arXiv:2301.04905v1 [math.DS] 12 Jan 2023

由二阶线性齐次微分方程导出的L^p-余循环的平凡李雅普诺夫谱的普遍性

DINIS AMARO、MÁRIO BESSA† 和 HELDER VILARINHO

数学与应用中心（CMA-UBI）贝拉内陆大学，葡萄牙科维良市马尔基斯·德·阿维拉与博拉马街，6201-001。

Abstract. 给定定义在概率空间: $M \to M$ 上的遍历流M，我们研究一族与二阶线性齐次微分方程的解相关联的连续时间动力学 线性余循环 $\ddot{x} + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x} + \beta(\varphi^t(\omega))x = 0$，其中参数 α, β 沿着 φ^t-轨道演化。我们的主要结果表明，对于动力学连续时间线性余循环的一个普遍子集，其普遍 是指相对于无穷小生成元上的L^p-型拓扑而言属于贝尔第二纲，其李雅普诺夫谱是平凡的。

1. 引言ntroduction

我们知道，自十九世纪上半叶以来，根据刘维尔定理，若尝试用解析方法对大多数函数进行积分，就会受到严重限制。这一结果可视为微分伽罗瓦理论 的一种体现，也构成了显式求解微分方程的一大障碍。我们通过两种方式绕过这一不可避免的事实：一方面，人们发展了强大的数值方法来近似求解；另一方面，庞加莱和李雅普诺夫的开创性研究催生了微分方程的定性理论。我们将沿着后者展开研究。

我们开展这项研究，旨在理解系数具有L^p 正则性、随时间变化且允许L^p小扰动的二阶齐次线性微分方程解的渐近行为。具体而言，我们将描述在系数满足L^p泛性条件下的李雅普诺夫谱。我们考虑的一类方程族由流所指标化，该流保持测度空间M上的概率测度不变。我们的研究首先受到一类描述无外力作用下简谐阻尼摆运动的方程族的启发，其形式为

$$\ddot{x}(t) + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x}(t) + \beta(\varphi^t(\omega))x(t) = 0, \tag{1}$$

其中 α 和 β 是依赖于 $\omega \in M$ 并沿流 φ^t演化的函数： $M \to M$ 对于 $t \in \mathbb{R}$。显然，如果 α 和 β 是与 φ^t 相关的第一积分（即在 φ^t-轨道上为常数），方程（1）就可以用微分方程入门课程中的初等方法轻松求解。当参数随时间变化时，很难得到显式解。当 摩擦力 α 和 振子的频率 β 随时间变化时，正是这种情况。

在 [8] 中，第二作者处理了一个类似的情形，但沿周期闭轨的系数是周期的，并证明对参数进行小的C^0扰动，可以使渐近不稳定解恰好是一致双曲鞍型解。在

日期：2023年1月13日。关键词与短语。 动力学余循环；线性余循环；线性微分系统；乘法遍历定理；李雅普诺夫指数；随机动力系统。

†通讯作者：bessa@ubi.pt。2020数学主题分类： 主要类别：34D08、37H15，次要类别：34A30、37A20。

本文旨在研究一种采用较粗拓扑的微扰理论，即允许在L^p型拓扑下进行扰动，并考虑随机（非周期）基底动力学。

类似（1）的微分方程在物理学、工程学、生物学以及数学的众多应用领域中无处不在，例如固体物理学、结构稳定性、一维波传播、同步电机的稳定性等。固定位置和动量（x（0），$\dot{x}$（0），我们旨在研究当$t \to \infty$时，（x（t），$\dot{x}$（t））这一对量的渐近行为，即由李雅普诺夫指数给出的渐近指数增长率。关于这一主题、且带有或多或少相似细微差别的文献十分丰富（见 [3, 4, 8, 15, 19] 及其中的参考文献）。正如最近出版的多部著作所显示的那样，关于李雅普诺夫指数这一更广泛主题的文献在过去十年中大幅增长 [6, 12, 16, 26, 28]。

相当一般的线性微分系统的L^p-一般点观点由两位作者中的两人在 [9]以及Arbieto-Bochi之后开展了研究（另见其中的参考文献）。在 [9]中证明了，可达的（又称扭转）线性微分系统这一类更为广泛的系统——其中包括在GL（d，$\mathbb{R}$）、SL（d，$\mathbb{R}$）和Sp（d，$\mathbb{R}$）中演化的余循环——具有L^p-一般的平凡李雅普诺夫谱。当考虑更强的C^0-范数时，自20世纪60年代末Millionshchikov的工作以来，人们已知一般行为会发生变化（见 [22]）。在 [7, 8] 中，在采用离散方法 [10, 11]之后，对C^0-情形进行了完整处理。了解由类似（1）的方程产生的线性微分系统的C^0-一般渐近行为，是一项正在进行的工作。近年来，人们日益关注从L^p-扰动观点及L^p-一般性质[5, 13, 14]来理解离散的“动力余循环”。由于扰动由导数给出的余循环取决于对映射的扰动，这些动力余循环往往会带来其他诸多困难。

当我们希望改变所有李雅普诺夫指数，使它们变得相等时，一个直观的想法是让各个方向的扩张／收缩率均等分布。通过以恰当的方式旋转各个方向，最终便可使这些增长率均匀分布。事实上，系统地进行旋转是一项关键思想，曾在 20 世纪 70 年代苏联文献中的某些背景下得到发展（见 [23]），并于 20 世纪 80 年代由 Mañé[20, 21]进一步发展。对于 L^p 这类弱拓扑，李雅普诺夫指数连续性相关的问题要复杂得多。本文投入了大量精力来理解李雅普诺夫指数对L^p的连续依赖，因为我们的论证以这一假设为基础。此外，与连续性相关的是，我们知道，通常缩小向量场之间的距离，会使它们的流轨迹在有限时间内的距离减小。在这里，L^p 拓扑又一次带来了额外的困难。

总的来说，本文的主要结果（定理 1）可概括如下：

对于一个L^p-泛型的动力学线性微分系统（如(1)所示），以及几乎所有驱动实现，无论我们选择什么样的位置和动量$(x(0), \dot{x}(0))$作为初始条件，解的渐近指数行为都将相同。

本文结构如下：在 §2 中，我们将介绍基本定义并陈述主要结果（定理 1）；第 §3 节介绍扰动框架；在第 §4 节中，我们将讨论李雅普诺夫指数关于L^p 距离的连续性问题；最后，在 §5 中，我们证明定理 1。

2. 定义与主要结果

2.1.线性余循环。 本节将介绍一些对本文发展有用的定义。设 $(M, \mathcal{M}, \mu)$ 是一个概率空间，并设 $\varphi: \mathbb{R} \times M \to M$ 是一个度量动力系统（或流），即它是一个可测映射，并且

(1) $\varphi^t: M \to M$ 由 $\varphi^t(\omega) = \varphi(t, \omega)$ 给出，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都保持测度 μ 不变；(2) $\varphi^0 = \mathrm{Id}_M$，并且对所有 $t, s \in \mathbb{R}$。

除非另有说明，以下我们均假设该流在通常意义下是遍历的，即除零测集及其补集外，不存在其他不变集。

令 $\mathcal{B}(X)$ 为拓扑空间X上的博雷尔 σ-代数。定义在 φ 上的（连续时间）线性随机动力系统 （RDS），即$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$上的（连续时间）线性余循环，是一个$(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}/\mathcal{B}(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}))$-可测映射

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$$

使得映射 $\Phi(t,\omega)$ 在 φ上构成一个余循环，即：

(1) $\Phi(0,\omega) = \mathrm{Id}$ 对所有 $\omega \in M$均成立；(2) $\Phi(t+s,\omega) = \Phi(t,\varphi^s(\omega)) \circ \Phi(s,\omega)$，对所有$s,t \in \mathbb{R}$及 $\omega \in M$均成立，

且 $t \mapsto \Phi(t,\omega)$ 对所有 $\omega \in M$均连续。我们回顾一下：如果对于每个 $\omega \mapsto \Phi(t,\omega)$ 可测，且对于所有 $t \in \mathbb{R}$ 及 $t \mapsto \Phi(t,\omega)$ 连续，则对所有 $\omega \in M$ 可推出 Φ 在乘积测度空间中可测。这些对象在文献中也称为线性微分系统 （参见 §2.2）。

2.2. **动力学线性微分系统**。作为动机，我们首先考虑非自治线性微分方程，它描述阻尼谐振子的运动，即沿着路径$(\varphi^t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$运动的“简单摆”，其中 $\omega \in M$ 由流 φ 描述。令$K \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ 为由 2×2 型矩阵构成的集合

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$$

实数 a、b；记 $\mathcal{G}$ 为可测映射 $A : M \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 的集合，并记 $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ 为 动力学可测映射 $A : M \to K$的集合。通常，我们将 $\mathcal{G}$ 上在一个μ 全测度子集上相同的两个映射视为相同。考虑可测映射α: $M \to \mathbb{R}$ 和 $\beta: M \to \mathbb{R}$。取由式（1）给出并定义如下的随机微分方程:

$$\ddot{x}(t) + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x}(t) + \beta(\varphi^t(\omega))x(t) = 0.$$

