，其中 X表示 X 在 K中的正规化，而 $D_{\widetilde{X}}$ 表示 D_X 在 X中的逆像。于是， $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 在$\widetilde{\ }(X, D_{\widetilde{X}})$ 上有自然作用。对于每个 $\widetilde{e} \in D_{\widetilde{X}}$，我们将 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 中与 $\widetilde{e}$ 相关联的惯性子群记为 $I_{\widetilde{e}}$（即 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 中 $\widetilde{e}$ 的稳定子）。于是有 $I_{\widetilde{e}} \cong \widehat{\mathbb{Z}}(1)^{p'}$，其中 $\widehat{\mathbb{Z}}(1)^{p'}$ 表示 $\widehat{\mathbb{Z}}(1)$ 的与 p 互素部分。以下结果由 Tamagawa 证明（[T4，引理 5.1 和定理 5.2]）。

命题 3.2。

(1) 类型 (g_X, n_X) 可由 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 单绝对单性重构。(2) 设 $\widetilde{e}$ 和 $\widetilde{e}'$ 是 $D_{\widetilde{X}}$ 中彼此不同的两个点。则 $I_{\widetilde{e}}$ 与 $I_{\widetilde{e}'}$ 在 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 中的交是平凡的。此外，该映射是单射，其中 $\mathrm{Sub}(-)$ 表示 $(-)$ 的闭子群集合。(3) 记 $\mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X))$为 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$中的惯性子群集合，即映射 $D_{\widetilde{X}} \to \mathrm{Sub}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X))$的像。则 $\mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X))$可由 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$单绝对单性重构。特别地，标记点集合$D_{\widetilde{X}}$和$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$可由$I_{\widetilde{e}}$,$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$单绝对单性重构。

3.2. 标记点集合。 我们沿用 2.1.1中引入的记号。此外，我们假设 $g_X \geq 2$和 $n_X > 0$。

3.2.1. 我们将证明，标记点集可以视为某个适当曲线覆盖的一组上同调类的商集（即命题 33.）。其主要思路如下：取一个次数为素数的适当 étale 覆盖 $f : (Y, D_Y) \to (X, D_X)$，对于每个标记点 $x \in D_X$，都存在一组次数为素数的温和覆盖，它们在逆像 $f^{-1}(x)$ 上全分歧。于是 x 可以视为与这类覆盖相对应的上同调类集。

3.2.2. 设 $h : (W, D_W) \to (X, D_X)$ 是 k 上的连通伽罗瓦温和覆盖。我们令

$$\mathrm{Ram}_h := \{e \in D_X \mid h \text{ is ramified over } e\}.$$

设 (Y, D_Y) 是 k 上的光滑带标记稳定曲线。我们称

$$(\ell, d, f : (Y, D_Y) \to (X, D_X))$$

若满足以下条件，则称其为与 (X, D_X) 相关联的 mp-三元组：(i) ℓ 和 d 是彼此不同的素数，且 $(\ell, p) = (d, p) = 1$，并且 $\ell \equiv 1 \pmod{d}$；于是所有 d 次单位根都包含在 $\mathbb{F}_\ell$ 中；(ii) f 是 k 上的伽罗瓦 étale 覆盖，其伽罗瓦群同构于 μ_d，其中 $\mu_d \subseteq \mathbb{F}_\ell^\times$ 表示 d 次单位根构成的子群。这里，“mp”意为“标记点”。

于是，由自然满射 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_Y) \twoheadrightarrow \pi_1(Y)$ 诱导出自然单射 $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell) \hookrightarrow H^1_{\text{ét}}(U_Y, \mathbb{F}_\ell)$。注意，$H^1_{\text{ét}}(U_Y, \mathbb{F}_\ell)$ 中每个非零元都会诱导出 (Y, D_Y) 的一个次数为 ℓ 的连通伽罗瓦驯 ramified 覆盖。我们得到一个正合列

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell) \to H^1_{\text{ét}}(U_Y, \mathbb{F}_\ell) \to \mathrm{Div}^0_{D_Y}(Y) \otimes \mathbb{F}_\ell \to 0$$

具有 μ_d 的自然作用。

3.2.3. 令 $(\mathrm{Div}^0_{D_Y}(Y) \otimes \mathbb{F}_\ell)_{\mu_d} \subseteq \mathrm{Div}^0_{D_Y}(Y) \otimes \mathbb{F}_\ell$ 为满足 μ_d 通过特征 $\mu_d \hookrightarrow \mathbb{F}_\ell^\times$ 作用的元素子集，并令 $M_Y^* \subseteq H^1_{\text{ét}}(U_Y, \mathbb{F}_\ell)$ 为其像是 $(\mathrm{Div}^0_{D_Y}(Y) \otimes \mathbb{F}_\ell)^{\mu_d}$ 中非零元的元素子集。对于每个 $\alpha \in M_Y^*$，记 $g_\alpha : (Y_\alpha, D_{Y_\alpha}) \to (Y, D_Y)$ 为由 α 诱导的温和覆盖。我们定义 ϵ：$M_Y^* \to \mathbb{Z}$，其中 $\epsilon(\alpha) := \#D_{Y_\alpha}$。记

$$M_Y := \{\alpha \in M_Y^* \mid \#\mathrm{Ram}_{g_\alpha} = d\} = \{\alpha \in M_Y^* \mid \epsilon(\alpha) = \ell(dn_X - d) + d\}.$$

注意，M_Y 非空。

对于每个 $\alpha \in M_Y$，由于 α 的像包含于 $(\mathrm{Div}^0_{D_Y}(Y) \otimes \mathbb{F}_\ell)^{\mu_d}$，我们得到 μ_d 在分歧点集 $\mathrm{Ram}_{g_\alpha} \subseteq D_Y$ 上的作用是传递的。因此，存在唯一的标记点 $e_\alpha \in D_X$，使得对于每个 $y \in \mathrm{Ram}_{g_\alpha}$，$f(y) = e_\alpha$。

对于每个 $e \in D_X$，我们定义

$$M_{Y,e} := \{\alpha \in M_Y \mid g_\alpha \text{ is ramified over } f^{-1}(e)\}.$$

那么，对于任意两个互不相同的标记点 e、$e' \in D_X$，有 $M_{Y,\,e} \cap M_{Y,\,e'} = \emptyset$，且其不交并

$$M_Y = \bigsqcup_{e \in D_X} M_{Y,e}.$$

3.2.4. 接下来，我们定义 $\sim$ 在 M_Y 上的一个前等价关系如下：设 α、$\beta \in M_Y$。那么，当且仅当对于每个满足 $\lambda\alpha + \mu\beta \in M_Y^*$ 的 λ、$\mu \in \mathbb{F}_\ell^\times$，都有 $\lambda\alpha + \mu\beta \in M_Y$ 时，$\alpha \sim \beta$。于是我们得到以下命题。

命题 3.3. $\sim$ 在 M_Y 上的前等价关系是一个等价关系。此外，映射

$$\vartheta_X : M_Y/\sim \to D_X,\ [\alpha] \mapsto e_\alpha,$$

是一个双射，其中 $[\alpha]$ 表示 α 在 $M_Y/\sim$ 中的像。

证明。设 $\beta, \gamma \in M_Y$.。若分歧点集$_{g_\beta}$ = 分歧点集$_{g_\gamma}$，则对每个 $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_\ell^\times$，若 $\lambda\beta + \mu\gamma \neq 0$，我们有分歧点集$_{g_{\lambda\beta+\mu\gamma}}$ =分歧点集$_{g_\beta}$ = 分歧点集$_{g_\gamma}$·。因此得到 $\beta \sim \gamma$。另一方面，若 $\beta \sim \gamma$，则有分歧点集$_{g_\beta}$ = 分歧点集$_{g_\gamma}$。否则，我们有 #分歧点集$_{g_{\beta+\gamma}} = 2d$。这意味着 $\beta \sim \gamma$ 当且仅当分歧点集$_{g_\beta}$ = 分歧点集$_{g_\gamma}$·。于是 $\sim$ 是M_Y上的一个等价关系。

我们来证明 ϑ_X 是一个双射。显然，ϑ_X 是一个单射。另一方面，对于每个 $e \in D_X$，最大 pro-ℓ 温和基本群的结构意味着我们可以构造一个 h 的连通温和伽罗瓦覆盖：$(Z,\ D_Z) \to (Y,\ D_Y)$ 使得由 h 诱导的 $H^1_{\text{ét}}(U_Y,\ \mathbb{F}_\ell)$ 中的元素属于 M_Y。于是 ϑ_X 是一个满射。命题 3 3的证明到此完成。□

注 3.4. 我们声称　　明集合 $M_Y/\sim$ 不依赖于与 (X, D_X) 相关联的 mp-三元组的选择。Le t

$$(\ell^*, d^*, f^* : (Y^*, D_{Y^*}) \to (X, D_X))$$

是与 (X, D_X) 相关联的任意 mp-三元组。因此我们得到一个结果集 $M_{Y^*}/\sim$以及一个自然双射 ϑ_X^*: $M_{Y^*}/\sim \to D_X$.我们将证明存在一个自然双射 δ: $M_{Y^*}/\sim \xrightarrow{\simeq} M_Y/\sim$使得 $\vartheta_X^* = \vartheta_X \circ \delta$。

首先，假设 $\ell \neq \ell^*$ 和 $d \neq d^*$。那么我们可以如下构造一个自然双射 δ: $M_{Y^*}/\sim \xrightarrow{\simeq} M_Y/\sim$。令 $\alpha \in M_Y$和 $\alpha^* \in M_{Y^*}$。对于分别由 α 和 α^*诱导的伽罗瓦驯覆盖，记 $(Y_\alpha, D_{Y_\alpha}) \to (Y, D_Y)$ 和 $(Y_{\alpha^*}, D_{Y_{\alpha^*}}) \to (Y^*, D_{Y^*})$。我们考虑光滑带标记稳定曲线范畴中的以下纤维积

$$(Y_\alpha, D_{Y_\alpha}) \times_{(X, D_X)} (Y_{\alpha^*}, D_{Y_{\alpha^*}})$$

这是定义在 k 上的光滑带标记稳定曲线。因此，我们得到一个次数为 $dd^*\ell\ell^*$ 的连通驯 ramified 覆盖 $(Y_\alpha, D_{Y_\alpha}) \times_{(X, D_X)} (Y_{\alpha^*}, D_{Y_{\alpha^*}}) \to (X, D_X)$。接下来容易验证， $\vartheta_X([\alpha]) = \vartheta_X^*([\alpha^*])$ 当且仅当 $(Y_\alpha, D_{Y_\alpha}) \times_{(X, D_X)} (Y_{\alpha^*}, D_{Y_{\alpha^*}})$ 的标记点集合的基数等于 $dd^*(\ell\ell^*(n_X - 1) + 1)$。若 $\vartheta_X([\alpha]) = \vartheta_X^*([\alpha^*])$，我们记作$[\alpha] := \delta([\alpha^*])$。此外，根据上述构造，我们得到 $\vartheta_X^* = \vartheta_X \circ \delta$。在一般情形下，我们可以选择一个与 (k, Y_α) 相关联的 mp-三元组

$$(\ell^{**}, d^{**}, f^{**} : (Y^{**}, D_{Y^{**}}) \to (X, D_X))$$

使得 $\ell^{**} \neq \ell, \ell^{**} \neq \ell^*, d^{**} \neq d$，并且 $d^{**} \neq d^*$。因此，我们得到一个结果集合 $M_{Y^{**}}/\sim$以及一个自然双射 ϑ_X^{**}: $M_{Y^{**}}/\sim \to D_X$。接着，上述证明表明存在自然双射δ_1: $M_{Y^{**}}/\sim \xrightarrow{\simeq} M_Y/\sim$和 δ_2: $M_{Y^{**}}/\sim \xrightarrow{\simeq} M_{Y^*}/\sim$。因此，我们可以记作

$$\delta := \delta_1 \circ \delta_2^{-1} : M_{Y^*}/\sim \xrightarrow{\simeq} M_Y/\sim .$$

注 3.5. 设 $H \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 是任意开正规子群，且 f_H: $(X_H, D_{X_H}) \to (X, D_X)$ 是由自然包含 $H \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 诱导的覆盖 k 上的伽罗瓦温和覆盖。令

$$(\ell, d, f : (Y, D_Y) \to (X, D_X))$$

是与 (X, D_X) 相关联的 mp-三元组，使得 $(\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H)\ \ell) = (\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H)\ d) = 1$。于是我们得到一个 mp-三元组

$$(\ell, d, g : (Z, D_Z) := (Y, D_Y) \times_{(X, D_X)} (X_H, D_{X_H}) \to (X_H, D_{X_H}))$$

由 $(\ell, d, f$: $(Y, D_Y) \to (X, D_X))$ 诱导并与 (X_H, D_{X_H}) 相关联，其中 $(Y, D_Y) \times_{(X, D_X)} (X_H, D_{X_H})$ 表示光滑带标记稳定曲线范畴中的纤维积。与 (X_H, D_{X_H}) 相关联的 mp-三元组诱导一个集合 $M_Z/\sim$，根据命题 pro-3.3，该集合可与 (X_H, D_{X_H}) 的标记点集合 D_{X_H} 认同。此外，对于每个 $e_X \in D_X$ 和每个 α_Y, $_{e_X} \in M_{Y, e_X}$, α_{Y, e_X} 诱导一个元素

$$\alpha_Z = \sum_{e_{X_H} \in f_H^{-1}(e_X)} \alpha_{Z, e_{X_H}}$$

通过自然态射 $(Z, D_Z) \to (Y, D_Y)$，在 (Z, D_Z) 上，其中 $\alpha_{Z,\ e_{X_H}} \in M_{Z,\ e_{X_H}}$。另一方面，对于每个 $e'_{X_H} \in D_{X_H}$和每个 $e'_X \in D_X$，我们有 $f_H(e'_{X_H}) = e'_X$ 当且仅当存在一个元素 $\alpha_{Y,\ e'_X} \in M_{Y,\ e'_X}$，使得以下两个条件成立:

- 由 $\alpha_{Y,\ e'_X}$ 通过自然态射 $(Z, D_Z) \to (Y, D_Y)$ 诱导的元素 α'_Z，可以表示为一个线性组合

$$\alpha'_Z = \sum_{e_{X_H} \in S_{X_H}} \alpha'_{Z, e_{X_H}},$$

  其中 S_{X_H}是 D_{X_H} 的子集，且 $\alpha_{Z,\ e_{X_H}} \in M_{Z,\ e_{X_H}}$;
- $e'_{X_H} \in S_{X_H}$。

引理 3.6。设 $(\ell, d, f\colon (Y, D_Y) \to (X, D_X))$ 是与 (X, D_X) 相关联的三元组，且 g_Y Y 的亏格。则我们有 $\#(M_{Y,e}) = \ell^{2g_Y+1} - \ell^{2g_Y}$，$e \in D_X$. 此外，我们有 $\#(M_Y) = n_X$({v21)。

证明。设 $e \in D_X$。记 $D_e \subseteq D_Y$ 为集合 $f^{-1}(e)$。则 $M_{Y,e}$ 可通过自然开浸入 $Y \setminus D_e \hookrightarrow Y$. 自然地视为 $H^1_{\text{ét}}(Y \setminus D_e, \mathbb{F}_\ell)$ 的子集。记 L_e 为 $\mathbb{F}_\ell$ 向量空间，它由 $M_{Y,e}$ 在 $H^1_{\text{ét}}(Y \setminus D_e, \mathbb{F}_\ell)$ 中生成。于是我们有 $M_{Y,e} = L_e \setminus H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell)$。记 H_e 为商空间 $L_e/H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell)$。我们有如下正合列：

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell) \to L_e \to H_e \to 0.$$

由于 μ_d 在 $f^{-1}(e)$ 上的作用是传递的，我们得到 $\dim_{\mathbb{F}_\ell}(H_e) = 1.$。另一方面，由于 $\dim_{\mathbb{F}_\ell}(H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell)) = 2g_Y$，我们得到 $\#(M_{Y,e}) = \ell^{2g_Y+1} - \ell^{2g_Y}.$。因此，我们有 $\#(M_Y) = n_X(\ell^{2g_Y+1} - \ell^{2g_Y})$。引理的证明至此完成。□

3.3. 惯性子群的重构。我们沿用在 2.1.1.

