arXiv:2301.04910v1 [physics.comp-ph] 12 Jan 2023

# 关于泡沫弹性行为中尺寸效应符号的问题

Stephan Kirchhof[1],Alfons Ams[1], 和Geralf H¨utter[1,2]

[1]弗赖贝格矿业与技术大学，力学与流体动力学研究所，德国弗赖贝格[2]勃兰登堡科特布斯-森夫滕贝格工业大学，力学与数值方法教席，德国科特布斯

2023年1月13日

**摘要**

泡沫材料具有良好的刚度和强度重量比，因此被应用于轻量化工程。然而，在结构弯曲或拉伸等许多应用中，宏观结构与泡沫介观结构（如胞元尺寸）之间的尺度分离相对较弱，泡沫的力学性能似乎会受到尺寸影响。在泡沫的某些基础测试中，观察到了正尺寸效应和负尺寸效应，即材料表现得比根据较大试样所预期的更柔顺或更硬。对足够小的试样进行测试颇具挑战，因为必须避免试样制备过程中胞壁受损或加载装置造成的任何干扰。因此，文献中相关数据相对较少，且结果在一定程度上相互矛盾。

为避免试样制备或支承带来的问题，本研究采用基于真实中密度陶瓷泡沫CT数据的虚拟测试。从生成的体素数据中“切取”多个不同尺寸的样品。随后，通过有限单元法进行自由振动分析，直接“测量”每个虚拟样品的表观弹性性能，从而避免载荷施加或支承造成的任何干扰。结果显示，各样品尺寸对应的表观模量离散性很大，但在所研究的所有基本变形模式（弯曲、扭转、单轴）中，均呈现明显的负尺寸效应。最后，将结果与文献中现有的实验数据进行定性和定量比较，发现了共同趋势，同时也提出了一些尚待解决的问题。

*Foam, cellular material, elastic size effect, bending, torsion, virtual testing*

## 1 引言

天然和人造泡沫材料兼具轻质与优异的力学性能[4]。泡沫可依据多项标准进行分类，例如开孔或闭孔泡沫，或依据其块体材料是金属、陶瓷还是生物材料等进行分类。过去十年间，增材制造取得了长足进步，使人们能够设计泡沫介观结构的任意细节，从而定制此类泡沫状材料的特定性能。这些材料如今被称为点阵材料或超材料，具体名称取决于介观结构的细节，参见 [5, 18]。下文将使用一般术语胞状固体 [4] 。

在工程应用中使用胞状固体，需要表征其有效力学行为 ，以便在结构的设计周期内预测构件的可靠性。不过，

在许多应用场景中（生物结构中也是如此），杨氏模量或强度等（表观）有效力学性能取决于试样尺寸。这种所谓的尺寸效应[18] 可能为正，也可能为负；也就是说，与对足够大的试样进行测试所得的预期相比，小试样可能更硬，也可能更柔顺。尺寸效应出现的原因在于，有效性能的定义要求结构长度尺度远大于相关的材料长度尺度——而胞状固体的小试样由于其胞元相对较大，可能无法满足这一条件。

Lakes 及其同事关于骨 [17, 46] 和若干种聚合物泡沫 [2, 19–21, 34, 37]的开创性研究，为泡沫材料在弯曲和扭转中的尺寸效应提供了实验依据。所有这些实验均显示出正尺寸效应（“越小越硬”）。相比之下，Brezny 和 Green [6] 报告了常规泡沫材料在静载荷下弯曲时存在负尺寸效应，Liebold 和 M¨uller [23, 24] 则报告了其第一弯曲固有频率存在负尺寸效应。

Dunn 和 Wheel [9]以及 Waseem 等人 [43] 、Rueger 和 Lakes [35, 36, 38, 39]也报告了超材料在弯曲中存在正尺寸效应。不过，对于规则介观结构，这种效应可以依据施泰纳定理，用材料远离中性轴的偏移来解释 [27, 45, 47] 。因此，如果在同一种超材料中以另一种方式构造表面 [1, 10]，就会出现相反的尺寸效应。最近，Reasa 和 Lakes [31] 提出了一个假设：根据试样尺寸相对于胞元尺寸的大小，可能存在不同的效应区间。

不同研究团队也观察到，在单轴压缩的弹性阶段存在负尺寸效应 [3, 25, 34]。相比之下，Chen 和 Fleck [7] 在 “ 受限压缩 ” 条件下观察到屈服应力存在正尺寸效应。Dillard 等人 [8] 也报告了塑性行为中的正尺寸效应（尽管存在由孔洞导致的应力集中）。

与这些为数不多的实验数据相比，关于泡沫材料和超材料尺寸效应的数值研究数量众多。不过，这些研究对于理解真实泡沫材料行为的意义目前仍然有限：直接数值模拟（DNS），即对介观结构进行离散解析的模拟，大多针对周期结构开展 [1, 9, 11–15, 29, 32, 33, 45, 47]。关于（或多或少）不规则介观结构的少数研究 [22, 26, 42] 仅限于平面模型（前述 DNS 研究也绝大多数如此）。即便是像 [30], 中那样的随机生成的三维模型，其结果能否推广到真实泡沫材料也仍是一个问题。

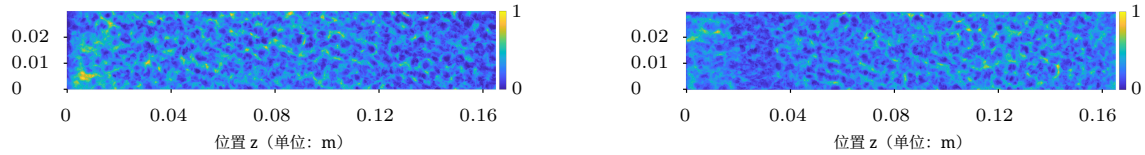
总之，可以说，针对具有规则介观结构的超材料，已有大量关于尺寸效应的数值和实验研究，这些研究证实了弯曲或扭转中的正尺寸效应。对于具有随机介观结构的传统泡沫材料，可用的直接数值模拟很少（且高度理想化），实验结果则更少。这些为数不多的实验结果在弯曲时的定性行为方面相互矛盾，即究竟存在正尺寸效应还是负尺寸效应。相关实验的问题在于，小试样的制备以及对这类试样施加载荷容易受到许多潜在误差源的影响，尤其是机械加工造成的表层损伤（会导致人为的负尺寸效应），以及夹持和载荷施加（会导致人为的正或负尺寸效应） [2, 6, 30]。

