arXiv:2301.04909v1 [math.DS] 12 Jan 2023

具有 L^p 参数的线性齐次微分方程的简单李雅普诺夫谱

DINIS AMARO、MÁRIO BESSA 和 HELDER VILARINHO

摘要。本文证明，相对于类似 L^p 的拓扑，稠密地，与线性连续时间余循环$\Phi: \mathbb{R}\times M \to GL(2,\mathbb{R})$ 相关的李雅普诺夫指数几乎处处互不相同；该余循环由二阶线性齐次微分方程 $\ddot{x} + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x} + \beta(\varphi^t(\omega))x = 0$ 所诱导。系数 α、β 沿着 φ^t-轨道演化，其中 $\omega \in M$，且 $\varphi^t : M \to M$ 是定义在概率空间上的遍历流。我们还得到了无摩擦方程 $\ddot{x} + \beta(\varphi^t(\omega))x = 0$ 以及薛定谔方程 $\ddot{x} + (E - Q(\varphi^t(\omega)))x = 0$的相应结论；后者诱导出余循环 $\Phi: \mathbb{R}\times M \to SL(2,\mathbb{R})$。

关键词： 线性余循环；线性微分系统；乘法遍历定理；李雅普诺夫指数；二阶线性齐次微分方程。

2010年数学主题分类： 主要分类：34D08、37H15；次要分类：34A30、37A20。

1. 引言

1.1. 非自治线性微分方程。对于自治微分方程 $\dot{U}(t) = A\cdot U(t)$，其中 Φ_A^t 是一个矩阵解，A 是与 U(t) 阶数相同的方阵，其李雅普诺夫指数由表达式 $\log\|\Phi_A^t\|^{1/t}$ 的渐近增长所决定；研究这些指数的行为只是线性代数中的一个简单练习。通过标准的线性代数计算，可以确定由李雅普诺夫指数及其特征方向构成的李雅普诺夫谱。对于形如 $\dot{U}(t) = B\cdot U(t)$ 的受扰系统，其中 B 是 A 的扰动，其动力学是一个已得到充分理解的问题（例如参见 [26]）。在李雅普诺夫的开创性著作中，他探讨了一个复杂得多且更有趣的情形，即非自治情形 $\dot{U}(t) = A(t)\cdot U(t)$，其中 A 是随 t 连续变化的矩阵。$\log\|\Phi_A^t\|^{1/t}$ 的渐近行为及其稳定性，都成为显著更难处理的问题。研究非自治线性微分方程的一种标准方法，是采用线性余循环的语言（详见 §2.1）；在这种表述中，非自治性通过某个给定流 φ^t 在特定相空间上的轨道来刻画。

1.2. **对正李雅普诺夫指数的探索**。正（或负）李雅普诺夫指数给出了相邻两条轨迹平均指数发散（或收敛）的速率，而零指数则意味着不存在任何形式的指数行为。佩辛理论保证，在存在非零李雅普诺夫指数时，稳定／不稳定流形理论具有强有力的结论。这些几何工具是当今动力学领域许多核心结果的基础。

日期：2023年1月13日。

系统。因此，检测非零李雅普诺夫指数无疑是动力学中的一个重要问题；这一问题可追溯至 20 世纪 60 年代末以及 Millionshchikov 的工作 [28]。20 世纪 80 年代初，Cornelis 和 Wojtkowski [11]，以及 Ledrappier [25] 得出了李雅普诺夫指数为正的判据；到了 90 年代，Knill [30] 和 Nerurkar [29] 证明，对于某些余循环，非零李雅普诺夫指数构成一个 C^0-稠密现象。90 年代末，Arnold 和 Cong [7] 证明了正李雅普诺夫指数的 L^p-稠密性；其中两位作者在 [13] 中广泛采用了他们的策略。基于旋转数概念的 Moser 型方法，使 Fabbri 和 Johnson 得以证明，在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 上演化且以环面平移为基础的线性微分系统中，正李雅普诺夫指数普遍存在（见 [20, 21, 22]，以及他们与 Zampogni 合作的研究 [23]）。显然，在 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中找到一个正李雅普诺夫指数，便能立即得到一个负李雅普诺夫指数，因而李雅普诺夫谱是简单的（即所有李雅普诺夫指数均不相同）。过去十年左右建立的若干关于李雅普诺夫指数正性的结果，带来了许多不同的新方法 [17, 13, 34, 19, 14, 35]。作为典型例子，我们提及 [10]：Avila 在其中证明，在范围相当广泛的拓扑以及二维情形下，简单谱普遍存在。

1.3. **李雅普诺夫视角下二阶线性齐次微分方程的渐近行为。** 近两个世纪以来，人们已知在尝试运用解析方法积分大多数函数时会遇到严重限制。事实上，刘维尔理论（参见例如 [32]）明确描述了解微分方程时可能出现的问题。庞加莱和李雅普诺夫创立的微分方程定性理论，成为应对这一困境的巧妙方法。本文旨在分析如下形式的二阶齐次线性微分方程解的渐近行为

$$\ddot{x}(t) + \alpha(\varphi^t(\omega))\dot{x}(t) + \beta(\varphi^t(\omega))x(t) = 0, \tag{1}$$

其系数 α 和 β 具有L^p 正则性，随时间沿流 φ^t 的轨道变化，并允许对参数进行L^p小扰动。具体而言，我们将描述其李雅普诺夫谱，同时考虑对其系数进行L^p型扰动的可能性。我们不只研究单个方程，而是按照下文所述同时考察无穷多个方程：考虑一个基于遍历流 φ^t的时间连续余循环：相对于 M 上的概率测度，$M \to M$，其纤维上的动力学由线性流Φ_A^t 定义，该线性流是线性变分方程 $\dot{U}(\omega, t) = A(\varphi^t(\omega)) \cdot U(\omega,t)$ 的解，其生成元为

$$\begin{array}{rccc} A\colon & M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & \omega & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(\omega) & -\alpha(\omega) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

微分方程式，如（1），广泛出现于物理学、工程学、复杂生物系统以及数学的众多应用领域。一个典型例子是没有外力作用的简单阻尼摆，其中 α和 β 是依赖于 $\omega \in M$ 并沿着流 φ^t：$M \to M$ 对于$t \in \mathbb{R}$演化的函数。当 α 和 β 是第一积分（即沿流 φ^t的轨道保持常数的函数），并且与 φ^t相关时，（1）可以通过微分方程初等课程中的简单算法求解。

微分方程初等课程中的式。当参数随时间变化时，显式解可能难以求得。当摩擦力 α和振子的频率 β 随时间变化时，情况正是如此；我们必须承认，这在自然界中最有可能发生。注意，像A 这样的生成元会生成一类特殊的解，其中（2）。显然，当 $\alpha \neq 0$ 解在一般线性群 GL(2, $\mathbb{R}$) 的一个子类上演化时；而当 $\alpha = 0$ 解在特殊线性群 SL(2, $\mathbb{R}$) 的一个子类上演化时。因此，应进行专门研究，并考虑到扰动必须属于我们所研究的类，而不是在 GL(2, $\mathbb{R}$) 中演化的更广泛的余循环生成元类，甚至不是在 SL(2, $\mathbb{R}$) 中演化的余循环生成元类。与这一特殊类别相关的问题已在多部著作中得到处理，例如 [8, 9, 12, 24, 27, 3]。

固定位置 和动量 （$x(0), \dot{x}(0)$），我们旨在研究当$t \to \infty$时，数对（$x(t), \dot{x}(t</style)$）的渐近行为，即由李雅普诺夫指数给出的渐近指数增长率。在本研究中，广义而言，我们旨在回答以下问题：

> 能否在 L^p-拓扑下扰动系数 α 和 β，从而得到两个不同的李雅普诺夫指数?