3.3.1. 我们将证明，可以从 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 单远阿贝尔重构标记点的惯性子群（即命题 them-13 10.）。主要思路如下：设 $H \subseteq \pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 是任意一个正规开子群，$(X_H, D_{X_H}) \to (X, D_X)$ 是与 H 对应的温和覆盖。首先，利用黎曼-赫尔维茨公式所导出的若干数值条件，可以从 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 单远阿贝尔重构 étale 基本群 $\pi_1(X)$。然后，第 sec-23 2 节得到的结果表明，可以从 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 单远阿贝尔重构 D_X。此外，也可以从 H 单远阿贝尔重构 D_{X_H}。其次，由于自然单射 $H \hookrightarrow \pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 诱导了第 sec-23 2 节中得到的上同调类集合之间的映射，我们得到，可以从 $H \hookrightarrow \pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 单远阿贝尔重构自然映射 $D_{X_H} \to D_X$。因此，通过取 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 的开正规子群的余终系统，我们得到 Ine($\pi_1^{\text{t}}(U_X)$) 的一种新的单远阿贝尔重构。

3.3.2. 首先，我们有以下引理。

引理 3.7。

(1) 素数 p（即 k 的特征）可以从 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 单绝对单性重构。(2) étale 基本群 $\pi_1(X)$ 可以从 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 单绝对单性重构。

证明。(1) 令 $\mathfrak{P}$ 为素数集合，并令 Q 为 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 的任意开子群，且 r_Q 为一个整数，使得

$$\#\{l \in \mathfrak{P} \mid r_Q = \dim_{\mathbb{F}_l}(Q^{\text{ab}} \otimes \mathbb{F}_l)\} = \infty.$$

那么我们立即看到，k 的特征是唯一满足以下条件的素数 p：存在一个开子群 $T \subseteq \pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 和 $r_T \neq \dim_{\mathbb{F}_p}(T^{\text{ab}} \otimes \mathbb{F}_p)$。

(2) 令 H 为 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 的任意开正规子群。我们用 (X_H, D_{X_H}) 表示由 H 诱导的、k 上类型为 (g_{X_H}, n_{X_H}) 的光滑带标记稳定曲线，并用 $f_H\colon (X_H, D_{X_H}) \to (X, D_X)$ 表示由自然包含 $H \hookrightarrow \pi_1^{\text{t}}(U_X)$ 诱导的、k 上光滑带标记稳定曲线之间的态射。注意，当且仅当 $g_{X_H} - 1 = \#(\pi_1^{\text{t}}(U_X)/H)(g_X - 1)$ 时，f_H 是 étale 的。令

$$\text{Et}(\pi_1^{\text{t}}(U_X)) := \{H \subseteq \pi_1^{\text{t}}(U_X) \text{ 是开正规子群：} \ g_{X_H} - 1 = \#(\pi_1^{\text{t}}(U_X)/H)(g_X - 1)\}.$$

此外，命题 32 1。( ) 蕴含 g_{X_H} 和 g_X 可以从 H 和 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$分别进行单绝对单性重构。于是，集合 $\text{Et}(\pi_1^{\text{t}}(U_X))$ 可以从 $\pi_1^{\text{t}}(U_X)$进行单绝对单性重构。由此可得

$$\pi_1(X) = \pi_1^{\text{t}}(U_X)/\bigcap_{H \in \text{Et}(\pi_1^{\text{t}}(U_X))} H.$$

引理的证明到此结束。□

3.3.3. 假设 $g_X \geq 2$。我们来定义一个对应于　　3.2.2 中所引入的 mp-三元组的群论对象。若以下两个条件成立，我们称 $(\ell,\ d,\ y)$ 是与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 相关联的 mp-三元组：

- ℓ 和 d 是彼此不同的素数，使得 $(\ell,p) = (d,p) = 1$ 且 $\ell \equiv 1$ (模 d)；那么所有d次单位根都包含在 $\mathbb{F}_\ell$ 中；
- $y \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X)\ \mu_d)$，使得 $y \neq 0$，其中 $\mu_d \subseteq \mathbb{F}_\ell^\times$ 表示 d次单位根构成的子群。

3.3.4. 此外，应用引理 lem-23 7, . 可得与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 相关联的三元组 (ℓ, d, y)，它可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 单阿贝尔重构。令 $f\colon (Y, D_Y) \to (X, D_X)$ 为由 y 诱导的伽罗瓦 étale 覆盖。于是我们立即看到，$(\ell, d, f\colon (Y, D_Y) \to (X,\ D_X))$ 是与在 triple3.2.2 中定义的 (X, D_X) 相关联的 mp-三元组。我们用 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_Y)$ 表示满射 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X) \twoheadrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{y} \mu_d$. 的复合映射的核。由于 $H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(Y)\ \mathbb{F}_\ell)$ 且 $H^1_{\text{ét}}(U_Y, \mathbb{F}_\ell) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_Y)\ \mathbb{F}_\ell)$，引理 lem-23 7 . 立即推出以下正合列

$$0 \to H^1_{\text{ét}}(Y, \mathbb{F}_\ell) \to H^1_{\text{ét}}(U_Y, \mathbb{F}_\ell) \to \mathrm{Div}^0_{D_Y}(Y) \otimes \mathbb{F}_\ell \to 0$$

可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_Y)$中进行单绝对单性重构。因此，命题　　3.2 (1) 表明，$M_Y/\sim$ 中定义的集合　　32..4 可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_Y)$中进行单绝对单性重构。注意，根据注记　　34，.集合 $M_Y/\sim$ 不依赖于 mp-三元组的选取。于是我们定义

$$D_X^{\mathrm{gp}} := M_Y/\sim,$$

其中“gp”意为“群论的”。根据命题　　33，.我们可以通过以下双射将 D_X^{gp} 与 D_X 的标记点集合 $(X,\ D_X)$ 识别：$\vartheta_X\colon D_X^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{\sim} D_X$，该双射定义于命题　　3 3。.

命题 3.8. 设 $H \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 是任意一个开正规子群，并且

$$f_H : (X_H, D_{X_H}) \to (X, D_X)$$

由自然包含 $H \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 诱导的、定义在 k 上的光滑带标记稳定曲线之间的态射。假设$g_X \geq 2$。那么，集合 D_X^{gp} 和 $D_{X_H}^{\mathrm{gp}}$ 可以分别从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 和 H中进行单绝对单性重构。此外，包含 $H \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 诱导映射 $\gamma_{H,\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)}\colon D_{X_H}^{\mathrm{gp}} \to D_X^{\mathrm{gp}}$，使得以下交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} D_{X_H}^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{\vartheta_{X_H}} & D_{X_H} \\ {\scriptstyle \gamma_{H,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{f_H}} \\ D_X^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{\vartheta_X} & D_X, \end{array}$$

其中 γ_{f_H} 表示由 f_H诱导的标记点集合之间的映射。

证明。 我们只需证明命题　　38. 中的“此外”部分。我们沿用注记　　3.5 中引入的记号。注意，对于每个 $e_X \in D_X$ 以及每个 $e_{X_H} \in D_{X_H}$，集合 $M_{Y,\ e_X}$ 和 $M_{Z,\ e_{X_H}}$ 都可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 和 H分别进行单绝对单性重构。于是，“此外”部分由注记　　35 。 得出。 □

备注 3.9。 我们沿用命题　　38. 中引入的记号。设 $\pi_1(X_H)$ 是 X_H 的 étale 基本群。于是存在自然满射 $H \twoheadrightarrow \pi_1(X_H)$。注意， $\pi_1(X_H)$ 带有 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H$的作用，该作用由 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H$ 在 H 上的外作用诱导，而该外作用由正合列诱导

$$1 \to H \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H \to 1.$$

此外， $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H$在 $\pi_1(X_H)$ 上的作用会诱导出 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H$在 $D_{X_H}^{\mathrm{gp}}$上的作用。另一方面，容易验证，当我们将 D_X^{gp} 与 D_X等同起来时， $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H$ 在 $D_{X_H}^{\mathrm{gp}}$ 上的作用与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H$ 在 D_{X_H} 上的自然作用一致。

3.3.5. 我们有如下结果。

命题 3.10. 用 $\mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X))$ 表示 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 中惯性子群的集合。于是，可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 单模重构 $\mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X))$。

证明. 设 $C_X := \{H_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 是 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 的一组开正规子群，使得 $\varprojlim_i \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)/H_i \cong \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$（即一组余终开正规子群系统）。

设 $\widetilde{e} \in D_{\widetilde{X}}$。对于每个 $i \in \mathbb{Z}_{>0}$，我们用 $(X_{H_i}, D_{X_{H_i}})$ 表示由 H_i 诱导的类型为 $(g_{X_{H_i}}, n_{X_{H_i}})$ 的光滑带标记稳定曲线，并用 $e_{X_{H_i}} \in D_{X_{H_i}}$ 表示 $\widetilde{e}$ 的像。于是我们得到一个标记点序列

$$\mathcal{I}_{\widetilde{e}}^{C_X} : \cdots \mapsto e_{X_{H_2}} \mapsto e_{X_{H_1}}$$

由 C_X 诱导。注意，标记点序列 $\mathcal{I}_{\widetilde{e}}^{C_X}$ 具有 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 的自然作用。我们可以将与 $\widetilde{e}$ 相关联的惯性子群$I_{\widetilde{e}}$认作 $\mathcal{I}_{\widetilde{e}}^{C_X}$ 的稳定子。

此外，由于命题3.2(1) 蕴含 $(g_{X_{H_i}}, n_{X_{H_i}})$ 可以从 H_i单远阿贝尔重构，通过选取一组合适的开正规子群 C_X，我们可以假设 $g_{X_{H_1}} \geq 2$。如果 $n_{X_{H_1}} = 0$，命题3.10是平凡的。因此我们可以假设 $n_{X_{H_1}} > 0$。

另一方面，命题 3.8 表明，对于每个 H_i，$i \in \mathbb{Z}_{>0}$，集合 $D_{X_{H_i}}^{\mathrm{gp}}$ 可以从 H_i单远阿贝尔重构。对于每个 $e_{X_{H_i}} \in D_{X_{H_i}}$，我们将其记为

$$e_{X_{H_i}}^{\mathrm{gp}} := \vartheta_{X_{H_i}}^{-1}(e_{X_{H_i}}).$$

那么，标记点序列 $\mathcal{I}_{\widetilde{e}}^{C_X}$ 诱导出一个序列

$$\mathcal{I}_{\widetilde{e}^{\mathrm{gp}}}^{C_X} : \cdots \mapsto e_{X_{H_2}}^{\mathrm{gp}} \mapsto e_{X_{H_1}}^{\mathrm{gp}}.$$

应用命题 38的“此外”部分，。我们看到$\mathcal{I}_{\widetilde{e}^{\mathrm{gp}}}^{C_X}$可以从$C_X$进行单远阿贝尔重构。接着，注记 39 。推出$\mathcal{I}_{\widetilde{e}^{\mathrm{gp}}}^{C_X}$的稳定了等于$\mathcal{I}_{\widetilde{e}}^{C_X}$的稳定子。这就完成了该命题的证明。□

3.4. 通过满射重构惯性子群。在本小节中，我们将证明，通过命题单 阿贝尔重构得到的3.10 与任意开连续同态相容 （即定理3.18）。

3.4.1 设置。设 (X_i, D_{X_i})，$i \in \{1,2\}$ 是定义在代数闭域 k_i 上、特征为 $p > 0$ 的类型为 (g_X, n_X) 的光滑带标记稳定曲线，$U_{X_i} := X_i \setminus D_{X_i}$，$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 是 U_{X_i} 的温和基本群，$\pi_1(X_i)$ 是 X_i 的étale基本群。于是，引理 lem-23 7 . 表明，$\pi_1(X_i)$ 可以从$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 进行单远阿贝尔重构。此外，在本小节中，我们假设 $n_X > 0$，且 ϕ：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 是有限生成群之间任意一个开连续满同态。

注意，由于 (X_i, D_{X_i})，$i \in \{1,2\}$ 是类型为 (g_X, n_X)，ϕ 的光滑带标记稳定曲线，ϕ 诱导出一个自然满射 $\phi^{p'}$：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'} \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'}$，其中 $(-)^{p'}$ 表示 $(-)$ 的最大素数到 p 互素商。由于$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{p'}$，$i \in \{1,2\}$ 是拓扑有限生成的，且 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'}$ 与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'}$ 作为抽象有限生成群同构，我们得到 $\phi^{p'}$：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'} \xrightarrow{\simeq} \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'}$ 是一个同构（FJ[FJ，命题 16.10.6]）。

3.4.2. 我们阐述定理 them-23 18. 证明中的主要思路。令 $H_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 为任意开正规子群，并令 $H_1 := \phi^{-1}(H_2) \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$。我们将由 H_i 诱导的、定义在 k_i 上的类型为 $(g_{X_{H_i}}, n_{X_{H_i}})$ 的光滑带点曲线记作 $(X_{H_i}, D_{X_{H_i}})$，$i \in \{1,2\}$。为证明相容性，我们需要证明，对于任意素数$\ell \neq p$，$H_2^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_\ell$ 的权-单值化滤过经自然满射 $\phi|_{H_1}$：$H_1 \twoheadrightarrow H_2$ 诱导出 $H_1^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_\ell$ 的权-单值化滤过。注意，$H_i^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_\ell$ 的权 1 部分对应于 $\pi_1(X_{H_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_\ell$，而 $H_i^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_\ell$ 的权 2 部分对应于由 $D_{X_{H_i}}$ 的标记点的惯性子群生成的 H_i 子群的像。关键观察如下：

极限的 p平均值的不等式（见下文命题　　3.11 (1)）

$$\mathrm{Avr}_p(H_1) \geq \mathrm{Avr}_p(H_2)$$

H_1 与 H_2 由满射 $\phi|_{H_1}$ 诱导：　$H_1 \twoheadrightarrow H_2$ 在正特征 $p>0$的代数闭域上曲线的远阿贝尔几何理论中，起到了比较“伽罗瓦作用”的作用。

3.4.3. 首先，我们有以下命题。

命题 3.11。

(1) 设 (X, D_X) 是代数闭域 k 上特征为 $p>0, U_X := X \setminus D_X$ 的类型为 (g_X, n_X) 的带标记稳定曲线，　$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 为 U_X 的温和基本群。设 $r \in \mathbb{N}$ 为自然数，且 K_{p^r-1} 为自然满射 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}$ 的核，其中 $(-)^{\mathrm{ab}}$ 表示 $(-)$ 的阿贝尔化。那么我们有

$$\mathrm{Avr}_p(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)) := \lim_{r\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p}(K_{p^r-1}^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_p)}{\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z})} = \begin{cases} g_X - 1, & \text{if } n_X \leq 1, \\ g_X, & \text{if } n_X > 1. \end{cases}$$

(2) 我们沿用　　*3*41.. 中引入的设定。设 $H_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 为一个开正规子群，使得$([\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : H_2], p) = 1$ 且 $H_1 := \phi^{-1}(H_2)$。记 $g_{H_i}, i \in \{1,2\}$ 为与 k_i 对应的光滑带标记稳定曲线的亏格 $H_i \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$。那么我们有 $g_{H_1} \geq g_{H_2}$.