本研究旨在提供一套关于真实泡沫尺寸效应的深入且经统计验证的数据集，以消除 上述误差来源。为此，利用计算机断层扫描（CT）生成真实泡沫的体素表示，随后从中“切取”不同尺寸、不同位置的试样，再通过计算机模拟对其进行虚拟“测试”。

# 2 材料与方法

## 2.1 泡沫材料

本研究中的试样由碳结合氧化铝（$Al_2O_3$ – C）陶瓷泡沫制成，其标称孔密度为每英寸 10 个孔隙（ ppi）。这些泡沫是通过将陶瓷浆料 [40]浸渍到聚氨酯泡沫中制备的。浆料由氧化铝（66 wt.%）、作为黏结剂的 Carbores P（20 wt.%）、炭黑 N991（6.3 wt.%）和石墨 AF（7.7 wt.%）组成。浸渍过程结束后，将泡沫离心并烧制，使塑料部分烧尽，因此形成




(a) 试样1　　(b) 试样2

图1：特定 x 和 z 位置处沿深度（y 方向）的平均材料含量，显示了泡沫材料的不均匀性。蓝色区域表示材料含量较低（例如，数值为 0 时表示孔洞），黄色区域则表示致密部分。

中空支杆。该工艺制得 50 个试样，尺寸为 30 mm×40 mm×175 mm（W×H×L）。其相对密度介于 16.5% 和 25.7% 之间。本研究选取的试样相对密度分别为 19.4%（试样1）和 20%（试样2）。图1展示了材料沿厚度方向的平均材料含量，以呈现材料非均质性的情况。

此外，支杆材料的力学性能尤其值得关注。通过块体材料测试，测得陶瓷块体材料的杨氏模量为 $E_{\mathrm{bulk}} = 20$吉帕，而泊松比可假设为 $\nu_{\mathrm{bulk}} = 0.2$ [44]。采用气体比重瓶通过体积法估算碳结合氧化铝块体材料的密度为 $\varrho_{\mathrm{bulk}} = 2990.6\mathrm{kg/m}^3$。

相较于原始聚氨酯泡沫，采用陶瓷泡沫的优势在于其支杆直径较大，因此可减少CT扫描所需的工作量。较粗的支杆使得可以采用更大的体素尺寸，从而根据CT中的测量原理和截距定理获得更大的扫描体积。此外，较大的支杆直径也允许直接数值模拟采用更大的单元尺寸，从而减少计算量。

## 2.2 通过计算机断层扫描生成虚拟表示

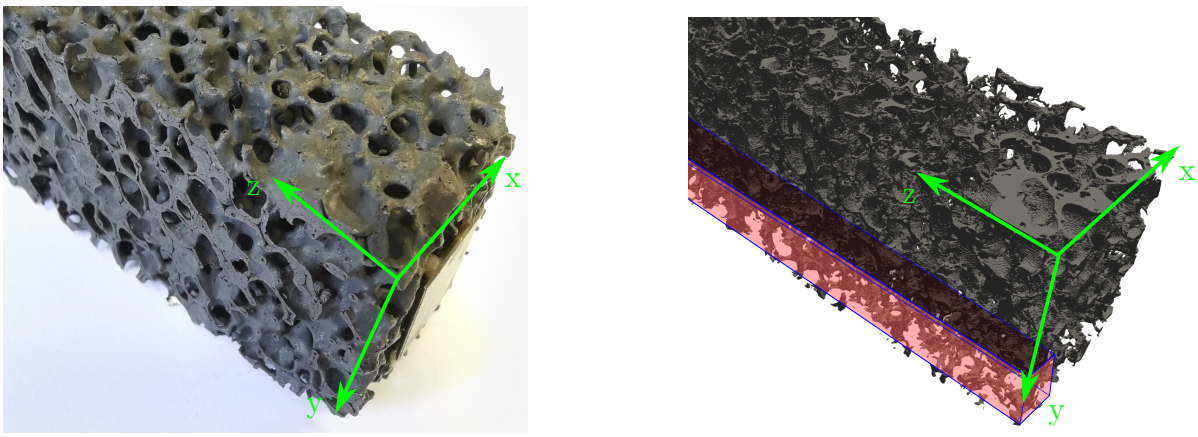
为获得支杆系统的体积图像，采用计算机断层扫描（CT），该扫描由商业供应商 YXLON Inspection Services 执行。所提供的数据集的空间分辨率（体素尺寸）为 $\Delta z = 115\,\mu\mathrm{m}$，生成的数组尺寸为 $348\times261\times1521$ 个体素。灰度分辨率为 8 位，即 256 个灰度值。

随后，执行了若干图像处理步骤，以去除孔隙区域中的噪声，并提高前景与背景之间的对比度。之后，通过阈值分割识别支杆系统，其中阈值的选取使得该关系

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \varrho_{\mathrm{bulk}} \left(\Delta z\right)^3 = m_{\mathrm{specimen}} \tag{1}$$

成立。此处，质量 $m_{\mathrm{specimen}}$ 是相应试样的称量质量。由于常见的计算机断层扫描设备中，某一位置测得的灰度值与相应质量之间并非一一对应，因此这一步是必要的。体素的值 $c_i$ 用于标识线性索引中的某一位置 $i$ 处是前景（1）还是背景（0），其中 $N$是CT扫描中的体素数量。图2展示了真实结构与CT重建结果的对比。

两个试样中的孔径均已通过分水岭变换进行图像分割并提取出来 [28]。了解孔径对于样品高度的归一化以及后续评估非常重要。由于泡沫结构具有随机性，孔径呈现一定的分布。有关该分布的更多信息见 [16]。此外， $y$方向上的孔径大于其他两个空间