通过进行变量替换 $y(t) = \dot{x}(t)$，我们可以将式（1）改写为如下向量线性系统

$$\dot{X} = A(\varphi^t(\omega)) \cdot X, \tag{2}$$

其中 $X = X(t) = (x(t),y(t))^T = (x(t), \dot{x}(t))^T$ 且 $A \in \mathcal{K}$ 定义为

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(\omega) & -\alpha(\omega) \end{pmatrix}.$$

由 [2, 定理 2.2.2] （另见此参考文献中的引理 2.2.5 和例 2.2.8）可知，若$A \in \mathcal{G}^1 =: \mathcal{G} \cap L^1(\mu)$，即 $\int_M \|A\| d\mu < \infty$，则其生成一个唯一的（除不可区分性外）线性随机动力系统Φ_A，满足

$$\Phi_A(t,\omega) = \mathrm{Id} + \int_0^t A(\varphi^s(\omega))\Phi_A(s,\omega)\, ds. \tag{3}$$

式 (3) 中定义的解 $\Phi_A(t,\omega)$ 称为卡拉西奥多里解或弱解。给定初始条件 $X(0) = v \in \mathbb{R}^2$，若 $t \mapsto \Phi_A(t,\omega)v$ 满足方程，则称其为随机微分方程（RDE）(2) 的解，或称随机微分方程（RDE）(2) 生成 $\Phi_A(t,\omega)$。注意，对于所有 $\omega \in M$ 和 $v \in \mathbb{R}^2$，$\Phi_A(0,\omega)v = v$。若解 (3) 关于时间（即关于 t）可微，并且对所有 t 满足

$$\frac{d}{dt}\Phi_A(t,\omega)v = A(\varphi^t(\omega))\Phi_A(t,\omega)v \quad \text{and} \quad \Phi_A(0,\omega)v = v, \tag{4}$$

则称其为经典解随机微分方程（2）。

当然，对于所有 ω 和 v，$t \mapsto \Phi_A(t,\omega)v$ 都是连续的。根据 (4)，我们称 $A : M \to K$ 为 Φ_A 的（动力学）“无穷小生成元”。有时，鉴于 A 与 Φ_A 之间的关系，我们将 A 和 Φ_A 都称为动力学线性余循环/随机动力系统/微分系统。如果随机微分方程 (2) 的初始条件为 $X(0) = v$，那么 $\Phi_A(0,\omega)v = v$，且 $X(t) = \Phi_A(t,\omega)v$。

2.3. L^p **拓扑学**。 我们首先定义一种 L^p 型拓扑，它由一个度量生成，用于比较 $\mathcal{G}$ 上的无穷小生成元。通过运用格朗沃尔不等式的标准论证，通常可以在假设相应无穷小生成元近似的基础上，得到流在紧时间区间上的近似。然而，L^p 估计， $1 \le p < \infty$，要求更高，目前尚不清楚这种 L^p 连续依赖是否成立（参见引理 4.3)。关于这一问题，参见例如 [25]，其中讨论了拟线性椭圆-抛物型方程中初始条件的 L^1 近似。基于此，我们现在定义本文所考虑的距离。给定 $1 \le p < \infty$ 和 A、$B \in \mathcal{G}$，令

$$\hat{\sigma}_p(A,B) := \begin{cases} \left(\int_M \|A(\omega) - B(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \infty \text{ if the above integral does not exists,} \end{cases}$$

并定义

$$\sigma_p(A,B) := \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_p(\Phi_A,\Phi_B)}{1+\hat{\sigma}_p(\Phi_A,\Phi_B)}, & \text{if } \hat{\sigma}_p(A,B) < \infty \\ 1, & \text{if } \hat{\sigma}_p(A,B) = \infty \end{cases}.$$

显然，σ_p 是 $\mathcal{G}$中的一个距离。

命题 2.1. 考虑 $1 \le p < \infty$。那么：

(i) 对所有的 $q \ge p$ 以及所有的 $A, B \in \mathcal{G}$，$\sigma_p(A, B) \le \sigma_q(A, B)$。(ii) 若 $A \in \mathcal{G}^1$，则对于任意满足 $\sigma_p(A, B) < 1$ 的 $B \in \mathcal{G}$，有 $B \in \mathcal{G}^1$。因此，$\sup_{0\le t\le 1} \log^+ \|\Phi_B(t,\omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$。

证明. (i) 对所有 $1 \le p \le q < \infty$，Lebesgue空间中有一个标准结论：L^q范数比L^p 范数更小。因此，我们有 $\hat{\sigma}_p(A,B) \le \hat{\sigma}_q(A,B)$。于是，$\sigma_p(A,B) \le \sigma_q(A,B)$。
(ii) 任取 $1 \le p < \infty$，并令 $A \in \mathcal{G}^1$，$B \in \mathcal{G}$ 满足 $\sigma_p(A, B) < 1$。由 (i) 得 $\sigma_1(A, B) < 1$，因此 $\hat{\sigma}_1(A, B) < \infty$；此外，对所有$\omega \in M$，我们还有 $\|B(\omega)\| \le \|A(\omega)\| + \|B(\omega) - A(\omega)\|$。因此，$B \in L^1(\mu)$。最后一个结论由 (5) 得出。□

以下结果将用于证明线性余循环的动力子空间是贝尔空间。

引理2.2。 $(\mathcal{K}^1, \sigma_p)$ 是闭的，对所有 $1 \le p < \infty$均成立。

证明。 取任意序列 $(A_n)_n$，其中 $\mathcal{K}^1$，且 $A_n \xrightarrow{\sigma_p} A^*$，对某个 $A^* \in \mathcal{G}$，我们必须证明$A^* \in \mathcal{K}^1$。由于 $(A_n)_n \in \mathcal{K}^1$，可得

$$A_n(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_n(\omega) & -\alpha_n(\omega) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad A^* = \begin{pmatrix} a(\omega) & b(\omega) \\ -\beta(\omega) & -\alpha(\omega) \end{pmatrix}$$

对于映射 $\alpha_n, \beta_n \in L^1(\mu)$ 以及可测映射 a、b、α 和 β。由命题 2.1 中的 (i) 可得 $A_n \xrightarrow{\sigma_1} A^*$。由命题 2.1 中的 (ii) 可知，$a$、$b$、$\alpha$ 和 β 也都是 L^1 映射，即 $A^* \in \mathcal{G}^1$。因此，$\int_M |a(\omega)| \, d\mu(\omega) = 0$ 且 $\int_M |b(\omega) - 1| d\mu(\omega) = 0$，这意味着对于 μ 几乎处处的 ω，$a(\omega) = 0$ 且 $b(\omega) = 1$。因此，$A^* \in \mathcal{K}$。综上，$A^* \in \mathcal{G}^1 \cap \mathcal{K} = \mathcal{K}^1$。□

由于对所有的 $1 \le p < \infty$，度量空间 $(\mathcal{G}^1, \sigma_p)$ 都是完备的，且 $\mathcal{K}^1 \subset \mathcal{G}^1$ 是 σ_p-闭的，因此我们得出以下结论。

推论 2.3。 对所有的 $1 \le p < \infty$，$(\mathcal{K}^1, \sigma_p)$ 都是完备度量空间，因此也是贝尔空间。

2.4. **李雅普诺夫指数**。 设 $\mathcal{K}^1 = \mathcal{K} \cap L^1(\mu) \subset \mathcal{G}^1$。注意，若$A \in \mathcal{K}^1$，则该余循环 Φ_A满足以下可积性条件

$$\sup_{0\le t\le 1} \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu), \tag{5}$$

其中 $f^+ = \max\{0, f\}$。事实上，考虑 ω 在满测度 φ^t-不变子集上 M，其中 $t \mapsto A(\varphi^t(\omega))$ 局部可积。由（3）可得

$$\|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \le 1 + \int_0^t \left\|A(\varphi^s(\omega))\right\| \left\|\Phi_A(s,\omega)^{\pm 1}\right\| ds.$$

根据格朗沃尔不等式（见 [2]），我们有

$$\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \le \exp\left(\int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\|\, ds\right) \tag{6}$$

也就是说，对于所有 $t \ge 0$，都有 $\log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \le \int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\| ds$。因此

$$\sup_{0\le t\le T} \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \le \int_0^T \|A(\varphi^s(\omega))\|\, ds =: \psi(\omega, T). \tag{7}$$

根据 [2, 引理2.2。5]，我们有 $\psi(\cdot, T) \in L^1(\mu)$。因此 $\sup_{0\le t\le 1} \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$，从而得证。此外，利用富比尼定理，我们可以得到

$$\begin{aligned}\int_M \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\|\, d\mu(\omega) &\le \int_M \int_0^t \|A(\varphi^s(\omega))\|\, ds\, d\mu(\omega) \\ &= \int_0^t \int_M \|A(\varphi^s(\omega))\|\, d\mu(\omega)\, ds = t\|A\|_1.\end{aligned}$$

若 $A \in \mathcal{G}^1$，则可积性条件（5）成立，且奥塞列杰茨定理（例如见 [24, 2]）保证，对于 μ 几乎处处的 $\omega \in M$，存在一个 Φ_A-不变分裂，称为奥塞列杰茨分裂，它将纤维 $\mathbb{R}^2_\omega = E^1_\omega \oplus E^2_\omega$ 分解，并存在称为李雅普诺夫指数 $\lambda_1(A,\omega) \ge \lambda_2(A,\omega)$ 的实数，使得：