证明。（1）是 Tamagawa 关于 p-平均值 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 的极限的结果（T[T4，定理 0.5]）。下面证明（2）。满射 ϕ诱导出满射 $\phi^{p'}: \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'} \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'}$，其中 $(-)^{p'}$表示 $(-)$ 的最大素数至-p商空间。此外，由于 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{p'}, i \in \{1,2\}$ 是拓扑有限生成的，且 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'}$作为抽象有限型群同构于 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'}$（因为 (X_1, D_{X_1}) 和 (X_2, D_{X_2}) 的类型均等于 (g_X, n_X)），我们得到 $\phi^{p'}$ 是一个同构（参见 FJ [FJ，命题 16.10.6]）。

另一方面，由于 $[\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) : H_1] = [\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : H_2]$且 $([\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : H_2], p) = 1$，我们得到由 $\phi_H := \phi|_{H_1} : H_1 \twoheadrightarrow H_2$ 诱导的自然同态 $\phi_H^{p'}: H_1^{p'} \twoheadrightarrow H_2^{p'}$ 也是一个同构。这意味着

$$\#(H_1^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}) = \#(H_2^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z})$$

对所有 $r \in \mathbb{N}$均成立。令 $K_{H_i, p^r-1}, i \in \{1,2\}$ 为自然满射 $H_i \twoheadrightarrow H_i^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}.$ 的核。则满射 ϕ_H 意味着

$$\mathrm{Avr}_p(H_1) := \lim_{r\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p}(K_{H_1,p^r-1}^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_p)}{\#(H_1^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z})} \geq \mathrm{Avr}_p(H_2) := \lim_{r\to\infty} \frac{\dim_{\mathbb{F}_p}(K_{H_2,p^r-1}^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_p)}{\#(H_2^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z})}.$$

因此，由 (2) 可得此推论。　□

3.4.4. 我们有以下引理。

引理 3.12. 设 ℓ 是一个不同于 p 的素数。则同构 $(\phi^{p'})^{-1}: \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'} \xrightarrow{\simeq} \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'}$ 诱导出一个同构

$$\psi_X^{\ell} : H^1_{\text{ét}}(X_1, \mathbb{F}_\ell) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_1(X_1), \mathbb{F}_\ell) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(\pi_1(X_2), \mathbb{F}_\ell) \simeq H^1_{\text{ét}}(X_2, \mathbb{F}_\ell).$$

证明。设 $f_1 : (Y_1, D_{Y_1}) \to (X_1, D_{X_1})$ 是一个 k_1 上次数为 ℓ 的 étale 覆盖。记 $f_2 : (Y_2, D_{Y_2}) \to (X_2, D_{X_2})$ 为由 $\phi^{p'}$ 诱导的 k_2 上次数为 ℓ 的连通伽罗瓦驯 ramified 覆盖。接下来我们将证明，f_2 也是 k_2 上的一个 étale 覆盖。

记 g_{Y_1} 和 g_{Y_2} 分别为 Y_1 和 Y_2 的亏格。由于 f_1 是一个次数为 ℓ 的 étale 覆盖，黎曼-赫尔维茨公式推出 $g_{Y_1} = \ell(g_{X_1} - 1) + 1$. 另一方面，黎曼-赫尔维茨公式推出 $g_{Y_2} =$

ℓ（$g_{X_2}-1$）$+1+\frac{1}{2}$（$\ell-1$）#（分歧点集f_2）。应用命题 3.11（2），满射 ϕ推出 $g_{Y_1}\geq g_{Y_2}$. 这意味着 #（分歧点集f_2） $=0$. 因此 f_2是 k_2上的一个 étale 覆盖。于是态射 $(\phi^{p'})^{-1}$诱导出一个单射

$$\psi_X^{\ell}:\mathrm{Hom}(\pi_1(X_1),\mathbb{F}_\ell)\hookrightarrow\mathrm{Hom}(\pi_1(X_2),\mathbb{F}_\ell).$$

此外，由于 $\dim_{\mathbb{F}_\ell}(\mathrm{Hom}(\pi_1(X_1)\ \mathbb{F}_\ell))=\dim_{\mathbb{F}_\ell}(\mathrm{Hom}(\pi_1(X_2)\ \mathbb{F}_\ell))=2g_X$，我们得到 ψ_X^{ℓ} 是一个双射。这就完成了该引理的证明。□

Le命题 3.13。设 $g_X\geq 2$。那么满射 ϕ：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\twoheadrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 诱导出一个双射

$$\rho_\phi:D_{X_1}^{\mathrm{gp}}\xrightarrow{\simeq}D_{X_2}^{\mathrm{gp}},$$

并且可以从 ϕ 单远阿贝尔重构双射 ρ_ϕ。

证明。设 (ℓ,d,y_2) 是与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 相关联的 mp-三元组（见 gpmptriple3.3.3）。那么引理 lem-33 12 . 蕴含 ϕ 诱导出一个与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 相关联的 mp-三元组 (ℓ,d,y_1)，其中 $y_1:=(\psi_X^d)^{-1}(y_2)\in\mathrm{Hom}(\pi_1(X_1)\ \mu_d)$。

令 $f_i:(Y_i,D_{Y_i})\to(X_i,D_{X_i})$，$i\in\{1,2\}$ 为由 y_i 诱导的 k_i 上次数为 d 的 étale 覆盖。与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 相关联的 mp-三元组 (ℓ,d,y_i) 确定一个 mp-三元组

$$(\ell,d,f_i:(Y_i,D_{Y_i})\to(X_i,D_{X_i}))$$

该三元组与 k_i 上的 (X_i,D_{X_i}) 相关联。注意，(Y_1,D_{Y_1}) 与 (Y_2,D_{Y_2}) 的类型相同。

记 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_i})$，$i\in\{1,2\}$ 为 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})\twoheadrightarrow\pi_1(X_i)\xrightarrow{y_i}\mu_d$ 的核。将 (X_i,D_{X_i}) 替换为 (Y_i,D_{Y_i}) 后，引理 3 12 。蕴含 $(\phi|^{p'}_{\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_1})})^{-1}$ 诱导如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(Y_1,\mathbb{F}_\ell) & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(U_{Y_1},\mathbb{F}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0_{D_{Y_1}}(Y_1)\otimes\mathbb{F}_\ell & \longrightarrow & 0\\
 & & \psi_Y^{\ell}\downarrow & & \psi_Y^{\mathrm{t},\ell}\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(Y_2,\mathbb{F}_\ell) & \longrightarrow & H^1_{\text{ét}}(U_{Y_2},\mathbb{F}_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Div}^0_{D_{Y_2}}(Y_2)\otimes\mathbb{F}_\ell & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中所有竖直箭头都是同构。我们注意到，$H^1_{\text{ét}}(Y_i,\mathbb{F}_\ell)$、$H^1_{\text{ét}}(U_{Y_i},\mathbb{F}_\ell)$ 和 $\mathrm{Div}^0_{D_{Y_i}}(Y_i)\otimes\mathbb{F}_\ell$, $i,\in\{1,2\}$ 分别自然同构于 $\mathrm{Hom}(\pi_1(Y_i)\ \mathbb{F}_\ell)$、$\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_i})\ \mathbb{F}_\ell)$ 和 $\mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_i})\ \mathbb{F}_\ell)/\mathrm{Hom}(\pi_1(Y_i)\ \mathbb{F}_\ell)$。于是，引理 3.7 蕴含，上述交换图可由 $\phi|_{\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_1})}$ 单绝对单性重构：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_1})\twoheadrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_2})$。

用 $M_{Y_i}\subseteq M_{Y_i}^*$ 表示在 3.2.3中定义的 $H^1_{\text{ét}}(U_{Y_i},\mathbb{F}_\ell)$ 的子集。由于 μ_d 在正合列上的作用与上述交换图中出现的同构相容，因此有 $\psi^{\mathrm{t},\ell}_{Y}(M_{Y_1}^*)=M_{Y_2}^*$.接下来，我们证明 $\psi^{\mathrm{t},\ell}_{Y}(M_{Y_1})=M_{Y_2}$.

设 $\alpha_1\in M_{Y_1}$和 $g_{\alpha_1}:(Y_{\alpha_1},D_{Y_{\alpha_1}})\to(Y_1,D_{Y_1})$ 是由 α_1 诱导的、覆盖 k_1 的次数为 ℓ 的伽罗瓦温和覆盖。设 $g_{\alpha_2}:(Y_{\alpha_2},D_{Y_{\alpha_2}})\to(Y_2,D_{Y_2})$ 是由 $\alpha_2:=\psi^{\mathrm{t},\ell}_{Y}(\alpha_1)$ 诱导的、覆盖 k_2 的次数为 ℓ 的伽罗瓦温和覆盖。分别用 $g_{Y_{\alpha_1}}$ 和 $g_{Y_{\alpha_2}}$ 表示 Y_{α_1}和 Y_{α_2} 的亏格。于是，命题 coro-p-average 3.11 (2) 和黎曼-赫尔维茨公式推出 $g_{Y_{\alpha_1}}-g_{Y_{\alpha_2}}=\frac{1}{2}(d-\#(\text{分歧点集}_{g_{\alpha_2}}))(\ell-1)\geq 0$. 这意味着 $d-\#(\text{分歧点集}_{g_{\alpha_2}})\geq 0$. 由于 $\alpha_2\in M_{Y_2}^*$，我们有 $d\mid\#(\text{分歧点集}_{g_{\alpha_2}})$。因此，#(分歧点集$_{g_{\alpha_2}}$) $=0$ 或 #(分歧点集$_{g_{\alpha_2}}$) $=d$ 必有其一成立。

若 #(分歧点集$_{g_{\alpha_2}}$) $=0$，则 g_{α_2}是覆盖于 k_2之上的 étale 覆盖。根据引理 3.12可知，g_{α_1} 是覆盖于 k_1之上的 étale 覆盖。这与 $\alpha_1\in M_{Y_1}$这一事实相矛盾。因此，我们有 #(分歧点集$_{g_{\alpha_2}}$) $=d$。这意味着 $\alpha_2\in M_{Y_2}$。于是，我们得到 $\psi^{\mathrm{t},\ell}_{Y}(M_{Y_1})\subseteq M_{Y_2}$. 另一方面，引理 3 6 。意味着 #$(M_{Y_1})$ =#(M_{Y_2})。我们有 $\psi^{\mathrm{t},\ell}_{Y}:M_{Y_1}\xrightarrow{\simeq}M_{Y_2}$. 然后命题 3 3 。意味着 $\psi^{\mathrm{t},\ell}_{Y}$ 诱导出一个双射

$$\rho_\phi:D_{X_1}^{\mathrm{gp}}\xrightarrow{\simeq}D_{X_2}^{\mathrm{gp}}.$$

此外，由于 M_{Y_i} 和 $M_{Y_i}^*$ 可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{Y_i})$中单远阿贝尔重构，因此双射 ρ_ϕ 可以从 ϕ中单远阿贝尔重构。引理的证明至此完成。□

3.4.5. 令 $H_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 为任意开正规子群，且 $H_1 := \phi^{-1}(H_2)$。我们将由 H_i 和 f_{H_i} 诱导的、定义在 k_i 上的类型为 $(g_{X_{H_i}}, n_{X_{H_i}})$ 的光滑带标记稳定曲线记作 $(X_{H_i}, D_{X_{H_i}}), i \in \{1,2\}$；将由包含关系 $H_i \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 诱导的、定义在 k_i 上的伽罗瓦温和覆盖记作 $X_{H_i}, D_{X_{H_i}} \to (X_i, D_{X_i})$。此外，命题 pro-3.8 表明，包含关系 $H_i \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 诱导映射 $\gamma_{H_i,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})} : D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_i}} \to D^{\mathrm{gp}}_{X_i}$，该映射适合于以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_i}} & \xrightarrow{\vartheta_{X_{H_i}}} & D_{X_{H_i}} \\ {\scriptstyle \gamma_{H_i,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{f_{H_i}}} \\ D^{\mathrm{gp}}_{X_i} & \xrightarrow{\vartheta_{X_i}} & D_{X_i}, \end{array}$$

其中，$\gamma_{f_{H_i}}$ 表示由 f_{H_i} 诱导的标记点集映射。我们可通过由 ϕ 诱导的同构 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/H_1 \xrightarrow{\simeq} \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/H_2$，将 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/H_1$ 与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/H_2$ 视为相同，并记为 $G := \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/H_1 \cong \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/H_2$。于是有以下引理。

引理 3.14. 假设 $g_X \geq 2$，且 $(g_{X_{H_1}}, n_{X_{H_1}}) = (g_{X_{H_2}}, n_{X_{H_2}})$。则有限生成群的交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi|_{H_1}} & H_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \end{array} \tag{3.1}$$

诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}} & \xrightarrow{\rho_{\phi|_{H_1}}} & D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}} \\ {\scriptstyle \gamma_{H_1,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{H_2,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})}} \\ D^{\mathrm{gp}}_{X_1} & \xrightarrow{\rho_\phi} & D^{\mathrm{gp}}_{X_2}. \end{array} \tag{3.2}$$

此外，交换图 (2) 可以从 (1) 单绝对单性重构。

证明。命题 38 .ānd Lemma 313 .蕴含该图

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}} & \xrightarrow{\rho_{\phi|_{H_1}}} & D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}} \\ {\scriptstyle \gamma_{H_1,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{H_2,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})}} \\ D^{\mathrm{gp}}_{X_1} & \xrightarrow{\rho_\phi} & D^{\mathrm{gp}}_{X_2} \end{array}$$

可以从有限生成群的交换图中单绝对单性重构

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi|_{H_1}} & H_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}). \end{array}$$

为验证引理 3.14，只需检查该图是否交换。

令 $e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}} \in D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}}$, $e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}} := \rho_{\phi|_{H_1}}(e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}}) \in D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}}$, $e^{\mathrm{gp}}_{X_1} := \gamma_{H_1,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})}(e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}}) \in D^{\mathrm{gp}}_{X_1}$, $e^{\mathrm{gp}}_{X_2} := (\gamma_{H_2,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})} \circ \rho_{\phi|_{H_1}})(e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}}) \in D^{\mathrm{gp}}_{X_2}$，以及 $e^{\mathrm{gp},{X_1}^*} := \rho_\phi^{-1}(e^{\mathrm{gp}}_{X_2}) \in D^{\mathrm{gp}}_{X_1^*}$。我们来证明

$$e^{\mathrm{gp}}_{X_1} = e^{\mathrm{gp},*}_{X_1^*}.$$

我们分别令 $S^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}} := \gamma^{-1}_{H_1,\,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})}(e^{\mathrm{gp},\,{X_1}^*})$ 和 $S^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}} := \gamma^{-1}_{H_2,\,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})}(e^{\mathrm{gp}}_{X_2})$。注意到 $e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}} \in S^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}}$。为验证 $e^{\mathrm{gp}}_{X_1} = e^{\mathrm{gp},\,{X_1}^*}$，只需证明 $e^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}} \in S^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}}$。此外，对每个 $i \in \{1,2\}$，我们令

$$e_{X_i} := \vartheta_{X_i}(e^{\mathrm{gp}}_{X_i}),\ e_{X_{H_i}} := \vartheta_{X_{H_i}}(e^{\mathrm{gp}}_{X_i}),\ e^*_{X_1} := \vartheta_{X_1}(e^{\mathrm{gp},*}_{X_1^*}),\ S_{X_i} := S^{\mathrm{gp}}_{X_i},\ S_{X_{H_i}} := S^{\mathrm{gp}}_{X_{H_i}}.$$

于是，为验证引理，只需证明 $e_{X_{H_1}} \in \vartheta_{X_{H_1}}(S_{X_{H_1}})$。

设 (ℓ, d, y_2) 是与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 相关联的 mp-三元组。则引理 3.12 表明，ϕ 诱导出一个与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 相关联的 mp-三元组 (ℓ, d, y_1)，其中 $y_1 := (\psi_X^d)^{-1}(y_2) \in \mathrm{Hom}(\pi_1(X_1)\ \mu_d)$。令 $f_i : (Y_i, D_{Y_i}) \to (X_i, D_{X_i})$，$i \in \{1, 2\}$，为由 y_i 诱导的、在 k_i 上次数为 d 的温和覆盖。则与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 相关联的 mp-三元组 (ℓ, d, y_i) 诱导出一个 mp-三元组

$$(\ell, d, f_i : (Y_i, D_{Y_i}) \to (X_i, D_{X_i}))$$

在 k_i 上与 (X_i, D_{X_i}) 相关联的。注意，由于 f_1 和 f_2 是 étale 的，(Y_1, D_{Y_1}) 和 (Y_2, D_{Y_2}) 的类型相同。另一方面，我们有一个 mp-三元组

$$(\ell, d, g_2 : (Z_2, D_{Z_2}) := (Y_2, D_{Y_2}) \times_{(X_2, D_{X_2})} (X_{H_2}, D_{X_{H_2}}) \to (X_{H_2}, D_{X_{H_2}}))$$

与.....相关联 $(X_{H_2},\ D_{X_{H_2}})$ 由自然包含 $H_2 \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 以及 mp-三元组 $(\ell,\ d,\ f_2 : (Y_2,\ D_{Y_2}) \to (X_2,\ D_{X_2}))$。根据引理 3.12。再次，我们得到一个 mp-三元组

$$(\ell, d, g_1 : (Z_1, D_{Z_1}) := (Y_1, D_{Y_1}) \times_{(X_1, D_{X_1})} (X_{H_1}, D_{X_{H_1}}) \to (X_{H_1}, D_{X_{H_1}}))$$

与 $(X_{H_1}, D_{X_{H_1}})$ 相关联，由 $\phi|_{H_1}$ 诱导，并且该三元组为 $(\ell, d, g_2 : (Z_2, D_{Z_2}) \to (X_{H_2}, D_{X_{H_2}}))$.