当然，在考虑（2）中的自治情形时，假设 α 和 β 不依赖于 ω，前面的问题很容易回答。事实上，考虑（2）中的 β Aβ，且 $\alpha = 0$，则 A_0 有一个具有平凡李雅普诺夫谱的解（仅有一个等于 0 的李雅普诺夫指数），但任何具有微小 $A\beta$ 的扰动 $\beta \neq 0$ 都会产生一个具有简单李雅普诺夫谱的解（两个李雅普诺夫指数均等于 $\pm\sqrt{\beta}$）。当考虑非自治情形时，难度会显著增加。

能够对上述问题进行恰当形式化的精确定义，将在定理 1 及推论1 和2中给出。

2. 定义与结果陈述

2.1. **线性余循环**。本节给出一些对下文有用的定义。设 $(M, \mathcal{M}, \mu)$ 为一个概率空间，且 φ: $\mathbb{R} \times M \to M$ 是一个度量动力系统（或流），也就是说，它是一个可测映射，并且

(1) $\varphi^t : M \to M$ 由 $\varphi^t(\omega) = \varphi(t, \omega)$ 给出，并且对所有$t \in \mathbb{R}$都保持测度 μ；
(2) $\varphi^0 = \mathrm{Id}_M$，且对所有$t$、$s \in \mathbb{R}$都成立。

除非另有说明，本文均假定该流按通常意义是遍历的，即除零测集及其补集外，不存在其他不变集。设 $\mathcal{B}(X)$ 为拓扑空间X的 Borel σ-代数。定义在 φ 上的连续时间线性随机动力系统（RDS），或连续时间线性余循环，是一个 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}/\mathcal{B}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$-可测映射

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

使得映射 $\Phi(t, \omega)$ 在 φ 上构成一个余循环，即，

(1) 对所有 $\omega \in M$, $\Phi(0, \omega) = \mathrm{Id}$；(2) 对所有 s、$t \in \mathbb{R}$ 以及 $\omega \in M$, $\Phi(t + s, \omega) = \Phi(t, \varphi^s(\omega)) \circ \Phi(s, \omega)$,

并且$t \mapsto \Phi(t, \omega)$ 对所有 $\omega \in M$ 都连续。我们回顾一下：若对每个$t \in \mathbb{R}$，$\omega \mapsto \Phi(t, \omega)$ 都可测，并且对所有 $\omega \in M$，$t \mapsto \Phi(t, \omega)$ 都连续，则Φ 在乘积测度空间中可测。文献中也将这些对象称为线性微分方程组(LDS)。

2.2. **动力学线性余循环**。 我们首先考虑一个非自治线性微分方程作为动机，该方程描述阻尼谐振子的运动，类似于单摆沿路径$(\varphi^t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$的运动，其中 $\omega \in M$由流 φ 描述。令$K \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ 为由以下类型的矩阵 2×2 构成的集合

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 a、b $\in \mathbb{R}$。用 $\mathcal{G}$ 表示可测映射 $A : M \to \mathbb{R}^{2\times 2}$的集合，用 $\mathcal{K} \subset \mathcal{G}$ 表示动力学可测映射 $A : M \to K$ 的集合。通常，我们将 $\mathcal{G}$ 上在 M 的某个 μ- 满测度子集上取值相同的两个映射视为相同。考虑可测映射 $\alpha: M \to \mathbb{R}$ 和 $\beta: M \to \mathbb{R}$。考虑由 (1) 给出的微分方程。令 $y(t) = \dot{x}(t)$，可将 (1) 改写为以下向量形式的一阶线性系统

$$\dot{X} = A(\varphi^t(\omega)) \cdot X, \tag{4}$$

其中 $X = X(t) = (x(t), y(t))^T = (x(t), \dot{x}(t))^T$，$A \in \mathcal{K}$ 由 (2) 给出。对于所有 $1 \le p < \infty$，定义

$$\mathcal{G}^p = \left\{ A \in \mathcal{G} : \int_M \|A\|^p d\mu < \infty \right\},$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示标准欧几里得矩阵范数。显然，对于所有$1 \le p < q < \infty$，都有 $\mathcal{G}^q \subset \mathcal{G}^p$。由 [5, 定理 2.2.2]（另见该参考文献中的引理 2.2.5 和例 2.2.8）可知，若 $A \in \mathcal{G}^1$，则它生成唯一的（在不可区分意义下）线性随机动力系统 Φ_A，满足

$$\Phi_A(t, \omega) = \mathrm{Id} + \int_0^t A(\varphi^s(\omega)) \cdot \Phi_A(s, \omega)\, ds. \tag{5}$$

式 (5) 中定义的解 $\Phi_A(t, \omega)$ 称为 Carathéodory 解或弱解。给定初始条件 $X(0) = v \in \mathbb{R}^2$，若 $t \mapsto \Phi_A(t, \omega)v$ 满足方程 (4)，则称其为方程 (4) 的解，或称方程 (4) 生成了 $\Phi_A(t, \omega)$。注意，对于所有 $\omega \in M$ 和 $v \in \mathbb{R}^2$，都有 $\Phi_A(0, \omega)v = v$。若解 (5) 关于时间（即关于 t）可微，并且对所有 t 都满足

$$\frac{d}{dt}\Phi_A(t, \omega)v = A(\varphi^t(\omega)) \cdot \Phi_A(t, \omega)v \qquad \text{and} \qquad \Phi_A(0, \omega)v = v, \tag{6}$$

则称其为方程 (4) 的经典解。当然，对于所有 ω 和 v，$t \mapsto \Phi_A(t, \omega)v$ 都是连续的。根据 (6)，我们称 $A : M \to K$ 为 Φ_A 的（动力学）“无穷小生成元”。有时，鉴于 A 与 Φ_A 之间的关系，我们将 A 和 Φ_A 都称为动力学线性余循环/随机动力系统/LDS。若方程 (4) 的初始条件为 $X(0) = v$，则 $\Phi_A(0, \omega)v = v$，且 $X(t) = \Phi_A(t, \omega)v$。

令 $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ 表示由矩阵导出的无迹动力学余循环，与（3）中所述相同，但带有一个 $= 0$。对于 $1 \le p < \infty$，设 $\mathcal{K}_p = \mathcal{K} \cap \mathcal{G}^p$，且 $\mathcal{K}_{p_0} = \mathcal{K}_0 \cap \mathcal{G}^p \subset \mathcal{K}^p$。

2.3. **拓扑** L^p。 我们首先定义一种类似于L^p的拓扑，该拓扑由一个度量生成，用于比较 $\mathcal{G}$上的无穷小生成元。给定 $1 \le p < \infty$ 和A、$B \in \mathcal{G}$，我们设

$$\hat{\sigma}_p(A, B) := \begin{cases} \left(\int_M \|A(\omega) - B(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}, \\ \infty \text{ if the above integral does not exists,} \end{cases}$$

并定义

$$\sigma_p(A,B) := \begin{cases} \frac{\hat{\sigma}_p(A,B)}{1+\hat{\sigma}_p(A,B)}, & \text{if } \hat{\sigma}_p(A,B) < \infty \\ 1, & \text{if } \hat{\sigma}_p(A,B) = \infty \end{cases}.$$

显然，σ_p 是 $\mathcal{G}$中的一个距离。它可以看作L^p-距离的一个版本。接下来的拓扑内容结果主要在 [3]中得到证明。其余陈述显然成立。

命题 2.1。 设 $1 \le p < \infty$。则：

(i) 对所有 $1 \le p \le q < \infty$ 以及所有 $A, B \in \mathcal{G}$，有 $\sigma_p(A, B) \le \sigma_q(A, B)$。*(ii)* 若 $A \in \mathcal{G}^1$，则 $\sup_{0\le t\le 1} \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu)$。*(iii)* 若 $A \in \mathcal{G}^p$，则对于任意满足 $\sigma_p(A, B) < p$ 的 $B \in \mathcal{G}$，有 $B \in \mathcal{G}^p$。*(iv)* 对所有 $1 \le p < \infty$，集合 $(\mathcal{K}^p, \sigma_p)$ 和 $(\mathcal{K}_0^p, \sigma_p)$ 均为闭集。*(v)* 对所有 $1 \le p < \infty$，$(\mathcal{K}^p, \sigma_p)$ 和 $(\mathcal{K}_0^p, \sigma_p)$ 都是完备度量空间，因此也是贝尔空间。