(a) 真实泡沫　　(b) 分割后的CT图像

图2：真实试样的一部分与CT扫描中对应部分的对比。红色高亮区域表示最小虚拟试样的尺寸。

表1：用于生成虚拟样品的泡沫试样参数。 $E_{\mathrm{eff}}$、 $G_{\mathrm{eff}}$ 和 $\nu_{\mathrm{eff}}$ 是根据虚拟实验中最大样品的结果确定的。

| | | 试样1 | 试样2 |
|---|---|---|---|
| $\varrho_{\mathrm{rel}}$ | [1] | 0.194 | 0.2 |
| $d_{\mathrm{p-x}}$ | [mm] | 5.3 | 5.8 |
| $d_{\mathrm{p-y}}$ | [mm] | 6.7 | 6.9 |
| $d_{\mathrm{p-z}}$ | [mm] | 5.6 | 5.6 |
| $d_{\mathrm{p}}$ -球 | [mm] | 5.5 | 5.1 |
| $E_{\mathrm{eff-b,x}}$ | [吉帕] | 0.433 | 0.458 |
| $E_{\mathrm{eff-b,y}}$ | [吉帕] | 0.482 | 0.487 |
| $E_{\mathrm{eff-l}}$ | [吉帕] | 0.486 | 0.579 |
| $G_{\mathrm{eff}}$ | [吉帕] | 0.240 | 0.248 |
| $\nu_{\mathrm{eff}}$ | [1] | 0.01 | -0.01 |

表明该结构具有轻微各向异性特征的方向。试样在 $x$方向的平均孔径为 $d_{\mathrm{p-x}}$ ，在 $y$方向为 $d_{\mathrm{p-y}}$ ，在 $z$ 方向为 $d_{\mathrm{p-z}}$ ；相应球体的直径 $d_{\mathrm{p-ball}}$ 和相对密度 $\varrho_{\mathrm{rel}}$ 也已测定，结果如表1所示。在这些参数中，数值 $d_{\mathrm{p-ball}}$ 将用于后续试样尺寸的归一化。

该表已包含通过下文所述的虚拟实验得出的有效杨氏模量值，包括弯曲（绕 $x$ 轴和$y$轴）、纵向加载以及扭转所得的剪切模量。由两个弯曲方向和纵向加载确定的杨氏模量平均值相差10–15%，这一差异不可忽视，但显然小于下文将要研究的其他效应。此处仅需指出，采用振动测量实验方法（如 [16] 中所述）也测定了该材料其他试样的有效杨氏模量，得到的数值为$E_{\mathrm{eff-b,\ y}} = 0.689$ 吉帕和 $E_{\mathrm{eff-l}}$ =0。749 吉帕。这些数值比表1中的数值高约30%。这一偏差可能表明，第2.1节提及的 $E_{\mathrm{bulk}}$ 对于当前这批材料而言可能偏低。不过，对于后续研究而言， $E_{\mathrm{bulk}}$ 的影响无关紧要，因为结果均以归一化形式呈现。

利用现有的 CT 扫描，从两个试样的体素数据中“切割”出虚拟实验所需的样本，如下所示：

1. $x$方向的样品尺寸选为 16 个体素的整数倍。

表2：每个试样生成的虚拟样本的尺寸和数量

| 尺寸（$x$/$y$/$z$） | 试样1 | 试样2 |
|---|---|---|
| 7.36 毫米 × 11.04 毫米 × 175毫米 | 4 个样本 | 6 个样本 |
| 11.04 毫米 × 16.56 毫米 × 175毫米 | 6 个样本 | 6 个样本 |
| 16.56 毫米 × 23.92 毫米 × 175毫米 | 4 个样本 | 5 个样品 |
| 23.92 毫米 × 36.8 毫米 × 175毫米 | 4 个样品 | 4 个样品 |

2. sam 为更好地区分特征模态， $y$方向的样品尺寸约为 $x$ 方向尺寸的 1.5 倍。 .

3. $z$ 方向的尺寸为 1520 体素。

4. CT扫描中样品在 $x$-$y$平面上的位置由两个随机整数设定，这两个整数用于指定坐标系的原点。

不同样品尺寸下生成的虚拟样品数量见表2。

## 2.3 虚拟实验

上述虚拟样品（从完整泡沫试样的CT体素图像中切割而得）通过采用有限单元法的完全解析模拟进行虚拟测试，所用求解器为开源软件FCMLab [48]。块体材料假定呈线弹性行为，采用上一节2.1中给出的 $E_{\mathrm{bulk}}$ 和 $\nu_{\mathrm{bulk}}$。为避免支承或载荷施加方式导致局部变形场受到扰动的影响，计算了自由虚拟样品的动力特征模态和特征频率。其中，考察了各方向上第一弯曲模态、第一扭转模态和第一纵向模态对应的角向特征频率 $\omega_{\mathrm{b}x}$、 $\omega_{\mathrm{b}y}$、 $\omega_{\mathrm{t}}$、 $\omega_{\mathrm{l}}$。

在传统梁理论中，这些角向特征频率为

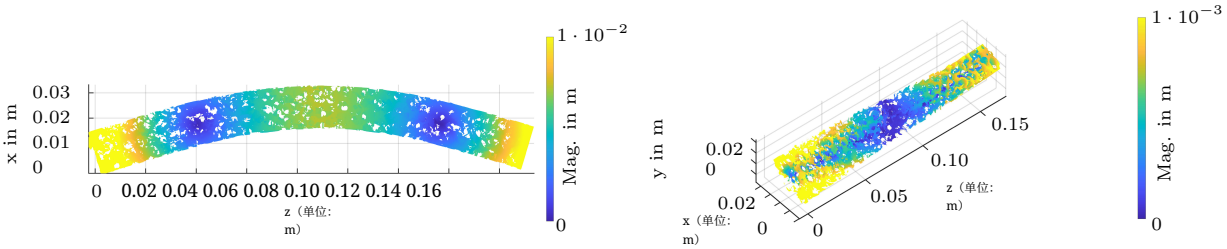
$$\omega_{\mathrm{b}} \approx \frac{4.73^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{EI_{\mathrm{b}}}{\rho A}\cdot\frac{1+12\frac{I_{\mathrm{b}}}{\ell^2 A}}{1+\pi^2\frac{I_{\mathrm{b}}}{\ell^2 A}\left(\frac{E}{\kappa G}+2\pi\right)}} \tag{2}$$

$$\omega_{\mathrm{t}} = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{GI_{\mathrm{t}}}{\rho I_{\mathrm{p}}}} \tag{3}$$

$$\omega_{\mathrm{l}} = \frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,. \tag{4}$$