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_A(t,\omega)v^i\| = \lambda_i(A,\omega),$$

对于任意 $v^i \in E^i_\omega \setminus \{\vec{0}\}$ 和 $i = 1, 2$。此外，给定这些子空间 E^1_ω 和 E^2_ω 中的任意两个，它们沿轨道的夹角呈次指数增长，这意味着

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \sin\left(\angle(E^1_{\varphi^t(\omega)}, E^2_{\varphi^t(\omega)})\right) = 0. \tag{8}$$

若流 φ^t 是遍历的，则相应子丛的李雅普诺夫指数及其维数在 μ 几乎处处为常数，我们将它们分别记为 $\lambda_1(A)$ 和 $\lambda_2(A)$，其中 $\lambda_1(A) \ge \lambda_2(A)$。若对 μ 几乎处处的 $\omega \in M$，$\lambda_1(A,\omega) = \lambda_2(A,\omega)$，则称 A 具有单点李雅普诺夫谱或平凡李雅普诺夫谱。否则，称 A 具有简单李雅普诺夫谱。关于线性微分系统这些结果的详细说明，见 [2]（特别是例3.4.15）。另见 [17]。

2.5. **主要结果的陈述**。现在我们可以陈述本文的主要贡献了。本文证明，存在一个 σ_p 的 $\mathcal{K}^1$ 余集具有单点谱。更准确地说，我们证明如下：

定理 1. 对所有的 $1 \le p < \infty$，都存在一个 σ_p 剩余子集 $\mathcal{R} \in \mathcal{K}^1$，使得任意 $A \in \mathcal{R}$ 的谱都只有一个点。

3. Interchanging Oseledets' directions

本节将构建一种基本的扰动工具，使我们能够交换奥塞莱茨方向。首先，我们将讨论一些扰动相关的主题，并根据我们的目的量身定制这些扰动。

3.1. 紧集上的扰动。取 A $\in \mathcal{G}$ 和一个非周期轨道 $\omega \in$ M。我们将只沿着 ω 的轨道中端点为 ω和 $\varphi^1(\omega)$ 的一段对 A 施加扰动 B_ω 。设定 P $\in \mathcal{G}$，并定义 B: M $\to \mathbb{R}^{2\times 2}$，使得对于所有位于$\varphi^{[0,1]}(\omega)$ $= \{\varphi^s(\omega) : s \in [0,1]\}$ 之外的 $\hat{}\omega$，均有 B($\hat{}\omega$) $=$A($\hat{}\omega$)；否则，B($\hat{}\omega$) $=$P($\hat{}\omega$)。映射 B 称为由 P 扰动 A，且该扰动支撑在 $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ 上。

引理 3.1。给定 $\omega \in M$、u，$v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$、$A \in \mathcal{K}^1$，存在 γ，0，以及一个支撑在 $\varphi^{[0,1]}(\omega)$上的 $B_\omega \in \mathcal{K}^1$ 对 A 的扰动，使得：

(i) $\|B\omega(\hat{}\omega)\| \le 4\pi^2$ 对 $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ 上的所有 $\hat{}\omega$ 都成立，且(ii) $\Phi_{B_\omega}(1, \omega)u = \gamma v$。

证明。令 $\theta = \measuredangle(\mathbb{R}u, \mathbb{R}v) \in [\pi, 2\pi]$ 按顺时针方向测量。取一个常值无穷小生成元P: $M \to \mathbb{R}^{2\times 2}$，定义如下：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\theta^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

我们考虑由 P 对 A 的 $B_\omega \in \mathcal{K}^1$ 扰动，其支撑在 $\varphi^{[0,1]}(\omega)$上。（9）中的无穷小生成元生成一个线性微分系统，其经典基本解（4）对所有$\hat{}\omega \in M$ 以及$t \in \mathbb{R}$ 均由以下“顺时针椭圆旋转”给出：

$$\Phi_P(t, \omega) = \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & \theta^{-1}\sin(\theta t) \\ -\theta \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix},$$

并且使得 $\Phi_{B_\omega}(1, \omega)u = \Phi_P(1, \omega)u = \gamma v$，其中某个 $\gamma \neq 0$ 满足 (ii)。 □

注*3.1.* 在后面应用引理 *3.1* 时，我们将考虑满足以下条件的 u 和 v：$\mathbb{R}u = E^1_\omega$ 且 $\mathbb{R}v = E^2_{\varphi^1(\omega)}$，其中 E^i 是与 A 相关联的奥塞莱茨方向。特别地，$\Phi_{B_\omega}(1, \omega)E^1_\omega = E^2_{\varphi^1(\omega)}$。此外，由于典范范数与最大范数等价，引理 *3.1* 的 *(i)* 和 *(6)* 意味着 $\|\Phi_{B_\omega}(1, \omega)\|_{\max} \le C\|\Phi_{B_\omega}(1, \omega)\| \le Ce^{4\pi^2}$。

3.2. **特殊流**。设有一个测度空间 Σ、一个映射 $\mathcal{T}$: $\Sigma \to \Sigma$、一个 $\mathcal{T}$-不变概率测度 $\tilde{}\mu$ 定义在 Σ 上，以及一个屋顶函数 h: $\Sigma \to \mathbb{R}^+$，满足 $h(\omega) \ge H > 0$，其中 $H > 0$，且对所有 $\omega \in \Sigma$ 都成立，并且 $\int_\Sigma h(\omega)d\tilde{}\mu(\omega) < \infty$。

定义空间 $M_h \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}_+$ 如下：

$$M_h = \{(\omega, t) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+ : 0 \le t \le h(\omega)\}$$

其中，等同于点对 $(\omega, h(\omega))$ 和 $(\mathcal{T}(\omega), 0)$。在 M_h 上定义的半流 S s$(\omega, r) = (\mathcal{T}^n(\omega), r + s - \sum_{i=0}^{n-1} h(\mathcal{T}^i(\omega)))$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 由下式唯一确定：

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\mathcal{T}^i(\omega)) \le r + s < \sum_{i=0}^{n} h(\mathcal{T}^i(\omega))$$

称为悬挂半流。若 $\mathcal{T}$ 可逆，则$(S^t)_t$ 是一个流。此外，若l 表示一维勒贝格测度，则在M_h 上定义的测度$\mu = (\tilde{}\mu \times l)/\int h\, d\tilde{}\mu$ 如下：

$$\int g\, d\mu = \frac{1}{\int h\, d\tilde{\mu}} \int \left(\int_0^{h(\omega)} g(\omega, t)dt \right) d\tilde{\mu}(\omega), \quad \forall g \in C^0(M_h)$$

是一个概率测度，且在悬挂半流$(S^t)_t$下保持不变。具有此类表示的流称为特殊流。

接下来的结果虽然简单，却是证明命题 3.3 第二部分的关键步骤。我们固定一个由四元组 $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$ 描述的特殊流，并赋予其乘积测度 $\tilde{}\mu \times l$，$\Sigma_0 \subseteq \Sigma$其中 $\tilde{}\mu(\Sigma_0) > 0$。此外，对于 $b > a > 0$，我们定义集合

$$\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0) = \{\varphi^t(\omega) : \omega \in \Sigma_0,\ t \in [a, b]\}.$$

给定 $A \in \mathcal{G}^1$、$P \in \mathcal{G}$、$\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ 和 $a > 0$，我们可以将 A 经 P 的扰动扩展为支撑在流盒 $\varphi^{[a,a+1]}(\Sigma_0)$ 上的扰动，具体如下：对于 $\omega \in \varphi^{[a,a+1]}(\Sigma_0)$，我们将 ω 投影到 $\tilde{\omega} \in \Sigma_0$ 中，并令 $B_{\tilde{\omega}}$ 为 A 经 P 的扰动，且支撑在 $\varphi^{[0,1]}(\varphi^a(\omega))$ 上，并定义

$$B(\omega) := \begin{cases} A(\omega), & \text{if } \omega \notin \varphi^{[a,a+1]}(\Sigma_0) \\ B_{\tilde{\omega}}(\omega), & \text{if } \omega \in \varphi^{[a,a+1]}(\Sigma_0) \end{cases}. \tag{10}$$

为了区分不同情形，我们将$B(\omega)$ 称为由 P 支撑于 A 中的全局扰动$\varphi^{[a,a+1]}(\Sigma_0)$。

引理 *3.2.* 对任意 $A \in \mathcal{G}^1$、$a > 0$ 和 $\varepsilon \in]0,1[$，存在一个可测集 $\Sigma_0 \subset \Sigma$，使得$\tilde{\mu}(\Sigma_0) > 0$；对于任意支撑于流盒 $\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)$ 中的 A 的全局扰动 $B \in \mathcal{G}^1$，若$\|B(\varphi^t(\omega))\| \le 4\pi^2$ 对所有 $\omega \in \Sigma_0$ 且 $t \in [a,b]$, 成立，则有 $\sigma_1(A,B) < \varepsilon$。

证明。固定 $A \in \mathcal{G}^1$、$b > a > 0$ 和 $\varepsilon \in]0,1[$。由于 $A \in \mathcal{G}^1$，我们令 $L > 0$ 满足 $\int_M \|A(\omega)\| d\mu(\omega) < L$。对任意 $\Sigma_0 \subset \Sigma$，有 $\mu(\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)) = (b-a)\tilde{\mu}(\Sigma_0)$。令 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$，并选取一个满足条件的可测集 $\Sigma_0 \subset \Sigma$

$$\tilde{\mu}(\Sigma_0) \in \left]0, \frac{\varepsilon'}{(b-a)(L+4\pi^2)}\right[. \tag{11}$$