接下来的结果在测度论中是初等的，但我们会经常用到。它们体现了这样一个核心思想：当支集的测度足够小时，可以在一致范数下作出很大的扰动，同时在σ_p-距离下作出很小的扰动。

引理 2.2。 设 $1 \le p < \infty$。给定 $A \in \mathcal{G}^p$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得如果 $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$ 且 $\mu(\mathcal{F}) < \delta$，那么 $\int_{\mathcal{F}} \|A(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) < \epsilon$。

证明。 采用反证法。假设存在 $\epsilon > 0$ 和 $\mathcal{F}_n \in \mathcal{M}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\mu(\mathcal{F}_n) < \frac{1}{2^n}$，并且

$$\int_{\mathcal{F}_n} \|A(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \ge \epsilon. \tag{7}$$

令 $\mathcal{F} = \limsup_n \mathcal{F}_n$，由博雷尔-坎特利引理可知 $\mu(\mathcal{F}) = 0$，因此

$$\int_{\mathcal{F}} \|A(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) = 0. \tag{8}$$

下面将导出矛盾：

$$\begin{aligned} \epsilon &\overset{(7)}{\le} \limsup \int_{\mathcal{F}_n} \|A(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) = \limsup \int \|A(\omega)\|^p \chi_{\mathcal{F}_n}(\omega) \, d\mu(\omega) \\ &\overset{\star}{\le} \int \limsup \|A(\omega)\|^p \chi_{\mathcal{F}_n}(\omega) \, d\mu(\omega) = \int \|A(\omega)\|^p \chi_{\mathcal{F}}(\omega) \, d\mu(\omega) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \|A(\omega)\|^p \, d\mu(\omega) \overset{(8)}{=} 0, \end{aligned}$$

其中在 $\star$我们使用了反向法图引理。 □

推论 2.3。 设 $1 \le p < \infty$、$A \in \mathcal{G}^p$ 和 $\epsilon > 0$ 已给定。考虑满足以下条件的 $B \in \mathcal{G}^p$：当且仅当 $\omega \in \mathcal{F}$对某个 $\mathcal{F} \in \mathcal{M}$ 成立时，$A(\omega) \ne B(\omega)$（也就是说，B 与 A 的区别仅在于 $\mathcal{F}$）。那么存在 $\delta > 0$，使得若$\mu(\mathcal{F}) < \delta$，则有 $\sigma_p(A, B) < \epsilon$。

证明。 只需证明 $\hat{\sigma}_p(A,B) < \epsilon$。为此，对 (2.2 引理$A - B) \in \mathcal{G}^p$ 以及 ϵ^p应用该引理。 □

2.4. **定理1 的陈述及其证明概述。** 设 $1 \le p < \infty$ 且$A \in \mathcal{K}_p$。由于 $\mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}^1 \subset \mathcal{G}^1$，由命题 2.1 余循环 Φ_A 满足以下可积性条件

$$\sup_{0\le t\le 1} \log^+ \|\Phi_A(t,\omega)^{\pm 1}\| \in L^1(\mu). \tag{9}$$

因此，在条件（9）下，奥塞列茨定理（例如参见 [31, 5]）保证，对于 μ 几乎处处的 $\omega \in M$，存在一个 Φ_A-不变分裂，称为 奥塞列茨分裂，它将纤维 $\mathbb{R}^2_\omega = E^1_\omega \oplus E^2_\omega$ 分解为若干子空间，并存在实数 $\lambda_1(A,\omega) \ge \lambda_2(A,\omega)$，称为李雅普诺夫指数，使得：

$$\lambda(A,\omega,v_i) := \lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_A(t,\omega)v_i\| = \lambda_i(A,\omega),$$

对于任意 $v_i \in E^i_\omega \setminus \{\vec{0}\}$ 以及 $i = 1, 2$. 若流 φ^t 是遍历的，则李雅普诺夫指数（以及相应子丛的维数）在 μ 意义下几乎处处为常数，我们将它们记作 $\lambda_1(A)$ 和 $\lambda_2(A)$，其中 $\lambda_1(A) \ge \lambda_2(A)$。若 A （或 Φ_A）具有单点李雅普诺夫谱或平凡李雅普诺夫谱，则对于 μ 几乎处处的 $\omega \in M$， $\lambda_1(A,\omega) = \lambda_2(A,\omega)$。否则，我们称 A （或 Φ_A）具有简单李雅普诺夫谱。有关这些结果的详细信息，请参见 [5]（尤其是例 3.4.15）。

现在我们可以陈述主要结果：存在一个在 σ_p 中稠密、且具有简单谱的 $\mathcal{K}^p$ 子集：

定理 1. 设 $\varphi^t : M \to M$ 是遍历的。对于任意 $1 \le p < \infty$、$A \in \mathcal{K}^p$ 和 $\epsilon > 0$，都存在一个 $B \in \mathcal{K}^p$，使其具有简单李雅普诺夫谱，并满足 $\sigma_p(A,B) < \epsilon$。

这一结果特别表明，在 [3]，中得到的、平凡谱占主导的 σ_p-泛型子集 $\mathcal{K}^p$ 不可能包含 σ_p-开集。为证明每个满足可积性条件的动力学余循环附近都存在另一个具有简单谱的动力学余循环，我们借鉴了 [7, 13] 的一些思路；相关作者针对离散时间情形以及更一般的余循环得到了类似结果。然而，连续时间余循环的背景以及对非常特殊的余循环族（例如本文所研究的余循环族）的限制，带来了以往研究中未曾遇到的诸多困难。我们必须面对动力学余循环具有刚性这一事实 [1]，而为了得到所需的扰动，我们将采用逐步扰动算法，现将其描述如下：

(1) 我们先用特殊流对 φ 进行编码，以避免重叠；随后考虑一个薄的时间-1流盒 $\mathcal{V}_R$，并将它与另一个薄的时间-1流盒 $\mathcal{V}_S$ 拼接起来，使得 o $\mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S$ 成为一个时间-2流盒；(2) 我们在 $\mathcal{V}_R$ （分别在 $\mathcal{V}_S$）处切开原有动力学，并粘贴一个简单的常值无迹无穷小生成元$R_{2\pi}$，其解基本上会在时间-η内旋转角度 $2\pi\eta$。在 $\mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S$ 之外，我们保持A的动力学不变。所谓简单，是指只需迭代一次时间-1流，就能轻易得到恒等变换。将这个新的余循环称为A_0；

[1] [7, 13] 中的微扰论证更容易进行，因为 $\dim \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = 3$ 有三个自由度。对于我们的动力学情形，我们必须进行相同的扰动，但只有一个自由度。

(3) 由于 $\mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S$ 是一个薄流盒，A_0 将任意 σ^p接近于A。如果A_0具有简单谱，那么证明完成；否则，我们证明1针对A_0而非A；

(4) 在 $\mathcal{V}_R$ 内部，我们截断 A_0 的动力学，并粘贴一个量身定制的旋转 R，使得对于每个进入 $\mathcal{V}_R$ 的 ω，我们都能在时间 1 内将向量 v_ω 旋转到由 $v = (1, 1)$ 给出的固定特殊方向。向量 v_ω 将用于强行构造一个奥塞莱茨方向，以便我们计算李雅普诺夫指数。由于根据 (1)，$\mathcal{V}_R$ 很薄，我们在此对任意角度进行小幅σ_p扰动。一个关键观察是，迹保持不变，这正是之前将 $R_{2\pi}$ 放置在 $\mathcal{V}_R$上的主要动机。将这个新的余循环称为 B_0。如果 B_0 具有简单谱，问题就解决了；否则，我们改为对 B_0 而非 A_0证明定理 1；

