arXiv:2301.04921v2 [math.OA] 8 Feb 2023

一致 Roe 代数中的幽灵理想

QIN WANG 和 JIAWEN ZHANG

摘要。本文研究超出 Yu 的性质 A 范畴的一般度量空间的一致 Roe 代数的理想结构。受扩张图所产生的幽灵算子理想启发，并与几何理想的概念相对照，我们在一致 Roe 代数中引入幽灵理想的概念，其元素在无穷远处的某些方向上局部不可见。我们证明，几何理想和幽灵理想分别是 Skandalis-Tu-Yu 粗群胚的单位空间中具有相同不变开子集的理想格中的最小元和最大元，因此，理想结构的研究可以归结为对几何理想与幽灵理想之间的理想进行分类。作为应用，我们根据空间 Stone-Čech 边界中的极小点，对一致 Roe 代数中的极大理想给出了具体描述。我们还给出一个判据，以确保几何理想与幽灵理想具有相同的 K 理论，这有助于重新得到 Baum-Connes 型猜想的反例。此外，我们为度量空间引入部分性质 A 的概念，以刻画几何理想与幽灵理想重合的情形。

数学主题分类（*2020*）：*47L20, 46L80, 51F30*。关键词：一致 *Roe* 代数、粗群胚、几何理想与幽灵理想、极大理想、部分性质 *A*

1. 引言

Roe 代数是与度量空间相关联的C^* 代数，它们编码了底层空间的粗几何。Roe 在其关于高指标理论的开创性工作 [37], 中引入了它们，并发现 Roe 代数的 K 理论可作为开流形上椭圆微分算子高指标的承载体。因此，计算 Roe 代数的K 理论对于研究高指标理论至关重要，而一种务实且实用的方法是参考 Baum-Connes 型猜想 [3, 4, 25]。Roe 代数还有一个一致版本，它在高指标理论中同样发挥着关键作用（见 [46, 48]）。过去四十年间，围绕这一主题涌现了许多优秀成果（例如， [19, 24, 28, 53, 54]），推动了拓扑、几何学和分析学的显著进展（见，例如， [38, 39]）。

另一方面，（一致）Roe 代数的解析结构反映了底层空间的粗几何，而刚性问题则探讨能否通过相关的（一致）Roe 代数完全确定度量空间的粗几何。ˇ Spakula 和 Willett 最初在 [49], 研究了这一问题，随后十年间又出现了一系列相关研究 [6, 7, 8, 9, 30]。最近，一项卓越的工作彻底解决了一致情形下的这一问题

日期：2023年2月9日。QW 部分受到国家自然科学基金委员会（项目编号：11831006、12171156）和上海市科学技术委员会（项目编号：22DZ2229014）的资助。JZ 受到国家自然科学基金委员会（项目编号：11871342）的资助。1

[2], 这再次凸显了一致 Roe 代数在粗几何中的重要性。与此同时，一致 Roe 代数也迅速引起了数学物理研究者的浓厚兴趣，尤其是在拓扑材料和拓扑绝缘体理论中（参见例如， [20] 及其中的参考文献）。

鉴于其重要性，Chen 和第一作者发起了对（一致）Roe 代数理想结构的研究 [13, 14, 15, 16, 17, 51]。当底层空间具有 Yu 的性质 A 时，他们成功完整描述了一致 Roe 代数的理想结构（见 [14, 16]）。然而，超出性质 A 的范围后，整体情况仍远未明朗。

请注意，当底层空间来自一个配备词长度度量的离散群时，相应的一致 Roe 代数具有这样的形式：由该群自身作用在一个源自其 Stone-ˇCech 紧化的交换C^*-代数上所形成的交叉积（[26, 33]）。这类C^*-代数在动力系统中发挥着重要作用，其理想结构也已得到广泛研究（见例如， [29, 35, 44]）。更一般地，如下文所示，一般度量空间的一致 Roe 代数可以实现为约化群胚C^*-代数。近年来，对一般约化群胚C^*-代数理想结构的研究迅速兴起（见例如， [5, 10, 35]），部分原因在于它们对于研究C^*-代数的纯无穷性具有重要意义。