设 $\alpha_2 \in M_{Y_2,\ e_{X_{2_0}}}$ 引理证明的最后一段

3.13 意味着我们有一个双射 $M_{Y_1} = \bigsqcup_{e \in D_{X_1}} M_{Y_1,\ e} \xrightarrow{\simeq} M_{Y_2} = \bigsqcup_{e \in D_{X_2}} M_{Y_2,\ e}$，由 ϕ 诱导。然后 α_2 诱导一个元素 $\alpha_1 \in M_{Y_1,\ e^*_{X_1}}$。。记 $(Y_{\alpha_1}, D_{Y_{\alpha_1}})$ 和 $(Y_{\alpha_2}, D_{Y_{\alpha_2}})$ 分别为由 α_1 和 α_2 诱导的、定义在 k_1 和 k_2 上的光滑带标记稳定曲线。考虑连通伽罗瓦温和覆盖

$$(Y_{\alpha_2}, D_{Y_{\alpha_2}}) \times_{(X_2, D_{X_2})} (X_{H_2}, D_{X_{H_2}}) \to (Z_2, D_{Z_2})$$

次数为 ℓ 的 k_2，并将 β_2 记为与此连通伽罗瓦驯 ramified 覆盖对应的$M^*_{Z_2}$ 的一个元素。于是我们有

$$\beta_2 = \sum_{c_2 \in S_{X_{H_2}}} t_{c_2} \beta_{c_2},$$

其中 $t_{c_2} \in (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^\times$ 且 $\beta_{c_2} \in M_{Z_2,\ c_{2_0}}$ 另一方面，引理 3.13 .的证明表明 β_2 诱导出一个元素

$$\begin{aligned}\beta_1 &:= \sum_{c_2 \in S_{X_{H_2}} \setminus \{e_{X_{H_2}}\}} t_{c_2} \beta_{\rho^{-1}_{\phi|_{H_1}}(c_2)} + t_{e_{X_{H_2}}} \beta_{\rho^{-1}_{\phi|_{H_1}}(e_{X_{H_2}})} \\ &= \sum_{c_2 \in S_{X_{H_2}} \setminus \{e_{X_{H_2}}\}} t_{c_2} \beta_{\rho^{-1}_{\phi|_{H_1}}(c_2)} + t_{e_{X_{H_2}}} \beta_{e_{X_{H_1}}} \in M^*_{Z_1}.\end{aligned}$$

于是我们有，$\beta_{e_{X_{H_1}}}$ 的系数 $t_{e_{X_{H_2}}}$ 不等于 0。因此，复合映射

$$(Y_{\alpha_1}, D_{Y_{\alpha_1}}) \times_{(X_1, D_{X_1})} (X_{H_1}, D_{X_{H_1}}) \to (Z_1, D_{Z_1}) \xrightarrow{g_1} (X_{H_1}, D_{X_{H_1}})$$

在$e_{X_{H_1}}$ 上温和分歧。这意味着$e_{X_{H_1}}$ 包含于 $S_{X_{H_1}}$中。至此，引理得证。 □

注 3.15. 注记 39 。表明 $D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_i}}$，$i \in \{1, 2\}$，具有的自然作用。此外，交换图

$$\begin{array}{ccc} D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_1}} & \xrightarrow{\rho_{\phi|_{H_1}}} & D^{\mathrm{gp}}_{X_{H_2}} \\ {\scriptstyle \gamma_{H_1, \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{H_2, \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})}} \\ D^{\mathrm{gp}}_{X_1} & \xrightarrow{\rho_\phi} & D^{\mathrm{gp}}_{X_2} \end{array}$$

与 G 的作用相容。

3.4.6. 接下来，我们证明条件 $(g_{X_{H_1}}, n_{X_{H_1}}) = (g_{X_{H_2}}, n_{X_{H_2}})$ 引理 314 .中提到的条件可以省略。首先，我们处理阿贝尔群的情形。

引理 3.16. 我们沿用 345.. 中引入的记号。设 $g_X \geq 2$，且 G 是一个阿贝尔群。那么有 $(g_{X_{H_1}}, n_{X_{H_1}}) = (g_{X_{H_2}}, n_{X_{H_2}})$。

证明。记 m 为 $\#G$，并令 $K_2 := \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$。于是我们立即得到 K_2包含于 H_2。令 $K_1 := \phi^{-1}(K_2) \subseteq H_1$。记 $(X_{K_i}, D_{X_{K_i}})$ 为由 K_i 诱导的、定义在 k_i 上的类型为 $(g_{X_{K_i}}, n_{X_{K_i}})$ 的光滑带标记稳定曲线，并记 $f_{K_i} : (X_{K_i}, D_{X_{K_i}}) \to (X_i, D_{X_i})$ 为由包含 $K_i \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 诱导的、定义在 k_i 上的温和覆盖。我们通过由 ϕ 诱导的同构，将 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/K_1$ 与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/K_2$ 视为相同，并记 $A := \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/K_1 \simeq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/K_2$。

由于每个 p-伽罗瓦驯覆盖都是 étale（即，其伽罗瓦群为 p-群的伽罗瓦驯覆盖），我们立即得到 $(g_{X_{K_1}}, n_{X_{K_1}}) = (g_{X_{K_2}}, n_{X_{K_2}})$。接着，引理 314 .表明，交换图

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\phi|_{K_1}} & K_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \end{array}$$

的有限生成群诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} D_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{\rho_{\phi|_{K_1}}} & D_{X_{K_2}}^{\mathrm{gp}} \\ {\scriptstyle \gamma_{K_1,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{K_2,\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})}} \\ D_{X_1}^{\mathrm{gp}} & \xrightarrow{\rho_\phi} & D_{X_2}^{\mathrm{gp}}. \end{array}$$

13.15. 注意，上述交换图具有 A 的自然作用。于是，对每个$e_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}} \in D_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}}$，与 $e_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}}$ 相关联的 A 中的惯性子群 $I_{e_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}}}$（即，在 A 的作用下稳定 $e_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}}$ 的稳定子）等于与 $e_{X_{K_2}}^{\mathrm{gp}} := \rho_{\phi|_{K_1}}(e_{X_{K_1}}^{\mathrm{gp}}) \in D_{X_{K_2}}^{\mathrm{gp}}$ 相关联的 A 中的惯性子群 $I_{e_{X_{K_2}}^{\mathrm{gp}}}$。另一方面，记 F 为由包含 $K_i \hookrightarrow H_i$ 诱导的自然态射 $A \twoheadrightarrow G$ 的核，$i \in \{1, 2\}$.由于 $(X_{H_i}, D_{X_{H_i}}) \simeq (X_{K_i}, D_{X_{K_i}})/F$，伽罗瓦群为 F 的伽罗瓦驯覆盖 $(X_{K_i}, D_{X_{K_i}}) \to (X_{H_i}, D_{X_{H_i}})$ 的分歧指数集合等于 $\{\#(F \cap I_{e_{X_{K_i}}^{\mathrm{gp}}})\}_{e_{X_{K_i}}^{\mathrm{gp}} \in D_{X_{K_i}}^{\mathrm{gp}}}$。由黎曼-赫尔维茨公式可得 $(g_{X_{H_1}}, n_{X_{H_1}}) = (g_{X_{H_2}}, n_{X_{H_2}})$。引理得证。□

接下来，我们处理一般情形。

引理 3.17. 我们沿用 3.4.5 中引入的记号。假设 $g_X \geq 2$ 和 $n_X \geq 2$。那么存在一个开正规子群 $P_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 包含于 H_2，使得以下结论成立：

> 记 $(X_{P_i}, D_{X_{P_i}})$，$i \in \{1, 2\}$ 为由 P_i 诱导的、定义在 k_i 上类型为 $(g_{X_{P_i}}, n_{X_{P_i}})$ 的光滑带标记稳定曲线，其中 $P_1 = \phi^{-1}(P_2)$。我们有 $(g_{X_{P_1}}, n_{X_{P_1}}) = (g_{X_{P_2}}, n_{X_{P_2}})$。

证明。首先，假设 G 是一个有限单群。应用引理 lem-63 16, . 后，我们可以假设 G 是非阿贝尔的。此外，我们声称可以假设 n_X 是一个正偶数。下面证明这一点。假设 $p \neq 2$。令 $R_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 为一个开子群，使得 $\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/R_2) = 2$，且 $R_2 \supseteq \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_2))$（即，对应于 R_2的循环伽罗瓦温和覆盖是 étale）。令 $R_1 := \phi^{-1}(R_2) \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$。于是我们有 $\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/R_1) = 2$，并且由引理 lem-33 12 . 可得 $R_1 \supseteq \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_1))$。分别用 $H_i \cap R_i$ 和 R_i 替换 H_i 和 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$、$i \in \{1, 2\}$ 后，我们可以假设 n_X 是一个正偶数。假设 $p = 2$。令 ℓ 为一个素数，使得 $(\ell, 2) = (\ell, \#G) = 1$。根据 R[R1, Théorème 4.3.1],, 存在一个开子群 $R_2^* \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$，使得 $\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/R_2^*) = \ell$，$R_2^* \supseteq \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_2))$，并且

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(R_2^{*,\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_p) > 0.$$

令 $R_1^* := \phi^{-1}(R_2^*) \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$。于是我们有 $\#(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/R_1^*) = \ell$，$\dim^{\mathbb{F}_p}(R_1^{*\,\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_p) > 0$，并且由引理 lem-3312 . 可得 $R_1^* \supseteq \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_1))$。因此，我们可以取一个开子群 $R_2' \subseteq R_2^*$，使得

$$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})/R_2' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z},$$

以及 $R_2' \supseteq \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_2))$。令 $R_1' := \phi^{-1}(R_2')$。那么，R_1' 的构造意味着 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})/R_1' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$，且 $R_1' \supseteq \ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_1))$。分别用 $H_i \cap R_i'$ 和 R_i' 替换 H_i 和 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$、$i \in \{1,2\}$ 后，我们可以假设 n_X 是正偶数。这就完成了该断言的证明。

令 $\#G := p^t m'$，使得 $(m', p) = 1$。由于 n_X 是正偶数，我们可以选取一个伽罗瓦温和覆盖

$$f_2 : (Y_2, D_{Y_2}) \to (X_2, D_{X_2})$$

其覆盖 k_2，伽罗瓦群为 $\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}$，且 f_2 在 D_{X_2} 的每个标记点上均全分歧。记 (g_{Y_2}, n_{Y_2}) 为 (Y_2, D_{Y_2}) 的类型，$Q_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 为由 f_2 诱导的开正规子群，$Q_1 := \phi^{-1}(Q_2) \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$，

$$f_1 : (Y_1, D_{Y_1}) \to (X_1, D_{X_1})$$

由自然包含 $Q_1 \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 诱导、伽罗瓦群为 $\mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}$、定义在 k_1 上的伽罗瓦驯分歧覆盖，以及 (g_{Y_1}, n_{Y_1}) 对应于 (Y_1, D_{Y_1}) 的类型。接着，引理 lem-63 16 . 表明 $(g_{Y_1}, n_{Y_1}) = (g_{Y_2}, n_{Y_2})$，且 f_1 在 D_{X_1} 的每个标记点上也全分歧。

我们考虑伽罗瓦驯分歧覆盖

$$(Z_i, D_{Z_i}) := (X_{H_i}, D_{X_{H_i}}) \times_{(X_i, D_{X_i})} (Y_i, D_{Y_i}) \to (X_i, D_{X_i}),\ i \in \{1,2\},$$

其定义在 k_i 上，伽罗瓦群为 $G \times \mathbb{Z}/m'\mathbb{Z}$，且该覆盖是 $(Z_i, D_{Z_i}) \to (Y_i, D_{Y_i})$ 与 $(Y_i, D_{Y_i}) \to (X_i, D_{X_i})$ 的复合。注意，由于 G 是非阿贝尔有限单群，(Z_i, D_{Z_i}) 是连通的。此外，根据阿贝尔引理，我们得到 $(Z_i, D_{Z_i}) \to (Y_i, D_{Y_i})$ 是 k_i 上的 étale 覆盖。由于 $(g_{Y_1}, n_{Y_1}) = (g_{Y_2}, n_{Y_2})$ 和 $(Z_i, D_{Z_i}) \to (Y_i, D_{Y_i})$ 非分歧，黎曼-赫尔维茨公式表明 $(g_{Z_1}, n_{Z_1}) = (g_{Z_2}, n_{Z_2})$。

接下来，我们证明 G 为任意有限群时的情形下的引理。设 $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n := G$ 为 G 的子群序列，使得对于所有 $i \in \{2, \ldots n\}$，G_i/G_{i-1} 都是单群。为验证该引理，只需证明 $n = 2$ 时的情形。令 N_2 为自然同态 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow G_1$ 的核，并令 $N_1 := \phi^{-1}(N_2)$。于是，以 G_1 替换 G，并对单群 G_1 应用该引理，我们得到一个开正规子群 $M_2 \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$，它包含于 N_2 中，并满足 $(g_{X_{M_1}}, n_{X_{M_1}}) = (g_{X_{M_2}}, n_{X_{M_2}})$，其中 $M_1 := \phi^{-1}(M_2)$，而 $(g_{X_{M_i}}, n_{X_{M_i}})$，$i \in \{1,2\}$ 表示对应于 M_i 的光滑带标记稳定曲线的类型。

若 $M_i \subseteq H_i, i \in \{1,2\}$，则我们可以设 $P_i := M_i$.。若 $H_i, i \in \{1,2\}$ 不包含 M_i，则设 $O_i := M_i \cap H_i$。于是有 $M_i/O_i \simeq G/G_1$.。注意到 G/G_1 是一个单群。于是，将 (X_i, D_{X_i}) 和 G 分别替换为 $(X_{M_i}, D_{X_{M_i}})$ 和单群 G/G_1后，由该引理在此情形下成立可得所述引理。这就完成了该引理的证明。□

3.4.7. 现在，我们证明本节的主要结果。

定理 3.18. 设 $(\widetilde{X}_i, D_{\widetilde{X}_i})$ $i \in \{1,2\}$ 是在 unicov3133 1 2 . . 中定义的 (X_i, D_{X_i}) 的通用温和覆盖。令 ϕ：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 为任意一个开连续满同态。那么，命题 them-13 10 . 中得到的关于 $\mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i}))$ 的单远阿贝尔重构的群论算法，与满射 ϕ：$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 相容。也就是说，以下结论成立：设 $\widetilde{e}_2 \in D_{\widetilde{X}_2}$ 和 $I_{\widetilde{e}_2} \in \mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$ 是与 $\widetilde{e}_2$ 相关联的惯性子群。那么，存在一个与点 $\widetilde{e}_1 \in D_{\widetilde{X}_1}$ 相关联的惯性子群 $I_{\widetilde{e}_1} \in \mathrm{Ine}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}))$，使得

$$\phi(I_{\widetilde{e}_1}) = I_{\widetilde{e}_2},$$

且限制同态 $\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}} : I_{\widetilde{e}_1} \twoheadrightarrow I_{\widetilde{e}_2}$ 是一个同构。

证明。如果 $n_X = 0$，则该定理显然成立。我们假设 $n_X > 0$。设 $m >> 0$ 为一个整数，使得 $(m,p) = 1$。令 K_i: $=\ker(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$，$i \in \{1,2\}$。记 (X_{K_i}, D_{K_i}) 为由 K_i诱导的、定义在 k_i上的类型为 $(g_{X_{K_i}}, n_{X_{K_i}})$ 的光滑带标记稳定曲线。此外，条件 $m >> 0$ 蕴含 $g_{X_{K_1}} = g_{X_{K_2}} \geq 2$, $n_{X_{K_1}} = n_{X_{K_2}} \geq 2$.