(5) 在 $\mathcal{V}_S$ 内部，我们截断 B_0 的动力学，并粘贴 一个常值无穷小生成元 S，使向量v 在时间 1 内按已知幅度e伸缩。扰动的一致范数（最终可能很大）不会造成问题，因为由于$\mathcal{V}_S$的厚度，σ^p-距离很小。迹再次保持不变。将这个新的余循环称为B；

(6) 现在我们利用遍历性，计算那些必然会无数次返回到 $\mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S$ 的点的李雅普诺夫指数；

(7) 伸缩 S 是一种扰动，旨在沿某个不变方向进行扩张。由于在这里很难找到保持相同不变方向的不同动力余循环，因此我们也就明白了为何此前选择在时间 1 后施加恒等变换（更准确地说，是旋转 2π），即$R_{2\pi}$；

(8) 最后，在 (4) 和 (5) 中保持迹为常数的考量将会带来成效：如果某个扰动增大了一个李雅普诺夫指数，同时原余循环与扰动后的余循环的两个李雅普诺夫指数之和保持不变，那么只可能发生一件事：扰动后的余循环不可能具有平凡谱，而必定会出现一个小于原余循环的李雅普诺夫指数的李雅普诺夫指数。

下表总结了从线性微分系统A 到B的逐步构造过程：

表 1. 多次扰动的逐步说明

余循环M	$\setminus (\mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S)$	$\mathcal{V}_R$	$\mathcal{V}_S$
A	A	A	A
A_0	A	$R_{2\pi}$	$R_{2\pi}$
B_0	A	R	$R_{2\pi}$
B	A	R	S

我们采用的方法与以往的工作略有所不同 [7, 13, 6, 18]。此外，为避免扰动之间相互重叠，我们将通过 Kakutani 城堡中的特殊流来编码基流（如 [2, 33]所示）。另一方面，为估计扰动余循环与原余循环之间的接近程度，我们还通过控制 $\mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S$ 的测度来加以处理，并考虑到推论 2.3。

需要指出的是，除了连续时间余循环本身所固有的困难之外，实施这些扰动（旋转和伸缩）也并非易事，因为我们没有通常的机制，例如 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 中余循环所具备的机制；更一般地说，也没有满足可达性条件（亦称为扭转）和鞍点保守（亦称为压缩）条件的余循环所具备的机制。这些机制能够以要求较低的方式实现上述过程，例如见 [4, 7, 15, 16, 13]。

由于我们的扰动均为无迹的，根据定理1 可知，保守动力学余循环具有非零李雅普诺夫指数σ_p稠密成立。

推论 1. 设 $\varphi^t : M \to M$ 是遍历的。对于任意 $1 \le p < \infty$、$A \in \mathcal{K}_0^p$ 和 $\epsilon > 0$，存在一个 $B \in \mathcal{K}_0^p$，它具有非零李雅普诺夫指数，并满足$\sigma_p(A,B) < \epsilon$。

最后，我们以一种略有1 不同的形式给出推论1，即考虑 $L^2(\mathbb{R})$ 上的一维薛定谔算子，以及具有 L^p 势 $Q: M \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$\begin{array}{rccc} H_\omega: & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}) \\ & \phi & \longmapsto & \left[-\frac{d^2}{dt^2} + Q(\varphi^t(\omega))\right]\phi \end{array} \tag{10}$$

特别地，我们希望描述时不变薛定谔方程的李雅普诺夫谱

$$H_\omega \phi = E\phi, \tag{11}$$

其中 $E \in \mathbb{R}$ 是给定的能量。结合（10）和（11），我们推得一个如（2）所示的动力学余循环，但其中 $\alpha(\omega) = 0$ 且 $\beta(\omega) = E - Q(\omega)$ 对所有 $\omega \in M$均成立。我们固定能量 E 并聚焦于 LDS

$$\begin{array}{rccc} A_E: & M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & \omega & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -E + Q(\omega) & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{12}$$

称为势函数为 Q 的一维薛定谔线性微分系统。由推论 1 可直接得到：

推论2。设 $\varphi^t : M \to M$ 是遍历的。给定 $1 \le p < \infty, \epsilon > 0$ 以及一个如 (12) 所示、具有固定能量 E 且势函数为$\tilde{Q}$ 的一维薛定谔线性微分系统，存在一个 Q，使得具有相同能量 E 和势函数 Q 的一维薛定谔线性微分系统呈现非零李雅普诺夫指数，且 $\|Q-\tilde{Q}\|_{L^p} < \epsilon$。

3. 关于扰动

3.1. 特殊流。考虑一个测度空间 Σ、一个映射 $\mathcal{T}: \Sigma \to \Sigma$、一个 $\mathcal{T}$-不变概率测度 $\tilde{\mu}$（定义于 Σ）以及一个屋顶函数 $h: \Sigma \to \mathbb{R}^+$，满足$h(\omega) \ge H > 0$，其中某个$H > 0$，且对所有 $\omega \in \Sigma$ 均成立，并且 $\int_\Sigma h(\omega) d\tilde{\mu}(\omega) < \infty$。定义空间 $M_h \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}_+$ 如下：

$$M_h = \{(\omega, t) \in \Sigma \times \mathbb{R}_+ : 0 \le t \le h(\omega)\}$$

通过将点对 $(\omega, h(\omega))$ 与 $(\mathcal{T}(\omega), 0)$ 等同起来。在 M_h 上定义的半流为 $S_s(\omega, r) = (\mathcal{T}^n(\omega), r + s - \sum_{i=0}^{n-1} h(\mathcal{T}^i(\omega)))$，其中$n \in \mathbb{N}$由下式唯一确定：

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(\mathcal{T}^i(\omega)) \le r + s < \sum_{i=0}^{n} h(\mathcal{T}^i(\omega))$$

称为悬挂半流。若 $\mathcal{T}$ 可逆，则 $(S^t)_t$ 是一个流。此外，若 ℓ 表示一维勒贝格测度，则在 M_h 上定义的测度 $\mu = (\tilde{\mu} \times \ell)/\int h\, d\tilde{\mu}$ 为

$$\int g\, d\mu = \frac{1}{\int h\, d\tilde{\mu}} \int \left(\int_0^{h(\omega)} g(\omega, t) dt \right) d\tilde{\mu}(\omega), \quad \forall g \in C^0(M_h)$$

是一个概率测度，并且在悬挂半流 $(S^t)_t$ 下保持不变。具有这种表示的流称为特殊流（或称为在某个函数下构造的流），记作 $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$。众所周知（见 [1, 定理 2]），任意遍历流都同构于一个特殊流。在本文中，我们假设基流是一个特殊流 $(\varphi^t, \Sigma, \mathcal{T}, h)$，并且不失一般性地假设 $H > 2$。为避免符号过于繁杂，我们用 M 代替 M_h。

3.2. 支集位于时间-τ 流盒中的扰动。取 $A \in \mathcal{G}$ 和一个非周期轨道 $\omega \in M$。我们将只沿着 ω 轨道的一段对 A 进行扰动 $B = B_{\omega,\tau}$，该段的端点为 ω 和 $\varphi^\tau(\omega)$，其中 $\tau > 0$。给定 $P \in \mathcal{G}$，定义 $B: M \to \mathbb{R}^{2\times 2}$，使得对于所有位于 $\varphi^{[0,\tau]}(\omega) = \{\varphi^s(\omega) : s \in [0,\tau]\}$ 之外的 $\hat{\omega}$，都有 $B(\hat{\omega}) = A(\hat{\omega})$；否则，$B(\hat{\omega}) = P(\hat{\omega})$。映射 B 称为由 P 产生、支集位于 $\varphi^{[0,\tau]}(\omega)$ 中的 A 的（局部）扰动。给定 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ 和 $0 \le a < b$，我们定义集合

$$\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0) = \left\{ \varphi^t(\omega) : \omega \in \Sigma_0,\, t \in [a,b] \right\}.$$

