arXiv:2301.04906v1 [math.NA] 12 Jan 2023

数据驱动插值的实践挑战：处理噪声、保证稳定性并计算实现

Quirin Aumann* Ion Victor Gosea†

*Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Sandtorstr. 1, 39106 Magdeburg, Germany.电子邮箱：aumann@mpi-magdeburg.mpg.de，ORCID：0000-0001-7942-5703

†Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Sandtorstr. 1, 39106 Magdeburg, Germany.电子邮箱：gosea@mpi-magdeburg.mpg.de，ORCID：0000-0003-3580-4116

摘要：本文对基于插值的数据驱动方法进行了深入研究，这些方法在模型降阶以及系统与控制领域均具有重要意义。数据由底层（未知）模型传递函数的样本构成，即我们分析频率响应数据。我们还提出了新方法，将成熟方法的一些主要特点结合起来，以解决特定问题。这包括配置极点，从而保证降阶模型的稳定性；增强对噪声或扰动数据的鲁棒性；以及在不同的有理函数表示之间进行切换。这里我们提及经典的状态空间形式，以及拟合所得有理插值函数的各种重心表示。我们表明，与成熟方法相比，新开发的方法在某些情况下能取得更优的数值结果。数值结果包括对近似误差、插值点选择或主导极点配置等相关方面的全面分析，并在一些基准模型和数据集上进行了测试。

关键词： 数据驱动方法、有理逼近、插值方法、最小二乘拟合、Loewner框架、频率响应数据、极点配置、含噪测量、Loewner矩阵和柯西矩阵。

创新声明： 本文指出，通过结合基于插值（和/或最小二乘拟合）的成熟数据驱动有理逼近方法的特点，可以设计出具有其他重要优势的方法。这些优势包括以优雅且数值稳定的方式配置极点来强制实现稳定性，以及对含噪数据的鲁棒性。

1. 引言

大规模动力系统的近似对于实现高效仿真以及实时设计控制律至关重要。降低系统复杂度的技术称为模型降阶（MOR） [1, 5, 13, 14]。降低大规模模型的方法有很多，每种方法都针对特定应用（主要但不限于

机械和电气工程）以及实现特定目标（稳定性、无源性或结构保持），同时降低复杂度。当无法明确获得高保真模型时，数据驱动模型降阶方法尤为重要。这意味着无法获得包含内部变量的状态空间表述，但可以获得输入/输出数据。这类方法无需访问原始模型的精确描述，因此在经典投影式模型降阶方法不适用时仍可应用。这里我们提及基于数据插值或最小二乘拟合（即频率响应测量值）的系统与控制方法，例如向量拟合 [31], Loewner框架 [41], 或AAA 算法 [42]。使用时域数据的方法也值得关注，包括需要输入/输出数据的方法，以及使用快照数据（即能够访问状态演化）的方法，例如文献 [36,58,59],之后 [8], [47]或 [54]。

我们着重讨论基于插值或所谓矩匹配（MM）的方法。这些方法在过去几十年中逐渐兴起、不断发展并持续改进。这类方法的核心是有理Krylov型方法以及对Sylvester矩阵方程的诠释[1, 11, 20]。除了计算效率高、易于实现之外，MM方法还有另一项优势：它们并不（一定）需要获得原始动力系统的全状态实现。因此，这类方法可视为数据驱动方法。这里的数据是系统的矩，即在特定频率范围内对系统的底层传递函数（及其导数）进行评估所得的样本；更多详情请参阅 [5,8,41]以及 [13]的第3章。系统与控制理论中的矩这一概念，与Sylvester矩阵方程的唯一解有关 [20]。

本说明有两个目的；首先，我们打算回顾并联系过去15年提出的三种基于插值的系统理论模型降阶重要方法：

- Mayo 和 Antoulas 于2007年提出的 Loewner框架（LF），见 [41];
- 2010年提出的 Astolfi框架（AF），见 [8];
- 自适应 Antoulas-Anderson（AAA）算法由 Nakatsukasa、Set´e 和 Trefethen 提出，于2018年发表于 [4]

这三种方法都曾在多篇研究出版物中被反复引用，可谓相当流行。然而，迄今为止，自动控制、模型降阶和数值分析领域都鲜有关于它们之间联系的研究。与 [31] 中的向量拟合算法（VF）一起（该算法不基于插值，因此是一种基于最小二乘拟合的纯优化方法），这些方法可谓是系统与控制领域发展出的最具影响力的有理逼近方案。不过，VF 并非本研究的对象，因为它不基于插值。

本文的另一个目标是提出一种基于上述三种方法的新方法，以应对它们相关的一些不足与挑战。基本思路是结合各方法的特点，具体步骤如下。

- 我们利用 Loewner 框架揭示阶数的性质（该性质由增广 Loewner 矩阵的秩体现）；此外，插值点的选择采用 [38]中提出的 Loewner-CUR 技术。
- 我们采用 AF 提出的 LTI 系统优雅的状态空间参数化（在施加 k 插值条件之后）；这是这些方法的基础（我们还展示了状态空间形式与重心形式之间的联系）。
- 我们采用 AAA 的拟合步骤（该步骤通过选择自由参数，以最小二乘意义拟合未插值数据），或者施加极点配置（从 Loewner 模型的极点中选取主导极点）；这两种情况下都需要求解一个线性方程组。

下文中，我们考虑一个维度为 $\mathbf{\Sigma}_L$ n 的多输入多输出（MIMO）线性时不变（LTI）系统，其由以下微分方程组描述：

$$\mathbf{\Sigma}_L : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量，$\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入，$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ 为观测输出。这里有 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$、$\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 和$\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{p\times n}$。该线性时不变系统的传递（矩阵）函数为$\mathbf{H}(s) \in \mathbb{C}^{p\times n}$，其中 $s \in \mathbb{C}$，

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \tag{2}$$

需要注意的是，对于 $m = p = 1$，系统将变为单输入单输出（SISO）。在介绍本文涵盖的方法时，我们有时会在多输入多输出和单输入单输出格式之间切换，因为对于本文展示的一些结果，后者更便于阐述。

令 $s_i \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{A})$，其中 $\sigma(\mathbf{A})$表示矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$的谱，即其特征值的集合。系统 $\mathbf{\Sigma}_L$ 在 s_i 处的 j阶矩为 $\eta_j(s_i) = (-1)^j \left[\frac{d^j}{ds^j}\mathbf{H}(s)\right]_{s=s_i}$，其中 $j \geqslant 1$为任意整数。零阶矩通过在 s_i处对式（2）中的传递函数 $\mathbf{H}(s)$进行采样得到，即$\eta_0 = \mathbf{H}(s_i)$。本文将分析范围限定为匹配零阶矩，即传递函数 $\mathbf{H}(s)$的样本，而非其导数。不过，可以预期本文所示的所有方法也能处理导数。此外，在实践中，从时域数据推断零阶矩通常更为直接；具体做法是向系统施加谐波输入，并对输出应用谱变换。此外，从数值角度来看，推断（传递函数的）导数值通常容易受到扰动的影响，也更难实现。

本文的结构如下：引言部分搭建整体框架后，我们在第2节中综述三种成熟的基于插值的方法。随后，在第3节中介绍所提出的方法，重点讨论单步方法：该方法将插值点的最优选择（使用 CUR-DEIM 选取）与其余数据的最小二乘拟合相结合；同时还讨论重心形式的极点配置法，该方法强制采用 Loewner 数据驱动模型中的主导极点。然后，第4节展示了将前两节讨论和提出的方法应用于各种测试案例（不同模型和数据集）时的数值表现。最后，第5节给出结论并展望未来研究方向。

2. 成熟方法综述

本节讨论三种成熟的数据驱动有理逼近方法（AF、LF 和 AAA，如前一节所述）。这些数据是与基础动力系统相对应的传递函数样本，在特定的频率网格上测得。在下文中，我们将介绍一些用于测量此类数据，即频率响应数据的最先进方法。通常，这些测量值可以通过科学实验室中使用经过仔细校准的仪器进行实验来获得，这些仪器称为频谱分析仪（SAs）。此类仪器包括扫频式频谱分析仪、标量网络分析仪（SNAs）和矢量网络分析仪（VNAs）。

SNA 是一种通过二极管检波器将微波信号转换为直流电压来进行测量的仪器。VNA 能够提取微波信号的幅值和相位信息。虽然有多种方法可以进行此类测量，但商用 VNA 产品（例如 [18] 中介绍的安立系列）所采用的方法，是通过称为谐波采样的过程将信号下变频至较低的中频。随后，调谐接收机可直接测量该信号。与 SNA 相比，VNA 是一种功能更强大的分析仪。两者的主要区别在于，VNA 还能测量相位，而不仅仅是振幅。凭借这一特性，便可处理所谓的散射参数（或

S 参数）。这些参数可用于确定正向和反向传输特性以及反射特性。更多详情请参阅 [18]。

谐波平衡法（或 HBM） [43], 是电磁学领域一种成熟的方法。HBM 被广泛应用于许多（如果不是大多数）商业射频（RF）仿真工具中。这是因为，与其他常用方法（即改进节点分析（MNA））相比，它具有一定优势，因此更适合用于刚性问题以及包含传输线、非线性和色散效应的电路。更多详细信息可参见综述论文 [49]。

2.1. [8]中的单边矩匹配方法

Astolfi 在 [8] 中提出的框架（本文后文均称为 AF）处理的是通过矩匹配进行模型降阶的问题。尽管它通常被解释为复平面中点的插值问题，但实际上已被重新表述为稳态响应的插值问题。下面我们简要回顾其在线性系统中的应用。需要指出的是，AF 逐步扩展并应用于不同场景（包括非线性动力系统、极点零点配置和最小二乘拟合） [33–35, 45, 53, 55]。

线性系统的矩可以通过求解 Sylvester 方程来表征。利用这一观察可以证明，矩与信号发生器和原线性系统互连后的稳态输出响应之间存在一一对应关系。

下文中，为便于说明，假设 $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{L}}$ 是一个最小系统（完全能控且完全能观）。关于线性时不变系统的最小性、能控性或能观性的严格定义，请参阅 [1]。