应用引理 3.17，我们可以选取一组开子群 $C_{X_2} : = \{H_{2,j}\}_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 使得 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 满足以下三个条件:

- $H_{2,1} = K_2$;
- $\lim\leftarrow_j \pi_{\mathrm{t}1}(U_{X_2})/H_{2,j} \simeq \pi_{\mathrm{t}1}(U_{X_2})$（即 C_{X_2}是一个余终系统）；
- 将 $\{H_{1,j} := \phi^{-1}(H_{2,j})\}_{j\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 记作由 ϕ诱导的 $\pi\mathrm{t}1(U_{X_1})$的开子群集合；对于每个$j \in \mathbb{Z}_{>0}$，将由$H_{i,j}$诱导的、定义在k_i 上类型为$(g_{X_{H_{i,j}}}, n_{X_{H_{i,j}}})$的光滑带标记稳定曲线记作$(X_{H_{i,j}}, D_{X_{H_{i,j}}})$，$i \in \{1,2\}$，那么我们有$(g_{X_{H_{1,j}}}, n_{X_{H_{1,j}}}) = (g_{X_{H_{2,j}}}, n_{X_{H_{2,j}}})$。

对于每个 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, 我们将$e_{X_{H_{2,j}}} \in D_{X_{H_{2,j}}}$ 记作 $\widetilde{e}_2$的像。于是我们得到一列标记点 s

$$\mathcal{I}_{\widetilde{e}_2}^{C_{X_2}} : \cdots \mapsto e_{H_{2,2}} \mapsto e_{H_{2,1}}.$$

命题 3.8 .表明，对于每个$H_{2,j}$, $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，集合$D_{X_{H_{2,j}}}^{\mathrm{gp}}$ 可以从$H_{2,j}$单远阿贝尔重构。对于每个$e_{X_{H_{2,j}}} \in D_{X_{H_{2,j}}}$，我们用.....表示

$$e_{X_{H_{2,j}}}^{\mathrm{gp}} := \vartheta_{X_{H_{2,j}}}^{-1}(e_{X_{H_{2,j}}}).$$

随后，标记点序列 $\mathcal{I}_{\widetilde{e}_2}^{C_X}$ 诱导出一个序列

$$\mathcal{I}_{\widetilde{e}_2^{\mathrm{gp}}}^{C_X} : \cdots \mapsto e_{X_{H_{2,2}}}^{\mathrm{gp}} \mapsto e_{X_{H_{2,1}}}^{\mathrm{gp}}.$$

然后，注记 3.9 .意味着与 $\widetilde{e}_2$ 相关联的惯性子群等于 $\mathcal{I}_{\widetilde{e}_2^{\mathrm{gp}}}^{C_X}$ 的稳定子。

根据引理 3.14 .和引理 3.17., $\mathcal{I}_{\widetilde{e}_2^{\mathrm{gp}}}^{C_{X_2}}$ 诱导出如下序列:

$$\cdots \mapsto e_{X_{H_{1,2}}}^{\mathrm{gp}} := \rho_{\phi|_{H_{1,2}}}^{-1}(e_{X_{H_{2,2}}}^{\mathrm{gp}}) \in D_{X_{H_{1,2}}}^{\mathrm{gp}} \mapsto e_{X_{H_{1,1}}}^{\mathrm{gp}} := \rho_{\phi|_{H_{1,1}}}^{-1}(e_{X_{H_{2,1}}}^{\mathrm{gp}}) \in D_{X_{H_{1,1}}}^{\mathrm{gp}}$$

其带有 $I_{\widetilde{e}_2}$的作用。则命题 3.10 意味着我们有一个序列

$$\cdots \mapsto e_{X_{H_{1,2}}} := \vartheta_{X_{H_{1,2}}}(e_{X_{H_{1,2}}}^{\mathrm{gp}}) \in D_{X_{H_{1,2}}} \mapsto e_{X_{H_{1,1}}} := \vartheta_{X_{H_{1,1}}}(e_{X_{H_{1,1}}}^{\mathrm{gp}}) \in D_{X_{H_{1,1}}}$$

带有 $I_{\widetilde{e}_2}$ 的作用

令 $K_{\ker(\phi)}$ 为由 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 的闭子群 $\ker(\phi)$ 在 K 中诱导出的子域，$X_{1,\ \ker(\phi)}$ 在 $K_{\ker(\phi)}$ 中对 X_1 的正规化，以及 $D_{\widetilde{X}_{1,\ \ker(\phi)}}$ 在 X_1中 D_{X_1} 的逆像，$\ker(\phi)$。则该序列

$$\cdots \mapsto e_{X_{H_{1,2}}} \mapsto e_{X_{H_{1,1}}}.$$

确定一个点 $\widetilde{e}_{1,\ \ker(\phi)} \in D_{\widetilde{X}_{1,\ \ker(\phi)}}$. 我们选取 $\widetilde{e}_1 \in D_{\widetilde{X}_1}$ 的一个点，使得 $\widetilde{e}_1$ 在 $D_{\widetilde{X}_{1,\ \ker(\phi)}}$ 中的像为 $\widetilde{e}_{1,\ \ker(\phi)}$。于是有 $\phi(I_{\widetilde{e}_1}) = I_{\widetilde{e}_2}$。此外，由于 $I_{\widetilde{e}_1}$ 和 $I_{\widetilde{e}_2}$ 同构于 $\widehat{\mathbb{Z}}(1)^{p'}$，限制同态 $\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}$ 是一个同构。这就完成了定理的证明。□

3.5. 通过满射重构加法结构。我们沿用 3.4.1 中引入的设置。

3.5.1. 设 $\widetilde{e}_2$ 是 $D_{\widetilde{X}_2}$的任意一个点。应用定理 3.18 。可得存在一个点 $\widetilde{e}_1 \in D_{\widetilde{X}_1}$，使得$\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}$: $I_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\simeq} I_{\widetilde{e}_2}$ 是一个同构。记 $\overline{\mathbb{F}}_{p,\ i}$、 $i \in \{1,2\}$ 为 $\mathbb{F}_p$ 在 k_i 中的代数闭包。置

$$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i} := (I_{\widetilde{e}_i} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'}) \sqcup \{*_{\widetilde{e}_i}\},\ i \in \{1,2\},$$

其中 $\{*_{\widetilde{e}_i}\}$ 是一个单点集，而 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'}$ 表示 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的素数至 p 部分，它可以被典范地识别为$\bigcup_{(p,m)=1}\mu_m(k_i)$。此外，令 $a_{\widetilde{e}_i}$ 为 $I_{\widetilde{e}_i}$的一个生成元。于是我们得到一个自然双射

$$I_{\widetilde{e}_i} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'},\ a_{\widetilde{e}_i} \otimes 1 \mapsto 1 \otimes 1.$$

因此，我们得到以下双射

$$I_{\widetilde{e}_i} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{(p,m)=1} \mu_m(k_i) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{F}}_{p,i}^{\times}.$$

这意味着，作为集合，$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i}$ 可以与$\overline{\mathbb{F}}_{p,\ i}$ 等同，因此它具有域结构，其乘法群为$I_{\widetilde{e}_i} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i^{p'}$，零元为$*_{\widetilde{e}_i}$。

3.5.2. 我们将证明 $\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}: I_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\sim} I_{\widetilde{e}_2}$ 诱导出一个作为域的同构$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{\widetilde{e}_2}$（即命题 pro-43 19.）。them- 主要思路如下：首先，应用定理 3.18 将问题化归为 $n_X = 3$ 的情形。其次，$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i}$的域结构（即$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i}$与$\overline{\mathbb{F}}_{p,i}$作为域的同构集合）可转化为一个关于广义哈斯-维特不变量的特定问题（例如，命题 pro-43 19. 的证明中的 $\gamma_{\chi_i}(M_{\chi_i})$）。然后再次应用定理 them-23 18 .，通过比较 $\gamma_{\chi_1}(M_{\chi_1})$与 $\gamma_{\chi_2}(M_{\chi_2})$，得出结果。

3.5.3. 我们有如下命题。

命题 3.19。$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i}, i \in \{1,2\}$ 的域结构可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 单远阿贝尔重构。此外，同构 $\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}: I_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\sim} I_{\widetilde{e}_2}$ 诱导一个同构

$$\theta_{\phi,\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2}: \mathbb{F}_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_{\widetilde{e}_2}$$

作为域。

证明。首先，我们声称可以假设 $n_X = 3.$。若 $g_X = 0$，则 $n_X \geq 3$。假设 $g_X \geq 1$。定理 them-23 18 表明，$\phi: \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 诱导一个开连续满射 $\phi^{\text{ét}}: \pi_1(X_1) \twoheadrightarrow \pi_1(X_2)$。令 $H_2' \subseteq \pi_1(X_2)$ 为一个开正规子群，使得 $\#(\pi_1(X_2)/H_2') \geq 3$ 且 $H_1' := (\phi^{\text{ét}})^{-1}(H_2')$。记 $H_i \subseteq \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$，$i \in \{1,2\}$ 为自然满射 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i}) \twoheadrightarrow \pi_1(X_i)$ 下 H_i' 的逆像，并以 $(X_{H_i}, D_{X_{H_i}})$ 表示由 H_i 诱导的、定义在 k_i 上的类型为 $(g_{X_{H_i}}, n_{X_{H_i}})$ 的光滑带标记稳定曲线。注意到 $g_{X_{H_1}} = g_{X_{H_2}} \geq 2$ 和 $n_{X_{H_1}} = n_{X_{H_2}} \geq 3$。将 (X_i, D_{X_i}) 替换为 $(X_{H_i}, D_{X_{H_i}})$ 后，我们可以假设 $g_X \geq 2$ 且 $n_X \geq 3$。满射 ϕ 诱导一个双射

$$D_{X_1} \xrightarrow{\vartheta_{X_1}^{-1}} D_{X_1}^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{\rho_\phi} D_{X_2}^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{\vartheta_{X_2}} D_{X_2}.$$

令 $D'_{X_1} := \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}\} \subseteq D_{X_1}$ 和 $D'_{X_2} := \{e_{2,1} := \vartheta_{X_2} \circ \rho_\phi \circ \vartheta_{X_1}^{-1}(e_{1,\ 1})\, e_{2,\ 2} := \vartheta_{X_2} \circ \rho_\phi \circ \vartheta_{X_1}^{-1}(e_{1,\ 2})\, e_{2,\ 3} := \vartheta_{X_2} \circ \rho_\phi \circ \vartheta_{X_1}^{-1}(e_{1,\ 3})\} \subseteq D_{X_2}$。那么，$(X_i, D'_{X_i})$，$i \in \{1,2\}$ 是定义在 k_i 上、类型为 $(g_X, 3)$ 的光滑带标记稳定曲线。记 $I_i, i \in \{1,2\}$ 为由与 $D_{\widetilde{X}_i}$ 中像在 D_{X_i} 中包含于 $D_{X_i} \setminus D'_{X_i}$ 的元素相关联的惯性子群生成的 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 的闭子群。那么我们有一个同构

$$\pi_1^{\mathrm{t}}(X_i \setminus D'_{X_i}) \cong \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})/I_i,\ i \in \{1,2\}.$$

此外，定理 3.18。蕴含 ϕ 诱导出开连续满同态

$$\phi': \pi_1^{\mathrm{t}}(X_1 \setminus D'_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(X_2 \setminus D'_{X_2}).$$

因此，分别将 (X_i, D_{X_i})、$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 和 ϕ 替换为 (X_i, D'_{X_i})、$\pi_1^{\mathrm{t}}(X_i \setminus D'_{X_i})$ 和 ϕ' 后，我们可以假设$n_X = 3.$

令 $r \in \mathbb{N}$。我们将 $\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}$，$i \in \{1,2\}$ 记作 $\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i}$ 的唯一子域，其基数等于 p^r。另一方面，我们固定任意一个基数为 p^r 的有限域 $\mathbb{F}_{p^r}$ 及其代数闭包 $\overline{\mathbb{F}}_p$（其中 $\mathbb{F}_p$）。根据命题 3.10，$\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}^{\times} = I_{\widetilde{e}_i}/(p^r - 1)$ 可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 单远阿尔贝重构。因此，重构 $\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}$ 的域结构，等价于将 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}, \mathbb{F}_{p^r})$ 重构为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{group}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}^{\times}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times})$ 的子集。注意，为了重构 $\mathbb{F}_{\widetilde{e}_i}$ 的域结构，只需对关于整除关系的 $\mathbb{N}$ 的一个余终子集中的r，重构子集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}, \mathbb{F}_{p^r})$。

令 $\chi_i \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{groups}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times})$。将 H_{χ_i} 记作 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z} \xrightarrow{\chi_i} \mathbb{F}_{p^r}^{\times}$ 的核，将 M_{χ_i} 记作 $H_{\chi_i}^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{F}_p$，并将 $(X_{H_{\chi_i}}, D_{X_{H_{\chi_i}}})$ 记作由H_{χ_i}诱导的、定义在 k_i 上的光滑带标记稳定曲线。我们定义

$$M_{\chi_i}[\chi_i] := \{a \in M_{\chi_i} \otimes_{\mathbb{F}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \mid \sigma(a) = \chi_i(\sigma)a \text{ for all } \sigma \in \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}\}$$

以及 $\gamma_{\chi_i}(M_{\chi_i})$：＝维数$_{\overline{\mathbb{F}}_p}(M_{\chi_i}[\chi_i])$（即广义哈斯-维特不变量（见 [Y5，第 2 节。2]）。那么 [T4，注记 3。7] 推出 $\gamma_{\chi_i}(M_{\chi_i}) \leq g_X + 1$。此外，我们定义两个映射

$$\mathrm{Res}_{i,r} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}^{\times}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times}),$$

$$\Gamma_{i,r} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times}) \to \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \chi_i \mapsto \gamma_{\chi_i}(M_{\chi_i}),$$

其中映射 Res$_{i,\ r}$ 是关于自然包含 $\mathbb{F}_{p^r,\ \widetilde{e}_i}^{\times} \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}$.的限制

令 m_0 为所有素数 $\leq p-2$ 的乘积，若 $p \neq 2$，3 且 $m_0 = 1$ 若 $p = 2$，3。令 r_0 为 p 在乘法群中的阶 $\mathbb{Z}/m_0\mathbb{Z}^{\times}$。那么 [T4，断言 5。4] 推出以下结果：

> 存在一个仅依赖于 g_X 的常数 $C(g_X)$，使得对于每个被 r_0 整除的 $r > \log_p(C(g_X) + 1)$，都有
>
> $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}, \mathbb{F}_{p^r}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}^{\mathrm{surj}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_i}^{\times}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times}) \setminus \mathrm{Res}_{i,r}(\Gamma_{i,r}^{-1}(\{g_X+1\})),\ i \in \{1,2\},$$
>
> 其中 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}^{\mathrm{surj}}(-,-)$ 表示其元素属于 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{groups}}(-,-)$ 的满射集合。

设 $\kappa_2 \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{groups}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times})$。则 ϕ 诱导出一个特征

$$\kappa_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{ab}} \otimes \mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}, \mathbb{F}_{p^r}^{\times}).$$