给定 $A \in \mathcal{G}^1$、$P \in \mathcal{G}$, $\Sigma_0 \subset \Sigma$ 和一个 > 0，我们可以将 A 受到 P 的局部扰动扩展为支集在流盒 $\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)$ 上，其中 $0 \le a < b < H$，方法如下：对于 $\omega \in \varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)$，我们将 ω 投影到 $\tilde{\omega} \in \varphi^a(\Sigma_0)$ 中，即 $\omega = \varphi^r(\tilde{\omega})$，其中某个 $0 \le r \le b-a$，并令 $B_{\tilde{\omega}, b-a}$ 为 A 受到 P 的（局部）扰动 $= P_{\tilde{\omega}}$，其支集在 $\varphi^{[0,b-a]}(\tilde{\omega})$ 上，并定义

$$B(\omega) := \begin{cases} A(\omega), & \text{if } \omega \notin \varphi^{[a,b]}(\Sigma_0) \\ B_{\tilde{\omega}, b-a}(\omega), & \text{if } \omega \in \varphi^{[a,b]}(\Sigma_0) \end{cases}.$$

为区分不同情形，我们将 $B(\omega)$ 称为 A 受到 P 的全局扰动，其支集在 $\varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)$ 上，其中我们总是假设，对于所有 $\omega \in \varphi^{[a,b]}(\Sigma_0)$，$P(\omega) = P_{\tilde{\omega}}(\omega)$。

3.3. **旋转与拉伸**。接下来的两个结果分别提供局部和全局论证，说明如何在小 σ_p-扰动下沿着指定方向旋转。这将用于生成合适的不变方向。第一个结果允许我们在轨道的一个局部线段上实施一致有界的动力学扰动，使给定向量旋转。第二个结果通过将单条轨道上的旋转扩展到流盒中，拓展引理 3.1 。

引理 3.1。给定 $\omega \in M$、$u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$、$A \in \mathcal{K}^p$，存在 $\gamma \neq 0$，以及一个扰动 $B_{\omega,1} \in \mathcal{K}^p$，它是 A 在 $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ 上的支集，使得：

(i) $\|B_{\omega,1}(\hat{\omega})\| \le 4\pi^2$ 对 $\varphi^{[0,1]}(\omega)$ 上的所有 $\hat{\omega}$ 均成立，且 (ii) $\Phi_{B_{\omega,1}}(1, \omega)u = \gamma v$。

证明。令 $\theta = \angle(\mathbb{R}u, \mathbb{R}v) \in]0, 2\pi]$ 按顺时针方向测量。设无穷小生成元常数 $R: M \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ 定义为

$$R(\omega) = R_\theta(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\theta^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

我们考虑由 R 对$_{\omega,1} \in \mathcal{K}^p$ A 施加的扰动 B (ω) 上的支集。式 (13) 中的无穷小生成元生成一个线性微分方程组，其基本经典解为 (6)，对所有 $\omega \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 均由下文定义的“顺时针椭圆旋转”给出：

$$\Phi_R(t,\omega) = \begin{pmatrix} \cos(\theta t) & \theta^{-1}\sin(\theta t) \\ -\theta \sin(\theta t) & \cos(\theta t) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

并且使得 $\Phi_B(1,\omega)u = \Phi_R(1,\omega)u = \gamma v$，其中某个 $\gamma \neq 0$ 满足 (ii)。 □

由推论2.3 可知，我们可以将引理 *3.1* 中给出的、由旋转 $R_\theta(\omega)$ 确定的局部扰动 $B_{\omega,1}$扩展为全局扰动，并针对每个轨道段进行调整，从而得到一个σ_p-接近原生成元的新生成元，前提是我们减小发生扰动的流盒的测度。这由下一个基本的测度论结果指出，该结果是推论 2.3 的直接推论。

引理 3.2 (全局)。 对于所有 $1 \leq p < \infty$、$A \in \mathcal{G}^p$、某个 > 0 和 $\epsilon > 0$，存在一个可测集 $\Sigma_0 \subset \Sigma$，使得 $\tilde{}\mu(\Sigma_0) > 0$，从而对于支集在流盒 $\varphi^{[a,a+1]}(\Sigma_0)$ 中的任意全局扰动 $B \in \mathcal{G}^p$，该扰动是 A 的扰动，并且满足 $\|B(\varphi^t(\omega))\| \leq 4\pi^2$，对于所有$\omega \in \Sigma_0$ 和 $t \in [a$、$a+1]$，我们有 $\sigma_p(A$、$B) < \epsilon$。

取一个合适的常数和无迹无穷小生成元

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

由于S 具有简单的表达式，我们对其积分，得到：

$$\Phi_S(t,\omega) = e^{St} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \tag{16}$$

我们注意到，(16) 的特征值为 $\sigma_1^S = e^t$ 和 $\sigma_2^S = e^{-t}$，对应的特征向量分别为 $v_1^S = (1,1)$ 和$v_2^S = (-1,1)$。注意，$E_1^S = \mathbb{R} \cdot v_1^S$ 是一个不稳定方向，而$E_2^S = \mathbb{R} \cdot v_2^S$ 是一个稳定方向。

下面这个显然的注记在后续内容中至关重要，因为它结合了三个主要要素：某些一维方向的不变性、沿该方向的某种扩张性，以及这一切都是在无迹 运动学无穷小生成元中实现的。

注 3.1 (不变性与伸缩)。考虑 $\theta = 2\pi$ 在(14)中，例如 $R_{2\pi}$，我们得到

$$e \cdot v_1^S = e \cdot \Phi_{R_{2\pi}}(1,\omega)\, v_1^S = \Phi_S(1,\omega)\, v_1^S. \tag{17}$$

4. 定理1的证明

设 $A \in \mathcal{K}^p$, $1 \leq p < \infty$ 和 $\epsilon > 0$ 已给定。我们假设 Φ_A 具有单一的李雅普诺夫指数 $\lambda(A)$。扰动序列总结于表1。

4.1. 定义 A_0（选取合适的坐标）：设 $\Sigma_0 \subset \Sigma$ 如引理 3.2 所述。对于 $r > 0$，假设我们有由 $\mathcal{V}_R$ 定义的流盒：$= \varphi^{[0,1]}(B_r)$ 和 $\mathcal{V}_S := \varphi^{[1,2]}(B_r)$，其中 $B_r \in \Sigma_0$ 满足 $0 < \tilde{\mu}(B_r) \le r$。考虑定义如下的 $A_0 \in \mathcal{K}^1$:

$$A_0(\omega) := \begin{cases} A(\omega), & \text{if } \omega \notin \mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S \\ R_{2\pi}, & \text{if } \omega \in \mathcal{V}_R \cup \mathcal{V}_S \end{cases}.$$

根据推论 2.3 若 r 相较于足够小 ϵ 我们得到

$$\sigma_p(A, A_0) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{18}$$

如果 Φ_{A_0} 具有简单谱，问题就解决了。否则，我们将对A_0而不是A证明该定理。

4.2. **定义B_0（在$\mathcal{V}_R$上旋转）：** 令

$$k(\omega) = \inf_{t \ge 0} \left\{ t \colon \varphi^{-t}(\omega) \in \varphi^1(B_r) \right\}.$$

我们将定义随机向量场$g(\omega)$。首先，考虑向量$v = v_1^S / \|v_1^S\| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$在与$\Phi_{A_0}$相关联的余循环作用下的归一化像:

$$g(\omega) := \begin{cases} v, & \text{if} \quad \omega \in \varphi^1(B_r) \\ \frac{\Phi_{A_0}(k(\omega), \varphi^{-k(\omega)}(\omega))v}{\|\Phi_{A_0}(k(\omega), \varphi^{-k(\omega)}(\omega))v\|}, & \text{if} \quad \omega \notin (\mathcal{V}_R \setminus B_r) \end{cases}$$