设 $k \leqslant n$ 和$\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{k\times k}$ 为一个非退化矩阵（其特征多项式与最小多项式重合），满足 $\sigma(\mathbf{S}) \cap \sigma(\mathbf{A}) = \emptyset$，且 $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{1\times k}$，从而 $(\mathbf{S},\mathbf{R})$ 具有能观性。考虑由下列方程描述的信号发生器系统 $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sg}}$

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sg}} : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \mathbf{S}\boldsymbol{\omega}(t), \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}(t). \end{cases} \tag{3}$$

于是，(3) 的显式解可写为 $\boldsymbol{\omega}(t) = e^{\mathbf{S}t}\boldsymbol{\omega}(0)$。因此，控制输入可写为 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}e^{\mathbf{S}t}\boldsymbol{\omega}(0)$。此外，$\mathbf{S}$ 的特征值称为插值点。

对于线性系统 $\mathbf{\Sigma}_L$ 和插值点 $s_i \in \mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{A})$，对于 $i = 1, \ldots, k$，考虑一个非退化矩阵 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k\times k}$。由此可知，系统 $\mathbf{\Sigma}_L$ 的矩与

1. 矩阵 $\mathbf{C\Pi}$，其中 $\mathbf{\Pi}$ 是西尔维斯特方程 $\mathbf{A\Pi} + \mathbf{BR} = \mathbf{\Pi S}$ 的（唯一）解，任取满足 $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ 可观测的行向量 $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{1\times k}$；
2. 系统 $\mathbf{\Sigma}_L$ 与系统$\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{sg}}$互连后输出 $\mathbf{y}$ 的稳态响应，其中任取 $\mathbf{R}$ 和 $\boldsymbol{\omega}(0)$，使得三元组 $(\mathbf{R}, \mathbf{S}\ \boldsymbol{\omega}(0))$ 为最小。

更确切地说，设 $\mathbf{\Delta} \in \mathbb{R}^k$ 为一个包含 k 个自由参数的列向量（记为$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$，其中 $\delta_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$）。那么，如 [8], 所述，对系统矩进行插值的线性时不变系统族 $\mathbf{\Sigma}_{\mathrm{L}}$ 在矩阵 $\mathbf{S}$的特征值处，表示为

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{\Delta}} : \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \underbrace{(\mathbf{S} - \mathbf{\Delta R})}_{=\hat{\mathbf{A}}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \underbrace{\mathbf{\Delta}}_{=\hat{\mathbf{B}}}\mathbf{u}(t), \quad \hat{\mathbf{y}}(t) = \underbrace{\mathbf{C\Pi}}_{=\hat{\mathbf{C}}}\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \tag{4}$$

其中，矩阵$\mathbf{S}$ 和$\mathbf{R}$ 与前文相同，而 $\mathbf{\Pi}$ 是西尔维斯特方程$\mathbf{A\Pi} + \mathbf{BR} = \mathbf{\Pi S}$的唯一解。此外，还需要满足条件 $\sigma(\mathbf{S}) \cap \sigma(\mathbf{S} - \mathbf{\Delta R}) = \emptyset$。需要指出的是，自由参数显式地出现在向量$\mathbf{B} = \mathbf{\Delta}$中，也出现在矩阵$\mathbf{A}$中，因为$\mathbf{A} = \mathbf{S} - \mathbf{\Delta R}$。最后，$\mathbf{C} = \mathbf{C\Pi}$ 的元素是固定的。

降阶系统的Sylvester矩阵方程可写为$\mathbf{A\Pi}+\mathbf{BR}=\mathbf{\Pi S}$。这是因为降阶系统与原始系统具有相同的预设矩，因此两个方程的形式相同。不失一般性，可以假设矩阵 $\mathbf{\Pi}$ 为单位矩阵，即 $\mathbf{\Pi}=\mathbf{I}_k$ （这可通过相似变换实现）。将该值代入上述降维Sylvester矩阵方程，可直接得到公式$\mathbf{A}=\mathbf{S}-\mathbf{\Delta R}$。

随后，可以选取向量 $\mathbf{\Delta}$ 中汇集的自由参数，以施加或满足 [8], 中提到的其他条件，例如：通过施加其他 k 插值条件进行匹配、与预设特征值匹配、与预设相对阶匹配、与预设零点匹配、满足无源性约束、匹配 L_2增益，或满足隔室约束。

AF 的一个重要方面，是刻画所有满足 k 预设插值条件的降阶模型族（即无限多个模型族）。具体做法是显式计算这类参数化模型，其中自由参数就是向量 $\mathbf{\Delta}$中的变量。本文提出的主要参数化方法将作为第3节所开发方法的“骨干”。

正如原论文所述，AF 的主要优势在于（用稳态响应刻画矩），它使得我们能够为那些无法明确或直接用传递函数表示的系统定义矩。因此，作者以线性时变系统和非线性系统为例。此外， [8] 指出，该框架的一个缺点是要求稳态响应存在。因此，原始系统必须是（指数）稳定的。不过，在大多数实际应用中，这一要求是合理的。

2.2. [41]中的 Loewner 框架

本节简要概述 [41] 中提出的 Loewner框架（LF）。需要指出的是，LF 源自 [4], 的早期研究，并且可以将 LF 视为一种双边矩匹配方法（与单边的 AF 相对）。

关于面向线性时不变系统的 LF 教程论文，请参阅 [7], ；关于近期一种使用时域数据的扩展，请参阅 [48]。Loewner框架近期已扩展至某些类别的非线性系统，例如 [6], 中的双线性系统、 [24], 中的二次-双线性（QB）系统，以及 [28] 中的线性参数时变系统。此外，LF 也针对稳定性保持或稳定性约束等问题，以及无源性保持问题开展了研究，前者见 [23, 29],，后者见 [2, 12], 。

Loewner 框架基于对频域测量值 $\mathcal{D}=\{(\omega_\ell,\ \mathbf{H}(\omega_\ell))\quad \ell=1,\ .....,\ N\}$（其中 $\omega_\ell\in\mathbb{R}$ 对于 $1\leq\ell\leq N$）进行处理，这些测量值对应于对底层（未知／隐藏）动力系统的传递函数的求值。

插值问题表述如下（为便于说明，这里仅展示单输入单输出形式）。给定集合 $\mathcal{D}$ 中的数据节点和数据点，并将其划分为两个不相交的子集 $\mathcal{D}_\mathrm{L}$ 和 $\mathcal{D}_\mathrm{R}$，其中 $\mathcal{D}_\mathrm{L}\cup\mathcal{D}_\mathrm{R}=\mathcal{D}$ 和 $k+q=N$，如下所示：

$$\begin{aligned}\text{right}\quad \text{data}: \mathcal{D}_\mathrm{L}&=\{(\lambda_j,\mathbf{H}(\lambda_j))\,,\ j=1,\ldots,k\},\ \text{and},\\ \text{left}\quad \text{data}: \mathcal{D}_\mathrm{R}&=\{(\mu_i,\mathbf{H}(\mu_i))\,,\ i=1,\ldots,q\},\end{aligned}\tag{5}$$

我们希望找到一个有理函数 $\hat{}\mathbf{H}(s)$，使其满足以下插值条件：

$$\hat{\mathbf{H}}(\mu_i)=\mathbf{H}(\mu_i):=v_i,\quad \hat{\mathbf{H}}(\lambda_j)=\mathbf{H}(\lambda_j):=w_j.\tag{6}$$

Loewner 矩阵 $\mathbb{L}\in\mathbb{C}^{q\times k}$ 和移位 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}_s\in\mathbb{C}^{q\times k}$ 在 Loewner 框架中发挥着重要作用，其定义如下：

$$\mathbb{L}_{(i,j)}=\frac{v_i-w_j}{\mu_i-\lambda_j},\quad \mathbb{L}_{s(i,j)}=\frac{\mu_i v_i-\lambda_j w_j}{\mu_i-\lambda_j},\tag{7}$$

而数据向量 $\mathbb{V} \in \mathbb{C}^q$, $\mathbb{W}^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^k$ 的定义如下：

$$\mathbb{V}_{(i)} = v_i, \quad \mathbb{W}_{(j)} = w_j, \text{ for } i = 1, \ldots, q, \ j = 1, \ldots, k. \tag{8}$$

此外，Loewner 矩阵和移位 Loewner 矩阵满足以下 Sylvester矩阵方程（[1, 第 6]）（其中，$\mathbb{1}_q = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^q$）

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbb{L} - \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} = \mathbb{V}\mathbb{1}_k^\mathsf{T} - \mathbb{1}_q\mathbb{W}, \\ \mathbf{M}\mathbb{L}_s - \mathbb{L}_s\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}\mathbb{V}\mathbb{1}_k^\mathsf{T} - \mathbb{1}_q\mathbb{W}\mathbf{\Lambda}, \end{cases} \tag{9}$$

其中，$\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ 和 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ 是对角矩阵。以下关系成立

$$\mathbb{L}_s = \mathbb{L}\mathbf{\Lambda} + \mathbb{V}\mathbb{1}_k^\mathsf{T} = \mathbf{M}\mathbb{L} + \mathbb{1}_q\mathbb{W}. \tag{10}$$

未 处理后的 Loewner 代理模型（前提是 $k = q$）由这些矩阵构成 s

$$\hat{\mathbf{E}} = -\mathbb{L}, \quad \hat{\mathbf{A}} = -\mathbb{L}_s, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbb{V}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbb{W}, \tag{11}$$

若矩阵铅笔（$\mathbb{L}, \mathbb{L}_s$）是正则的，那么满足$\mathbf{H}(s$中插值条件的函数可根据 (6) 中的矩阵，利用 (11)中的矩阵显式计算为$\mathbf{H}(s) = \mathrm{C}(s\mathrm{E} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}$。

在实际应用中（处理数量相当多的测量值时），矩阵铅笔（$\mathbb{L}_s$, $\mathbb{L}$）通常是奇异的。因此，需要对 (11) 中的 Loewner 模型执行后处理步骤。在这种情况下，需要对增广 Loewner 矩阵进行奇异值分解（SVD），以提取主要特征并消除数据中固有的冗余。由此可得到投影矩阵 $\mathbf{X}$、$\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{k\times r}$，分别作为左、右截断奇异向量矩阵：

$$\begin{bmatrix} \mathbb{L} & \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = \mathbf{Y}\mathbf{S}_r^{(1)}\tilde{\mathbf{X}}^\mathsf{H} \begin{bmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{L}_s \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{S}_r^{(2)}\mathbf{X}^\mathsf{H}, \tag{12}$$