此外，满射 $\phi|_{H_{\kappa_1}}$ 诱导出一个满射 $M_{\kappa_1}[\kappa_1] \twoheadrightarrow M_{\kappa_2}[\kappa_2]$.。假设 $\kappa_2 \in \Gamma_{2\ r}^{-1}$ $(\{g_X+1\})$。满射 $M_{\kappa_1}[\kappa_1] \twoheadrightarrow M_{\kappa_2}[\kappa_2]$ 蕴含 $\gamma_{\kappa_1}(M_{\kappa_1}) = g_X + 1$。这意味着 $\kappa_1 \in \Gamma_{1\ r}^{-1}$ $(\{g_X+1\})$。另一方面，同构 $\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}$: $I_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\simeq} I_{\widetilde{e}_2}$ 诱导出一个单射

$$\mathrm{Res}_{2,r}(\Gamma_{2,r}^{-1}(\{g_X+1\})) \hookrightarrow \mathrm{Res}_{1,r}(\Gamma_{1,r}^{-1}(\{g_X+1\})).$$

由于 #(Hom$_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_1}, \mathbb{F}_{p^r})$) = #(Hom$_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_2}, \mathbb{F}_{p^r})$)，我们得到 $\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}$ 诱导了双射 Hom$_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_2}, \mathbb{F}_{p^r})$ $\xrightarrow{\simeq}$Hom$_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{p^r,\widetilde{e}_1}, \mathbb{F}_{p^r})$。因此，$\phi|_{I_{\widetilde{e}_1}}$ 诱导了一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{\widetilde{e}_2}, \overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{fields}}(\mathbb{F}_{\widetilde{e}_1}, \overline{\mathbb{F}}_p).$$

若我们选择 $\overline{\mathbb{F}}_p = \mathbb{F}_{\widetilde{e}_2}$，则 $\mathrm{id}^{\mathbb{F}_{\widetilde{e}_2}}$ 在上述双射下的像诱导出一个同构 $\theta_{\phi,\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2}$: $\mathbb{F}_{\widetilde{e}_1} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{F}_{\widetilde{e}_2}$，视为域。这就完成了该命题的证明。□

4. 主要定理

4.1. 第一个主要定理。在本小节中，我们应用前几节得到的结果，证明类型为 $(0,\ n)$ 的曲线在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上可以从以下对象中群论地重构：开连续同态 (即　　定理 4.4）。

4.1.1. 设置。我们固定一些记号。设 (X_i, D_{X_i})，$i \in \{1,2\}$ 是定义在特征为 $p > 0$, $U_{X_i} := X_i \setminus D_{X_i}$, $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 的代数闭域 k_i 上的类型为 (g_X, n_X) 的光滑带标记稳定曲线；$\widetilde{\ }$ 群是 U_{X_i} 的驯基本群，$\pi_1(X_i)$ 是 X_i 的 étale 基本群，而 $(X_i, D_{\widetilde{X}_i})$ 是与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 相关联的 (X_i, D_{X_i}) 的通用温和覆盖（unicov3133 1 2. . ）。令 $k_i^{\mathrm{m}}, i \in \{1,2\}$ 为 k_i 中使 U_{X_i} 可定义的最小代数闭子域。因此，考虑 X_i 的函数域，我们得到一条光滑带标记稳定曲线 $(X_i^{\mathrm{m}}, D_{X_i^{\mathrm{m}}})$（即 (X_i, D_{X_i}) 的极小模型（参见 T[T3，定义 1.30 和引理 1.31]）），使得 $U_{X_i} \cong U_{X_i^{\mathrm{m}}} \times_{k_i^{\mathrm{m}}} k_i$ 作为 k_i-概形，其中 $U_{X_i^{\mathrm{m}}} := X_i^{\mathrm{m}} \setminus D_{X_i^{\mathrm{m}}}$。注意，$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i^{\mathrm{m}}})$ 与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 自然同构。我们将 $\mathbb{F}_p$ 在 k_i 中的代数闭包记为 $\overline{\mathbb{F}}_{p,i}$。此外，令

$$d_{(X_i, D_{X_i})} := \begin{cases} 0, & \text{if } k_i^{\mathrm{m}} \cong \overline{\mathbb{F}}_{p,i}, \\ 1, & \text{if } k_i^{\mathrm{m}} \ncong \overline{\mathbb{F}}_{p,i}. \end{cases}$$

4.1.2. 首先，我们有如下引理。

引理 4.1. 令 $\phi : \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \to \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 是任意开连续同态。那么 ϕ 是一个满射。

证明。我们将 ϕ 的像记为 Π_ϕ，它是 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 的一个开子群。令 (X_ϕ, D_{X_ϕ}) 为由 Π_ϕ 和 f_ϕ 诱导的、定义在 k_2 上的类型为 (g_{X_ϕ}, n_{X_ϕ}) 的光滑带标记稳定曲线：$(X_\phi, D_{X_\phi}) \to (X_2, D_{X_2})$ 是由包含关系 $\Pi_\phi \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 诱导的、定义在 k_2 上的光滑带标记稳定曲线的温和覆盖。由于 f_ϕ 是温和覆盖，我们有 $n_{X_\phi} \geq n_X$。另一方面，若 $g_X = 0$，则有 $g_\phi \geq 0$。若 $g_X > 0$，黎曼-赫尔维茨公式推出 $g_{X_\phi} \geq [\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : \Pi_\phi](g_X - 1) + 1 \geq g_X$。于是我们有 $g_\phi \geq g_X$ 和 $n_{X_\phi} \geq n_X$。注意，$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \Pi_\phi \hookrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 蕴含

$$2g_X + n_X - 1 \geq 2g_{X_\phi} + n_{X_\phi} - 1 \geq 2g_X + n_X - 1.$$

于是我们得到 $2g_X + n_X - 1 = 2g_{X_\phi} + n_{X_\phi} - 1$。此外，命题 coro-p-average 3.11 (ii) 以及由 ϕ 诱导的自然满射 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \Pi_\phi$ 表明 $g_X \geq g_{X_\phi}$。于是我们得到 $g_X = g_{X_\phi}$。因此，我们有 $(g_X, n_X) = (g_{X_\phi}, n_{X_\phi})$。这意味着温和覆盖 $f_\phi : (X_\phi, D_{X_\phi}) \to (X_2, D_{X_2})$ 在 D_{X_2} 的每个标记点上都全分歧。

我们来证明 $[\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : \Pi_\phi] = 1$。假设 $[\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : \Pi_\phi] \neq 1$。由于 f_ϕ 全分歧，黎曼-赫尔维茨公式推出：若 $n_X \neq 0$ 且 $g_X \neq 0$，则 $g_{X_\phi} > g_X$。这与假设矛盾。若 $n_X = 0$，黎曼-赫尔维茨公式推出：若 $g_X \neq 0$，则 $g_X = 1$。这与 (X_i, D_{X_i}) 是带标记稳定曲线这一假设矛盾。于是我们得到 $g_X = g_{X_\phi} = 0$。此外，再次应用黎曼-赫尔维茨公式，由于 $n_X = n_{X_\phi}$，我们得到 $n_X = n_{X_\phi} = 2$。这与 (X_i, D_{X_i}) 是带标记稳定曲线这一假设矛盾。于是我们有 $[\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) : \Pi_\phi] = 1$。这意味着 ϕ 是一个满射。□

4.1.3. 进一步的设定。在本小节余下部分中，我们假设 $(g_X, n_X) = (0, n)$。我们固定两个彼此不同的标记点 $e_{1,\infty}, e_{1,0} \in D_{X_1}$。此外，任取一个域 $k_1' \cong k_1$，并任取一个同构 $\varphi_1 : X_1 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^1_{k_1'}$，使其作为概形满足 $\varphi_1(e_{1,\infty}) = \infty$ 且 $\varphi_1(e_{1,0}) = 0$。于是，k_1-有理点集 $X_1(k_1) \setminus \{e_{1,\infty}\}$ 通过双射 φ_1 获得一个 $\mathbb{F}_p$-模结构。注意，由于任何固定 ∞ 和 0 的 k_1'-自同构都是数乘，因此 $\mathbb{F}_p$-模结构 $X_1(k_1) \setminus \{e_{1,\infty}\}$ 不依赖于 k_1' 和 φ_1 的选择，而仅依赖于 $e_{1,\infty}$ 和 $e_{1,0}$ 的选择。于是，我们称 $X_1(k_1) \setminus \{e_{1,\infty}\}$ 相对于 $e_{1,\infty}$ 和 $e_{1,0}$ 具有一个 $\mathbb{F}_p$-模结构。

应用定理 3.18 后，我们将在下一个引理中证明，Tamagawa 的群论判据（即，[T2，引理 3.3]）对于线性条件，与任意开连续满同态相容。

引理 4.2. 设 $\phi : \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 是一个开连续满同态。由引理 *3*13.，ϕ 诱导出一个双射 $\rho_\phi : D_{X_1}^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{\simeq} D_{X_2}^{\mathrm{gp}}$。我们可以通过双射 $D_{X_i}^{\mathrm{gp}}, i \in \{1,2\}$，将其与 D_{X_i}、$\vartheta_{X_i} : D_{X_i}^{\mathrm{gp}} \xrightarrow{\simeq}$

D_{X_i}。记 $e_{2,\infty}$ 和 $e_{2,0}$ 分别表示 $\rho_\phi(e_{1,\infty})$ 和 $\rho_\phi(e_{1,0})$。设

$$\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b_{e_1}e_1 = e_{1,0}$$

是关于 $e_{1,\infty}$ 和 $e_{1,0}$ 在 (X_1, D_{X_1}) 上的线性条件，其中 $b_{e_1}\in\mathbb{F}_p$ 对每个 $e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}$ 均成立。那么线性条件

$$\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b_{e_1}\rho_\phi(e_1) = \rho_\phi(e_{1,0}) = e_{2,0}$$

关于 $e_{2,\infty}$ 和 $e_{2,0}$ 在 (X_2, D_{X_2}) 上也成立。

证明。设 $\widetilde{e}_{2,\infty}\in D_{\widetilde{X}_2}$ 是位于 $e_{2,\infty}$ 上的一个点。集合 $\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{2,\infty}} := (I_{\widetilde{e}_{2,\infty}}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_2^{p'})\sqcup\{*_{\widetilde{e}_{2,\infty}}\}$ 具有域结构，而命题 pro-43 19 . 表明，该域结构可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 单远阿贝尔重构。定理 them-23 18 . 表明，存在一个点 $\widetilde{e}_{1,\infty}\in D_{\widetilde{X}_{\cdot}}$ 位于 $e_{1,\infty}$ 上，使得 $\phi(I_{\widetilde{e}_{1,\infty}}) = \widetilde{e}_{2,\infty}$。再次根据命题 pro-43 19 .，集合 $\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{1,\infty}} := (I_{\widetilde{e}_{1,\infty}}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_1^{p'})\sqcup\{*_{\widetilde{e}_{1,\infty}}\}$ 具有域结构，且该域结构可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 单远阿贝尔重构，并且 ϕ 诱导出一个同构 $\theta_{\phi,\widetilde{e}_{1,\infty},\widetilde{e}_{2,\infty}}:\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{1,\infty}}\xrightarrow{\sim}\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{2,\infty}}$，作为域。

对于每个 $e_1\in D_{X_1}$，我们取 $b'_{e_1}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 $b'_{e_1}\equiv b_{e_1}$（模 p），并且

$$\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b'_{e_1}\geq 2.$$

令 $r\geq 1$，使得 $p^r-2\geq\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b'_{e_1}$。对于 e_1 上的每个 $\widetilde{e}_1\in D_{\widetilde{X}_1}$，记 $I_{\widetilde{e}_{1,\mathrm{ab}}}$ 为自然态射 $I_{\widetilde{e}_1}\hookrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\twoheadrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{ab}}$. 的像。此外，由于 $I_{\widetilde{e}_{1,\mathrm{ab}}}$ 的像不依赖于 $\widetilde{e}_1$ 的选择，我们可以将 $I_{\widetilde{e}_{1,\mathrm{ab}}}$ 记为 I_{e_1}。$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 的最大素数异于 p 的商空间的结构表明，$\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{ab}}$ 由 $\{I_{e_1}\}_{e_1\in D_{X_1}}$ 生成，并且存在 I_{e_1} 的一个生成元 a_{e_1}、$e_1\in D_{X_1}$，使得 $\prod_{e_1\in D_{X_1}} a_{e_1}=1.$。我们定义

$$I_{e_{1,\infty}}\to\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z},\ a_{e_{1,\infty}}\mapsto 1,$$
$$I_{e_{1,0}}\to\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z},\ a_{e_{1,0}}\mapsto(\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b'_{e_1})-1,$$

and

$$I_{e_1}\to\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z},\ a_{e_1}\mapsto -b'_{e_1},\ e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}.$$

那么，上述定义的惯性子群同态诱导出一个满射 $\delta_1:\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\twoheadrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{ab}}\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}.$。注意，$\ker(\delta_1)$ 不依赖于生成元 $\{a_{e_1}\}_{e_1\in D_{X_1}}$ 的选择。

令 $I_{\widetilde{e}_2} := \phi(I_{\widetilde{e}_1})$，$\widetilde{e}_1\in D_{\widetilde{X}_1}$ 和 I_{e_2}，$e_2\in D_{X_2}$ 为自然同态 $I_{\widetilde{e}_2}\hookrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})\twoheadrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{ab}}$. p p^r-1 $=1$ 3 18 δ_1 $\phi^{p'}$ $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{p'}\xrightarrow{\sim}\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{p'}$ ( ) 的像。由于 (,) ，由定理 . 可知，同构 : ( ) ( ) 导出以下惯性子群同态:

$$I_{e_{2,\infty}}\to\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z},\ a_{e_{2,\infty}}\mapsto 1,$$
$$I_{e_{2,0}}\to\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z},\ a_{e_{2,0}}\mapsto(\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b'_{e_1})-1,$$

and

$$I_{e_2}\to\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z},\ a_{e_2}\mapsto -b'_{e_1},\ e_2\in D_{X_2}\setminus\{e_{2,\infty},e_{2,0}\},$$

其中 a_{e_2}，$e_2\in D_{X_2}$ 表示由 ϕ 通过 a_{e_1}，$e_1\in D_{X_1}$ 诱导的元素。于是，上述定义的惯性子群同态诱导出满射 $\delta_2:\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})\twoheadrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{ab}}\twoheadrightarrow\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z}.$

我们置 $H_{\delta_i} := \ker(\delta_i)$ $M_{\delta_i} := H_{\delta_i}^{\mathrm{ab}}\otimes\mathbb{F}_p$，$i\in\{1,2\}$. 将由 H_{δ_i} 诱导的、定义在 k_i 上的光滑带标记稳定曲线记为 $(X_{H_{\delta_i}}, D_{X_{H_{\delta_i}}})$，其中 $H_{\delta_1}=\phi^{-1}(H_{\delta_2})$。$\mathbb{F}_p$-向量空间 M_{δ_i} 具有 $I_{\widetilde{e}_{i,\infty}}$ 通过共轭作用给出的自然作用，该作用与由下列特征给出的作用一致

$$\chi_{I_{\widetilde{e}_{i,\infty}},r}: I_{\widetilde{e}_{i,\infty}}\hookrightarrow\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})\xrightarrow{\delta_i}\mathbb{Z}/(p^r-1)\mathbb{Z} = I_{\widetilde{e}_{i,\infty}}/(p^r-1)\hookrightarrow\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{i,\infty}}^{\times},\ i\in\{1,2\}.$$

我们置 $M_{\delta_i}[\chi_{I_{\tilde{e}_{i,\infty}},r}]:=\{a\in M_{\delta_i}\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathbb{F}_{\tilde{e}_{i,\infty}}\mid \sigma(a)=\chi_{I_{\tilde{e}_{i,\infty}},r}(\sigma)a,$ 对所有 $\sigma\in I_{\tilde{e}_{i,\infty}}\}$ 均成立（事实上，$\dim^{\mathbb{F}_{\tilde{e}_{i,\infty}}}(M_{\delta_i}[\chi_{I_{\tilde{e}_{i,\infty}},r}])$ 是与 $H_{\delta_i}\subseteq\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 对应的 U_{X_i} 的温和覆盖的第一个广义哈斯-维特不变量（见 Yi Y5, 第 2.2] 节））。由于 $I_{\tilde{e}_i,\infty}$ 在 M_{δ_i} 上的作用是半单的，我们得到由 $\phi|_{H_{\delta_1}}$ 和 $\theta_{\phi,\tilde{e}_1,\infty,\tilde{e}_2,\infty}$ 诱导的满射 $M_{\delta_1}[\chi_{I_{\tilde{e}_{1,\infty}},r}]\twoheadrightarrow M_{\delta_2}[\chi_{I_{\tilde{e}_{2,\infty}},r}]$。另一方面，[T2，引理 3.3] 的证明中第三段及最后一段表明，线性条件

$$\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b_{e_1}e_1=e_{1,0}$$

关于 $e_{1,\infty}$ 和 $e_{1,0}$ 在 (X_1,D_{X_1}) 当且仅当 $M_{\delta_1}[\chi_{I_{\tilde{e}_{1,\infty}},r}]=0$ 成立。因此，我们得到 $M_{\delta_2}[\chi_{I_{\tilde{e}_{2,\infty}},r}]=0$。接着，[T2，引理 3.3] 证明的第三段和最后一段表明，线性条件

$$\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{e_{1,\infty},e_{1,0}\}} b_{e_1}\rho_\phi(e_1)=e_{2,0}$$