本文旨在系统研究一般离散度量空间的一致 Roe 代数的理想结构。为概述主要结果，我们先介绍一些概念。

设 (X,d) 是一个有界几何的离散度量空间（精确定义见第 2.2 节）。将 $l^2(X)$ 上的算子视为X-乘X 矩阵，我们称此类算子具有有限传播，若其非零项仅出现在主对角线周围有限宽度的邻近范围内（宽度由X上的度量测量；详见第 2.3 节）。所有有限传播算子构成 $B(l^2(X))$ 的一个 $*$-子代数，其范数闭包称为X 的一致 *Roe* 代数，记作$C^*_u(X)$）。

关于一致 Roe 代数，还有一种基于群胚的观点。回顾 [46]，Skandalis、Tu 和 Yu 引入了与离散度量空间X相关联的粗群胚$G(X)$这一概念，并成功地将粗几何与群胚理论联系起来。粗群胚$G(X)$是一个局部紧、豪斯多夫、 ´étale 且主的群胚（精确定义见第 2.5 节），其单位空间与X的 Stone-ˇCech 紧化 βX 相同。此外，一致 Roe 代数$C^*_u(X)$可解释为$G(X)$的约化群胚C^*-代数（另见 [40,第 10] 章）。

在 [14], Chen 与第一作者集中研究了一类一致 Roe 代数中的理想，其中有限传播算子在其中稠密；他们证明，这些理想可以利用粗群胚从几何上加以描述。更确切地说，回忆一下，子集 $U \subseteq \beta X$ 是不变的，如果γ 群胚 $G(X)$中任意一个源在 U 中的元素，其值域也在 U 中（见第 2.4 节）。如 [14] 所示（另见第 4 节），对于 $C^*_u(X)$ 中的任意理想I，可以关联一个 βX 的不变开子集 $U(I)$；反过来，对于 $U \subseteq \beta X$ 的任意不变开子集，可以关联 $C^*_u(X)$ 中的一个理想 $I(U)$。此外，这两个过程建立了

在 βX 的不变开子集与$C_u^*(X)$中的理想之间的一一对应，其中有限传播算子在其中稠密。

基于 [14], ，第一作者在 [51,定义 1.4]中引入了以下概念：

定义 A (定义 4.4)。设 (X,d) 是一个有界几何的离散度量空间。一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$ 中的理想 I 称为几何的，如果I 中所有有限传播算子构成的集合在I中稠密。

如上所述， [14, 定理 6.3] (另见命题 4.9)表明，$C_u^*(X)$ 中的几何理想完全由 βX的不变开子集确定，这也解释了这一术语。因此，$C_u^*(X)$ 中的几何理想易于处理，并且必具有$I(U)$的形式，其中$U \subseteq \beta X$是某个不变开子集，称为与 U 相关联的几何理想 (见定义 4.6)。此外，由 [16, 定理 4.4] 可知，当X 具有 Yu 的性质 A 时，$C_u^*(X)$中的所有理想都是几何理想。

然而，超出性质 A 的情形后，情况就变得复杂起来。正如 [14, 备注 6.5],中所指出的，当X 来自一列扩张图时，由所有幽灵算子构成的理想I_G 并非几何的（另见 [24]）。回顾一下，算子$T \in \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(X))$是幽灵算子，当$T \in C_0(X \times X)$，其中将$T$ 视为$X \times X$上的函数。幽灵算子由 Yu 引入，对于构造粗 Baum-Connes 猜想的反例至关重要（[24]）。