并从现在起令$E(\omega) = \operatorname{span}\{g(\omega)\}$。

设 B_0 是 A_0 的一个扰动，其支集位于流盒 $\mathcal{V}_R$ 中，如引理 3.2所述，并满足对所有 $\omega \in B_r$，都有 $\Phi_{B_0}(1, \omega)g(\omega) = \kappa v$ 对某个 $\kappa \in \mathbb{R}$，即:

$$B_0(\omega) := \begin{cases} R(\omega), & \text{if } \omega \in \mathcal{V}_R \\ A_0(\omega), & \text{otherwise} \end{cases}.$$

注意，对于每个 $\omega_0 \in B_r$，都必须相应地调整旋转；也就是说，对于$\omega = \varphi^t(\omega_0) \in \mathcal{V}_R$，当 $0 \le t \le 1$时，我们令 $R(\omega) = R_\theta(\omega_0)$，其中 $\theta = \angle(g(\omega_0), v)$。特别地，对于所有 $\omega_0 \in B_r$，都有 $\Phi(1, \omega_0)g(\omega) = \kappa v$，其中某个 $\kappa \in \mathbb{R}$。此外，A_0 和 B_0 的迹相同。事实上，在 $\mathcal{V}_R$ 之外，$A_0 = B_0$；而在 $\mathcal{V}_R$ 中，我们有 $B_0 = R$ 和 $A_0 = R_{2\pi}$，二者的迹均为零（见式 (13)）。因此，根据刘维尔公式，对于所有 ω 和 $t \ge 0$

$$\det \Phi_{B_0}(t, \omega) = \det \Phi_{A_0}(t, \omega). \tag{19}$$

对于 $\omega \in \mathcal{V}_R \setminus B_r$，定义

$$g(\omega) = \frac{\Phi_{B_0}(k(\omega), \varphi^{-k(\omega)}(\omega))v}{\|\Phi_{B_0}(k(\omega), \varphi^{-k(\omega)}(\omega))v\|}. \tag{20}$$

注意，对于 $\omega \in B_r$，由于 $\Phi_{B_0}(1, \omega)\mathbb{R}g(\omega) = \mathbb{R}v$，我们得到

$$\Phi_{B_0}(1, \omega)\mathbb{R}g(\omega)(\omega) = \mathbb{R}g(\varphi^1(\omega)). \tag{21}$$

设 $\tilde{\omega} \in \varphi^1(B_r)$ 和 $\tau > 0$ 满足：对于所有$t \in]0, \tau[$，均有 $\varphi^t(\tilde{\omega}) \notin \mathcal{V}_R$。那么，对于所有$t \in [0, \tau]$，我们有 g 的 Φ_{B_0}-不变性:

$$\Phi_{B_0}(t, \tilde{\omega})\mathbb{R}g(\tilde{\omega}) = \Phi_{B_0}(t, \tilde{\omega})\mathbb{R}v = \Phi_{A_0}(t, \tilde{\omega})\mathbb{R}v = \mathbb{R}g(\varphi^t(\tilde{\omega})). \tag{22}$$

若对于某个$t \in]0,\tau[$，有 $\varphi^t(\tilde{\omega}) \in \mathcal{V}_R$，则考虑满足 $\varphi^s(\omega) \in B_r$ 的$s > 0$，可得:

$$\begin{aligned}\Phi_{B_0}(t,\tilde{\omega})\mathbb{R}g(\tilde{\omega}) &= \Phi_{B_0}(t-s,\varphi^s(\tilde{\omega}))\Phi_{A_0}(s,\tilde{\omega})\mathbb{R}v \\ &= \Phi_{B_0}(t-s,\varphi^s(\tilde{\omega}))\mathbb{R}g(\varphi^s(\tilde{\omega})) \\ &\overset{(20)}{=} \mathbb{R}g(\varphi^t(\tilde{\omega})).\end{aligned}$$

最后，(21)、(26)，以及最后一个等式表明，向量场 g 是 Φ_{B_0}不变的。

再次由推论 2.3 可知，若r 足够小，我们便得到

$$\sigma_p(A_0,B_0) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{23}$$

若 Φ_{B_0} 具有简单谱，问题便已解决。否则，我们改为对B_0 而非A_0证明该定理。

4.3. **定义B （在 $\mathcal{V}_S$上的拉伸）：** 定义如下

$$B(\omega) := \begin{cases} B_0(\omega), & \text{if } \omega \notin \mathcal{V}_S \\ S, & \text{if } \omega \in \mathcal{V}_S \end{cases}.$$

注意到 B和 B_0 具有相同的迹。事实上，$B = B_0$ 在 $\mathcal{V}_S$ 之外，而在$\mathcal{V}_S$ 中，我们有 $B_0 = R_{2\pi}$，二者的迹均为零（见(13)和(15)）。因此，由刘维尔公式和(19)，对所有 ω和 $t \geq 0$

$$\det \Phi_B(t,\omega) = \det \Phi_{B_0}(t,\omega) = \det \Phi_{A_0}(t,\omega). \tag{24}$$

由推论 2.3再次可知，若r 足够小，我们便得到

$$\sigma_p(B_0,B) < \frac{\epsilon}{3}. \tag{25}$$

注意，方向$E(\omega)$ 在 Φ_B 下的不变性在 $\varphi^t(\omega)$ 进入$\mathcal{V}_S$时失效。然而，对于 $\tilde{\omega} \in \varphi^1(B_r)$，由（17）和（26）可得

$$\Phi_B(1,\tilde{\omega})\mathbb{R}g(\tilde{\omega}) = \Phi_S(1,\tilde{\omega})\mathbb{R}v = \mathbb{R}v = \mathbb{R}\Phi_{R_{2\pi}}(1,\tilde{\omega})v = \Phi_{A_0}(1,\tilde{\omega})\mathbb{R}v = \mathbb{R}g(\varphi^1(\tilde{\omega}))$$

因此

$$\Phi_S(1,\tilde{\omega})E(\tilde{\omega}) = E(\varphi^1(\tilde{\omega})), \tag{26}$$

这对我们的目的已足够；参见图1。

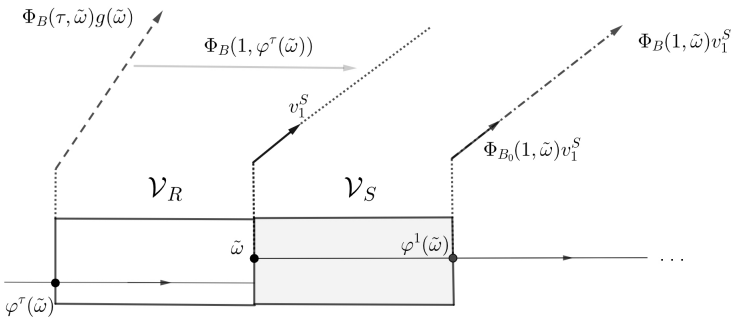

图 1. 无迹扰动示意图，其中标示了不变方向和拉伸效应。

$\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B)$ 是 Φ_B 的李雅普诺夫指数。我们假设 Φ_{B_0} 具有单点谱，即 $\lambda_1(B_0) = \lambda_2(B_0) = \lambda(B_0)$，因为否则该定理

即可得证。令 $\lambda(B_0)$ 为 Φ_{B_0} 的唯一李雅普诺夫指数。因此，对于几乎处处的 ω，有$\lambda(B_0) = \lambda(B0, \omega, v_1^S)$。由奥塞列茨定理可得

$$2\lambda(B_0) = \int \log\left|\det(\Phi_{B_0}(1,\omega))\right| d\mu \tag{27}$$

and

$$\lambda_1(B) + \lambda_2(B) = \int \log\left|\det(\Phi_B(1,\omega))\right| d\mu. \tag{28}$$