关于 $e_{2,\infty}$ 和 $e_{2,0}$ 在 (X_2,D_{X_2}) 上成立。引理的证明至此完成。 □

注 4.3. 注意，如果 $X_1=\mathbb{P}^1_k$，那么线性条件如下：

$$\sum_{e_1\in D_{X_1}\setminus\{\infty,0\}} b_{e_1}e_1=0$$

关于 ∞ 和 0。

4.1.4. 现在，我们证明本文的第一个主要定理。

定理 4.4. 保持上述引入的记号和设定不变。于是我们得到以下结论。

(1) $d_{(X_i,D_{X_i})}$、$i\in\{1,2\}$可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$单绝对单性重构。(2) 假设 $k_1^{\mathrm{m}}\cong\overline{\mathbb{F}}_{p,1}$。那么，开连续同态的集合

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}),\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$$

非空，当且仅当 $U_{X_1^{\mathrm{m}}}\cong U_{X_2^{\mathrm{m}}}$作为概形。特别地，在此情形下，我们有$k_2^{\mathrm{m}}\cong\overline{\mathbb{F}}_{p,2}$ 并且

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}),\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))=\mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}),\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})).$$

证明。首先，我们证明 (2)。(2) 的“若”部分显然。我们来处理 (2) 的“仅若”部分。假设 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$是一个非空集合，并令 $\phi\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$。那么，引理 4.1 意味着 ϕ 是一个满射。

我们通过双射 $\vartheta_{X_i}\colon D_{X_i}^{\mathrm{gp}}\xrightarrow{\simeq}D_{X_i}$ 将 $D_{X_i}^{\mathrm{gp}}$, $i\in\{1,2\}$ 与 D_{X_i} 识别。由于 ϕ 是满射，引理 lem-3.13 蕴含 ϕ 诱导出双射 $\rho_\phi\colon D_{X_1}\xrightarrow{\simeq}D_{X_2}$。我们令 $e_{2,0}:=\rho_\phi(e_{1,0})$ 和 $e_{2,\infty}:=\rho_\phi(e_{1,\infty})$。设 $\widetilde{e}_{2,0}\in D_{\widetilde{X}_2}$ 是 $e_{2,0}$ 上的一个点。定理 them-23 18 . 蕴含存在一个点 $\widetilde{e}_{1,0}\in D_{\widetilde{X}_1}$，位于 $e_{1,0}$ 上，使得 $\phi(I_{\widetilde{e}_{1,0}})=I_{\widetilde{e}_{2,0}}$。于是 $\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{i,0}}:=(I_{\widetilde{e}_{i,0}}\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{p'}_i)\sqcup\{*_{\widetilde{e}_{i,0}}\}$, $i\in\{1,2\}$ 具有域结构。此外，命题 pro-43 19 . 蕴含该域结构可从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$ 单远阿贝尔重构，并且 ϕ 诱导出域同构$\theta_{\phi,\widetilde{e}_1,0,\widetilde{e}_2,0}:\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{1,0}}\xrightarrow{\simeq}\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{2,0}}$。

命题 3.2 (1)意味着可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})$、$i\in\{1,2\}$中对 n 进行单远阿贝尔重构。如果 $n=3$，则(ii)是平凡的，因此不妨设 $n\geq 4$. 此外，由于$k_1^{\mathrm{m}}\cong\overline{\mathbb{F}}_{p,1}$，不失一般性地，我们可以假设$k_1=\overline{\mathbb{F}}_{p,1}=\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{1,0}}$、$X_1=\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_{p,1}}$，并且

$$D_{X_1}=\{e_{1,\infty}=\infty,e_{1,0}=0,e_{1,1}=1,e_{1,2},\ldots,e_{1,n-2}\}.$$

这里，$e_{1,2}$、……、$e_{1,n-2}\in\overline{\mathbb{F}}_{p,1}\setminus\{e_{1,0},e_{1,1}\}$ 彼此各不相同。

Ste第 1 页：在这一步中，我们将在 (X_1,D_{X_1}) 的某个温和覆盖上构造一个线性条件。

我们看到，存在一个与 p 互素的自然数 r，使得 $\mathbb{F}_p(\zeta_r)$ 包含 e_1 的 r 次方根，$_2$，……，$e_{1,\ n-2}$，其中 ζ_r 表示 $\overline{\mathbb{F}}_{p,\ 1}$ 中一个固定的本原 r 次单位根。令 $s := [\mathbb{F}_p(\zeta_r) : \mathbb{F}_p]$。对于每个 $e_{1,\ u} \in \{e_{1,2}, \ldots, e_{1,n-2}\}$，我们在 $\overline{\mathbb{F}}_{p,\ 1}$ 中固定一个 r 次方根 $e_{1\ u}^{1/r}$。于是有

$$e_{1,u}^{1/r} = \sum_{v=0}^{s-1} b_{1,uv}\zeta_r^v,\ u \in \{2, \ldots, n-2\},$$

其中，对于每个 $b_{1,\ uv} \in \mathbb{F}_p$ 以及每个 $u \in \{2, \ldots, n-2\}$ 和每个 $v \in \{0, \ldots, s-1\}$。

令 $X_1 \setminus \{e_{1,\infty}\} = \mathrm{Spec}\overline{\mathbb{F}}_{p,\ 1}[x_1]$，$f_{H_1} : (X_{H_1}, D_{X_{H_1}}) \to (X_1, D_{X_1})$ 为 $\overline{\mathbb{F}}_{p,\ 1}$ 上的伽罗瓦温和覆盖，其伽罗瓦群为 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$，由方程 $y_1^r = x_1$ 确定；并令 H_1 为由温和覆盖 f_{H_1} 诱导的 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 的开正规子群。于是，f_{H_1} 在 $\{e_{1,\infty} = \infty, e_{1,0} = 0\}$ 上全分歧，在 $D_{X_1} \setminus \{\infty, 0\}$ 上 étale。注意，$X_{H_1} = \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_{p,\ 1}}$，且 $D_{X_{H_1}}$ 位于 $\{e_{1,\infty}, e_{1,0}\}$ 上方的点为 $\{e_{H_1,\infty} := \infty, e_{H_1,\ 0} := 0\}$。我们置

$$e_{H_1,u} := e_{1,u}^{1/r} \in D_{X_{H_1}},\ u \in \{2, \ldots, n-2\},\ e_{H_1,1}^v := \zeta_r^v \in D_{X_{H_1}},\ v \in \{0, \ldots, s-1\}.$$

因此，我们得到一个线性条件

$$e_{H_1,u} = \sum_{v=0}^{s-1} b_{1,uv} e_{H_1,1}^v$$

关于 $e_{H_1,\ \infty}$ 和 $e_{H_1,\ 0}$ 在 $(X_{H_1}, D_{X_{H_1}})$ 上对每个 $u \in \{2, \ldots, n-2\}$.

步骤 2：在此步骤中，我们将证明，步骤 1 中构造的 (X_1, D_{X_1}) 的某个温和覆盖上的线性条件，通过满射 ϕ，诱导出 (X_2, D_{X_2}) 的某个温和覆盖上的线性条件。

记 H_2 为 $\phi(H_1)$。由于 $(r, p) = 1$，我们有如下有限生成群的交换图：

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi|_{H_1}} & H_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1}) & \xrightarrow{\phi} & \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} & = & \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}. \end{array}$$

我们将 $f_{H_2} : (X_{H_2}, D_{X_{H_2}}) \to (X_2, D_{X_2})$ 记作在 $\overline{\mathbb{F}}_{p\ 上的,\ 2}$ 其伽罗瓦群为 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 由 H_2 诱导的伽罗瓦驯 ramified覆盖。注意，引理 3 16 。表明 $(X_{H_1}, D_{X_{H_1}})$ 和 $(X_{H_2}, D_{X_{H_2}})$ 同型。此外，引理 3.14表明，可以从上述有限生成群的交换图中单远阿贝尔重构以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} D_{X_{H_1}} & \xrightarrow{\rho_{\phi|_{H_1}}} & D_{X_{H_2}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{X_1} & \xrightarrow{\rho_\phi} & D_{X_2}. \end{array}$$

我们定义

$$e_{2,\infty} := \rho_\phi(e_{1,\infty}),\ e_{2,u} := \rho_\phi(e_{1,u}),\ u \in \{0, \ldots, n-2\},$$

$$e_{H_2,\infty} := \rho_{\phi|_{H_1}}(e_{H_1,\infty}),\ e_{H_2,0} := \rho_{\phi|_{H_1}}(e_{H_1,0}),\ e_{H_2,u} := \rho_{\phi|_{H_1}}(e_{H_1,u}),\ u \in \{2, \ldots, n-2\},$$

and

$$e_{H_2,1}^v := \rho_{\phi|_{H_1}}(e_{H_1,1}^v),\ v \in \{0, \ldots, s-1\}.$$

注记 315 .表明，f_{H_2} 在 $\{e_{2,\infty}, e_{2,0}\}$ 上全分歧，并且在 $X_2 \setminus \{e_{2,\infty}, e_{2,0}\}$上是étale的。因此我们可以假设$X_2 = \mathbb{P}^1_{k_2}$，且$e_{2,\ \infty} = \infty, e_{2,\ 0} = 0, e_{2,\ 1} = 1$。我们将$e_{2,\ u}, u \in \{2, \ldots, n-2\}$视为 $k_2 \setminus \{e_{2,0}, e_{2,1}\}$的一个元素。此外，我们有$e_{H_2,\ \infty} = \infty$ 以及$e_{H_2,\ 0} = 0$。

令 $\xi_r := \theta_{\phi,\ \widetilde{e}_{1,0},\ \widetilde{e}_{2,0}}(\zeta_r)$ 为中的一个单位根，它是一个 r 次单位根$\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{2,0}}$。由于 $\zeta_r\ (e^v_{H_{1,}}) = e^{v+1}_{H_1}$，我们得到 $\xi_r\ (e^v_{H_{2,}})$，通过应用引理 。对：，得到以下线性条件

$$e_{H_2,u} = \sum_{v=0}^{s-1} b_{1,uv}\xi_r^v(e^0_{H_2,1})$$

关于 $e_{H_2,\ \infty}$ 和 $e_{H_2,\ 0}$，在 $(X_{H_2}, D_{X_{H_2}})$ 上对每个 $u \in \{2,\dots,n-2\}$ 都成立。由于 $(e_{H_2,\ u})^r = e_{2,\ u}$，$u \in \{2,\dots,n-2\}$，我们得到

$$e_{2,u} = (\sum_{v=0}^{s-1} b_{1,uv}\xi_r^v(e^0_{H_2,1}))^r.$$

此外，若令 $e^0_{H_2,\ 1} = 1$，则可得

$$e_{2,u} = (\sum_{v=0}^{s-1} b_{1,uv}\xi_r^v)^r$$

对每个 $u \in \{2,\dots,n-2\}$ 都成立。由于 $\theta_{\phi,\ \widetilde{e}_{1,\ 0},\ \widetilde{e}_{2,\ 0}}(\zeta_r) = \xi_r$，我们有

$$\begin{aligned} U_{X_1} = U_{X_1^{\mathrm{m}}} &= \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_{p,1}} \setminus \{e_{1,\infty}=\infty, e_{1,0}=0, e_{1,1}=1, e_{1,2},\dots,e_{1,n-2}\} \\ &\xrightarrow{\simeq} \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_{\widetilde{e}_{2,0}}} \setminus \{e_{2,\infty}=\infty, e_{2,0}=0, e_{2,1}=1, \theta_{\phi,\widetilde{e}_{1,0},\widetilde{e}_{2,0}}(e_{1,2}),\dots,\theta_{\phi,\widetilde{e}_{1,0},\widetilde{e}_{2,0}}(e_{1,n-2})\} \\ &\cong \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_{p,2}} \setminus \{e_{2,\infty}=\infty, e_{2,0}=0, e_{2,1}=1, e_{2,2},\dots,e_{2,n-2}\} \end{aligned}$$

and

$$\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_{p,2}} \setminus \{e_{2,\infty}=\infty, e_{2,0}=0, e_{2,1}=1, e_{2,2},\dots,e_{2,n-2}\} \times_{\overline{\mathbb{F}}_{p,2}} k_2 \cong U_{X_2}.$$

这意味着它们作为概形相同。特别地，我们有 $k_2^{\mathrm{m}} \cong \overline{\mathbb{F}}_{p,\ 2}$。

最后，我们证明 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})) = \mathrm{Isom}_{\mathrm{PG}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$。“$\supseteq$”部分显然。我们只需证明“$\subseteq$”部分。我们可以假设 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})) \neq \emptyset$. 令 $\phi' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$。那么 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})$ 与 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})$ 作为抽象有限型群同构。由引理 lemsurj4.1，ϕ' 是一个满射。于是，FJ [FJ，命题 16.10.6] 蕴含 ϕ' 是一个同构。因此，我们得到 $\phi' \in \mathrm{Isom}_{\text{pro-gps}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})\ \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2}))$。这就完成了 (2) 的证明。

接下来，证明 (1)。不失一般性，我们只讨论 $i = 1$ 的情形。此外，令 $(X, D_X) := (X_1, D_{X_1})$，

$$D_X = \{e_\infty = \infty, e_0 = 0, e_1 = 1, e_2, \dots, e_{n-2}\},$$

$k := k_1$，且 $\overline{\mathbb{F}}_p := \overline{\mathbb{F}}_{\widetilde{e}_0}$。令 (r, Q) 为满足以下两个条件的一对：

- $(r, p) = 1$;
- Q 是 $\pi_{\mathrm{t}1}(U_X)$ 的开正规子群，使得 $\pi_{\mathrm{t}1}(U_X)/Q \cong \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$，且由 Q 诱导的 k 上的伽罗瓦温和覆盖 $f_Q : (X_Q, D_{X_Q}) \to (X, D_X)$ 在 $\{e_\infty, e_0\}$ 上全分歧，并在$D_X \setminus \{e_\infty, e_0\}$上 étale。

应用定理 3.18，我们立即可知，上述定义的有序对集合可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$.