直接计算表明，I_G 对应的不变开子集与 $\mathrm{B}(\mathrm{l}^2(X))$ 中紧算子理想对应的不变开子集相同，二者均等于X（另见例 4.8 和 5.5）。因此，对于一般度量空间X 及其不变开子集$U \subseteq \beta X$，一致 Roe 代数$C_u^*(X)$中可能存在多个理想I 满足$U(I) = U$。因此，对$C_u^*(X)$的理想结构的研究可以归结为分析其格（其中序关系由包含映射给出）

$$\Im_U := \{I \text{ is an ideal in } C_u^*(X) : U(I) = U\} \tag{1.1}$$

对于每个不变开子集$U \subseteq \beta X$。

本文的一项主要贡献是在格 I_U 中找到最小元和最大元。根据 [14], 中的讨论，很容易看出，对于 $C_u^*(X)$ 中的任意理想 I，$U(I) \subseteq I$，这意味着几何理想$I(U)$ 是 I_U 中的最小元（见命题 4.10）。为了探究最大元，我们必须纳入 $C_u^*(X)$ 中每个满足 $U(I) = U$ 的理想I。受$U(I)$ 的定义启发（见等式 (4.1)），我们引入以下关键概念：

定义 B （定义 5.1）。 设 (X,d) 是一个具有有界几何的离散度量空间，且U 是 βX 的一个不变开子集。与U 相关联的幽灵理想定义为

$$\tilde{I}(U) := \{T \in C_u^*(X) : \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))} \subseteq U \text{ for any } \varepsilon > 0\},$$

其中 $\mathrm{supp}_\varepsilon(T) := \{(x,y) \in X \times X : |T(x,y)| \geq \varepsilon\}$，且 $\mathrm{r} : X \times X \to X$ 是投影到第一坐标的映射。

我们证明， $\tilde{I}(U)$ 确实是一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$ 中的一个理想（见引理 5.2），此外还得到以下所需结果：

定理 C (定理 5.4). 设(X,d) 是一个有界几何的离散度量空间，且 U 是 βX 的一个不变开子集。那么，$C_u^*(X)$ 中的任意理想 I 若满足 $U(I) = U$，则有...

介于 $I(U)$ 和 $\tilde{I}(U)$之间。更准确地说，几何理想 $I(U)$ 是格 $\Im_U$ *in (1.1)* 中的最小元，而幽灵理想 $\tilde{I}(U)$ 是其中的最大元。

定理 C 勾勒出 (1.1) 中格 I_U in 的边界，这是研究一般度量空间上一致 Roe 代数理想结构的重要一步。更准确地说，只要我们能够刻画每个不变开子集 $U \subseteq \beta X$ 对应的 $I(U)$ 与 $\tilde{I}(U)$ 之间的所有理想，就能完整描述一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$ 的理想结构。我们在第 9 节将此作为一个开放问题提出，并希望未来的工作能够解决它。

关于幽灵理想 $\tilde{I}(U)$，我们还根据 [50], 中发展的极限算子给出另一种刻画，表明 $\tilde{I}(U)$ 由沿 $(\beta X \setminus U)$ 方向消失的算子组成（见命题 5.6）。注意，幽灵˜算子在所有方向上都消失（见推论 5.7），因此 $I(U)$ 中的算子可以视为“部分”幽灵，这也阐明了该术语的由来。借助这一观点，我们发现了首位作者在 [51, 第 3] 节中构造的反例背后、针对 [14], 猜想的深层原因（见例 5.10）。

作为一项应用，我们成功描述了一致 Roe 代数中的极大理想。更准确地说，由定理 C 可直接推出，极大理想与 Stone-Čech 边界$\partial_\beta X := \beta X \setminus X$中的极小不变闭子集相对应。此外，借助[1] 中发展起来的极限空间理论 [50],，我们证明如下：

命题 D (命题 6.2、推论 6.3 和引理 6.5)。 设(X,d) 是一个有界几何的强离散度量空间，I 是一致 *Roe* 代数 $C_u^*(X)$中的一个极大理想。那么存在一点 $\omega \in \partial_\beta X$，使得 I 与幽灵理想 $\tilde{I}(\beta X \setminus X(\omega))$相同，其中 $X(\omega)$ 是 ω的极限空间。