其中 $\mathbf{S}_r^{(1)}$、$\mathbf{S}_r^{(2)} \in \mathbb{R}^{r\times r}$、$\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{k\times r}$、$\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{q\times r}$、$\tilde{\mathbf{Y}} \in \mathbb{C}^{2q\times r}$、$\tilde{\mathbf{X}} \in \mathbb{C}^{r\times 2k}$。截断指标 r可根据应用和数据规模，选取为数值秩（基于容差值 $\tau > 0$），也可选取为 Loewner 矩阵铅笔的精确秩（采用精确算术时）。更多详情请参见 [7]。

系统 对应于维数为 r 的投影 Loewner 模型的系统矩阵可以如下计算：

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{X}^\mathsf{H}\mathbb{L}\mathbf{Y}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = -\mathbf{X}^\mathsf{H}\mathbb{L}_s\mathbf{Y}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{X}^\mathsf{H}\mathbb{V}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbb{W}\mathbf{Y}.$$

早在最初的研究 [41] 中，就已提出 Loewner 框架的多输入多输出扩展。该研究采用了切向插值框架。作者没有对完整的 $p \times m$ 块进行插值，而是选择沿特定向量（或切向方向）对原始传递矩阵函数样本进行插值。我们还注意到，[41] 中首次尝试将 Loewner 框架重新诠释为一种单边方法，这项工作发表于 [25]。后者与经典研究 [4] 的主要区别在于，对左侧（未插值）数据集进行了压缩。不过，在 [25]，中，如何划分数据仍不明确，也就是说，右侧数据集（施加插值的部分）应如何选取尚无定论。最后需要指出的是，插值点的选择对 Loewner 框架至关重要。[37]，提出了一项针对不同选取方式的全面研究，而 [17], 则针对实验数据有限的情况提出了一种贪心策略。

2.3. [42]中的 AAA 算法

[42] 中介绍的 AAA 算法，是基于 Loewner 矩阵的插值方法的一种自适应迭代扩展，该方法最初由 [4]提出。主要步骤如下

1. 将拟合得到的有理逼近函数表示为重心表示，这是一种数值稳定的有理函数表达方式 [15]。

算法 1AAA 算法。

要求： 一组（离散）采样点 $\Gamma \subset \mathbb{C}$，共 N 个点；函数 f（或函数 f 在集合 Γ 上的取值，即样本值）；以及误差容限 $\epsilon > 0$。

确保： 以重心形式表示的 $r_n(s)$ 阶有理逼近函数，阶数为 $(n,\ n)$.

1: 初始化 $j = 0$、 $\Gamma^{(0)} \leftarrow \Gamma$ 和 $r_{-1} \leftarrow N^{-1}\sum_{i=1}^{N} f(\gamma_i)$。

2: **while** $|f(s) - r_{j-1}(s)| > \epsilon$ **do**

3: 选择 一个点 $z_j \in \Gamma^{(j)}$，使得 $|f(s) - r_{j-1}(s)|$ 取得最大值，其中对于 $j \geq 1$，它如下：

$$r_{j-1}(s) := \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{\omega_k^{(j-1)}}{s - z_k}\right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{\omega_k^{(j-1)} f_k}{s - z_k}\right). \tag{13}$$

4: **如果** $|f(z_j) - r_{j-1}(z_j)| \leq \varepsilon$ **则**

5: Ret返回 r_{j-1}。

6: **else**

7: $f_j \leftarrow f(z_j)$ and $\Gamma^{(j+1)} \leftarrow \Gamma^{(j)} \setminus \{z_j\}$.

8: **end if**

9: 通过求解关于 $z \in \Gamma^{(j+1)}$ 的最小二乘问题，求出权重 $\boldsymbol{\omega}^{(j)} = [\omega_0^{(j)}, \ldots, \omega_j^{(j)}]$

$$\sum_{k=0}^{j} \frac{\omega_k^{(j)}}{s - z_k} f(s) \approx \sum_{k=0}^{j} \frac{\omega_k^{(j)} f_k}{s - z_k} \Leftrightarrow \quad \Big(\sum_{k=0}^{j} \frac{f(s) - f_k}{s - z_k}\Big)\omega_k^{(j)} \approx 0 \Leftrightarrow \mathbb{L}^{(j)}\boldsymbol{\omega}^{(j)} = 0. \tag{14}$$

式 (14) 的解由 Loewner 矩阵的 $(j+1)^{\text{th}}$ 右奇异向量$\mathbb{L}^{(j)} \in \mathbb{C}^{(N-j-1)\times(j+1)}$给出。10: $j \leftarrow j + 1$。**11: </style}当**

2. 通过贪心方案选择下一个插值（支撑）点；基本上，在前一步（绝对或相对）误差最大的点处强制进行插值。

3. 计算其他变量（即所谓的重心权重），以便对非插值数据实施最小二乘逼近。

近年来，AAA 算法已被证明是一种精确、快速且可靠的有理逼近工具，应用范围相当广泛。这里仅列举几项：非线性特征值问题 [39], 参数化线性动力系统的模型降阶 [16], 具有二次输出的线性系统的模型降阶 [26], 周期函数的有理逼近 [10], 保角映射的表示 [22], 矩阵值函数的有理逼近 [27], 或使用三角有理函数进行信号处理 [60]。该过程概述于 算法 1。

值得一提的是，近期有人提出了 AAA 的一个修改版本，该版本能够确保 **实值** 且 **严格真** 有理逼近函数 [30]。其中，对 (13)中的函数形式进行了修改，在分母中加入 **1**，如下所示

$$\tilde{r}_j(s) := \left(1 + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\omega_k^{(j-1)}}{s - z_k}\right)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{\omega_k^{(j-1)} f_k}{s - z_k}\right). \tag{15}$$

因此，(14) 中的方程变为 $\mathbb{L}^{(j)}\boldsymbol{\omega}^{(j-1)} = -\mathbf{f}^{(j-1)}$，其中向量$\mathbf{f}^{(j-1)} \in \mathbb{C}^j$ 定义为$\mathbf{f}^{(j-1)} = \begin{bmatrix} f_0 & f_2 & \cdots & f_{j-1} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$。需要注意的是，$\tilde{r}_j(s)$ 在(15) 理论上是一个阶数为 $(j-1,\ j)$ 的有理逼近函数，前提是不考虑极点/零点消去，也不考虑分子或分母中系数导致的任何其他零点消去。

3. 所提出的方法

3.1. 主要方法的框架

与第2节中回顾的方法类似，我们希望找到一个具有(1)所示传递函数结构的线性时不变系统，使其对原始系统传递函数的测量值进行插值，测量值为$\mathbf{H}(s_i) \quad i = 1, \ldots\ldots, \ k$。我们可以直接构造一个维数为$r = km$、具有 km^2 个自由度且传递函数为

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}_r - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}, \tag{16}$$

底层数据与其拼接

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{H}(\lambda_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p\times r}, \tag{17}$$

ˆ 权重矩阵 $\mathbf{W}_i$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^{\mathsf{H}} & \cdots & \hat{\mathbf{W}}_k^{\mathsf{H}} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{r\times m}, \tag{18}$$

ˆ以及由一个填入受 ˆ$\mathbf{B}$扰动的插值点 λ_i 的对角矩阵构成的 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{r\times r}$，使得

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{R} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \otimes \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{B}}\left(\mathbb{1}_r^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{I}_m\right). \tag{19}$$

利用 伍德伯里矩阵恒等式，并记 $\mathbf{\Lambda}_s = s\mathbf{I}_{km} - \mathbf{\Lambda}$，传递函数 (16) 可重写 为

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\right)^{-1}. \tag{20}$$

(20) 的完整推导见附录 A.1。

在单输入单输出情形（$m = p = 1$，因此 $r = k$）下，重心权重简化为标量，而结构为 (16) 的降阶模型矩阵为

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{k\times k}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{w}_1 & \cdots & \hat{w}_k \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^{k\times 1}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{H}(\lambda_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{1\times k}. \tag{21}$$

将公式代入(21) 并代入(20)，再使用记号 $h_i := \mathbf{H}(\lambda_i)$，得到

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i h_i}{s - \lambda_i}, \quad \left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i}{s - \lambda_i}}. \tag{22}$$

因此，模型(21) 的传递函数可用重心表示写为

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i h_i}{s - \lambda_i}}{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i}{s - \lambda_i}}. \tag{23}$$

对于多输入多输出情形，也可以采用类似的方法（$m = p, \quad r = km$）。(20) 的第一部分变为

$$\hat{\mathbf{C}}\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\lambda_1)\mathbf{I}_m(s - \lambda_1)^{-1} & \cdots & \mathbf{H}(\lambda_k)\mathbf{I}_m(s - \lambda_k)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{W}}_k \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{H}(\lambda_i)\hat{\mathbf{W}}_i}{s - \lambda_i}, \tag{24}$$

第二部分

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\right)^{-1} &= \left(\mathbf{I}_m + \begin{bmatrix}\mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{I}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_m(s-\lambda_1)^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{I}_m(s-\lambda_k)^{-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{W}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{W}}_k\end{bmatrix}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^{k}\frac{\hat{\mathbf{W}}_i}{s-\lambda_i}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{25}$$

因此，传递函数(20) 也具有如下重心形式

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{H}(\lambda_i)\hat{\mathbf{W}}_i}{s-\lambda_i}\right)\left(\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^{k}\frac{\hat{\mathbf{W}}_i}{s-\lambda_i}\right)^{-1}. \tag{26}$$

传递函数由插值点和权重的选择决定。插值点可以选取为可用数据中的主导部分，也可以根据其在频谱中的位置来选择。权重可以通过计算，使未进行插值的数据得到最优近似。或者，也可以选择权重，使极点位于特定位置。下文将展示这两种选择的不同策略。

3.2. 自动选择插值点

形式为(16) 的代理模型，其近似质量在很大程度上受插值点选择的影响 λ。插值点的选择并不总是一目了然，因此经常采用自动化策略。Loewner框架使用奇异值分解识别可用数据中的主导子集，并在这些数据点上实施插值。另一种方法是，AAA 算法采用贪心方案，最小化代理模型与原始数据之间的误差。还有一种方法最初由 [37], 提出，它利用 CUR 分解从可用数据中的相关子集中提取插值点。