我们固定 r 次本原单位根 ζ_r，使其属于 $\overline{\mathbb{F}}_p$，并令 $s_r := [\mathbb{F}_p(\zeta_r) : \mathbb{F}_p]$。此外，我们令

$$e_{Q,\infty} := \infty,\ e_{Q,0} := 0,\ e^v_{Q,1} := \zeta_r^v \in D_{X_Q},\ v \in \{0, \dots s_r - 1\},$$

并令 $e_{Q,u} \in D_{X_Q}$、$u \in \{2,\dots,n\}$，使得 $f_Q(e_{Q,u}) = e_u$。记

$$L_{Q,u} := \{e_{Q,u} - \sum_{v=0}^{s_r-1} b_{uv}e^v_{Q,1} \mid b_{uv} \in \mathbb{F}_p\} \cap \{0\},\ u \in \{2,\dots,n-2\}.$$

通过应用与上述（2）的证明中所给论证类似的论证，我们有 $d_{(X,D_X)} = 0$ 当且仅当存在一对如上定义的 (r, Q)，使得 $L_{Q,\ u} \neq \emptyset$ 对每个 $u \in \{2,\dots,n-2\}$ 都成立。于是第三个和

证明的最后几段 [T2，引理 3.3] 推出 $L_{Q,\ u}, u \in \{2, \ldots, n-2\}$ 可以从 Q 单远阿贝尔重构。因此，$d_{(X,D_X)}$ 可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_X)$ 单远阿贝尔重构。定理得证。□

注 4.5。 注意，定理　　44 .若将 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i}),\ i \in \{1,2\}$替换为其最大可解原商 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{sol}}$，则定理　　44 .也成立。由此可得以下定理的可解版本，它略强于原定理：

我们沿用上文引入的记号。于是，可以从 $\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_i})^{\mathrm{sol}}$ 单远阿贝尔重构 $d_{(X_i,D_{X_i})},\ i \in \{1,2\}$。此外，假设 $k_1^{\mathrm{m}} \cong \overline{\mathbb{F}}_{p,1}$。那么，开连续同态的集合

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{sol}}, \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{sol}})$$

当且仅当 $U_{X_1^{\mathrm{m}}} \cong U_{X_2^{\mathrm{m}}}$ 作为概形时非空。特别地，若确实如此，则有$k_2^{\mathrm{m}} \cong \overline{\mathbb{F}}_{p,2}$ 且

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{sol}}, \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{sol}}) = \mathrm{Isom}_{\mathrm{pg}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_1})^{\mathrm{sol}}, \pi_1^{\mathrm{t}}(U_{X_2})^{\mathrm{sol}}).$$

4.2. 第二主定理。 在本小节中，我们利用定理　　44, 。证明一个关于带标记的　　集合猜想和弱 Hom 版本猜想的结果（即定理4.6）。我们沿用　　中引入的记号 2.1.2。

4.2.1. 设 $q \in M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$,为任意一点， $k(q)$ 为 $\overline{k(q)}$ 的代数闭包，并且

$$U_{X_q} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{k(q)}} \setminus \{a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \infty, a_4, \ldots, a_n\}$$

作为$\overline{k}(q)$-概形。我们称 q 为协调点，当且仅当 $q = q_{\mathrm{gen}}$，或者满足以下三个条件：

- 维数(V_q) =维数$(M_{\mathrm{ord}0,\ n})$ − 1;
- 存在 $i \in \{4, \ldots, n\}$ 使得 $a_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$;
- 令 $\omega^i_{n,\ n-1}$： $M_{\mathrm{ord}0,\ n} \to M_{\mathrm{ord}0,\ n-1}$ 为由态射 $\mathcal{M}_{\mathrm{ord}0,\ n} \to \mathcal{M}_{\mathrm{ord}0,\ n-1}$ 诱导的态射，该态射通过遗忘第 i 个标记点得到；则 $\omega^i_{n,\ n-1}(q)$ 是 $M_{\mathrm{ord}0,\ n-1}$ 的泛点。

令 t 为 $M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$, 的一个闭点。则存在一组协调点 $P_t := \{q_{t,4}, \ldots, q_{t,n}\}$ 使得

$$\{t\} = \bigcap_{q_{t,j} \in P_t} V_{q_{t,j}}.$$

4.2.2. 现在，我们证明本文的第二主定理。

定理 4.6。

(1) 对于每个闭点 $t \in M^{\mathrm{ord}}_{,\ 0\,n}{}^{\mathrm{cl}}$, , 与 $\mathcal{C}_t$ 相关联的 t 是一个带点集合（定义　　24.）。此外，对于每个带点集合 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_{q_{\mathrm{gen}}}$，存在一个闭点 $s \in M^{\mathrm{ord}}_{,\ 0\,n}{}^{\mathrm{cl}}$, 使得 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_s$。(2) 令 $q \in M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$, 为任意一点。那么自然映射 colle$_q$： $\mathscr{V}_{\mathrm{cl}_q} \to \mathscr{C}_q$, $[t] \mapsto \mathcal{C}_t$ 是一个单射。(3) 令 $q \in M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$, 为任意一点。假设存在一组协调点 P_q，使得

$$V_q = \bigcap_{u \in P_q} V_u.$$

那么，带标记点集合猜想对 q 成立。特别地，带标记点集合猜想对 $M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$, 的每个闭点都成立。

(4) 令 $q_i \in M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$, , $i \in \{1,2\}$ 为任意一个点。假设存在一组协调点 P_{q_1}，使得

$$V_{q_1} = \bigcap_{u \in P_{q_1}} V_u.$$

于是弱 Hom 版本猜想成立。特别地，当 q_1 是闭点时，弱 Hom 版本猜想成立。

证明。我们来证明 (1)。设 $F_t := \{t' \in M_{0,n}^{\mathrm{ord,cl}} \mid t \sim_{fe} t'\}$。取 $\bigcap_{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(t)} U_G$ 中任意一点 t''。那么，对于每个 $G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(t)$，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{surj}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(t'')\ G)$ 都非空，其中 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{surj}}(-,-)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{open}}(-,-)$ 中由满射构成的子集。由于 $\pi_1^{\mathrm{t}}(t'')$ 是拓扑有限生成的，我们得到集合 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{surj}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(t'')\ G)$ 是有限的。于是开连续同态集合

$$\varprojlim_{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(t)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{surj}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(t''), G) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{surj}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(t''), \pi_1^{\mathrm{t}}(t))$$

非空。因此，定理 4 4 。蕴含 $t'' \in F_t$。这意味着

$$(\bigcap_{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(t)} U_G) \cap M_{g,n}^{\mathrm{ord,cl}} = F_t.$$

由于 U_{X_t} 可以定义在一个有限域上，因此 F_t 是一个有限集。于是 $\mathcal{C}_t$ 是一个带标记点集 n.

设 $\mathcal{C} \in \mathscr{C}_{q_{\mathrm{gen}}}$ 是一个带标记点集，s 是 $\bigcap_{G \in \mathcal{C}} U_G$的一个闭点。将 t 替换为 s，并应用与上述证明中所给论证类似的论证，我们得到 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_s$。

(2) 由定理 4.4。我们来证明 (3)。若 $n = 4$，则 $M_{0\,4}^{\mathrm{ord}}$ 是一个一维概形。对每个 $q \in M_{\mathrm{orc}0,\ 4}$，带标记点集猜想可由定理 4 4 直接推出。。因此我们可以假设$n \geq 5$. 为验证 (iii)，由 (ii) 可知，我们只需证明 colle$_q$ 是一个满射。设 q 是 $M_{0\,n}^{\mathrm{ord}}$的一个闭点, 则 (iii) 可由定理 4 4 直接推出。。

设 q 是一个非闭点。这意味着 $\dim(V_q) \geq 1$. 若 $q = q_{\mathrm{gen}}$，则 (3) 可由 (1) 和 (2) 推出。我们来讨论 $q \neq q_{\mathrm{gen}}$的情形。首先，假设 q 是一个协调点，并且

$$U_{X_q} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{k(q)}} \setminus \{1, 0, \infty, a_4, \ldots, a_n\}.$$

不失一般性，我们可以假设 $a_n \in \overline{\mathbb{F}}_p$。

对于每个带点集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{C}_q$，通过应用 (1)，存在一个闭点 $t_1 \in M^{\mathrm{ord}}{}_{,g\,n}{}^{\mathrm{cl}}$，使得 $\mathcal{C}_{t_1} = \mathcal{C}$。于是我们有一个开连续满同态 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(t_1)$。令 $\omega_n^{\backslash n}$,4 : $M_{0\ ,n}^{\mathrm{ord}} \to M_{0\,4}^{\mathrm{ord}}$ 为由态射 $\mathcal{M}_{0\ ,n}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_{0\ ,4}^{\mathrm{ord}}$ 诱导的态射，该态射是通过遗忘除第一个、第二个、第三个和第 n 个标记点之外的所有标记点得到的。我们令 t_1'': $= \omega_{n\ 4}^{\backslash n}$, (t_1) 和 $q'' := \omega_{n\ 4}^{\backslash n}$, (q)。注意，t_1''和 q''是 $M_{0,4}$ 的闭点。于是，定理 them-23 18 . 蕴含满射 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q) \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(t_1)$ 诱导出一个开连续满同态 $\pi_1^{\mathrm{t}}(q'') \twoheadrightarrow \pi_1^{\mathrm{t}}(t_1'')$。因此，由定理 them-34 4, . 我们得到 $q'' \sim_{fe} t_1''$.。于是，不失一般性，我们可以假设

$$U_{X_{t_1}} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p} \setminus \{1, 0, \infty, b_4, \ldots, b_{n-1}, a_n\}$$

在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上，其中对每个 $i \in \{4, \ldots, n-1\}$ 都有 $b_i \in \overline{\mathbb{F}}_p$。

另一方面，令 $\omega_{n,n-1}^n$: $M_{0\ ,n}^{\mathrm{ord}} \to M_{\mathrm{ord}0,n-1}$为由遗忘第 n 个标记点的态射 $\mathcal{M}_{0\ ,n}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{M}_{0\ ,n-1}^{\mathrm{ord}}$所诱导的态射。我们分别设 $t_1' := \omega_{n,n-1}^n(t_1)$ 和 $q' := \omega_{n,n-1}^n(q)$。由于 q 是一个协调点，q' 是 $M_{0\ ,n-1}^{\mathrm{ord}}$的泛点。因此，我们得到 $t_1' \in V\mathrm{cl}_{q'}$。此外，我们看到 $V_q = \omega_{n\ ,n-1}^{-1}(q')$。于是，$t_1 = \omega_{n\ ,n-1}^{-1}(t_1')$ 是 V_q的一个闭点。当 q 是一个协调点时，带标记点集猜想对 q 成立。

接下来，我们证明一般情形。如果 $V_q = \bigcap_{u \in P_q} V_u$，那么 $V_{\mathrm{cl}^q} = \bigcap_{u \in P_q} V_{\mathrm{cl}u}$ 以及 $\bigcap_{u \in P_q} \mathscr{C}_u = \mathscr{C}_q$。此外，由于对每个 $u \in P_q$，我们都有一个双射 colle$_u$：$\mathscr{V}_{\mathrm{cl}_u} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_u$，因此我们有

$$\mathrm{colle}_q : \mathscr{V}_q^{\mathrm{cl}} = \bigcap_{u \in P_q} \mathscr{V}_u^{\mathrm{cl}} \to \bigcap_{u \in P_q} \mathscr{C}_u = \mathscr{C}_q$$

是一个双射。这就完成了对 (3) 的证明。

让我们证明 (4)。我们只需证明弱 Hom 版本猜想的“仅当”部分。假设 V_{q_2} 并非本质包含于 V_{q_1} 中。这意味着存在一个闭点 $t_2 \in V_{\mathrm{cl}q_2}$，使得 $F_{t_2} \cap V_{q_1} = \emptyset$，其中 $F_{t_2} := \{t_2' \in M_{\mathrm{ordn}}{}' \mid t_2 \sim_{fe} t_2'\}_{\mathrm{cl}0,}$。由 (3)，我们有 $\mathcal{C}_{t_2} \notin \mathscr{C}_{q_1}$。因此，根据引理 4.1，我们得到

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1), \pi_1^{\mathrm{t}}(t_2)) = \emptyset.$$

这与 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{pg}}^{\mathrm{op}}(\pi_1^{\mathrm{t}}(q_1)\ \pi_1^{\mathrm{t}}(q_2))$ 非空的假设相矛盾。这就完成了对 (4) 的证明。□

注记 4.7。令 $q \in M_{g,n}$ 为任意一个点。Stevenson 提出了如下问题（对于 $n = 0$ 的情形，参见 [Ste, 第 4.3] 问）：$\bigcap_{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q)} U_G$ 是否包含 $M_{g,n}$ 的任何闭点？根据 T[T5，定理 0.3]，$\bigcap_{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q)} U_G$ 包含 $M_{g,n}$ 的一个闭点，当且仅当 q 是 $M_{g,n}$ 的一个闭点。此外，当 $g = 0$ 且 q 是一个闭点 them-4 时，定理 4.6 (1) 的证明意味着

$$\Big(\bigcap_{G \in \pi_A^{\mathrm{t}}(q)} U_G\Big) \cap M_{0,n}^{\mathrm{cl}} = F_q,$$

其中 $F_q := \{q' \in M_{0,n}^{\mathrm{cl}} \mid q \sim_{fe} q'\}$。

参考文献

[FJ] M. D. Fried, M. Jarden,《域算术》。第三版。数学及其交界领域成果。第3辑。现代数学综述丛书第11卷。施普林格出版社，柏林，2008年。[G] A. Grothendieck，致 G. Faltings 的信（英文译本）。《几何伽罗瓦作用》。第1卷：围绕 Grothendieck 的《Esquisse d'un programme》。Leila Schneps 和 Pierre Lochak 编。伦敦数学会讲义系列第242卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。iv+293 页。[K] F. Knudsen，《稳定曲线模空间的射影性，II：叠 $M_{g,n}$》，《斯堪的纳维亚数学杂志》52（1983），161¨C-199。[M] S. Mochizuki，《曲线的局部 pro-p 远阿贝尔几何》。《数学发明》138（1999），319–423。[N] H. Nakamura，《去心射影直线的 étale 基本群的伽罗瓦刚性》。《纯粹与应用数学杂志》411（1990），205–216。[PS] F. Pop，M. Saïdi，《正特征下曲线基本群的特化同态》。载于《伽罗瓦群与基本群》，107–118，数学科学研究所出版物第41卷，剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[R1] M. Raynaud，《曲线上向量丛的截面》。《法国数学会通报》110（1982），103–125。[R2] M. Raynaud，《特征 $p > 0$下完备曲线的基本群》。载于《算术基本群与非交换代数》（伯克利，CA，1999），335–351，《纯粹数学专题讨论会论文集》第70卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2002年。[Ste] K. Stevenson，《特征 p下射影曲线非分歧覆盖的伽罗瓦群》。《代数杂志》182（1996），770–804。[T1] A. Tamagawa，《仿射曲线的 Grothendieck 猜想》。《组合数学》109（1997），135–194。[T2] A. Tamagawa，《代数闭域上特征 > 0的曲线的基本群》。《国际数学研究通知》（1999），853–873。[T3] A. Tamagawa，《正特征下曲线的基本群与几何》。载于《算术基本群与非交换代数》（伯克利，CA，1999），297–333，《纯粹数学专题讨论会论文集》第70卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2002年。[T4] A. Tamagawa，《代数闭域上特征 > 0的曲线的驯分基本群》。载于《伽罗瓦群与基本群》，47–105，数学科学研究所出版物第41卷，剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[T5] A. Tamagawa，《正特征下具有指定基本群的曲线同构类的有限性》。《代数几何杂志》13（2004），675–724。[Y1] Y. Yang，《代数闭域上特征 $p > 0$的曲线的可容基本群》。《数学科学研究所刊物》54（2018），649–678。

[Y2] Y. Yang, 《正特征代数闭域上带标记稳定曲线的拓扑与组合结构》，即将刊于《数学新闻》。[Y3] Y. Yang, 《正特征下带标记稳定曲线的广义 Hasse-Witt 不变量的平均值》。《数学杂志》295（2020），1–45。[Y4] Y. Yang, 《正特征下可容基本群特化同构的存在性》。《数学研究快报》28（2021），1941–1959。[Y5] Y. Yang, 《最大广义 Hasse-Witt 不变量及其在远阿贝尔几何中的应用》。《数学精选》（新系列）28（2022），第5号论文，98页。[Y6] Y. Yang, 《正特征下曲线基本群模空间 I》，预印本。参见 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yuyang/[Y7] Y. Yang, 《正特征下曲线基本群模空间 II》，准备中。[Y8] Y. Yang, 《正特征下曲线基本群的拓扑特化与群论特化》，预印本。参见 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yuyang/[Y9] Y. Yang, 《正特征下非同构曲线的驯分基本群差异的显式构造》，准备中。

南京理工大学数学学院，南京 210094，中国 电子邮箱：halfask@mail.ustc.edu.cn

京都大学数理科学研究所，京都 606-8502，日本 电子邮箱：yuyang@kurims.kyoto-u.ac.jp

南京大学数学系，南京 210093，中国 电子邮箱：rzong@nju.edu.cn