其中， $\ell$ 指所考虑样品的长度， $I_{\mathrm{b}}$、 $I_{\mathrm{p}}$ 和 $I_{\mathrm{t}}$ 分别表示相应横截面关于弯曲的截面二次矩、极惯性矩和扭转截面惯性矩。对于所考虑的矩形截面 $A = w \times h$，其截面性质为 $I_{\mathrm{b}} = \frac{wh^3}{12}$、 $I_{\mathrm{p}} = wh\frac{h^2+w^2}{12}$，并且当 $h/w = 1.5$时， $I_{\mathrm{t}} = 0.196hw^3$。请注意，式（2）甚至包含了铁木辛柯梁理论的修正项 [41]，以避免样品长细比产生的任何伪影（尽管该项并不影响下文所示的主要趋势）。有 $\kappa = 5/6$，而弹性模量与剪切模量之比可表示为 $E/G = 2(1+\nu)$。在计算中，根据表1中的数值假定 $\nu = \nu_{\mathrm{eff}}$ 为常数（同时考虑到 $\nu$ 对式（2）完全可以忽略不计）。

利用虚拟测试计算出相应的角向特征频率后，通过求解方程（2）–（4），即可分别得到剪切模量和杨氏模量的表观值$G_{\mathrm{app}}$ 和 $E_{\mathrm{app}}$。表观杨氏模量的数值 $E_{\mathrm{app,b}}$ 和 $E_{\mathrm{app,l}}$ 带有额外的下标，用于表示它们分别是通过方程（2）从第一弯曲模态中提取，还是通过方程（4）从纵向模态中提取。




（a）弯曲　　（b）扭转

图3：虚拟实验中的特征模态

# 3 结果

图 3 展示了虚拟测试中的两个特征模态，分别用于提取弯曲和扭转条件下的杨氏模量与剪切模量表观值。下文将以尺寸效应比 [2] 表示结果

$$\Omega = \frac{E_{\mathrm{app}}}{E_{\mathrm{eff}}} \tag{5}$$

定义为测得的（真实或虚拟）响应与连续介质力学经典柯西理论相应预测值之比。具体而言，式（5）以杨氏模量表示，其中 $E_{\mathrm{eff}}$ 为有效值，即在理论上无限大的试样中测得的值。实际操作中，表1所列每个测试系列中最大试样的 $E_{\mathrm{app}}$ 平均值被用作有效杨氏模量 $E_{\mathrm{eff}}$。这一条件意味着，最大试样的尺寸效应比 Ω 等于 1（在合理的精度范围内）。使用 Ω 而非杨氏模量的绝对值有一个优点：泡沫块体材料的杨氏模量 $E_{\mathrm{bulk}}$ 会被约去，因此可以比较块体材料不同的泡沫（实际上，$E_{\mathrm{bulk}}$ 只是本虚拟实验的一个输入值）。

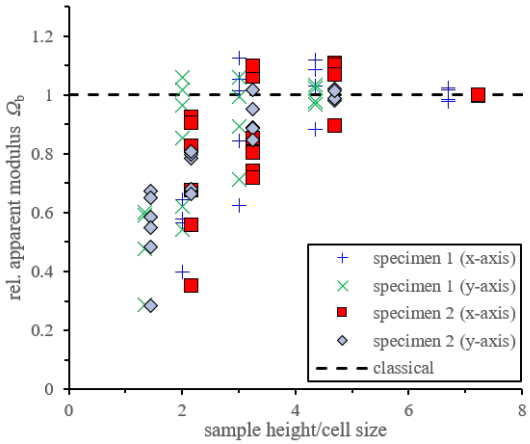
同样，尺寸效应比 $\Omega_{\mathrm{b}}$、$\Omega_{\mathrm{l}}$ 和 $\Omega_{\mathrm{t}}$ 的下标分别表示它们是针对弯曲、纵向变形还是扭转确定的；其中 $\Omega_{\mathrm{t}}$ 当然是相对于剪切模量 $G_{\mathrm{app}}$ 而非杨氏模量定义的。

## 3.1 弯曲

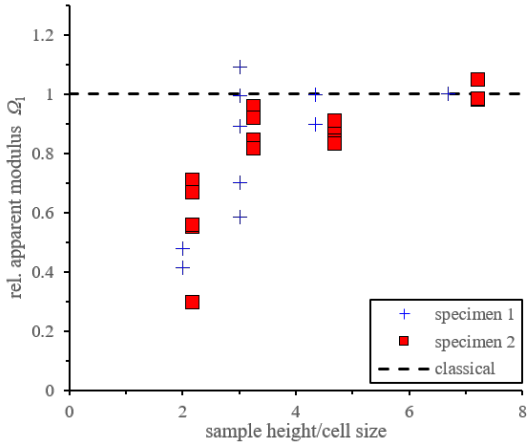
图4a绘出了不同虚拟样品的表观杨氏模量提取值，以 Ω 的归一化形式表示，并以相对样品尺寸为横坐标。相对样品尺寸定义为绝对样品尺寸（此处取高度）除以所研究试样的 $d_{\mathrm{p-ball}}$。首先可以看出，每个试样中两个最大样品尺寸对应的平均值都接近于 1。因此可以得出结论，这些样品尺寸足够大，能够以合理的精度确定有效杨氏模量 $E_{\mathrm{eff}}$。其次，图4a显示出明显的负尺寸效应，即试样高度与胞元尺寸之比低于约 3 或 4 的试样，其表观杨氏模量 $E_{\mathrm{app}}$低于较大试样，因此在这一范围内，平均尺寸效应比 Ω 小于 1。显然，对于当前泡沫而言，靠近试样表面 [6] 处连接较少的支杆所产生的边缘软化效应，至少比支杆额外传递的力矩 [2]更为显著。现在首次可以得出结论，这种边缘软化效应并非试样切割或机械加工所造成的伪影，因为本研究中的相关操作是在虚拟环境下以理想精度完成的。

关于绕 $x$ 轴和 $y$ 轴的弯曲，似乎至少不存在明显的各向异性；例如，如果孔隙的主轴相对于所选坐标系发生旋转，就可能出现这种各向异性。

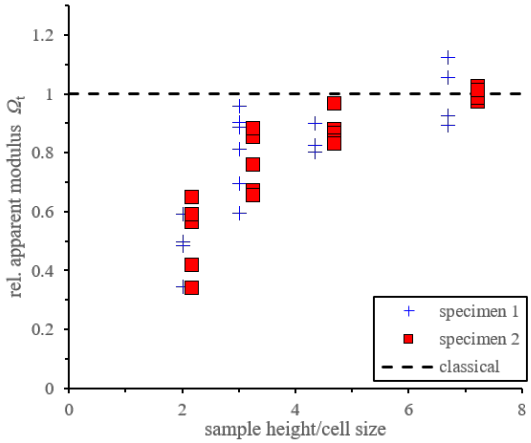
此外，图 4a 显示，$E_{\mathrm{app}}$ 的离散性（因此 Ω 的离散性）会随着试样尺寸减小而增大。这种现象是合理且可预期的，因为较小的试样在方向上包含的孔隙较少