ˇ CUR 分解通过三个低秩矩阵的乘积 A =ˇC ˇU ˇR 近似矩阵 A，其中 ˇC 和 ˇR 分别表示从 A [40,56] 中选取的列子集和行子集。在我们的情形中，这三个矩阵只是副产品；我们更关注与提取为 C 和 R 的列和行相关联的插值点 λ 和 μ。结合第 3.1 节中介绍的实现骨架，算法 2 可计算出一个代理模型，用以近似给定的一组传递函数数据。我们采用 [56] 中的算法计算 CUR 分解，从而识别原始数据集中的主要部分及其对应的左右插值点。与 [37], 不同，我们分解的是原始 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}$，而非增广 Loewner 矩阵 $\begin{bmatrix}\mathbb{L} & \mathbb{L}_s\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\mathbb{L}^{\mathsf{H}} & \mathbb{L}_s^{\mathsf{H}}\end{bmatrix}^{\mathsf{H}}$。使用 CUR 分解得到的所有插值点会在代理模型中引入冗余数据。因此，我们只选取部分插值点：仅选左侧点、仅选右侧点，或从拼接并排序后的左右点向量中每隔一项选取一个点。将这些点与所选插值点对应的数据一并用于构造矩形 Loewner 矩阵。接下来，我们需要按照下一节所述计算重心插值的权重。得到权重后，即可根据 (17)–(19) 计算代理模型 (16)。

算法 2LS-Loewner 与 CUR 分解。

要求： 传递函数样本 $\{\mathbf{H}(s_i)\}_{i=1}^N$，以及对应的采样点 $\boldsymbol{\Xi} = \{s_i\}_{i=1}^N$。**确保：** 代理模型 $\hat{\mathbf{H}}(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}_r - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}}$。

1：划分数据并按式（7）计算 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}$。2：计算 CUR 分解，使得 $\mathbb{L} = \check{\mathbf{C}}\check{\mathbf{U}}\check{\mathbf{R}}$，其中 $\check{\mathbf{C}} \in \mathbb{C}^{N\times k}$，$\check{\mathbf{R}} \in \mathbb{C}^{k\times N}$。3：获取与 $\check{\mathbf{C}}$、$\check{\mathbf{R}}$ 中列和行相对应的插值点 $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$、$\{\mu_i\}_{i=1}^k$。4：对插值点进行后处理，以获得 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu\}_{i=1}^k$ 和 $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\Xi} \setminus \boldsymbol{\nu}$。5：构造矩形 Loewner 矩阵 $\mathbb{L}_{(i,j)} = \frac{\mathbf{H}(\chi_i) - \mathbf{H}(\nu_j)}{\chi_i - \nu_j}$。6：计算权重 $\Omega = -\mathbb{L}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\nu_1)^{\mathsf{H}} & \cdots & \underline{\mathbf{H}(\nu_k)^{\mathsf{H}}} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}}$，其中 $\mathbb{L}^\dagger$ 是 $\mathbb{L}$ 的伪逆，且 $\Omega = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1^{\mathsf{H}} & \cdots & \hat{\mathbf{W}}_k^{\mathsf{H}} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}}$。7：根据式（17）–（19）计算 $\hat{\mathbf{A}}$、$\hat{\mathbf{B}}$、$\hat{\mathbf{C}}$。

3.3. 计算重心权重

3.3.1. 最小二乘法

矩阵值权重 $\hat{\mathbf{W}}_i$ 可以通过类似 AAA [27] 的方式求解该最小化问题来计算

$$\min_{\hat{\mathbf{W}}_i} \sum_{j=1}^{h} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{H}(\lambda_i)\hat{\mathbf{W}}_i}{s_j - \lambda_i} \right) \left(\mathbf{I}_m + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\mathbf{W}}_i}{s_j - \lambda_i} \right)^{-1} - \mathbf{H}(s_j) \right)^2. \tag{27}$$

例如，可以通过最小二乘意义下的优化得到该解。单输入单输出情况下的权重也以类似方式计算。此时，矩阵值权重和传递函数值均化为标量。

3.3.2. 极点配置

下一步可以利用向量 $\hat{\mathbf{B}}$（21）中的自由度，使由此构造的降阶模型具有特定的（稳定）极点 [21, 35, 46]。这些极点记作ζ_1，ζ_2，……，ζ_k。以下推导假设模型为单输入单输出模型。为确保这一点，我们需要保证矩阵 $\zeta_j\mathbf{I}_k - \mathbf{A}$ 对所有 $1 \le j \le k$均降秩。下面将介绍一种简洁明了的方法来确保这一性质。请记住，参数化 AF 模型的传递函数为：

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i h_i}{s - \lambda_i}}{1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i}{s - \lambda_i}} = \frac{N(s)}{D(s)}. \tag{28}$$

现在，假设我们希望这个传递函数的 k 极点位于所选的值 ζ_j 处。显然，条件是 $D(\zeta_j) = 0$，因此我们需要强制满足：

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{w}_i}{\zeta_j - \lambda_i} = 0,\ \forall 1 \le j \le k \ \Leftrightarrow\ \mathcal{C}_{\zeta,\lambda}\hat{\mathbf{B}} = -\mathbb{1}_k \ \Leftrightarrow\ \hat{\mathbf{B}} = -\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}^{-1}\mathbb{1}_k, \tag{29}$$

其中$\mathcal{C}_{\zeta,\,\lambda}$ 是柯西矩阵，定义如下：$(\mathcal{C}_{\zeta,\,\lambda})_{i,\,j} = \frac{1}{\zeta_i - \lambda_j}$。按照 [3] 中的步骤得到上述表达式的详细过程见附录 A.2。我们注意到，极点配置是一个困难的数值问题，因为它需要对柯西矩阵求逆，而柯西矩阵本身的条件数就很差。

算法 3 带极点配置的 Loewner 框架（LFPP）。要求：传递函数样本 $\{\mathrm{H}(s_i)\}_{i=1}^{N}$、对应的采样点 $\boldsymbol{\Xi} = \{s_i\}_{i=1}^{N}$、极点位置 $\boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_i\}_{i=1}^{k}$、插值点 $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$。确保：代理模型 $\hat{}\mathrm{H}(s) = \hat{}\mathrm{C}(s\mathrm{I}_r - \hat{}\mathrm{A})^{-1}\hat{}\mathrm{B}$。1：使用 Loewner 框架（参见第 2.2 节），根据 $\{\mathrm{H}(s_i)\}_{i=1}^{N}$ 和 $\{s_i\}_{i=1}^{N}$ 计算 $\boldsymbol{\Sigma}_D$。2：$\hat{}\mathrm{C} \leftarrow \left[\mathrm{H}_D(\lambda_1) \cdots \mathrm{H}_D(\lambda_k)\right]$。3：$\hat{}\mathrm{B} \leftarrow -\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}^{-1}\mathbb{1}_r$。4：$\hat{}\mathrm{A} \leftarrow \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) - \hat{}\mathrm{B}\mathbb{1}_k^{\mathsf{T}}$。

$\hat{}$ 与其这样做，我们可以求解 $\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}\mathbf{B} = -\mathbb{1}_r$，而不显式求逆柯西矩阵，即通过求解线性方程组。算法 3 概述了这一数据驱动方法。通过对一组传递函数进行求值并应用 Loewner 框架，即可获得所需的底层模型。该方法针对单输入单输出系统进行了说明，但也可以轻松扩展到多输入多输出情形。

3.4. 极点和插值点的自动选择

对于 算法 3，合适的极点和插值点并非总是唾手可得，但代理模型的近似效果会受到这一选择的显著影响。接下来，我们将介绍 算法 3 的一种扩展，它无需将极点和插值点集作为输入参数，即可计算代理模型 (16)。 算法 4概述了这类自动算法的基本框架。与 算法 3 类似，该算法采用 Loewner 框架来获得一个代理模型的实现，使其能够插值给定数据。随后，对原始数据的 Loewner 实现进行广义特征值分解，以确定合适的极点位置。由此可以计算所有特征值的支配性；详情参见，例如 [51]。算法接着选取支配性最强的 k 个特征值作为代理模型中要设置的极点。需要注意的是，如果代理模型的稳定性很重要，则只应考虑实部为负的特征值。所需的插值点现在可以按照与 算法 2类似的方式选取：计算 CUR 分解，并将与分解中各行或各列相关联的插值点用作新代理模型的插值点。

如果传递函数样本受到噪声干扰，根据数据近似底层模型的主导极点就会变得不够稳健，导致近似质量下降。为提升其在含噪数据上的性能，算法 4 可以作如下修改：首先手动选取传递函数中最显著的特征（例如峰值），即代理模型应当近似的特征，从而确定需要强制保留的极点。然后，选择虚部最接近所选传递函数特征所在频率的特征值。如果使用含噪数据，CUR 分解也无法提取 Loewner 矩阵中最主要的行和列。因此，可采用另一种启发式方法来选择插值点：取 s_i，该值对应于两个强制保留的极点所在位置之间传递函数振幅的最低点。对于轻阻尼系统，这样能够得到合理的近似结果。其他方法包括直接选取两个极点位置的中点，或指定极点与插值点位置之间的偏移量。

4. 数值结果

下文将通过应用于 MOR-Wiki 上提供的三个基准示例，演示 第3节 中讨论的方法[1]：

[1] http://modelreduction.org

Algorithm 4 L 奥伊纳 f 框架 k with automatic pole pl 替换 (Loewner框架 aPP)

。要求：传递函数样本 $\{\mathrm{H}(s_i)\}_{i=1}^{N}$，以及对应的采样点 $\boldsymbol{\Xi} = \{s_i\}_{i=1}^{N}$。确保：代理模型 $\hat{\mathrm{H}}(s) = \hat{\mathrm{C}}(s\mathrm{I}_r - \hat{\mathrm{A}})^{-1}\hat{\mathrm{B}}$。1：使用 Loewner框架（参见第 2.2 节），根据 $\{\mathrm{H}(s_i)\}_{i=1}^{N}$ 和 $\{s_i\}_{i=1}^{N}$ 计算 $\boldsymbol{\Sigma}_D$。2：对右、左特征向量矩阵 X、Y，以及特征值矩阵 $\boldsymbol{\alpha} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，计算广义特征值分解 $\mathrm{AX} = \mathrm{EX}\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\mathrm{Y}^{\mathsf{H}}\mathrm{A} = \boldsymbol{\alpha}\mathrm{Y}^{\mathsf{H}}\mathrm{E}$。3：计算特征值主导度 $d_i = \left|\mathrm{CY}(:\ i\ \alpha_i\ \ i\ \ \right|)\ \mathrm{X}(:\ )^{\mathsf{H}}\mathrm{B}\ (\ )$，$i = 1, \ldots, n$，并据此对 $\boldsymbol{\alpha}$ 排序。4：将 $\boldsymbol{\zeta}$ 设为主导度最高的 k 个特征值。5：对 $\mathbb{L}$ 进行 CUR 分解。6：将 $\boldsymbol{\lambda}$ 设为与 CUR 分解对应的 k 个右或左插值点。7：按照算法 3 计算代理模型。