前面两个等式与（24）一起使我们可以得出

$$2\lambda(B_0) = \lambda_1(B) + \lambda_2(B) \tag{29}$$

因此，如果我们证明 λ_1（B） $> \lambda$（B_0），那么我们就得到 λ_1（B） $> \lambda_2$（B），定理 1 得证。回顾一下，随机向量场 g 在 Φ_{B_0} 下具有不变性，但就 Φ_B而言，当基动力学进入 $\mathcal{V}_S$时，不变性会失效。然而，根据（26），当基动力学离开 $\mathcal{V}_S$的瞬间，不变性便恢复。

对于 $\omega \in M$，我们考虑实映射 $b_0(\cdot, \omega)$，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均以如下方式定义：

$$b_0(t,\omega)g(\varphi^t(\omega)) = \Phi_{B_0}(t,\omega)g(\omega). \tag{30}$$

断言 4.1。 映射 b_0（t， ω）在 φ^t上构成一个余循环。

事实上，由于对所有 $\omega \in M$都有 $\Phi_{B_0}(0,\omega) = Id$，因此我们有 $b_0(0,\omega) = 1$；并且对任意 s、t，将 $b_0(t+s,\omega)$ 作用于 $g(\varphi^{t+s}(\omega))$，可得

$$\begin{aligned}
b_0(t+s,\omega)g(\varphi^{t+s}(\omega)) &\overset{(30)}{=} \Phi_{B_0}(t+s,\omega)g(\omega) \\
&= \Phi_{B_0}(t,\varphi^s(\omega)) \cdot \Phi_{B_0}(s,\omega)g(\omega) \\
&\overset{(30)}{=} \Phi_{B_0}(t,\varphi^s(\omega)) \cdot b_0(s,\omega)g(\varphi^s(\omega)) \\
&= b_0(s,\omega)\,\Phi_{B_0}(t,\varphi^s(\omega))g(\varphi^s(\omega)) \\
&= b_0(t,\varphi^s(\omega))b_0(s,\omega)g(\varphi^{t+s}(\omega)),
\end{aligned}$$

因此，$b_0(t+s,\omega) = b_0(t,\varphi^s(\omega))b_0(s,\omega)$。

由于随机向量场g 在 Φ_B 作用下并非完全不变，我们考虑两种不同的情形。令 $\varphi^{\{1,2\}}(B_r) = \varphi^1(B_r) \cup \varphi^2(B_r)$。对于 $\omega \in M$和满足 $\varphi^t(\omega) \notin \mathcal{V}_S \setminus \varphi^{\{1,2\}}(B_r)$ 的 $\tau \geq 0$，对所有 $0 \leq t \leq \tau$，我们考虑实映射 $b(\cdot,\omega)$，对所有$t \in [0,\tau]$，使得

$$b(t,\omega)g(\varphi^t(\omega)) = \Phi_B(t,\omega)g(\omega) \tag{31}$$

并且，对于所有 $\omega \in \varphi^1(B_r)$，我们令$b(1,\omega) \in \mathbb{R}$，使得

$$\Phi_B(1,\omega)g(\omega) = b(1,\omega)g(\varphi^1(\omega)). \tag{32}$$

若 $\varphi^t(\omega) \notin \mathcal{V}_S \setminus \varphi^{\{1,2\}}(B_r)$，则对所有 $0 \leq t \leq \tau$，有$B(\varphi^t(\omega)) = B_0(\varphi^t(\omega))$，并且

$$b(t,\omega)g(\varphi^t(\omega)) = \Phi_B(t,\omega)g(\omega) = \Phi_{B_0}(t,\omega)g(\omega) = b_0(t,\omega)g(\varphi^t(\omega)). \tag{33}$$

尤其是，这适用于 $\mathcal{V}_S$ 的输出与 $\mathcal{V}_S$ 的下一个输入之间。

断言 4.2. 如果 $\varphi^t(\omega)$， $\varphi^s(\omega) \notin \mathcal{V}_S \setminus \varphi^{\{1,2\}}(B_r)$，$b(t,\ \omega)$ 在 φ^t 上构成一个余循环，其意义是 $b(t+s,\ \omega) = b(t,\ \varphi^s(\omega))b(s,\ \omega)$。

证明与断言4.1 类似，同时还需考虑（32）。

取 ω 属于一个满测度点集，其中的点会无限多次访问B_r，且满足伯克霍夫遍历定理的结论。不失一般性，我们可以假设 $\omega \notin \mathcal{V}_r \cup \mathcal{V}_S$。对于$t \geq 0$，令

$$J_t(\omega) = \#\left\{j \in \mathbb{N}\colon\ j \leq t,\ \varphi^j(\omega) \in \varphi^2(B_r)\right\}.$$

回顾

$$\lambda(B, \omega, g(\omega)) \quad = \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_B(t, \omega)g(\omega)\|,$$

并且，我们可以在极限中通过考虑进入(ω)的时刻 $\mathcal{V}_S$、穿越流盒 $\mathcal{V}_S$ 的时刻 1（此处使用 (17)），以及再次返回 $\mathcal{V}_S$ 所需的时间等，来划分前一条轨道。为简单起见，我们递归地定义

$$\begin{aligned}
&s_0 = s_0(\omega) = \min\{t\colon \varphi^t(\omega) \in \varphi^1(B_r)\},\\
&\ell_0 = \ell_0(\omega) = s_0 + 1,\\
&s_n = s_0(\varphi^{\ell_{n-1}}(\omega)) \text{ and } \ell_n = s_n + 1, \text{ for } n \geq 1,\\
&\Delta_n = s_n - \ell_{n-1}, \text{ for } n \geq 1,\\
&\tilde{\omega}_n = \varphi^{s_n}(\omega) \in \varphi^1(B_r) \text{ and } \hat{\omega}_n = \varphi^{\ell_n}(\omega) \in \varphi^2(B_r), \text{ for } n \geq 1.
\end{aligned}$$

另一方面，由于B_0 具有单点谱，对于 μ-几乎处处的 ω,

$$\begin{aligned}
\lambda(B_0, \omega) \quad &= \quad \lambda(B_0, \omega, g(\omega))\\
&= \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_{B_0}(t, \omega)g(\omega)\|\\
&\overset{(30)}{=} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |b_0(t, \omega)|. \qquad (34)
\end{aligned}$$

另一方面，根据注3.1 和 (32)，对于 $\tilde{\omega} \in \varphi^1(B_r)$，我们有

$$b(1, \tilde{\omega})g(\varphi^1(\tilde{\omega})) = \Phi_B(1, \tilde{\omega})g(\tilde{\omega}) \overset{(17)}{=} e \cdot \Phi_{B_0}(1, \tilde{\omega})g(\tilde{\omega}) = e \cdot b_0(1, \tilde{\omega})g(\varphi^1(\tilde{\omega})). \quad (35)$$

不失一般性，我们可以考虑在无界集合 $\{t \geq 0$上的以下极限： $\varphi^t(\omega) \in \varphi^1(B_r)\}$。由伯克霍夫遍历定理可得

$$\begin{aligned}
\lambda(B, \omega, g(\omega)) \quad &= \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_B(t, \omega)g(\omega)\|\\
&\overset{(31)+(32)}{=} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left(\log |b(s_0, \omega)| + \sum_{j=0}^{J_t(\omega)-1} \log |b(\Delta_{j+1}, \hat{\omega}_{s_j}) b(1, \tilde{\omega}_{s_j})| \right)\\
&\overset{(33)+(35)}{=} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left(\log |b_0(s_0, \omega)| + \sum_{j=0}^{J_t(\omega)-1} \log |b_0(\Delta_{j+1}, \hat{\omega}_{s_j}) \cdot e \cdot b_0(1, \tilde{\omega}_{s_j})| \right)\\
&\overset{\textit{Claim } 4.1}{=} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |b_0(t, \omega)| + \lim_{t\to\infty} \frac{J_t(\omega)}{t}\\
&\overset{(30)}{=} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\Phi_{B_0}(t, \omega)g(\omega)\| + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{1}_{\mathcal{V}_S}(\varphi^t(\omega))\, dt\\
&= \quad \lambda(B_0, \omega, g(\omega)) + \mu(\mathcal{V}_S),
\end{aligned}$$