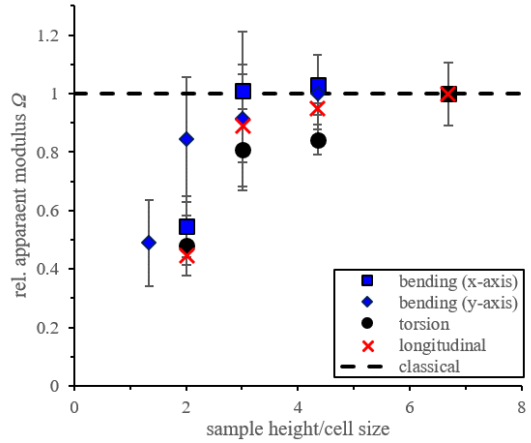

(a) 弯曲




(b) 纵向




(c) 扭转




(d) 对比

图 4：不同加载模式下的相对表观模量

厚度，因此在此范围内，单个孔隙及其具体形态的相对影响确实会增大。

### 3.2 单轴变形

图 4b 展示了纵向变形模式的相应数据；根据经典杆理论，这些模式与单轴应力状态相关。在这种情况下，对于两个试样的每个切割样品，只有一个相关模态，因此每个试样仅得到一条曲线。从定性上看，图 4b 中的情况与弯曲情形相同。与足够大的试样相比，较小试样的表观杨氏模量较低。然而，与弯曲情形相比，仍可观察到细微的定量差异。尤其是对于试样2，第二大的试样平均高度约为 3.5 个孔隙，其数值与主要的（估算）回归曲线相差约 10%。不过，后者的数值与当前提取的数值预计相差不会超过几个百分点，而且明显存在负尺寸效应。

### 3.3 扭转

作为具有基本解释的第三类振动模态，我们提取了图 3b 所示的扭转模态特征频率，并通过公式 (3) 利用这些频率提取表观剪切模量$G_{\mathrm{app}}$ 。图 4c 以相同的归一化方式展示了这些数值，即 $\Omega_{\mathrm{t}}$ 随横截面与胞元尺寸之比的变化。

同样，每个试样只有一张图，因为试样中的每个样品都只有一个扭转模态。定性而言，扭转情形呈现出与图 4a 和图 4b 中相同的行为。此外，与弯曲情形相比，相对刚度的下降幅度更大；而与单轴情形相比，测得的相对刚度在定量上没有明显差异。与纵向情形不同，这里也没有观察到偏离预期回归曲线的情况。同样，每个试样中两个最大样品尺寸对应的表观模量相差约 15%，因此，最大样品的有效剪切模量可能尚未完全达到。不过，毫无疑问，扭转振动表现出明显的负尺寸效应。

### 3.4 比较

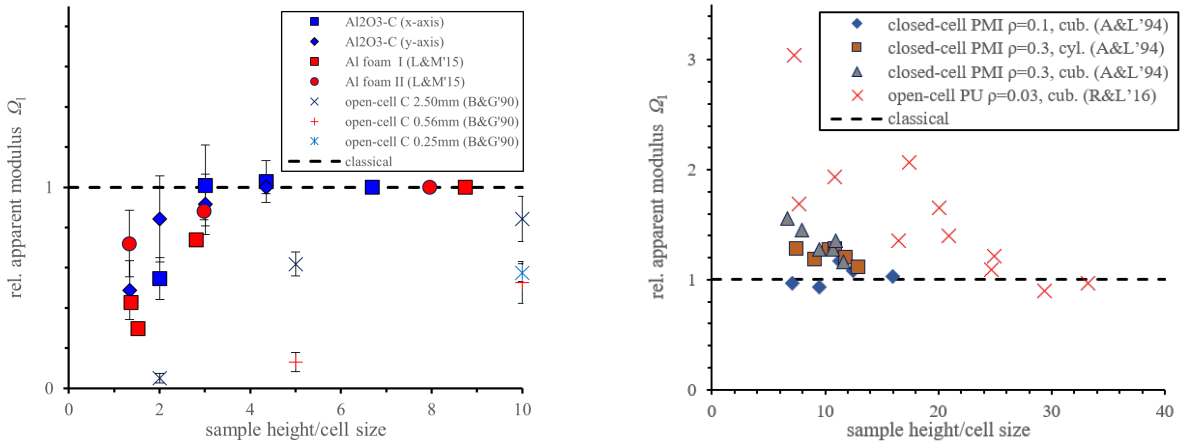
归一化的 三种基本变形模态的表观模量在图 4d 中进行了比较。其 e
误差条 对应于对尺寸相同的受检样品估算出的标准差。

正如从另外三幅图中可以预料的那样，三种模态的数据点都落在同一范围内。这表明，当试样相关方向上的横截面所包含的胞元少于约 6 至 8 个时，表观模量会降低。这一发现说明，对于三种模态，表面不完整胞元所对应的介观机制是相同的。

## 4 讨论

接下来，我们将本研究的结果与文献中关于泡沫材料弹性行为尺寸效应的实验结果进行比较，首先讨论图5中的弯曲。

图5a汇总了 Brezny 和 Green [6] （图例中简称为“B&G’90”）以及 Liebold 和 M¨uller [23, 24]（简称为“L&M’15”）的数据；他们也观察到了负尺寸效应。Brezny 和 Green 研究了由开孔聚合物泡沫转化而来的玻璃碳低密度泡沫材料（$\varrho_{\mathrm{rel}} \approx 0.035$）。Liebold 和 M¨uller 通过振动分析，测得了采用两种生产工艺制备的铝泡沫的表观模量（泡沫-I 采用粉末冶金生产，泡沫-II 采用气体注入法生产）。根据给定的质量密度与致密铝质量密度的对比，可估算出相对密度 $\varrho_{\mathrm{rel}}$ 分别为 0.15 和 0.10。