国际空间站 该系统模拟国际空间站（ISS）俄罗斯服务舱的结构响应 [52]。该模型有 $n = 270$ 个状态、$m = 3$ 个输入和 $p = 3$ 个输出。用于计算的数据集包含在 $\left[10^{-1}, 10^{2}\right] \cdot \imath$范围内对数分布的 400 个点处测得的传递函数测量值。该模型也是 SLICOT 基准测试集的一部分 [44]。

柔性飞机 该系统对飞机柔性机翼沿线的升力和阻力进行建模。系统矩阵不可用，我们只能访问一个数据集，其中包含在 0.1 至 42.0 赫兹之间线性分布的频率下采集的 420 个传递函数样本。原始数据集有一个输入（阵风扰动）和 92 个输出。在接下来的实验中，我们选择第 91 个输出，它对应于第一柔性模态 [50]。该数据集可从 [57] 获取。

声音传输 该系统模拟声音通过两个黄铜板及其间空气腔构成的系统时的传输。传递函数测量值反映相邻声学腔体中的声压。几何形状基于 [32]；数据——在 1 至 1000 赫兹之间线性分布的 1000 个频率值处计算的传递函数——可从 [9] 获取。

我们注意到，多输入多输出模型没有采用切向插值（如 [41] 中所述）。相反，Loewner 矩阵是以分块方式构造的。在本文提出的方法中，切向插值的情况将在未来的工作中进行研究。

我们通过应用 [7] 中所述的变换，确保所有代理模型均为实数（所有矩阵仅包含实数元素）。为此，所有数据都必须以复共轭对的形式给出。所需的变换矩阵为

$$\mathbf{J} = \mathbf{I}_\ell \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{I}_m \\ -\imath\mathbf{I}_m & \imath\mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right), \tag{30}$$

其中 $\ell = {}_{-2}^{k}$，实值量由 $\hat{\mathbf{A}}^{(\Re)} = \mathbf{J}\,\hat{\mathbf{A}}\mathbf{J}^{\mathsf{H}}$、$\hat{\mathbf{B}}^{(\Re)} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{B}}$ 和 $\hat{\mathbf{C}}^{(\Re)} = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{J}^{\mathsf{H}}$ 得到。

在部分实验中，我们向测量值添加人工噪声，以获得扰动数据。修改后的测量值为

$$\check{H}(s_i) = H(s_i)(1 + Z_i),\ i = 1, \ldots, n, \tag{31}$$

其中，$Z_i \in \mathbb{C}$ 是从随机数集合 $Z \sim \mathcal{CN}(\mu,\ \sigma^2)$ 中抽取的第 i 个样本，服从均值为 μ、标准差为 σ^2 的复正态分布。这里，Z 的实部和虚部是相互独立的正态分布变量 [19]。

我们使用近似的 $\mathcal{L}_\infty$ 范数评估代理模型的近似误差，因为许多代理模型存在不稳定极点，因此无法计算 $\mathcal{H}_\infty$。对于给定的降阶

阶数 r，所考虑频率范围 $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ 内的 $\mathcal{L}_\infty$ 误差近似为

$$\varepsilon(r) = \frac{\max\limits_{\omega\in[\omega_{\min},\omega_{\max}]} \left\| H(\omega\imath) - \hat{H}_r(\omega\imath) \right\|_2}{\max\limits_{\omega\in[\omega_{\min},\omega_{\max}]} \|H(\omega\imath)\|_2} \approx \frac{\left\| H - \hat{H}_r \right\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|H\|_{\mathcal{L}_\infty}}. \tag{32}$$

请注意，关于如何对代理模型进行后处理以获得稳定模型的策略已在 [29]中进行了研究。

数值实验在一台笔记本电脑上进行，该电脑配备 AMD RyzenTM 7 PRO 5850U 处理器和 12 GB 内存，运行 Linux Mint 21 操作系统。所有算法均使用 MATLAB R2021b Update 2 (9.11.0.1837725) 实现并运行。

代码和数据的可用性
支持本研究发现的数据已在 Zenodo 上公开，网址为

doi:10.5281/zenodo.7490158

采用 BSD-2-Clause 许可证，由 Quirin Aumann 和 Ion Victor Gosea 编写。

4.1. 精确测量数据的情况

下面，我们将新方法 LS-Loewner 的性能与以下成熟策略进行比较：

- Loewner-SVD：将使用完整数据集构建的 Loewner 矩阵截断至阶数 r，方法是采用奇异值分解 [7]。
- Loewner-CUR：使用 CUR 分解选出的全部数据点，构建阶数为 r 的纯插值模型，方法与 [37] 类似。
- ModifiedAAA：将 AAA 的严格真变体 [29] 应用于完整数据集，以计算规模为 r 的降阶模型。

我们首先考虑原始的 MIMO ISS 示例，以及从多输入多输出系统中分别选取第一个输入和输出所构成的单输入单输出变体。为了评估不同方法在代理模型规模方面的整体性能，我们计算了阶数为 $\mathcal{L}_\infty$ 的模型的近似 $6 \leq r \leq 60$误差。所有四种方法的近似误差与各自代理模型维数之间的关系如图 1 所示。

由于这里没有采用切向插值，每增加一个插值点，多输入多输出代理模型的阶数就增加 m，即 $r = km$。这解释了多输入多输出代理模型精度较低的原因。对于最大降阶阶数 $r = 60$，考虑了 $k = 20$ 个插值点。$r = 20$ 的单输入单输出代理模型误差，即 $k = 20$，与多输入多输出情形下的误差处于相近范围。对于所采用的所有方法，单输入单输出代理模型都达到了相近的近似水平。在多输入多输出情形下，Loewner-SVD 的表现最佳。这可以由以下观察解释：其他方法始终会考虑每个插值点对应的完整传递函数测量值 $\mathbf{H}(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{p\times m}$，而 Loewner-SVD 仅提取 r 个最主要的奇异向量进行投影，无论这些向量对应哪个插值点。相应地，只要某个样本的一个输入/输出组合与近似有关，其他方法也可能会考虑数据中不太重要的部分。还可以看到，LS-Loewner 和 Loewner-CUR 的表现非常相似。这是预期之中的，因为这两种方法依赖于相同的插值点。

现在采用全部四种方法来计算大小为 $r = 108$ 的代理模型，以近似柔性飞机模型的传递函数。代理模型的大小通过截断底层 Loewner 矩阵的所有奇异值 $\tau < 1\cdot 10^{-6}$ 来确定。

所有所得模型的传递函数及其对应的相对误差见图 2。同样，所有方法都成功计算出了足够精确的代理模型。不过，近似

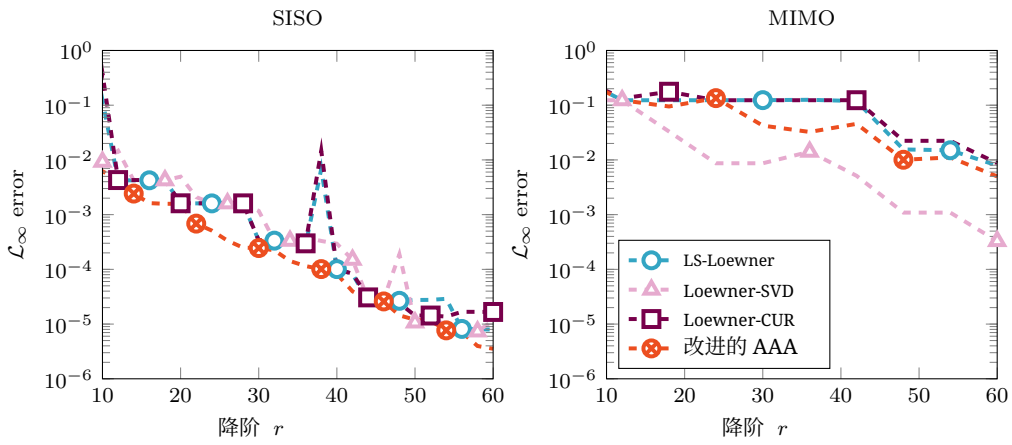

图1：基于 ISS 数据计算得到的阶数为 r 的降阶模型的近似 $\mathcal{L}_\infty$ 误差。左：分别采用第一个输入和输出的单输入单输出模型。右：采用三个输入和三个输出的多输入多输出模型 $m = p = 3$ （插值点数量为 $k = \frac{r}{m}$）。

质量明显不如其他三种方法。鉴于 Loewner-CUR 和 LS-Loewner 使用相同的插值点，由最小二乘问题计算得到的权重比 Loewner-CUR 中采用的划分方法表现更好。

4.2. 受扰测量数据

分析受噪声扰动的测量数据，对插值方法（如 Loewner框架和 AAA 算法）而言是一项挑战（例如，[27]中对此有所指出）。在本实验中，我们研究上述四种方法的性能受噪声影响的情况，并展示如何通过约束极点和/或插值点来提高近似质量。首先，我们考虑由噪声扰动的 ISS 模型传递函数数据，其噪声均值为 $\mu = 0$，标准差为 $\sigma^2 = 0.15$。我们采用LFaPP，并将传递函数 $\imath[.77, 2, 4, 5.6, 9.33, 37.9]$峰值附近的极点设为约束。所得实值代理模型的阶数为 $r = 12$。在图 3中给出了施加极点约束的代理模型的传递函数，以及使用相同含噪数据通过LS-Loewner、Loewner-SVD、Loewner-CUR和改进的AAA计算得到的降阶模型的传递函数。将极点约束在底层数据传递函数的峰值附近，使代理模型能够在比使用LS-Loewner、Loewner-SVD和Loewner-CUR更宽的频率范围内捕捉原始数据的行为。然而，极点应选取在哪些位置附近，目前尚未实现自动化。图 3还展示了所有代理模型相对于无噪声原始数据的相对误差。尽管所有受约束极点的实部均为负，但通过 Loewner框架和 AAA 的变体计算得到的模型仍出现了不稳定特征值。因此，极点配置也可视为一种确保代理模型稳定性的方法。另一种做法是添加后处理步骤以确保模型稳定（适用于 Loewner框架和 AAA 方法），如 [29]所示。