满足命题 D 中条件的点 $\omega \in \partial_\beta X$ 称为极小点（见定义 6.4）。我们证明，即便在$X = \mathrm{Z}$ 这一简单情形下，边界中也存在若干非极小点：

定理 E (定理 6.8)。 对于赋予通常度量的整数群 整数集，边界 ∂_β整数集中存在非极小点。更确切地说，对于任意一个趋于无穷的序列 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中各项属于 整数集，且当 $n + m \to \infty$ 并且 n、m 时，$|h_n - h_m| \to +\infty$；以及任意满足 $\omega(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$ 的$\omega \in \partial_\beta$整数集，则 ω 是非极小点。

我们提供两种证明定理 E 的方法。一种是拓扑方法，利用了超滤子的若干构造和性质（附录 A 中回顾了这些内容）。另一种是C^*-代数方法，它依赖于以极限算子描述极大理想的方式（见引理 6.13），以及 Roch [36] 的一项近期结果。

回到式 (1.1) 中定义的格 I_U，我们已经注意到，通常 I_U包含多个元素。因此，探究 I_U 何时只有一个元素，或者等价地（由定理 C 可知），几何理想$I(U)$ 何时与幽灵理想 $\tilde{I}(U)$ 重合，将会是一个有趣且重要的问题。

[1]请注意，[50] 中发展的极限空间和极限算子理论仅涉及有界几何的强离散度量空间（精确定义见第 2.2 节）。虽然正如 [50] 中所指出的，这一假设不会损失一般性，但我们仍采用该假设以简化证明。

为研究这个问题，我们借助相应的群胚C^*-代数，进一步描绘几何理想和幽灵理想（见引理 4.7 和命题 5.9）。基于这些描述，我们证明，粗群胚的限制$G(X)_{\partial_\beta X\setminus U}$ 的可 amen 性可确保$I(U) = \tilde{I}(U)$（见命题 7.2）。同时，我们还讨论几何理想和幽灵理想的K-理论，并$\tilde{}$给出一个判据，以确保当 $* = 0$ 为 1 时，$K_*(I(U)) = K_*(I(U))$:

命题 F (命题 7.4)。 设 X 是一个具有有界几何的离散度量空间，且可粗嵌入某个希尔伯特空间。则对于任意不变开子集 $U \subseteq \beta X$，都有一个同构

$$(\iota_U)_* : K_*(I(U)) \longrightarrow K_*(\tilde{I}(U))$$

对于 $* = 0$，1，其中 ι_U 是包含映射。

将命题 F 应用于 $U = X$ 的情形，可部分恢复 [21, 命题 35]。这对于构造 Baum-Connes 型猜想的反例至关重要（粗版本见 [46]，边界版本见第 5] 节，后者基于第 3] 节中讨论的例子）。因此，命题 F 很可能会在高指标理论中找到更多应用。

反过来，自然会问 $I(U) = \tilde{I}(U)$ 是否意味着限制群胚 $G(X)_{\partial_\beta X\setminus U}$ 是可和的。注意，当 $U = X$ 时， [42, 定理 1.3] 意味着 $I(X) = \tilde{I}(X)$ 等价于 X 具有性质 A（另见例 4.8 和 5.5）；根据 [46, 定理 5.3]，这又等价于粗群胚 $G(X)$ 是可和的。受这些工作的启发，我们引入以下性质 A 的部分版本:

定义 G (定义 8.1)。 设 (X,d) 是一个有界几何的离散度量空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。若 X 具有朝向 $\partial_\beta X\setminus U$ 的部分性质 A，即 $G(X)_{\partial_\beta X\setminus U}$ 是可和的，我们就称之为如此。

F最后我们得到以下结论；当 $U = X$ 时，它恢复了 [42, 定理 1.3] :

定理 H (定理 8.21)。 设 (X, d) 是一个有界几何的强离散度量空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个可数生成的不变开子集。那么以下条件等价:

(1) X 具有朝向 $\beta X\setminus U$ 的部分性质 A；*(2)* $\tilde{I}(U) = I(U)$；*(3)* 全体幽灵算子构成的理想 I_G 包含于 $I(U)$。

请注意，定理 H 中用到了可数生成性这一技术条件（见定义 8.16）；许多例子都满足该条件（见例 8.17），包括X 本身。然而，正如例 8.20 所示，确实存在一个不是可数生成的不变开子集。

定理 H 的证明遵循 $U = X$ 情形的思路（参见 [42,定理 1.3]），并分为几个步骤。首先，我们展开定义 G 中的群胚语言，并给出类似于性质 A 定义的具体几何描述（见命题 8.2）。然后，我们引入部分算子范数局部化性质的概念（定义 8.9）；该概念是 [12]中引入的算子范数局部化性质（ONL）的部分版本。

与 Sako 关于性质 A 等价于 ONL 的结果（[43]）相对应，我们证明部分性质 A 等价于部分 ONL（见命题 8.12）。最后，借助可数生成性的假设，我们得出定理 H。

我们还指出，在定理 H 的证明中，我们使用了 Chen 和第一作者在 [14] 中引入的空间中的理想这一概念（另见定义 4.12），而不是直接使用 βX 的不变开子集。这样做的好处是可以在给定空间内进行研究，而无需进入神秘的 Stone-Čech 边界，从而使我们能够避开若干技术上的障碍（例如例如，注记 8.23）。

本文结构如下。第 2 节回顾粗几何与群胚理论的必要背景知识。第 3 节回顾 [50], 中发展的极限空间和极限算子理论，该理论是本文通篇使用的重要工具。第 4 节专门讨论 [14, 51], 中研究的几何理想这一概念（定义 A），并讨论它们在 (1.1) 中的理想格 I_U 里的极小性。我们在第 5 节引入幽灵理想这一关键概念（定义 B），证明定理 C，并给出若干供后文使用的刻画。随后，我们在第 6 节讨论一致 Roe 代数中的极大理想，并证明命题 D 和定理 E。第 7 节研究几何理想与幽灵理想何时相同的问题，讨论它们的K理论，并证明命题 F。接着，我们在第 8 节引入部分性质 A 这一概念（定义 G），并证明定理 H。最后，我们在第 9 节列出一些开放问题，并通过附录 A 记录本文通篇使用的超滤子概念及其性质。

致谢。 我们感谢 Kang Li 阅读本文早期稿件，并指出对于命题 F（见注 7.5），可数生成性的假设是多余的。我们还要感谢 Baojie Jiang 和 J´an ˇSpakula 提供的一些有益讨论。

2. 预备知识

2.1. 标准记号。 这里汇总全文所用的记号。对于一个集合X，用 $|X|$ 表示X的基数。对于子集$A \subseteq X$，用 χ_A表示A的特征函数，并定义 $\delta_x := \chi_{\{x\}}$，其中$x \in X$。

当X 是局部紧豪斯多夫空间时，我们用$C(X)$表示X上复值连续函数的集合，用$C_b(X)$表示X上有界连续函数的子集。回顾一下，函数$f \in C(X)$的支撑是集合$\{x \in X : f(x) , 0\}$的闭包，记作 $\mathrm{supp}(f)$；用$C_c(X)$表示紧支撑连续函数的集合。我们还用$C_0(X)$表示无穷远处消失的连续函数的集合，它是$C_c(X)$关于上确界范数 $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$下的闭包。

当 X 是离散的，记 $\mathrm{l}^\infty(X) := C_b(X)$ 和 $\mathrm{l}^2(X)$ 为 X 上复值平方可和函数构成的希尔伯特空间。记 $\mathrm{B}(\mathrm{l}^2(X))$ 为 $\mathrm{l}^2(X)$ 上所有有界线性算子构成的 C^*-代数，记 $\mathrm{K}(\mathrm{l}^2(X))$ 为 $\mathrm{l}^2(X)$ 上所有紧算子构成的 C^*-子代数。