(a) 存在负尺寸效应　　(b) 存在正尺寸效应

图5：文献中弯曲尺寸效应实验结果的比较

从图5a可以看出，本研究归一化后的结果与 Liebold 和 M¨uller 的结果在合理的误差范围内甚至在数值上都相符。相比之下，Brezny 和 Green 的数据与这一范围存在显著差异。Brezny 和 Green 研究的三种化学成分相同但孔径不同（2.5 mm、0.56 mm、0.25 mm）的泡沫材料彼此之间也存在显著差异，即使在归一化表示中也是如此。因此，Brezny 和 Green 认为制造过程产生的伪影可能会造成影响（事实上，他们的目的是确定能够可靠测量 $E_{\text{eff}}$ 的足够试样尺寸）。

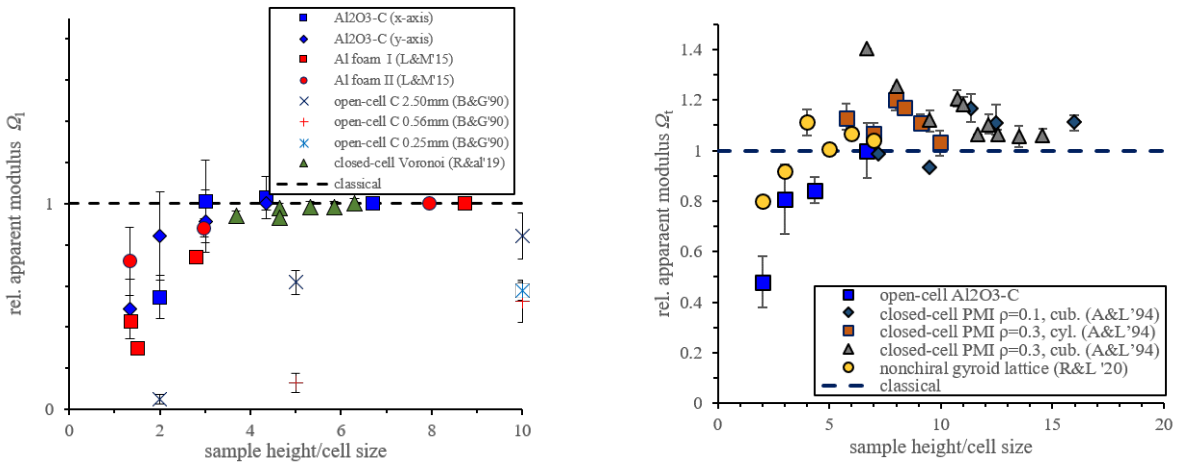
相　　比之下，Lakes 及其合作者 [2, 34] 观察到弯曲中存在正尺寸效应。其结果　　s
他们的研 在图5b中对这些研究进行了定量比较。

图5a和图5b不仅显示出相反的趋势，而且从两幅图的横坐标还可以发现，在不同的尺度分离比（高度/胞元尺寸）范围内均观察到了尺寸效应；尤其是Rueger和Lakes [34] 研究的低密度开孔聚氨酯泡沫[1]（胞元尺寸：1.2 mm）（简称“R&L'16”）。不过，Anderson和Lakes [2] 研究中的低密度聚甲基丙烯酰亚胺泡沫 $\varrho_{\text{rel}} = 0.1$ （“A&L'94”）至少与图5a中Liebold和M¨uller的研究结果以及本研究的结果并不矛盾。

图6a将本研究纵向模态的结果与Gibson、Onck及其合作者 [3, 42] （“G&O&al”）以及Rueger和Lakes [34]通过压缩试验获得的实验数据进行了比较。Gibson、Onck及其合作者研究了两种胞元拓扑结构不同的商用铝泡沫（估算值$\varrho_{\text{rel}} = 0.07 \ldots 0.08$）。它们的归一化压缩数据均与本研究结果高度吻合。此外，图6a还包含Rueger和Lakes [34] 研究中的压缩数据，该研究此前已在弯曲方面进行过考察。由于其数据点的离散性较大，本文将有效模量 $E_{\text{eff}}$ 以及由此得到的图中水平值$\Omega_{\text{l}} = 1$ 取为6个最大样品（总计12个）的平均值。从定性上看，Rueger和Lakes [34] 的测量结果同样显示出压缩过程中的负尺寸效应。但数据点数量相对较少且离散性过大，无法进行可靠的定量比较。此外，图6a还展示了Rajput等人 [30] （“R&al'19”）通过Voronoi镶嵌生成的闭孔泡沫随机介观结构的三维直接数值模拟（DNS）结果。这些数据落在本研究与上述研究结果的共同范围内。Teko˘glu等人 [42] 采用梁单元进行的二维随机DNS结果（此处未显示）也符合这一点。

图　　图 6b 展示了本研究的扭转结果，并与 Anderson 和 Lakes 对两种 PMI 泡沫所得的相应数据进行了比较　　s

[1]此外，还测试了另一种同类型的泡沫，其胞元尺寸为 0.4 mm，测试结果也见于 [34] 。但在按胞元尺寸归一化后，其相关数据点甚至落在图5b所示的水平轴范围之外。 [20, 21] 中的数据也同样如此。




(a) 单轴压缩　　(b) 扭转

图6：文献中不同实验结果与本文模拟结果的比较

（“A&L ’94”）以及 Reasa 和 Lakes 对增材制造的非手性螺旋体结构所得的数据 [31] （“R&L ’20”）。后者在样品高度与胞元尺寸之比约为 4 或 5 以下时，呈现出负尺寸效应区域，与本研究的数据相似；对于较轻的 PMI 泡沫，数据 $\varrho_{\mathrm{rel}} = 0.1$ 至少与这一趋势并不矛盾。只有相对密度为 $\varrho_{\mathrm{rel}} = 0.3$ 的较致密 PMI 泡沫表现出明确的正尺寸效应。最近，Reasa 和 Lakes [31] 提出假设，认为样品尺寸可能存在尺寸效应相反的不同区间。本研究的数据未显示出这些区间，但在考察更大的样品之前，不能排除它们的存在。

# 5 总结与结论

本研究从真实开孔陶瓷泡沫的CT扫描图像中截取了39个不同尺寸的虚拟样品。通过自由振动分析确定了这些样品的表观弹性模量。为此，使用开源有限胞元代码计算了弯曲、扭转和单轴加载下的特征频率。该方法确保表观模量既不受样品制备过程影响，也不受载荷施加或支承造成的扰动影响。三种基本模态均呈现出明显的负尺寸效应。与依据经典弹性理论对较大试样的预期相比，较小试样的柔顺性更高。