最后，我们将验证 $\sigma_1(A, B) < \varepsilon$。事实上，由（11）可得：

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1(A,B) &= \int_M \|A(\omega) - B(\omega)\| d\mu(\omega) = \int_{\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)} \|A(\omega) - B(\omega)\| d\mu(\omega) \\ &\le \int_{\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)} \|A(\omega)\| + \|B(\omega)\| d\mu(\omega) \le \mu(\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0))(L+4\pi^2) \\ &= (b-a)(L+4\pi^2)\tilde{\mu}(\Sigma_0) < \varepsilon', \end{aligned}$$

这意味着 $\sigma_1(A, B) < \varepsilon$。 □

3.3.**降低最大李雅普诺夫指数**。 下一个结果表明，可以通过一个σ_p-小扰动降低具有简单谱的动力学余循环的最大李雅普诺夫指数。

Pro位置 3.3。 给定 $A \in \mathcal{K}^1$和 ε， $\delta > 0$，存在 $B \in \mathcal{K}^1$，使得 $\sigma_1(A, B) < \varepsilon$并且

$$\lambda_1(B) \le \frac{\lambda_1(A) + \lambda_2(A)}{2} + \delta. \tag{12}$$

证明。设 $A \in \mathcal{K}^1$和 $\varepsilon, \delta > 0$已给定。我们假设 A 具有简单谱，否则结论显然成立。我们将在正测度子集 Σ_0 中的点 ω 处，对长度为 1 的线段进行扰动（参见引理 3.1）；扰动将近似地取在 $\varphi^{N_0/2}(\omega)$处，其中 N_0 足够大，以便在给定精度 η下，使 ω 和 $\varphi^{\frac{N_0}{2}+1}(\omega)$都满足奥塞列杰茨定理的渐近性质。为避免令人不快的重叠情形，我们用有限屋顶函数的片山城堡上的特殊流来编码 φ。为便于理解，由于流 φ 是遍历的，简单应用 Rudolph 的二符号编码表示（见 [27]），即可将其视为以 $\Sigma \subset M$ 为基底、屋顶函数为 $h: \Sigma \to \{N_0+1, N_0+q\}$ 的特殊流 S^t，其中 N_0 足够大，且 $1 < q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。我们回顾一下，Rudolph 定理给出了一个具有高层级且彼此无理独立的阶梯函数；我们需要足够长的时间，以便在时间 $N_0/2$ 内观察到李雅普诺夫指数（精度为 η），在不足 1 的时间内实施扰动，并在返回基底前再次于时间 $N_0/2$ 内观察到李雅普诺夫指数。这样便能避免扰动之间的重叠。此外，我们有分解 $\mu = \tilde{\mu} \times l$，其中 l 是时间长度，且 $\tilde{\mu}$ 是由返回映射保持不变的 Σ 上的测度。以下仍将该特殊流记为 φ^t。至

对城堡作一些重新排列后，给定 $\eta > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ $(N \geq N_0)$，使得根据奥塞列杰茨
~ ~ ~定理，存在一个子集 $\Sigma \subseteq \Sigma$，满足 ~$\mu(\Sigma) > 0$，且对每个 $\omega \in \Sigma$，都有：

$$\left|\lambda_i - \frac{1}{t}\log\left\|\Phi_A(t,\omega)|_{E^i_\omega}\right\|\right| < \eta/8 < \eta \tag{13}$$

对于 $i = 1, 2$ 和 $t \geq N/2$。注意，根据余循环性质，必要时取更大的 N，对于$\omega \in \tilde{\Sigma}$ 并令 $\omega' = \varphi^{N/2+1}(\omega)$，我们也有

$$\left|\lambda_i - \frac{1}{N/2-1}\log\left\|\Phi_A(N/2-1,\omega')|_{E^i_{\omega'}}\right\|\right| < \eta. \tag{14}$$

事实上，为了得到（14），我们注意到

$$\begin{aligned}\left|\lambda_i - \frac{1}{N/2-1}\log\left\|\Phi_A(N/2-1,\omega')|_{E^i_{\omega'}}\right\|\right| &= \left|\lambda_i - \frac{1}{N/2-1}\log\left\|\Phi_A(N,\omega)|_{E^i_\omega}\Phi_A(-(N/2+1),\omega')|_{E^i_{\omega'}}\right\|\right| \\ &\leq \left|2\lambda_i - \frac{N}{N/2-1}\frac{1}{N}\log\left\|\Phi_A(N,\omega)|_{E^i_\omega}\right\|\right| \\ &+ \left|-\lambda_i - \frac{N/2+1}{N/2-1}\frac{1}{N/2+1}\log\left\|\Phi_A(N/2+1,\omega)^{-1}|_{E^i_{\omega'}}\right\|\right|.\end{aligned}$$

第一项小于或等于

$$\left|2 - \frac{N}{N/2-1}\right||\lambda_i| + \left|\lambda_i - \frac{1}{N}\log\|\Phi_A(N,\omega)|_{E^i_\omega}\right|\left|\frac{N}{N/2-1}\right|,$$

当 N 足够大时，可以使其小于 $\eta/2$；第二项也同样如此，因为它小于或等于

$$\left|1 - \frac{N/2+1}{N/2-1}\right||\lambda_i| + \left|\lambda_i - \frac{1}{N/2+1}\log\|\Phi_A(N/2+1,\omega)|_{E^i_\omega}\right|\left|\frac{N/2+1}{N/2-1}\right|.$$

因为

$$\left|-\lambda_i - \frac{1}{N/2-1}\log\|\Phi_A(N/2+1,\omega)^{-1}|_{E^i_{\omega'}}\|\right| = \left|-\lambda_i + \frac{1}{N/2-1}\log\left\|\Phi_A(N/2+1,\omega)|_{E^i_{\omega'}}\right\|\right|.$$

对于每个 $\tilde{\omega} \in \tilde{\Sigma}$，令 $B_{\tilde{\omega}}$ 为 A 经 P 扰动后所得的矩阵，它依赖于 $\mathbb{R}u = E^1_{\varphi^{N/2}(\tilde{\omega})}$ 以及$\mathbb{R}v = E^2_{\varphi^{1+N/2}(\tilde{\omega})}$，如引理 3.1 中的（9）所示，且支集包含于 $\varphi^{[N/2,N/2+1]}(\tilde{\omega})$，使得我们有

$$\Phi_{B_{\tilde{\omega}}}(1,\varphi^{N/2}(\tilde{\omega}))E^1_{\varphi^{N/2}(\tilde{\omega})} = E^2_{\varphi^{1+N/2}(\tilde{\omega})}.$$

现在，我们可以考虑一个支撑在流盒 $\varphi^{[N/2,N/2+1]}(\tilde{\Sigma})$ 上的全局扰动 B，它作用于A，如前所述：对于 $\omega \in \varphi^{[N/2,N/2+1]}(\tilde{\Sigma})$，我们将 ω 投影到 $\tilde{\omega} \in \tilde{\Sigma}$ 中，并定义

$$B(\omega) := \begin{cases} A(\omega), & \text{if } \omega \notin \varphi^{[N/2,N/2+1]}(\tilde{\Sigma}) \\ B_{\tilde{\omega}}(\omega), & \text{if } \omega \in \varphi^{[N/2,N/2+1]}(\tilde{\Sigma}) \end{cases}.$$

注意，我们有 $B \in \mathcal{K}^1$。必要时，将 $\tilde{\Sigma}$ 缩小为一个子集；由引理 3.2，我们可以假设 $\sigma_1(A,B) < \varepsilon$。

我们将看到，可以选取一个足够大的N，它依赖于 η（进而依赖于 δ），使得对于所有$\omega \in \Sigma$，都有

$$\lambda_1(B,\omega) \leq \frac{\lambda_1(A,\omega) + \lambda_2(A,\omega)}{2} + \delta. \tag{15}$$

~ ~有 ~$\mu(\Sigma) > 0$ 意味着，对于某个子集 $M \subseteq M_h$ 中的所有 ω，式（15）都成立，且 $\mu(M) > 0$；由于我们假设流 φ^t 是μ-遍历的，因此有

$$\lambda_1(B) \leq \frac{\lambda_1(A) + \lambda_2(A)}{2} + \delta$$

如（12）所要求的。下面解释混合奥塞莱茨方向对~李雅普诺夫指数衰减的影响。令 Fiz $\eta > 0$ 稍后选取，并取 $\omega \in \Sigma$，其奥塞莱茨方向为$E^1_\omega \oplus E^2_\omega$，且$N > 0$ 充分大，从而使（13）和（14）对 $\omega' = \varphi^{N/2+1}(\omega)$成立，也就是说

$$\Phi_A(N/2,\omega)\cdot v^1_\omega \approx e^{\lambda_1\frac{N}{2}}, \Phi_A(N/2,\omega)\cdot v^2_\omega \approx e^{\lambda_2\frac{N}{2}}, \tag{16}$$

and

$$\Phi_A\left(N/2-1,\omega'\right)\cdot v^1_{\omega'}\approx \mathrm{e}^{\lambda_1(\frac{N}{2}-1)},\Phi_A\left(N/2-1,\omega'\right)\cdot v^2_{\omega'}\approx \mathrm{e}^{\lambda_2(\frac{N}{2}-1)}, \tag{17}$$