现在，我们通过将这些算法应用于声音传输问题中受到严重干扰的传递函数测量值，来评估其性能。我们考虑标准差为$\sigma^2 = 0.25$ 的噪声，并使用三种算法计算代理模型：Loewner-SVD、LFPP (算法 3)和 LFaPP (算法 4)。我们还测试了LFaPP 的改进方法，详见第3.4节。这些结果标记为“LFaPP 改进版”。对于 LFPP，我们将极点强制设为底层 Loewner 模型的特征值中虚部接近 $2\pi\imath\,[72, 189, 392, 401, 706, 856]$的那些特征值。这些位置对应于传递函数中的特征峰。此外，我们选择的插

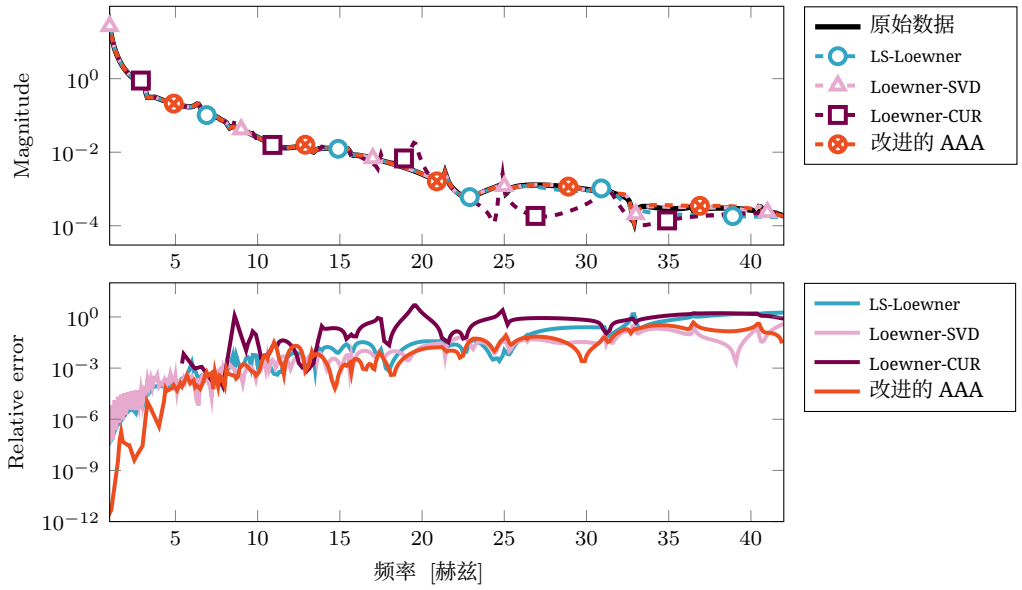

图 2：飞机模型的降阶模型（规模为 $r = 108$ ）的传递函数（上）和相对逐点误差（下）。误差仅在与相应方法的插值点不重合的频率处绘制。

值点位于 $2\pi\imath\,[138, 339, 369, 569, 712, 954]$，也就是强制极点之间的波谷处。Loewner-SVD 和LFaPP 除了测量数据外，不需要其他输入参数。图 4展示了所得代理模型的传递函数，并将其与原始数据及含噪底层数据进行了比较。可以看到，自动化方法Loewner-SVD 和LFaPP (改进版)在前两个峰值之后，即频率高于 200 赫兹时，无法很好地近似传递函数；而LFPP 则能在整个频率范围内以较高精度近似原始数据。具有合理插值点的重要性，可从LFPP 与LFaPP 改进版之间的差异看出，两者的极点相同。值得注意的是，Loewner-SVD 计算出的代理模型有两个不稳定极点，而其他三个代理模型均稳定。然而，事先并不总能明确如何为LFPP 选择极点和插值点，才能达到尽可能高的近似质量。在本例中，噪声水平过高，导致其中一种自动化方法无法得出合理的主导插值点或极点。

5. 结论与展望

本文对基于插值的数据驱动方法进行了全面研究，用于近似线性动力系统的响应。所有方法都需要输入和输出数据，即传递函数测量值，但不需要直接访问系统算子或状态。我们展示了多种方法，用于构建紧凑的代理模型，以近似原始系统的输入/输出行为，并确保代理模型具备稳定性等多种性质。我们还探讨了处理含噪测量数据的策略。

这里所述框架的一种自然扩展，是将切向插值的思想用于根据数据构建多输入多输出系统模型。为此，需要将切向方向纳入参数化单边实现。其他研究方向还包括在代理模型中保留原始模型的不同结构，例如二阶结构或时滞结构。此外，研究如何在实现插值的同时配置某些稳定极点，也会很有意义，

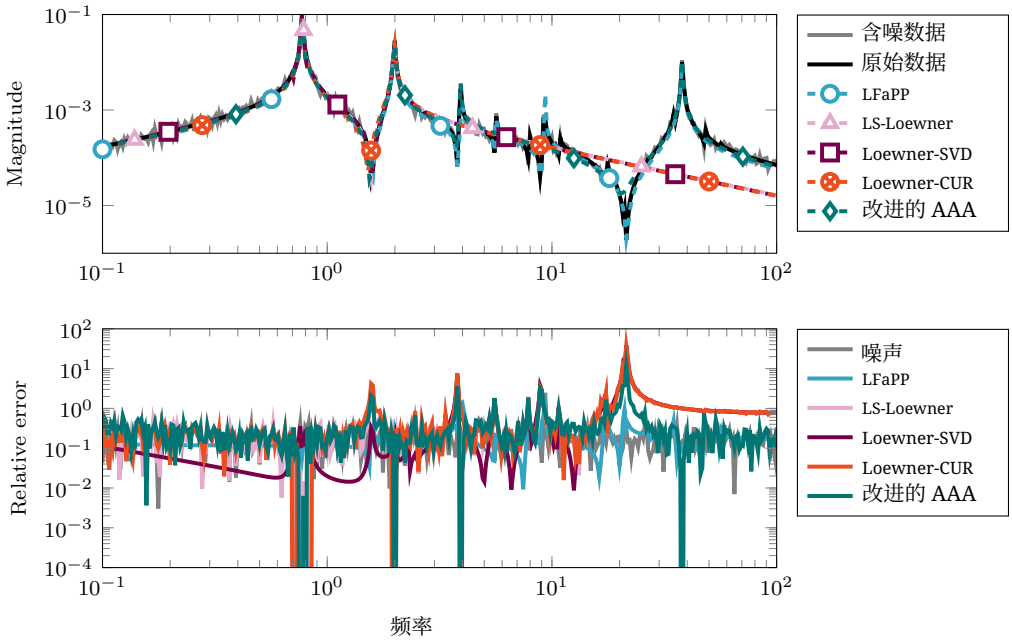

图 3：具有强制极点的代理模型传递函数，与含噪和原始传递函数值的对比。为供参考，给出了通过 Loewner-SVD 计算得到的模型 $r = 12$ 的传递函数。

使其满足最小二乘意义下的插值。所提方法可应用于阻尼优化。例如，可利用一族参数化插值函数，在结构系统中确定黏滞阻尼器的最佳位置。

A. 附录

A.1. 伍德伯里矩阵恒等式

我们可以展开(19)的右侧，得到：

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{\Lambda} - \hat{\mathbf{B}}\mathbf{R} \Rightarrow s\mathbf{I}_{km} - \hat{\mathbf{A}} = \underbrace{s\mathbf{I}_{km} - \mathbf{\Lambda}}_{\hat{\mathbf{M}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{W}}_k \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{U}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{V}}}. \tag{33}$$

伍德伯里矩阵恒等式如下：

$$\left(\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{V}}\right)^{-1} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{U}}\left(\hat{\mathbf{T}}^{-1} + \hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{U}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{M}}^{-1},$$

^^^^^^^^ 其中 $\mathbf{M}$、$\mathbf{U}$、$\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{V}$ 是维度相容的矩阵：$\mathbf{M}$ 为 $n \times n$，$\mathbf{T}$ 为 $k \times k$，$\mathbf{U}$ 为 $n \times k$，$\mathbf{V}$ 为 $k \times n$。这可以通过分块矩阵求逆推导得出。令 $\mathbf{\Lambda}_s = s\mathbf{I}_{km} - \mathbf{\Lambda}$，则第一个

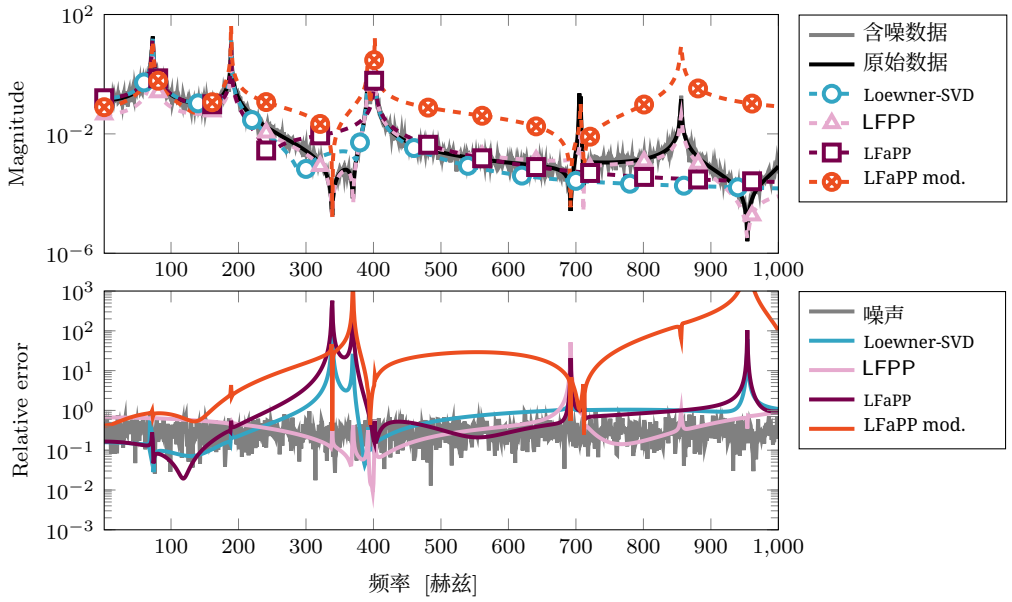

图 4：飞机模型的规模为 $r = 12$ 的降阶模型的传递函数（上）和相对逐点误差（下），以及添加噪声。

拟合模型的传递函数可写为：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}(s) &= \hat{\mathbf{C}}\left(s\mathbf{I}_{3m} - \hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{C}}\left(\boldsymbol{\Lambda}_s + \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{V}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{B}} \\ &= \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{U}}\left(\mathbf{I}_m + \hat{\mathbf{V}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{U}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{V}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}} \\ &= \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\right)^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}} \\ &= \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\left[\mathbf{I}_m - \left(\mathbf{I}_m + \hat{\mathbf{X}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{X}}\right] = \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{I}_m + \hat{\mathbf{X}}\right)^{-1},\end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}$。因此，我们得到 (20)，传递函数 $\hat{\mathbf{H}}(s)$ 可写为：