在本文的第二部分，将所得结果与文献中（相对有限的）泡沫材料实验数据进行了比较。在单轴加载方面，如果将数据按胞元尺寸归一化，本文研究在定性上与文献中所有找到的数据一致，在一定程度上甚至在定量上也一致。关于弯曲时的表观杨氏模量，与Liebold和M¨uller的另一项研究也发现了定量上的一致；与Brezny 和 Green的一项研究则在定性上吻合。然而，Lakes及其同事在多项弯曲和扭转研究中观察到了相反的趋势。这些差异无法归因于泡沫材料的常见基本参数，例如相对密度或胞元拓扑结构（闭孔或开孔）。因此，文献中具有正或负尺寸效应的样本，包含了相对密度不同的各类代表。最近，Reasa和Lakes [31] 观察到螺旋体晶格在不同样品尺寸范围内呈现两种相反的趋势。

必须得出结论：目前关于真实泡沫材料在弯曲和扭转中的弹性尺寸效应的认知似乎尚不完整。还需要开展进一步的细致实验。尤其是，在相关的小尺寸样品范围内，单个数据点的巨大离散性必须通过足够数量的测试和/或独立研究团队重复实验来加以考虑。

所提出的基于CT图像切片进行虚拟测试的方法，可通过比使用真实样品更省力的方式可靠地实现这一点。

## 6 致谢

作者谨向弗赖贝格工业大学陶瓷、耐火材料与复合材料研究所提供样品材料表示感谢。

## 参考文献

[1] M. M. Ameen、O. Rokoˇs、R. H. J. Peerlings 和 M. G. D. Geers。表现出可逆图案转变的非线性周期材料中的尺寸效应。*Mech. Mater.*，124:55–70，2018年。doi: 10.1016/j.mechmat.2018.05.011.[2] W. B. Anderson 和 R. S. Lakes。Cosserat弹性和表面损伤导致的闭孔聚甲基丙烯酰亚胺泡沫尺寸效应。*J. Mater. Sci.*，29(24):6413–6419，1994。doi: 10.1007/BF00353997.[3] E. W. Andrews、G. Gioux、P. Onck 和 L. J. Gibson。延性多孔固体中的尺寸效应。第二部分：实验结果。*Int. J. Mech. Sci.*，43(3):701–713，2001。doi: 10.1016/S0020-7403(00)00043-6.[4] M. F. Ashby 和 L. J. Gibson。胞状固体：结构与性质。剑桥大学出版社联合社，英国剑桥，第二版，1997年。[5] S. Bargmann、B. Klusemann、J. Markmann、J. E. Schnabel、K. Schneider、C. Soyarslan 和 J. Wilmers。非均质材料三维代表性体积单元的生成：综述。《材料科学进展》，96:322–384，2018年。doi: 10.1016/j.pmatsci.2018.02.003.[6] R. Brezny 和 D. J. Green。胞状材料边缘效应的表征。*J. Mater. Sci.*，25(11):4571–4578，1990。doi: 10.1007/bf01129908.[7] C. Chen 和 N. A. Fleck。金属泡沫受约束变形中的尺寸效应。*J. Mech.Phys. Solids*，50(5):955–977，2002。doi: 10.1016/S0022-5096(01)00128-4.[8] T. Dillard、S. Forest 和 P. Ienny。镍泡沫变形与断裂行为的微态连续体建模。《欧洲力学杂志*A*辑：固体》，25(3):526–549，2006。doi: 10.1016/j. euromechsol.2005.11.006.[9] M. Dunn 和 M. Wheel。承载三维机械超材料行为中的尺寸效应异常。《哲学杂志》，页码1–18，2019年。doi: 10.1080/14786435.2019.1671996.[10] J. C. Frame、M. A. Wheel 和 P. E. Riches。牛皮质骨尺寸效应的数值研究与实验验证。*Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.*，34(1):e2903，2018年。doi: 10.1002/cnm.2903.[11]R. N. Glaesener、C. Lestringant、B. Telgen 和 D. M. Kochmann。发生有限变形的拉伸主导和弯曲主导周期桁架的连续体模型。*Int. J. SolidsStruct.*，171:117–134，2019年。doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.04.022.[12] C. S. Ha、M. E. Plesha 和 R. S. Lakes。具有负泊松比的手性三维各向同性晶格。《固体物理学报*B*辑》，253(7):1243–1251，2016年。doi: 10.1002/pssb.201600055.[13] G. H¨utter。关于均匀化过程中微形态与微极连续体的微观变形微观—宏观关系。*J. Mech. Phys. Solids*，127:62–79，2019年。doi: 10.1016/j. jmps.2019.03.005.

[14] A. Iltchev、V. Marcadon、S. Kruch 和 S. Forest。周期性胞状材料的计算均匀化：在结构建模中的应用。Int. J. Mech. Sci.，93:240–255，2015年。doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.02.007.[15] R. J¨anicke、H.-G. Sehlhorst、A. Duster 和 S. Diebels。周期性网格结构的微形态双尺度建模。Int. J. Multiscale Com.，11(2):161–176，2013年。[16] S. Kirchhof。开孔泡沫的结构动力学研究。博士论文，弗赖贝格工业大学，弗赖贝格，2022年。URL https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:105-qucosa2-806015.[17] R. Lakes。单个骨单位的扭转性能。J. Biomech.，28(11):1409–1410，1995年。doi: 10.1016/0021-9290(95)00057-o.[18] R. Lakes。复合材料与超材料。世界科学出版社，2020年。doi: 10.1142/11715.[19] R. Lakes 和 W. J. Drugan。正方形横截面Cosserat 弹性杆的弯曲：理论与实验。J. Appl. Mech.，82(9):091002，2015年。doi: 10.1115/1.4030626.[20] R. S. Lakes。多孔固体的尺寸效应与微观力学。J. Mater. Sci.，18(9):2572–2580，1983年。doi: 10.1007/BF00547573.[21] R. S. Lakes。两种多孔固体的实验微弹性。Int. J. Solids Struct.，22(1):55–63，1986年。[22] S. Liebenstein、S. Sandfeld 和 M. Zaiser。胞状结构弹性中的尺寸效应与无序效应：从离散模型到连续体表述。Int. J. Solids Struct.，146:97–116，2018年。doi: 10.1016/j.ijsolstr.2018.03.023.[23] C. Liebold。弹性中的尺寸效应——实验、分析与数值研究。博士论文，柏林工业大学，2015年。[24] C. Liebold 和 W. H. M¨uller。高阶连续体在弯曲尺寸效应研究中的应用：理论与近期实验结果。载于《广义连续体：经典与先进材料模型》，第237–260页。施普林格国际出版社，查姆，2016年。doi: 10.1007/ 978-3-319-31721-2\ 12.[25] L. Maheo、P. Viot、D. Bernard、A. Chirazi、G. Ceglia、V. Schmitt 和 O. Mondain-Monval。多尺度开孔泡沫的弹性行为。Compos. B. Eng，44(1):172–183，2013年。doi: 10.1016/j. compositesb.2012.06.006.[26] U. M¨uhlich。由同类随机图生成的随机弹性梁网络的变形与失效起始。载于《生物力学与超材料的发展及新方法》，第393–408页。施普林格国际出版社，查姆，2020年。doi: 10.1007/978-3-030-50464-9\ 22.[27] N. Nourmohammadi、N. P. O'Dowd 和 P. M. Weaver。均匀纤维间距薄层纤维复合材料的有效弯曲模量。Int. J. Solids Struct.，196-197:26–40，2020年。doi: 10.1016/j.ijsolstr.2020.04.004.[28] J. Ohser 和 K. Schladitz。材料结构的三维图像：处理与分析。Wiley-VCH，魏因海姆，2010年。ISBN 978-3-527-31203-0。doi: 10.1002/9783527628308.[29] R. D. Pham 和 G. H¨utter。拓扑结构与孔隙率对蜂窝结构胞状材料条带在剪切、拉伸和弯曲作用下尺寸效应的影响。Mech. Mater.，154:103727，2021年。doi: 10.1016/j.mechmat.2020.103727.