其中 $\lambda_1=\lambda_1(A)$ 和 $\lambda_2=\lambda_2(A)$ 是 A 的李雅普诺夫指数，$v^i_\omega\in E^i_\omega$ 和 $v^i_{\omega'}\in E^i_{\omega'}$ 是酉向量，而 $\approx$ 表示 η-接近，如（13）和（14）所示。

注意，对于所有 $\omega\in\Sigma$，我们有：

$$\Phi_B(N,\omega)=\Phi_A\left(N/2-1,\omega'\right)\cdot\Phi_{B_\omega}(1,\varphi^{N/2}(\omega))\cdot\Phi_A\left(N/2,\omega\right). \tag{18}$$

因此，对于所有 $\omega\in\Sigma$，我们可以将映射 $\Phi_B(N,\ \omega)$ 的作用分解为三部分 s:

- 第一部分介于 ω 和 $\varphi_{N/2}(\omega)$ 之间，第三部分介于 ω' 和 $\varphi_N(\omega)$ 之间。利用由相对于分裂 $E^1\oplus E2$ 的奥塞莱茨方向所诱导的基底，这两部分可写为

$$\Phi_A\left(N/2,\omega\right)=\begin{pmatrix}\phi_{1,1}\left(N/2,\omega\right) & 0\\ 0 & \phi_{2,2}\left(N/2,\omega\right)\end{pmatrix}$$

and

$$\Phi_A\left(N/2,\omega'\right)=\begin{pmatrix}\phi_{1,1}\left(N/2-1,\omega'\right) & 0\\ 0 & \phi_{2,2}\left(N/2-1,\omega'\right)\end{pmatrix}.$$

利用（16）和（17），我们得到 $\Phi_A(N/2,\ \omega)$ 是一个算子，它可以由如下矩阵近似表示（其中 $\left|\phi_{1,\ 1}-\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1}{2}N}\right|<\eta$ 和 $\left|\phi_{2,\ 2}-\mathrm{e}^{\frac{\lambda_2}{2}N}\right|<\eta$）：

$$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1}{2}N} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\lambda_2}{2}N}\end{pmatrix} \tag{19}$$

按惯例，在奥塞莱德茨基基底中写作 $\{v^1_\omega、\ v^2_\omega\}$。类似地，$\Phi_A(N/2,\ \omega')$ 可以由矩阵近似表示（其中 $\left|\phi_{1,\ 1}-\mathrm{e}^{\lambda_1(N/2-1)}\right|<\eta$ 和 $\left|\phi_{2,\ 2}-\mathrm{e}^{\lambda_2(N/2-1)}\right|<\eta$）

$$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1(N/2-1)} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2(N/2-1)}\end{pmatrix} \tag{20}$$

在奥塞莱德茨基基底 $\left\{v^1_{\omega'},\ v^2_{\omega'}\right\}$ 中。

- 第二段是 $\varphi_{N/2}(\omega)$ 与 ω' 之间的部分，其矩阵是在由相对于分裂 $E^1_{\varphi^{N/2}(\omega)}\oplus E^2_{\varphi^{N/2}(\omega)}$ 的奥塞莱茨方向所诱导的基底中给出的，我们将其记为：

$$\Phi_{B_\omega}(1,\varphi^{N/2}(\omega))=\begin{pmatrix}0 & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

通过这种方向互换，扰动 $\Phi_B(N,\omega)$永远无法达到 $\Phi_A(N,\omega)$ 的最大增长率（由 $\mathrm{e}^{\lambda_1 N}$给出）。事实上，$\Phi_B(N,\omega)$ 的各项有如下界：

$$\max\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1(N/2-1)}\mathrm{e}^{\frac{\lambda_2}{2}N},e^{\lambda_2(N/2-1)}\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1}{2}N},\mathrm{e}^{\frac{\lambda_2}{2}N}\mathrm{e}^{\lambda_2(N/2-1)}\right\}\times\max\left\{a_{1,2},a_{2,1},a_{2,2}\right\}$$

现在我们估计 $\frac{1}{N}\log\|\Phi_B(\mathrm{N},\omega)\|$。由（18）可知，$\Phi_B(\mathrm{N},\omega)$是矩阵（19）、（21）和（20）的复合。为使表述简洁，我们利用这三个以奥塞莱德茨基为基的矩阵来估计 $\|\Phi_B(\mathrm{N},\omega)\|$。然而，由于奥塞莱德茨纤维之间的夹角如（8）所示呈次指数衰减，仅考虑标准基来估计 $\|\Phi_B(\mathrm{N},\omega)\|$ 只会增加技术上的繁琐，故下文不予采用。考虑到这一点以及注3.1，我们可以确保：

$$\|\Phi_B(N,\omega)\|\le\max\left\{\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}N-\lambda_1},\mathrm{e}^{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}N-\lambda_2}\right\}C\mathrm{e}^{4\pi^2}.$$

因此，

$$\frac{1}{N}\log\|\Phi_B(N,\omega)\|\le\max\left\{\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_1}{N},\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-\frac{\lambda_2}{N}\right\}+\frac{\log C\mathrm{e}^{4\pi^2}}{N}.$$

最后，取足够大的N，我们得到 b i

$$\frac{1}{N}\log\|\Phi_B(N,\omega)\|\le\frac{\lambda_1(A,\omega)+\lambda_2(A,\omega)}{2}+\delta.$$

由（28）可得

$$\lambda_1(B,\omega) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log\|\Phi_B(t,\omega)\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|\Phi_B(n,\omega)\| = \inf_n \frac{1}{n}\log\|\Phi_B(n,\omega)\|$$
$$\le \frac{1}{N}\log\|\Phi_B(N,\omega)\| \le \frac{\lambda_1(A,\omega)+\lambda_2(A,\omega)}{2} + \delta$$

并且（15）得以证明。

□

4. Upper semi-continuity for the topLyapunov exponent

4.1.关于 L^1-连续依赖的结果。 在本小节中，我们给出一些初步结果，以获得最大 Lyapunov 指数的上半连续性。首先介绍一个将发挥重要作用的基本测度论结果。

引理 4.1。 设$f \in L^1(\mu)$，$f \ge 0$。对于所有 $\eta > 0$，存在$K > 0$，使得对于所有$h \in L^1(\mu)$ 满足$h \ge 0$ 且 $\|h - f\|_1 < \eta$，我们有

$$\int_{\{h>K\}} h\, d\mu(\omega) < 2\eta \qquad and \qquad \mu(\{h > K\}) < \frac{2\eta}{K}.$$

证明。[1,引理 5]。 □

在本小节中，我们始终考虑A，$B \in \mathcal{G}^1$、$\epsilon > 0$ 和$T \in \mathbb{N}$。定义

$$f(\omega) = \int_0^1 \|A(\varphi^s(\omega))\|\, ds \quad \text{and} \quad g(\omega) = \int_0^1 \|B(\varphi^s(\omega))\|\, ds. \tag{22}$$

如前所述，由 [2, 引理2.2。5] 可知，f、g $\in L^1(\mu)$。设 $\eta = \varepsilon/(16(T+2))$，并固定满足$\hat{}\sigma_p(A, B) < \eta$的B，这也意味着 $\|f - g\|_1 < \eta$。现在对f和h =g应用引理 4.1，由此得到K > 0 （取决于 η 和A）。令

$$E_f = \{f \le K\} \quad \text{and} \quad E_g = \{g \le K\}. \tag{23}$$

于是引理4.1 给出

$$\int_{E_h^c} h\, d\mu(\omega) < 2\eta \quad \text{and} \quad \mu(E_h^c) < \frac{2\eta}{K}, \quad \text{for} \quad h = f, g. \tag{24}$$

Set

$$G = \bigcap_{i=0}^{T-1} \varphi^{-i}(E_f \cap E_g). \tag{25}$$

于是G^c 的测度很小:

$$\mu(G^c) \le \sum_{i=0}^{T} \mu(\varphi^{-i}(E_f \cup E_g)^c) \le T\mu(E_f \cup E_g)^c \le T\frac{4\eta}{K} < \frac{\varepsilon}{4K}. \tag{26}$$

属于集合G （在25）中定义）的元素具有良好的估计。事实上，我们有 :

引理 4.2. 若 $\omega \in G$，则对于 $C = A, B$，有 $\int_0^T \|C(\varphi^s(\omega))\|\, ds \le TK$，且 $\|\Phi_C(T,\omega)\| \le e^{TK}$.