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \hat{\mathbf{C}}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\left(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\boldsymbol{\Lambda}_s^{-1}\hat{\mathbf{B}}\right)^{-1}. \tag{20}$$

A.2. 如 [3] 中所示的极点配置

为了在降阶模型中同时强制指定极点和满足某些插值条件，我们沿用 [3] 中的推导。需要注意的是，这种方法具有侵入性，即需要访问系统的矩阵。因此，一个由以下方程在（广义）状态空间中表征的描述符模型

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{Des}} : \begin{cases}\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{cases} \tag{35}$$

假设已知相应的传递函数 $\mathbf{H}_{\text{Des}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$。对于（右侧）插值点 λ_i, $i = 1, \ldots, k$（在这些点处施加插值条件），以及待配置的期望极点（记作 ζ_j's），[3] 中的作者首先求一个行向量 $\mathbf{C}_\zeta \in \mathbb{C}^{1\times n}$，使得：

$$\mathbf{C}_\zeta\left[(\lambda_1\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\cdots(\lambda_k\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right] = \mathbf{0}_{1\times k}. \tag{36}$$

接下来，需要选择投影矩阵 $\mathbf{W},\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n\times k}$，使得

$$\mathbf{W}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_\zeta(\zeta_1\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}}(\zeta_k\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} (\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdots (\lambda_k\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

如 [3]，选择$\mathbf{W}^{\mathsf{H}}$ 如上所述，是通过指定降阶模型所需的极点来确定的，而$\mathbf{V}$ 则选择为满足 λ_i处的插值条件。此外，利用这些记号可得 $\tilde{}\mathbf{CV} = \mathbf{0}$。接下来，将以下矩阵 $\tilde{}\mathbf{E} = \mathbf{W}^{\mathsf{H}}\mathbf{EV}$ $\tilde{}\mathbf{A} = \mathbf{W}^{\mathsf{H}}\mathbf{AV}$组合起来。于是，当$s\tilde{}\mathbf{E} - \tilde{}\mathbf{A}$时，($s \in \{\zeta_1,\ldots,\zeta_r\}$会失去秩。为此，我们只需写出

$$\mathbf{e}_j^{\mathsf{T}}(\zeta_j\tilde{\mathbf{E}}-\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{e}_j^{\mathsf{T}}\mathbf{W}^{\mathsf{H}}(\zeta_j\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathbf{C}_\zeta(\zeta_j\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}(\zeta_j\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{V} = \mathbf{C}_\zeta\mathbf{V} = \mathbf{0}. \tag{38}$$

设$\mathbf{H}\zeta(s) = \mathbf{C}\zeta(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 是一个关于 s 的有理函数，并注意到 $\hat{}\mathbf{E}$ 和 $\hat{}\mathbf{A}$ 是对角缩放柯西矩阵的一种特殊类型，其精确定义如下：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{i,j} &= -\frac{\mathbf{C}_\zeta(\zeta_i\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}_\zeta(\lambda_j\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}{\zeta_i-\lambda_j} = -\frac{\mathbf{H}_\zeta(\zeta_i)}{\zeta_i-\lambda_j} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{i,j} &= -\frac{\zeta_i\mathbf{C}_\zeta(\zeta_i\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} - \lambda_j\mathbf{C}_\zeta(\lambda_j\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}{\zeta_i-\lambda_j} = -\frac{\zeta_i\mathbf{H}_\zeta(\zeta_i)}{\zeta_i-\lambda_j} \end{aligned} \tag{39}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$根据(39)中的定义可得$\mathbf{E} = -\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}$，其中$\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{B}}} = \mathrm{diag}(\mathbf{B})$是一个对角矩阵。$\tilde{}$类似地，可得$\mathbf{A} = -\mathbf{Z}\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}$，其中$\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(\zeta_1,\ldots,\zeta_k)$。

接下来，我们将其他投影量写为

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{W}^{\mathsf{H}}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_\zeta(\zeta_1) & \cdots & \mathbf{H}_\zeta(\zeta_k) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{CV} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{H}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{40}$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$因此，降阶线性描述符系统 Σ_{pp}：$(\mathbf{E},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ 满足 k 个插值条件，并具有所需的极点。

接下来，我们说明该模型也可以等价地写成 AF 格式。首先注意到 $\hat{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}\mathbf{C} = \mathbf{C}$。下一步，假设矩阵 E 非奇异，我们可以将其并入其他矩阵，从而消去 E，得到：$\breve{}\mathbf{A} = \tilde{}\mathbf{E}^{-1}\tilde{}\mathbf{A}$ $\breve{}\mathbf{B} = \tilde{}\mathbf{E}^{-1}\tilde{}\mathbf{B}$ $\breve{}\mathbf{E} = \mathbf{I}_k$，$\breve{}\mathbf{C} = \tilde{}\mathbf{C}$。注意，插值降阶模型的两个实现，即式 (21) 中的 ($\hat{}$A, $\hat{}$B, $\hat{}$C) 和上文引入的 ($\breve{}\mathbf{A}$ $\breve{}\mathbf{B}$ $\breve{}\mathbf{C}$)，$\breve{}$ $\hat{}$ 实际上完全相同。这是因为 $\mathbf{C} = \mathbf{C}$，且两个降阶模型匹配相同的 k 矩。因此，还可得出 $\breve{}\mathbf{B} = \hat{}\mathbf{B}$。现在，由于 $\breve{}\mathbf{B} = \tilde{}\mathbf{E}^{-1}\tilde{}\mathbf{B}$ 且 $\tilde{}\mathbf{E} = -\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}$，我们可以写成

$$\hat{\mathbf{B}} = -(\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{B}}}\mathcal{C}_{\zeta,\lambda})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = -\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}^{-1}\mathbf{D}_{\tilde{\mathbf{B}}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = -\mathcal{C}_{\zeta,\lambda}^{-1}\mathbb{1}_k. \tag{41}$$

因此，上述向量 $\hat{}\mathbf{B}$ 在 (21) 中所作的选择施加了所需的极点。

参考文献

[1] A.C. Antoulas。大规模动力系统的近似，第 6 卷，收录于 *Adv. Des. Control*。SIAM 出版社，费城，宾夕法尼亚州，2005。doi:10.1137/1.9780898718713。

[2] A. C. Antoulas。关于保无源性模型降阶的一项新结果。*scl*，54(4):361–374，2005。doi:10.1016/j.sysconle.2004.07.007。

[3] A. C. Antoulas. 模型降阶中的极点配置。*at-Automatisierungstechnik*,55(9):443–448, 2007. doi:10.1524/auto.2007.55.9.443。

[4] A. C. Antoulas and B. D. O. Anderson. 标量有理插值问题。IMA数学、控制与信息学杂志, 3(2-3):61–88, 1986年. doi:10.1093/imamci/3.2-3.61.[5] A. C. Antoulas, C. A. Beattie, and S. Gugercin. 模型降阶的插值方法. 计算科学与工程. 工业与应用数学学会, 费城, PA, 2020年. doi:10.1137/1.9781611976083.[6] A. C. Antoulas, I. V. Gosea, and A. C. Ionita. Loewner框架下双线性系统的模型降阶。SIAM科学计算杂志, 38(5):B889–B916, 2016年. doi:10.1137/15M1041432. [7] A. C. Antoulas, S. Lefteriu, and A. C. Ionita. Loewner框架模型降阶的教程式介绍。载于《模型降阶与近似》，第8章，第335–376页。SIAM, 2017年. doi:10.1137/1.9781611974829.ch8.[8] A. Astolfi. 线性与非线性系统的矩匹配模型降阶。IEEE自动控制汇刊, 55(10):2321–2336, 2010年. doi:10.1109/TAC.2010.2046044.[9] Q. Aumann. 声音传输问题的矩阵。发表于MORwiki——模型降阶百科, 2022年. doi:10.5281/zenodo.7300347.[10] P. J. Baddoo. 用于周期函数有理逼近的AAAtrig算法。SIAM科学计算杂志, 43(5):A3372–A3392, 2021年. doi:10.1137/20M1359316.[11] Z. Bai. 大规模动力系统降阶建模的Krylov子空间技术。计算与应用数学杂志, 43(1-2):9–44, 2002年. doi:10.1016/S0168-9274(02)00116-2.[12] P. Benner, P. Goyal, and P. Van Dooren. 基于频率响应数据辨识端口哈密顿系统。系统与控制快报, 143:104741, 2020年. doi:10.1016/j.sysconle.2020.104741.[13] P. Benner, S. Grivet-Talocia, A. Quarteroni, G. Rozza, W. Schilders, and L. M. Silveira. 系统与数据驱动方法和算法。德格鲁伊特出版社, 2021年. doi:doi:10.1515/9783110498967.[14]P. Benner, M. Ohlberger, A. Cohen, and K. Willcox. 模型降阶与近似。工业与应用数学学会, 费城, PA, 2017年. doi:10.1137/1. 9781611974829.[15] J.-P. Berrut and L. N. Trefethen. 重心拉格朗日插值。SIAM综述, 46(3):501–517, 2004年. doi:10.1137/S0036144502417715.[16] A. Carracedo Rodriguez, L. Balicki, and S. Gugercin. 用于参数化动力系统数据驱动建模的p-AAA算法。预印本2003.06536, arXiv, 2020年. math.NA. 网址：https://arxiv.org/abs/2003.06536.[17] K. Cherifi, P. Goyal, and P. Benner. 线性动力系统的贪心数据收集方案。数据中心工程, 3, 2022年. doi:10.1017/dce.2022.16.[18]安立公司。了解矢量网络分析。网址：https://www. rekirsch.at/user_ht ml/1282834349/pix/a/media/ME7838A/Understanding_Vector_Network_Analysis.pdf.[19] Z. Drmaˇc and B. Peherstorfer. 使用Loewner有理插值从含噪频率响应数据中学习低维动力系统模型。载于《动力系统的实现与模型降阶》，第39–57页。施普林格国际出版公司, 2022年. doi:10.1007/978-3-030-95157-3_3.[20] K. Gallivan, A. Vandendorpe, and P. Van Dooren. Sylvester方程与基于投影的模型降阶。计算与应用数学杂志, 162(1):213–229, 2004年. doi:10.1016/j.cam.2003.08.026.