这意味着 $\lambda_1(B, \omega) > \lambda(B0, \omega)$，因此 $\lambda_1(B) > \lambda(B_0)$。由 (29) 可得$\lambda_1(B) > \lambda(B_0) > \lambda_2(B)$，从而 B 具有简单谱。此外，根据 (18)、(23) 和 (25)，我们有 $\sigma_p(A,B) < \epsilon$，定理 1 现已得证。 □

显然，考虑集合 $\mathcal{K}_0^1$ 时，在推论 1 中，等式 (27) 和 (28) 变为 $2\lambda(B_0) = \lambda_1(B) + \lambda_2(B) = 0$。因此，这次的结论将是：对于任意 σ_p-接近 A 的 $B \in \mathcal{K}_0^1$，有 $\lambda_1(B) > 0$，并且 $\lambda_2(B) = -\lambda_1(B) < 0$。

致谢： 作者部分获得了 FCT——“科学与技术基金会”的资助，资助通过贝拉内陆大学数学与应用中心（CMA-UBI）提供，项目编号为 UIDB/MAT/00212/2020。MB 部分获得了“动力系统中的均值与极值”项目（PTDC/MAT-PUR/4048/2021）的资助。MB 还感谢 CMUP 提供了开展本研究所需的条件。

参考文献

[1] W. Ambrose，《遍历流的表示》，《数学年刊》42（1941），第3期，723–739页。[2] W. Ambrose，S. Kakutani，《保测变换的结构与连续性》，《杜克数学杂志》9（1942），25–42页。[3] D. Amaro，M. Bessa，H. Vilarinho，《由二阶线性齐次微分方程导出的 L^p 余循环的平凡李雅普诺夫谱的泛性》（已投稿）。[4] A. Arbieto，J. Bochi，《L^p 泛性余循环具有单点李雅普诺夫谱》，《随机性与动力学》3（2003）73–81页。勘误，同上，3（2003）419–420页。[5] L. Arnold，《随机动力系统》，Springer Verlag，1998。[6] L. Arnold，N. Cong，《具有简单李雅普诺夫谱的线性余循环在 L^∞ 中稠密》，《遍历理论与动力系统》19（1999）1389–1404页。[7] L. Arnold，N. Cong，《关于随机矩阵乘积的李雅普诺夫谱的简单性》，《遍历理论与动力系统》17（1997）1005–1025页。[8] L. Arnold，H. Crauel，J.-P. Eckmann 编，《李雅普诺夫指数》，会议论文集，奥伯沃尔法赫，1990，Springer 数学讲义第1486卷。Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，1991。[9] L. Arnold，V. Wihstutz 编，《李雅普诺夫指数》，会议论文集，不来梅，1984，Springer 数学讲义第1186卷。Springer-Verlag，柏林、海德堡、纽约，1986。[10] A. Avila，《$SL(2,\mathbb{R})$-余循环的正李雅普诺夫指数的稠密性》，《美国数学会杂志》24（4）（2011）999–1014页。[11] E. Cornelis，M. Wojtkowski，《李雅普诺夫特征指数为正的判据》，《遍历理论与动力系统》4（1984）527–539页。[12] M. Bessa，《大周期参数激励下马蒂厄方程的扰动》，《动力系统及其应用进展》7（1）（2012）17–30页。[13] M. Bessa，H. Vilarinho，《允许简单谱和平凡谱大量出现的 L^p 余循环的精细性质》，《微分方程杂志》256（7）（2014）2337–2367页。[14] M. Bessa，J. Bochi，M. Cambrainha，C. Matheus，P. Varandas，D. Xu，《双曲基底上半单李群余循环的最大李雅普诺夫指数为正》，《巴西数学会公报》（新系列）（2018）49:73–87页。[15] J. Bochi，《零李雅普诺夫指数的泛性》，《遍历理论与动力系统》22（2002）1667–1696页。[16] J. Bochi，M. Viana，《泛性保体积映射与辛映射的李雅普诺夫指数》，《数学年刊》161（3）（2005）1423–1485页。[17] Bonatti，C.，Gómez-Mont，X.，Viana，M.，《确定性矩阵乘积的非零李雅普诺夫指数的泛性》，《庞加莱研究所非线性分析年刊》20（2003）579–624页。[18] N. D. Cong，《泛性有界线性余循环具有简单李雅普诺夫谱》，《遍历理论与动力系统》（2005），25，1775–1797页。[19] Duarte，P.，Klein，S.，《高维拟周期余循环的正李雅普诺夫指数》，《数学物理通讯》332（1）（2014）189–219页。

[20] R. Fabbri，二维线性微分系统中双曲性的泛性，意大利文，《意大利数学联合会通报》A辑、数学与文化增刊8（1）（1998）109–111页。[21] R. Fabbri，R. Johnson，二维微分系统中指数二分性的泛性，《纯粹与应用数学年刊》第四辑178（2000）175–193页。[22] R. Fabbri，R. Johnson，关于某些 $SL(2,\mathbb{R})$值余循环的李雅普诺夫指数，《微分方程与动力系统》7（3）（1999）349–370页。[23] R. Fabbri，R. Johnson，L. Zampogni，关于某些 $SL(2,\mathbb{R})$值余循环的李雅普诺夫指数 *II*，《微分方程与动力系统》18（1-2）（2010）135–161页。[24] X. Feng，K. Loparo，随机谐振子的几乎必然不稳定性，《SIAM应用数学杂志》50（3）（1990）744–759页。[25] Ledrappier，F.：平稳矩阵序列的指数正性。载于：Arnold，L.，Wihstutz，V.（编）《李雅普诺夫指数》（不来梅，1984）。《数学讲义》第1886卷，第56–73页，Springer，纽约（1986）。[26] T. Kato，《线性算子扰动理论》，第2版，Springer，1980。[27] A. Leizarowitz，有限状态马尔可夫过程驱动的谐振子的李雅普诺夫指数，《SIAM应用数学杂志》49（2）（1989）404–419页。[28] V. M. Millionshchikov，在所有线性微分方程组集合中稠密的、具有积分分离性的系统，《微分方程》5（1969）850–852页。[29] M. Nerurkar，作为强可达线性微分系统解而产生的连续余循环的稠密子集中存在正指数，《当代数学丛书》，美国数学会215（1998）265–278页。[30] O. Knill，稠密的有界可测 $SL(2,R)$ 余循环的正李雅普诺夫指数，《遍历理论与动力系统》12（2）（1992）319–331页。[31] V. Oseledets，乘法遍历定理：动力系统的李雅普诺夫特征数，《莫斯科数学会会刊》19（1968）197–231页。[32] R. H. Risch，有限项积分问题，《美国数学会汇刊》139（1969），167–189页。[33] D. Rudolph，遍历流的二值阶梯编码，《数学杂志》150（1976）201–220页。[34] M. Viana，《几乎所有双曲系统上的余循环都具有非零李雅普诺夫指数》，《数学年刊》167（2）（2008）643–680页。[35] D. Xu，《辛余循环的正李雅普诺夫指数的稠密性》，《欧洲数学会杂志》21（10）（2019）3143–3190页。

数学与应用中心（CMA-UBI），贝拉因特里奥尔大学，Rua Marquês d'Ávila e Bolama，6201-001，科维良，葡萄牙。电子邮箱地址：dinis.amaro@ubi.pt

电子邮箱地址： bessa@ubi.pt

电子邮箱地址： helder@ubi.pt