证明。一旦 $\omega \in G$，我们就有 $\varphi^i(\omega) \in E_f$，对所有$i = 0, \ldots, T$，并且

$$\int_0^T \|A(\varphi^s(\omega))\|\, ds = \sum_{i=0}^{T-1} \int_0^1 \|A(\varphi^{s+i}(\omega))\|\, ds \le TK.$$

t 对数$^+$ $\|\Phi_A(T, \omega)\| \le \int_0^T \|B(\varphi^s(\omega))\| ds$ 由此得证。另一种情况类似。

根据（7）我们得到

□

下一个结果给出了关于解对其无穷小生成元的连续依赖的一种“弱形式”，这对我们的目的已经足够。这种依赖具有 L^p 特征，具体而言，两个解之间距离的估计是在一个集合上成立的；尽管该集合在测度意义下很大，却并非整个 M ，这正是我们称之为“弱”的原因。

引理 4.3. 对所有 $1 \le p < \infty$,

$$\left(\int_G \|\Phi_A(1,\omega) - \Phi_B(1,\omega)\|^p \, d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \le e^{2Kp}\hat{\sigma}_p(A,B).$$

证明。 </style}对于 G ，我们有

$$\begin{aligned}\|\Phi_A(1,\omega) - \Phi_B(1,\omega)\| &\le \int_0^1 \underbrace{\|A(\varphi^s(\omega)\|}_{\beta(s)} \|\Phi_A(s,\omega) - \Phi_B(s,\omega)\| ds \\ &+ \underbrace{\int_0^1 \left\|A(\varphi^s(\omega)) - B(\varphi^s(\omega))\right\| \|\Phi_B(s,\omega)\| ds}_{\alpha(t)}.\end{aligned}$$

令 u(t) $= \|\Phi_A(t,\ \omega) - \Phi_B(t,\ \omega)\|$, 得到 u(t) $\le$ R t $_0$ β(s)u(s) ds $+ \alpha$(t)。由格朗沃尔不等式可得 u(t) $\le \alpha$(t) exp $\left(\text{R t}_0\, \beta(\text{s})\, \text{ds}\right)$, 再由引理 4.2 得

$$\|\Phi_A(1,\omega) - \Phi_B(1,\omega)\| \le \int_0^1 \left\|A(\varphi^s(\omega)) - B(\varphi^s(\omega))\right\| \|\Phi_B(s,\omega)\| \, ds \, \mathrm{e}^K.$$

由于由引理 4.2 可知 $\|\Phi_B(s,\omega)\| \le \mathrm{e}^{sK}$, 利用詹森不等式可得

$$\begin{aligned}\|\Phi_A(1,\omega) - \Phi_B(1,\omega)\|^p &\le \left(\int_0^1 \left\|A(\varphi^s(\omega)) - B(\varphi^s(\omega))\right\| \|\Phi_B(s,\omega)\| \, ds \, \mathrm{e}^K\right)^p \\ &\le \int_0^1 \left\|A(\varphi^s(\omega)) - B(\varphi^s(\omega))\right\|^p \, ds \, \mathrm{e}^{2Kp}.\end{aligned}$$

对两边积分，并利用富比尼定理和坐标变换（注意到 φ^s 保持μ），得到:

$$\begin{aligned}\int_G \|\Phi_A(1,\omega) - \Phi_B(1,\omega)\|^p \, d\mu(\omega) &\le \mathrm{e}^{2Kp} \int_G \int_0^1 \left\|A(\varphi^s(\omega)) - B(\varphi^s(\omega))\right\|^p \, ds \, d\mu(\omega) \\ &\le \mathrm{e}^{2Kp} \int_0^1 \int_G \left\|A(\varphi^s(\omega)) - B(\varphi^s(\omega))\right\|^p \, d\mu(\omega) \, ds \\ &= \mathrm{e}^{2Kp} \int_0^1 \int_{\varphi^s(G)} \|A(\omega) - B(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \, ds \\ &\le \mathrm{e}^{2Kp} \int_M \|A(\omega) - B(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \\ &= \mathrm{e}^{2Kp}\hat{\sigma}_p(A,B).\end{aligned}$$

□

4.2. **最大李雅普诺夫指数函数的上半连续性**。在本小节中，我们不假设流 φ^t 是遍历的。我们定义函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\colon \quad (\mathcal{G}^1,\sigma_p) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ A &\longmapsto \int_M \lambda_1(A,\omega)\,d\mu(\omega).\end{aligned}$$

注意，在流上的遍历假设下 φ^t ，我们有 $\mathscr{L}(A) = \lambda_1(A)$。为了证明当 $\mathscr{L}$ 赋予 $\mathcal{G}^1$ 所定义的σ_p 度量（见 §2.3）时，它是上半连续的，我们先给出一个预备结果。

引理 4.4. 对所有 $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in M$ 以及 $A,B \in \mathcal{G}^1$，我们有

$$\log^+ \|\Phi_B(t,\omega)\| \le \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)\| + \|\Phi_B(t,\omega) - \Phi_A(t,\omega)\|.$$

证明。 证明可直接由三角不等式得出

$$\|\Phi_B(t,\omega)\| \le \|\Phi_A(t,\omega)\| + \|\Phi_B(t,\omega) - \Phi_A(t,\omega)\|.$$

以及如下事实：对所有$x,y \ge 0$，$\log^+(x+y) \le \log^+(x) + y$。 □

在下一个结果中，读者会发现其论证与 [1, 定理 2]中的论证有相似之处。不过，我们也提出了一些新内容：(i) 拓扑学置于产生李雅普诺夫指数的对象的无穷小生成元上；(ii) 这一点带来了若干连续性依赖问题，需要借助 §4.1 加以处理；(iii) 正如我们将看到的，这些论证往往具有流的特性，因此需要作出相应的若干调整。

命题 4.5。 对于所有 $1 \le p < \infty$，当我们赋予 $\mathcal{G}^1$以 σ_p-拓扑时，函数 $\mathscr{L}$ 是上半连续的，即，对于所有 $A \in \mathcal{G}^1$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $\sigma_p(A,B) < \delta$ 蕴含$\mathscr{L}(B) < \mathscr{L}(A) + \varepsilon$。

证明。 由命题 2.1 可知，对于所有 $1 \le p < \infty$，有 $\sigma_1(A,B) \le \sigma_p(A,B)$，因此只需考虑$p = 1$。设 $A \in \mathcal{G}^1$ 和 $\varepsilon > 0$ 已给定。首先假设对于μ 几乎处处的 $\omega \in M$，有

$$\lambda_1(A,\omega) \ge 0. \tag{27}$$

由次可加遍历定理，我们知道极限

$$\lambda_1(A,\omega) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_A(t,\omega)\|$$

几乎处处成立，并且在 L^1中也成立。因此，利用（27），我们得到

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_M \log^- \|\Phi_A(t,\omega)\|\,d\mu(\omega) = 0,$$

其中$f^-\colon = \min\{f, 0\}$。注意到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(A) &= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_M \log \|\Phi_A(t,\omega)\|\,d\mu(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_M \log \|\Phi_A(n,\omega)\|\,d\mu(\omega)\\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_M \log \|\Phi_A(n,\omega)\|\,d\mu(\omega)\end{aligned} \tag{28}$$

因此可以找到足够大的$T \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{1}{T} \int_M \log^- \|\Phi_A(T,\omega)\|\,d\mu(\omega) > -\frac{\varepsilon}{8} \quad \text{and} \quad \frac{1}{T} \int_M \log \|\Phi_A(T,\omega)\|\,d\mu(\omega) < \mathscr{L}(A) + \frac{\varepsilon}{8}$$

因此，由于$f = f^- + f^+$,

$$\frac{1}{T} \int_M \log^+ \|\Phi_A(T,\omega)\|\,d\mu(\omega) \le \mathscr{L}(A) + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{29}$$

我们对式（22）中的f 和 $\eta = \varepsilon/(16(T+2))$应用引理 4.1，由此得到陈述中的$K$。令$\delta' = \min\left\{\eta, \eta Te^{-K(T+2)}\right\}$ 和 $\delta = \delta'/(1+\delta')$。取满足 $\sigma_1(A,B) < \delta$ 的$B \in \mathcal{G}^1$，这意味着

$\hat{}\sigma_1(A,B) < \delta' \le \eta$。我们用$K, T, \eta$以及$B$定义集合$E_f, E_g$和$G$，分别如式（23）和（25）所示。我们将对以下表达式进行估计

$$\frac{1}{T}\int_M \log^+ \|\Phi_B(T,\omega)\| d\mu(\omega) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}),$$

其中

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{T}\int_{G^c} \log^+ \|\Phi_B(T,\omega)\| d\mu(\omega) \quad \text{and} \quad (\mathrm{II}) = \frac{1}{T}\int_{G} \log^+ \|\Phi_B(T,\omega)\| d\mu(\omega).$$

对于第一部分 (I)，由 (7) 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_{G^c} \log^+ \|\Phi_B(T,\omega)\|\, d\mu(\omega) &\le \frac{1}{T}\int_{G^c}\int_0^T \|B(\varphi^s(\omega))\|\, ds\, d\mu(\omega) \le \frac{1}{T}\int_{G^c}\sum_{i=0}^{T-1} g(\varphi^i(\omega))\, d\mu(\omega)\\ &= \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\int_{G^c} g(\varphi^i(\omega))\, d\mu(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{T-1}\int_{\varphi^i(G^c)} g(\omega)\, d\mu(\omega).\end{aligned}$$

对于每个 $i = 0$、……、$T-1$，由 (24) 和关系式 (26) 可得:

$$\int_{\varphi^i(G^c)} g\, d\mu(\omega) \le \int_{E_g^c} g\, d\mu(\omega) + \int_{E_g\cap\varphi^i(G^c)} g\, d\mu(\omega) < 2\eta + K\mu(E_g\cap\varphi^i(G^c)) \le \frac{\varepsilon}{8} + K\mu(G^c) \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