[21] E. Garc´ía-Canseco、A. Alvarez-Aguirre 和 J. M. A. Scherpen。运动学摇摆轭式斯特林发动机的控制建模。《可再生能源》，75:808–817，2015。doi:10.1016/j.renene.2014. 10.038.[22] A. Gopal 和 L. N. Trefethen。用有理函数表示保角映射。《数值数学》，142(2):359–382，2019。doi:10.1007/s00211-019-01023-z.[23] I. V. Gosea 和 A. C. Antoulas。应用于Loewner框架的保稳定性后处理方法。载于：IEEE第20届信号与电源完整性研讨会（SPI），意大利都灵，5月8–11日，第1–4页，2016。doi:10.1109/SaPIW.2016.7496283.[24] I. V. Gosea 和 A. C. Antoulas。二次双线性系统的数据驱动模型降阶。《数值线性代数及其应用》，25(6):e2200，2018。doi:10.1002/nla.2200.[25] I. V. Gosea 和 A. C. Antoulas。单边Loewner框架及其与其他基于插值的模型降阶方法的联系。IFAC-PapersOnLine，55(30):377–382，2022。doi:10.1016/j.ifacol.2022.11.082.[26]I. V. Gosea 和 S. Gugercin。AAA框架下带二次输出的线性动力系统的数据驱动建模。《科学计算杂志》，91(1):1–28，2022。doi:10.1007/ s10915-022-01771-5.[27] I. V. Gosea 和 S. G¨üttel。矩阵值函数有理逼近算法。SIAM科学计算杂志，43(5):A3033–A3054，2021。doi:10.1137/20m1324727.[28] I. V. Gosea、M. Petreczky 和 A. C. Antoulas。Loewner框架下线性参数变化系统的降阶建模。载于：2021年第60届IEEE决策与控制会议（CDC），第3299–3305页，2021。doi:10.1109/CDC45484.2021.9683742.[29] I. V. Gosea、C. Poussot-Vassal 和 A. C. Antoulas。关于确保数据驱动降阶模型稳定性。载于：第29届地中海控制与自动化会议（MED），线上，第487–493页，2021。doi:10.1109/MED51440.2021.9480216.[30] I. V. Gosea、C. Poussot-Vassal 和 A. C. Antoulas。关于无限维系统的Loewner数据驱动控制。载于：2021年欧洲控制会议（ECC），第93–99页。IEEE，2021。doi:10.23919/ECC54610.2021.9655097.[31] B. Gustavsen 和 A. Semlyen。通过向量拟合对频域响应进行有理逼近。IEEETransPD，14(3):1052–1061，1999。doi:10.1109/61.772353.[32] R. W. Guy。空气声通过有限板、空气间隙、板和腔体结构的传递——稳态分析。《声学学报》，49(4):323–333，1981.[33] T. C. Ionescu 和 A. Astolfi。非线性矩匹配模型降阶。《IEEE自动控制汇刊》，61(10):2837–2847，2016。doi:10.1109/TAC.2015.2502187.[34] T. C. Ionescu、A. Astolfi 和 P. Colaneri。线性系统的矩匹配低阶近似族。《系统与控制快报》，64:47–56，2014。doi:10.1016/j.sysconle. 2013.10.011.[35] T. C. Ionescu、O. V. Iftime 和 I. Necoara。通过极点零点配置和高阶矩匹配进行模型降阶。《自动化》，138:110140，2022。doi:10.1016/j.automatica.2021. 110140.[36] J. N. Juang 和 R. S. Pappa。用于模态参数识别和模型降阶的特征系统实现算法。《制导、控制与动力学杂志》，8(5):620–627，1985。doi:10.2514/3.20031。

[37] D. S. Karachalios、I. V. Gosea 和 A. C. Antoulas。用于系统辨识和降阶的Loewner框架。载于 P. Benner、S. Grivet-Talocia、A. Quarteroni、G. Rozza、W. H. A. Schilders 和 L. M. Silveira 编，《方法与算法》，《模型降阶手册》第1卷。德格鲁伊特出版社，2021年。doi:10.1515/9783110498967-006.[38] D. S. Karachalios、I. V. Gosea 和 A. C. Antoulas。Loewner框架下双线性时域辨识与降阶。载于《复杂动力系统的模型降阶》，《国际数值数学丛书》第171卷，第3–30页。Birkh¨äuser，Cham，2021年。doi:10.1007/978-3-030-72983-7_1.[39] P. Lietaert、K. Meerbergen、J. P´érez 和 B. Vandereycken。非线性特征值问题的自动有理逼近与线性化。《IMA数值分析杂志》，42(2):1087–1115，2022年。doi:10.1093/imanum/draa098.[40] M. W. Mahoney 和 P. Drineas。用于改进数据分析的CUR矩阵分解。《美国国家科学院院刊》，106(3):697–702，2009。doi:10.1073/pnas.0803205106.[41] A. J. Mayo 和 A. C. Antoulas。广义实现问题求解框架。《线性代数及其应用》，425(2-3):634–662，2007。doi:10.1016/j.laa.2007.03.008.[42] Y. Nakatsukasa、O. Sete 和 L. N. Trefethen。用于有理逼近的AAA算法。SIAM科学计算杂志，40(3):A1494–A1522，2018。doi:10.1137/16M1106122.[43] M. Nakhla 和 J. Vlach。用于确定非线性系统周期响应的分段谐波平衡技术。《IEEE电路与系统汇刊》，23(2):85–91，1976。doi:10.1109/TCS. 1976.1084181.[44] Niconet e.V.，http://www.slicot.org。SLICOT——系统与控制理论子程序库。[45] A. Padoan。基于最小二乘矩匹配的模型降阶。载于：2021年第60届IEEE决策与控制会议（CDC），第6901–6907页。IEEE，2021年。doi:10.1109/CDC45484.2021. 9683008.[46] A. Padoan 和 A. Astolfi。ZIP系统的矩匹配模型降阶。载于：第53届IEEE决策与控制会议。IEEE，2014年。doi:10.1109/cdc.2014.7039954.[47] B. Peherstorfer、S. Gugercin 和 K. Willcox。利用时域Loewner模型进行数据驱动的降阶模型构建。SIAM科学计算杂志，39(5):A2152–A2178，2017年。doi:10.1137/ 16M1094750.[48] B. Peherstorfer 和 K. Willcox。用于非侵入式基于投影模型降阶的数据驱动算子推断。《计算方法与应用力学及工程》，306:196–215，2016年。doi:10.1016/j.cma.2016. 03.025.[49] J. C. Peyton Jones 和 K. S. A. Yaser。谐波平衡与基于Volterra的非线性频率响应分析方法的最新进展及比较。《非线性动力学》，91(1):131–145，2018年。doi:10.1007/s11071-017-3860-z.[50] C. Poussot-Vassal、D. Quero 和 P. Vuillemin。面向阵风的高保真柔性飞机动力学模型的数据驱动逼近。载于 IFAC PaperOnLine（第9届维也纳数学建模国际会议），第51卷，第559–564页，2018年。doi:10.1016/ j.ifacol.2018.03.094.[51] J. Rommes 和 N. Martins。利用子空间加速高效计算传递函数主导极点。《IEEE电力系统汇刊》，21(3):1218–1226，2006年8月。doi:10.1109/ tpwrs.2006.876671。

[52] A. Antoulas、S. Gugercin 和 M. Bedrossian。国际空间站 1r 和 12a 柔性模型的近似。在 IEEE 决策与控制会议论文集中，第 1515–1516 页，2001年。doi:10.1109/CDC.2001.981109。[53] G. Scarciotti 和 A. Astolfi。通过矩匹配进行非线性模型降阶。《控制系统基础与趋势》，4(3–4):224–409，2017年。doi:10.1561/2600000012。[54] P. J. Schmid。数值数据与实验数据的动态模态分解。《流体力学杂志》，656:5–28，2010年。doi:10.1017/S0022112010001217。[55] J. D. Simard 和 A. Astolfi。Loewner 框架中的非线性模型降阶。《IEEE 自动控制汇刊》，66(12):5711–5726，2021年。doi:10.1109/TAC.2021.3110809。[56] D. C. Sorensen 和 M. Embree。由离散经验插值法诱导的 CUR分解。《SIAM科学计算杂志》，38(3):A1454–A1482，2016年。doi:10.1137/140978430。[57] MORwiki社区。柔性飞机。由 MORwiki——模型降阶百科托管，2018年。URL：https://morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Flexible_Aircraft。[58] P. Van Overschee 和 B. De Moor。N4SID：用于辨识组合确定性—随机系统的子空间算法。《自动化》，30(1):75–93，1994年。doi:10.1016/0005-1098(94) 90230-5。[59]P. Van Overschee 和 B. De Moor。线性系统的子空间辨识：理论—实现—应用。Springer Science & Business Media，2012年。[60]H. Wilber、A. Damle 和 A. Townsend。利用三角有理函数进行信号处理的数据驱动算法。《SIAM科学计算杂志》，44(3):C185–C209，2022年。doi:10.1137/21M1420277。