[30] M. S. Rajput、M. Burman、J. K¨oll 和 S. Hallstr¨om。结构泡沫材料的压缩——测试程序与试样尺寸效应的实验和数值评估。夹层结构与材料期刊，21(1):260–288，2019年。ISSN 1099-6362。doi: 10.1177/1099636217690500。[31] D. R. Reasa 和 R. S. Lakes。螺旋曲面晶格的非经典手性弹性。《物理评论快报》，125(20):205502，2020年。doi: 10.1103/physrevlett.125.205502。[32] G. Rizzi、F. Dal Corso、D. Veber 和 D. Bigoni。基于平面六角晶格识别二阶梯度弹性材料。第二部分：力学特性与模型验证。*Int. J.Solids Struct.*，176–177:19–35，2019年。[33] G. Rosi 和 N. Auffray。六角晶格中频率相关的声束聚焦与转向的连续介质建模。《欧洲力学杂志*A*辑：固体》，77:103803，2019年。ISSN 0997-7538。doi: 10.1016/j.euromechsol.2019.103803。[34] Z. Rueger 和 R. S. Lakes。开孔聚合物泡沫中的实验Cosserat弹性。《哲学杂志》，96(2):93–111，2016年。doi: 10.1080/14786435.2015.1125541。[35] Z. Rueger 和 R. S. Lakes。单向复合材料中的强Cosserat弹性效应。《应用数学与物理杂志》，68(3):54，2017年。doi: 10.1007/s00033-017-0796-6。[36] Z. Rueger 和 R. S. Lakes。横观各向同性聚合物晶格中的强Cosserat弹性。《物理评论快报》，120(6):065501，2018年。doi: 10.1103/PhysRevLett.120.065501。[37] Z. Rueger 和 R. S. Lakes。弱Cosserat耦合致密泡沫弹性常数的实验研究。《弹性杂志》，37:101–115，2019年。doi: 10.1007/s10659-018-09714-8。[38] Z. Rueger、D. Li 和 R. S. Lakes。四方负泊松比晶格中Cosserat弹性效应的观察。《固体物理学报*B*辑》，第1600840页，2017年。doi: 10.1002/pssb.201600840。[39] Z. Rueger、C. S. Ha 和 R. S. Lakes。Cosserat弹性晶格。《力学》，54:1983–1999，2019年。doi: 10.1007/s11012-019-00968-7。[40] K. Schwartzwalder 和 A. V. Somers。多孔陶瓷制品的制造方法，1963年。[41] W. Shi、Z.-B. Shen、X.-L. Peng 和 X.-F. Li。具有不等端部质量的自由-自由Timoshenko梁的频率方程与共振频率。*Int. J. Mech. Sci.*，115-116:406–415，2016年。doi: 10.1016/j.ijmecsci.2016.07.018。[42] C. Teko˘glu、L. J. Gibson、T. Pardoen 和 P. R. Onck。泡沫中的尺寸效应：实验与建模。《材料科学进展》，56(2):109–138，2011年。doi: 10.1016/j.pmatsci.2010.06.001。[43] A. Waseem、A. J. Beveridge、M. A. Wheel 和 D. H. Nash。孔洞尺寸对模型非均质材料微极连续介质本构特性的影响。《欧洲力学杂志*A*辑：固体》，40: 148–157，2013年。[44] J. Werner。成分、处理和温度对炭结合耐火材料杨氏弹性模量的影响。学位论文，弗赖贝格工业大学，弗赖贝格，2014。URL https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:105-qucosa-155296。[45] M. A. Wheel、J. C. Frame 和 P. E. Riches。尺寸越小就总是越硬吗？论所谓广义连续介质中的尺寸效应。*Int. J. Solids Struct.*，67-68:84–92，2015年。doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.03.026。[46] J. F. C. Yang 和 R. S. Lakes。致密骨弯曲时微极弹性与偶应力弹性的实验研究。*J. Biomech.*，15(2):91–98，1982年。doi: 10.1016/0021-9290(82)90040-9。[47] M. Yoder、L. Thompson 和 J. Summers。晶格结构蜂窝材料中的尺寸效应：材料分布。*J. Mater. Sci.*，54(18):11858–11877，2019年。doi: 10.1007/s10853-019-03758-4。

[48] N. Zander、T. Bog、M. Elhaddad、R. Espinoza、H. Hu、A. Joly、C. Wu、P. Zerbe、A. D¨uster、S. Kollmannsberger、J. Parvizian、M. Ruess、D. Schillinger 和 E. Rank。FCMLab：用于MATLAB的有限单元研究工具箱。《*Adv. Eng. Softw.*》，74:49–63，2014。doi: 10.1016/j.advengsoft.2014. 04.004。