综上可得

$$(\mathrm{I}) = \frac{1}{T}\int_{G^c} \log^+ \|\Phi_B(T,\omega)\| d\mu(\omega) \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{30}$$

接下来估计第二部分 (II)。利用引理 4.4 和 (29) 可得

$$\begin{aligned}(\mathrm{II}) &\le \frac{1}{T}\int_G \log^+ \|\Phi_A(T,\omega)\| d\mu(\omega) + \frac{1}{T}\int_G \|\Phi_B(T,\omega) - \Phi_A(T,\omega)\| d\mu(\omega)\\ &\le \mathscr{L}(A) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{T}\int_G \|\Phi_B(T,\omega) - \Phi_A(T,\omega)\| d\mu(\omega).\end{aligned} \tag{31}$$

为估计右端的积分，我们按以下方式进行。利用余循环性质和引理 4.2，对于所有 $\omega \in G$ 以及$i = 1$、……、$T-1$，有:

$$\begin{aligned}\|\Phi_B(i+1,\omega) - \Phi_A(i+1,\omega)\| &\le \|\Phi_B(1,\varphi^i(\omega))\Phi_B(i,\omega) - \Phi_A(1,\varphi^i(\omega))\Phi_A(i,\omega)\|\\ &\le \|\Phi_B(1,\varphi^i(\omega))\|\|\Phi_B(i,\omega) - \Phi_A(i,\omega)\| +\\ &\quad + \|\Phi_B(1,\varphi^i(\omega)) - \Phi_A(1,\varphi^i(\omega))\|\|\Phi_A(i,\omega)\|\\ &\le \mathrm{e}^K\|\Phi_B(i,\omega) - \Phi_A(i,\omega)\| + \mathrm{e}^{Ki}\|\Phi_B(1,\varphi^i(\omega)) - \Phi_A(1,\varphi^i(\omega))\|.\end{aligned}$$

对G 进行积分，并结合引理4.3 与$p = 1$，可得

$$\int_G \|\Phi_B(i+1,\omega) - \Phi_A(i+1,\omega)\| d\mu(\omega) \le \mathrm{e}^K \int_G \|\Phi_B(i,\omega) - \Phi_A(i,\omega)\| d\mu(\omega) + \mathrm{e}^{Ki+2K}\delta'$$

通过归纳法，对于所有 i = 1，……，T，我们得到

$$\int_G \|\Phi_B(i,\omega) - \Phi_A(i,\omega)\| d\mu(\omega) \le (i+2)\mathrm{e}^{K(i+2)}\delta'.$$

特别地，若取$i = T$，则有

$$\int_G \|\Phi_B(T,\omega) - \Phi_A(T,\omega)\| d\mu(\omega) \le (T+2)\mathrm{e}^{K(T+2)}\delta' \le \frac{\varepsilon}{4}T. \tag{32}$$

最后，由（31）和（32）可得

$$(\mathrm{II}) = \frac{1}{T}\int_G \log^+ \|\Phi_A(T,\omega)\| d\mu(\omega) \le \mathscr{L}(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

为完成证明，我们考虑（30）和（33），从而得到

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(B) &\le \frac{1}{T}\int_M \log\|\Phi_B(T,\omega)\|d\mu(\omega)\\ &= \frac{1}{T}\int_{G^c}\log^+\|\Phi_B(T,\omega)\|d\mu(\omega)+\frac{1}{T}\int_G\log^+\|\Phi_B(T,\omega)\|d\mu(\omega)\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}+\left(\mathscr{L}(A)+\frac{\varepsilon}{2}\right)+=\mathscr{L}(A)+\varepsilon.\end{aligned}$$

现在证明一般情形。同样，设$A\in\mathcal{G}^1$ 和 $\varepsilon>0$ 已给定。对于 $\alpha>0$，我们定义φ^t-不变集

$$L_\alpha=\{\omega\in M:\lambda_1(A,\omega)<-\alpha\}.$$

取足够大的 α，使得

$$\int_{L_\alpha}\log^+\|\Phi_A(1,\omega)\|\,d\mu(\omega)<\frac{\varepsilon}{8}\quad\text{and}\quad\int_{L_\alpha}\lambda_1(A,\omega)\,d\mu(\omega)>-\frac{\varepsilon}{4}. \tag{34}$$

特别地，我们得到 t

$$\int_{L_\alpha^c}\lambda_1(A,\omega)\,d\mu(\omega)<\mathscr{L}(A)+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{35}$$

考虑由$A+\alpha Id$定义的（非动力学）无穷小生成元。我们断言，考虑生成元$A+\alpha Id$ 的方程（3）的弱解为 $\Phi_{A+\alpha Id}=\mathrm{e}^{\alpha t}\Phi_A(t,\omega)$。事实上，只需证明

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\Phi_A(t,\omega)=\mathrm{Id}+\int_0^t(A+\alpha Id)(\varphi^s(\omega))\mathrm{e}^{\alpha s}\Phi_A(s,\omega)ds \tag{36}$$

也就是说

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\Phi_A(t,\omega)=\mathrm{Id}+\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}A(\varphi^s(\omega))\Phi_A(s,\omega)ds+\alpha\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\Phi_A(s,\omega)ds.$$

对$u=\mathrm{e}^{\alpha s}$、$dv=A(\varphi^s(\omega))\Phi_A(s,\omega)ds$进行分部积分，并令$du=\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}ds$ 且$v=\Phi_A(s,\omega)$，得到

$$\mathrm{e}^{\alpha t}\Phi_A(t,\omega)=\mathrm{Id}+\mathrm{e}^{\alpha t}\Phi_A(t,\omega)-\mathrm{Id}-\int_0^t\alpha\mathrm{e}^{\alpha s}\Phi_A(s,\omega)\,ds+\alpha\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}\Phi_A(s,\omega)\,ds,$$

并且命题（36）得证。现在，我们将其“最大李雅普诺夫指数”定义为

$$\lambda_1(A+\alpha Id,\omega):=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log^+\|\mathrm{e}^{\alpha t}\Phi_A(t,\omega)\|.$$

注意 到 $\lambda_1(A+\alpha Id,\ \omega)=\lambda_1(A,\ \omega)+\alpha$，若 $\omega\in L_\alpha^c$，则有 $\lambda_1(A+\alpha Id,\ \omega)\ge 0$。现在定义

$$\begin{aligned}\tilde{\mathscr{L}}:\quad(\mathcal{G}^1,\sigma_p)&\longrightarrow\mathbb{R}\\ A&\longmapsto\int_M\lambda_1(A+\alpha Id,\omega)d\mu(\omega).\end{aligned}$$

~仿照对 $\mathscr{L}$ 所进行的先前计算，我们得到：若将$A+\alpha Id$ 限制在L_α^c上，则 $\mathscr{L}$ 是上半连续的。为此，还要注意到，将 Φ_A 和 Φ_B 分别替换为相应的 $\mathrm{e}^\alpha\Phi_A$ 和 $\mathrm{e}^\alpha\Phi_B$ 后，引理 4.3 仍然成立。因此存在 $\delta>0$，使得若 σ_p（（$A+\alpha\mathrm{Id}$）$|_{L_\alpha^c}$，（$B+\alpha\mathrm{Id}$）$|_{L_\alpha^c}$）$<\delta$，则有

$$\int_{L_\alpha^c}\lambda_1(B+\alpha Id,\omega)d\mu(\omega)\le\int_{L_\alpha^c}\lambda_1(A+\alpha Id,\omega)d\mu(\omega)+\frac{\varepsilon}{4},$$

也就是说，

$$\int_{L_\alpha^c}\lambda_1(B,\omega)d\mu(\omega)\le\int_{L_\alpha^c}\lambda_1(A,\omega)d\mu(\omega)+\frac{\varepsilon}{4}. \tag{37}$$

另一方面，由于$L\alpha$ 是不变的，我们有

$$\int_{L_a}\lambda_1(\Phi_B,\omega)\,d\mu(\omega)=\inf_n\frac{1}{n}\int_{L_a}\log^+\|\Phi_B(n,\omega)\|\,d\mu(\omega)\le\int_{L_a}\log^+\|\Phi_B(1,\omega)\|\,d\mu(\omega) \tag{38}$$

考虑 $T = 1$ 和 η，K 和 G 如前，并将 η 替换为 $\eta' = \eta/4$。由引理 4.4、（34）和（32），可得

$$\begin{aligned}\int_{L_\alpha \cap G} \log^+ \|\Phi_B(1,\omega)\|\, d\mu(\omega) &\leq \int_{L_\alpha \cap G} \log^+ \|\Phi_A(1,\omega)\|\, d\mu(\omega) + \int_{L_\alpha \cap G} \|\Phi_B(1,\omega) - \Phi_A(1,\omega)\|\, d\mu(\omega) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} \\ &= \frac{\varepsilon}{8}. \end{aligned} \tag{39}$$

与（30）类似，我们得到

$$\int_{L_\alpha \cap G^c} \log^+ \|\Phi_B(1,\omega)\|\, d\mu(\omega) \leq \tfrac{\varepsilon}{8},$$

结合（39）可得

$$\int_{L_\alpha} \log^+ \|\Phi_B(1,\omega)\|\, d\mu(\omega) \leq \tfrac{\varepsilon}{4}, \tag{40}$$

最后，由（37）、（38）、（35）和（40）可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(B) &= \int_{L_\alpha} \lambda_1(B,\omega) d\mu(\omega) + \int_{L_\alpha^c} \lambda_1(B,\omega) d\mu(\omega) \\ &\leq \int_{L_\alpha} \lambda_1(A,\omega) d\mu(\omega) + \frac{\varepsilon}{4} + \int_{L_\alpha} \log^+ \|\Phi_B(T,\omega)\| d\mu(\omega) \\ &\leq \left(\mathscr{L}(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \mathscr{L}(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

5. 定理 1 的证明

在 [10, 11, 7, 8] 中提出的、用于减小李雅普诺夫指数的策略，适用于赋予C^0 范数的余循环（或赋予L^∞ 范数的本质有界余循环），但无法用于我们的情形。事实上，L^p 范数捕捉的是轨道线段某个邻域上的信息；与C^0 范数不同，它并非仅取决于该线段本身。因此，我们必须采用不同的方法。

我们回顾一下，由于假设 φ^t 是遍历的，给定$A \in \mathcal{K}^1$ 的李雅普诺夫指数几乎处处为常数（相对于μ），并记作 $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A)$。我们将跳跃映射定义为：

$$\begin{aligned}\mathscr{J}: \quad (\mathcal{K}^1, \sigma_p) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \tfrac{\lambda_1(A) - \lambda_2(A)}{2}. \end{aligned}$$

下面的结果是命题 3.3 的直接推论，对证明定理 1至关重要。

引理 5.1。设 $1 \leq p < \infty$，并给定 $A \in \mathcal{K}^1$ 和 $\varepsilon, \delta > 0$。存在 $B \in \mathcal{K}^1$，使得$\sigma_p(A,B) < \varepsilon$ 满足

$$\mathscr{L}(B) < \delta - \mathscr{J}(A) + \mathscr{L}(A).$$

证明。由命题 2.1 中的 (i) 以及命题 3.3 可知，存在 $B \in \mathcal{K}^1$，使得 $\sigma_1(A,B) \leq \sigma_p(A,B) < \varepsilon$，满足

$$\mathscr{L}(B) < \frac{\lambda_1(A) + \lambda_2(A)}{2} + \delta = \delta - \mathscr{J}(A) + \mathscr{L}(A).$$

□

定理 5.2。 考虑 $1 \leq p < \infty$ 以及完备度量空间 $(\mathcal{K}^1, \sigma_p)$。若 $A \in \mathcal{K}^1$ 是 $\mathscr{L}$ 的连续点，则 $\mathscr{J}(A) = 0$。

证明。 取一列动力学线性微分系统 $A_n \in \mathcal{K}^1$ 收敛于 $A \in \mathcal{K}^1$，在 σ_p-意义下。由于 A 是一个连续点，我们必有 $\lim \mathscr{L}(A_n) = \mathscr{L}(A)$。由引理 5.1，给定 $\varepsilon_n \to 0$ 和 $\delta > 0$，存在 $B_n \in \mathcal{K}^1$，使得 $\sigma_p(A_n, B_n) < \varepsilon_n$，满足

$$\mathscr{L}(B_n) < \delta - \mathscr{J}(A_n) + \mathscr{L}(A_n).$$

令 n 趋于无穷，得到

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(B_n) < \delta - \lim_{n\to\infty} \mathscr{J}(A_n) + \mathscr{L}(A).$$

由于 A 是 $\mathscr{L}$ 的连续点，我们得到，对于充分大的 n，$\mathscr{J}(A_n) = 0$，因此 $\mathscr{J}(A) = 0$。□

现在我们可以完成主要结果的证明了。

证明。 （定理 1）由命题 4.5 可知，函数 $\mathscr{L}$ 是上半连续的；由定理 5.2 可知，$\mathscr{L}$ 的连续点具有平凡谱（跳跃 等于零）。众所周知，上半连续函数的连续点集是一个剩余子集（见[18]）。因此，存在一个 σ_p-剩余子集 $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}^1$，使得若 $A \subset \mathcal{R}$，则 $\mathscr{J}(A) = 0$，即 $\lambda_1(A) = \lambda_2(A)$。□

由推论 2.3 可知，$(\mathcal{K}^1, \sigma_p)$ 是一个贝尔空间，因此，σ_p-残集是 σ_p-稠密的。由此，我们得到动力系统中平凡李雅普诺夫谱具有 σ_p-普遍性。

致谢： 作者的部分研究工作得到了 FCT——“科学与技术基金会”的资助，资助通过数学与应用中心（CMA-UBI）、贝拉内陆大学的项目 UID/00212/2020 提供。MB 还感谢 CMUP 为开展这项工作提供了必要条件。

References

[1] A. Arbieto, J. Bochi, L^p-泛型余循环具有单点李雅普诺夫谱，《随机性与动力学》3 (2003) 73–81。更正。 同上，3 (2003) 419–420。[2] L. Arnold，《随机动力系统》，施普林格出版社，1998。[3] L. Arnold、H. Crauel、J.-P. Eckmann，编者，《李雅普诺夫指数。》会议论文集，奥伯沃尔法赫，1990，施普林格数学讲义第1486卷。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1991。[4] L. Arnold、V. Wihstutz，编者，《李雅普诺夫指数。》会议论文集，不来梅，1984，施普林格数学讲义第1186卷。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1986。[5] A. Azevedo、D. Azevedo、M. Bessa 和 M. J. Torres，《索伯列夫映射的闭合引理与平面一般稠密性定理》，美国数学会会刊，149 (2021)，1687–1696。[6] L. Barreira，《李雅普诺夫指数》，比克豪泽出版社，2017。[7] M. Bessa，《泛型二维线性微分系统的动力学》，微分方程杂志 228 (2) (2006) 685–706。[8] M. Bessa，《长周期参数激励下马蒂厄方程的扰动》，动力系统与应用进展，7，1，(2012) 17–30。[9] M. Bessa、H. Vilarinho，《具有丰富简单谱和平凡谱性质的L^p-余循环》，微分方程杂志，256，7 (2014) 2337–2367。[10] J. Bochi，《零李雅普诺夫指数的泛型性》，遍历理论与动力系统 22 (2002) 1667–1696。[11] J. Bochi、M. Viana，《泛型保体积映射与辛映射的李雅普诺夫指数》，数学年刊 161 (3) (2005) 1423–1485。[12] P. Duarte、S. Klein，《线性余循环的李雅普诺夫指数：通过大偏差实现连续性》，亚特兰蒂斯动力系统研究，3。亚特兰蒂斯出版社，巴黎，2016。

[13] Edson de Faria、Peter Hazard、Charles Tresser，《无限熵在 Hölder 空间和索伯列夫空间中是泛型的》，巴黎科学院学报，I辑，355(11) (2017)，1185–1189。[14] E. de Faria、P. Hazard 和 C. Tresser，《低正则性映射的无限熵泛型性》，比萨高等师范学校科学年刊，(5) XXII (2021)，601–664。[15] X. Feng、K. Loparo，《随机谐振子的几乎必然不稳定性》，SIAM应用数学杂志 50，3，(1990) 744–759。[16] N. A. Izobov，《李雅普诺夫指数与稳定性。系统稳定性、振荡与优化》，6。剑桥科学出版社，剑桥，2012。[17] R. Johnson、K. Palmer、G. Sell，《线性动力系统的遍历性质》，SIAM数学分析杂志 18 (1987) 1–33。[18] K. Kuratowski，《拓扑学》，第1卷，学术出版社，1966。[19] A. Leizarowitz，《有限状态马尔可夫过程驱动的谐振子的李雅普诺夫指数》，SIAM应用数学杂志，49，2，(1989) 404–419。[20] R. Mañé，《从泛型观点看奥塞莱德茨定理》，国际数学家大会论文集，华沙，第2卷 (1983) 1259–1276。[21] R. Mañé，《泛型保面积微分同胚的李雅普诺夫指数》，国际动力系统会议（蒙得维的亚，1995），Pitman数学研究札记丛书362 (1996) 110–119。[22] V. M. Millionshchikov，《在所有线性微分方程组集合中稠密的、具有积分分离性的系统》，微分方程 5 (1969) 850–852。[23] V. L. Novikov，《具有几乎周期系数的近似可约系统》，数学札记 16 (1974) 789–799。[24] V. Oseledets，《乘法遍历定理：动力系统的李雅普诺夫特征数》，莫斯科数学会译刊 19 (1968) 197-231。[25] F. Otto，L^1-收缩性与拟线性椭圆-抛物型方程的唯一性，微分方程杂志 131 (1996) 20–38。[26] A. Pikovsky、A. Politi，《李雅普诺夫指数：探索复杂动力学的工具》，剑桥大学出版社，剑桥，2016。[27] D. Rudolph，《遍历流的二值阶梯编码》，数学杂志 150 (1976) 201–220。[28] M. Viana，《李雅普诺夫指数讲义》，剑桥高等数学研究丛书，145。剑桥大学出版社，剑桥，2014。电子邮箱：dinis.amaro@ubi.pt 电子邮箱：bessa@ubi.pt 电子邮箱：helder@ubi

.pt