对于离散空间 X，记其 Stone-ˇCech 紧化为 βX，并记 $\partial_\beta X := \check{\beta} X \setminus X$ 为 Stone-Cech边界。

2.2. **粗几何中的概念**。这里我们汇总粗几何中的必要概念，并引导读者前往 [32, 40] 了解更多详情。

对于离散度量空间 (X, d)，记闭球为 $B_X(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$，其中 $x \in X$ 且 $r \geq 0$。对于子集 $A \subseteq X$ 和 $r > 0$，记 A 在 X 中的 r-邻域为 $N_r(A) := \{x \in X : d_X(x, A) \leq r\}$。对于 $R > 0$，记 R-周缘为 $E_R := \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leq R\}$。

我们称 (X, d) 具有有界几何，如果对于任意 $r > 0$，数值 $\sup_{x\in X} |B_X(x, r)|$均有限。我们还称 (X,d) 为强离散，如果集合 $\{d(x, y) : x, y \in X\}$ 是 R 的离散子集。

约定。在本文余下部分中，我们用“X 是一个空间”作为“X 是一个有界几何的强离散度量空间”（如 [50] 所述）的简写。

我们指出，虽然我们的结果不需要强离散性这一假设也成立，但为简化证明，我们选择加入这一假设。正如 [50,第 2], 节所述，这不会损失一般性，因为总可以通过粗等价对离散度量空间进行修改，使其满足这一假设。

现在我们回顾 Yu 提出的性质 A 的概念（参见例如， [52, 命题 1.2.4], 其中证明了它与 Yu 原始定义的等价性）：

定义 2.1 ([54])。若空间 (X,d) 满足以下条件，则称其具有性质 A：对任意 ε，$R > 0$, 存在一个$S > 0$ 和一个函数$f : X \times X \to [0, +\infty)$，使得：

(1) $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$；(2) 对任意$x \in X$，都有 $\mathrm{P}_{z\in X} f(z, x) = 1$；(3) 对任意$x$、$y \in X$，若$d(x, y) \leq R$，则 $\mathrm{P}_{z\in X} |f(z, x) - f(z, y)| \leq \varepsilon$。

根据标准的归一化论证，我们得到以下结论：

引理 2.2. 空间 (X, d) 具有性质 A 当且仅当 对于任意 ε，$R > 0$，都存在 $S > 0$ 和函数 $f : X \times X \to [0, +\infty)$ 满足：

(1) $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$；*(2)* 对任意 $x \in X$，均有 $|\sum_{z\in X} f(z, x) - 1| \leq \varepsilon$；*(3)* 对任意 $x, y \in X$，若 $d(x, y) \leq R$，则 $\sum_{z\in X} |f(z, x) - f(z, y)| \leq \varepsilon$。

我们还需要利用核来刻画性质 A。回顾一下，定义在 核空间 X 上的函数是 $k: X \times X \to \mathrm{R}$。若对任意 $n \in$ 自然数集,$x_1, \ldots, x_n \in X$ 以及 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathrm{R}$，均有以下结论，则称 k 为正定型：

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j k(x_i, x_j) \geq 0.$$

以下是众所周知的结果（例如， [52, 命题 1.2.4]）：

引理 2.3. 空间(X,d) 具有性质 A，当且仅当对于任意 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $S > 0$ 以及一个正定型核 $k: X \times X \to \mathbb{R}$ 满足以下条件：

(1) 对于 $x, y \in X$，有 $k(x, y) = k(y,x)$ 且 $k(x,x) = 1$；*(2)* 对于满足 $d(x, y) \geq S$ 的 $x, y \in X$，有 $k(x,y) = 0$；*(3)* 对于满足 $d(x, y) \leq R$ 的 $x, y \in X$，有 $|1 - k(x,y)| \leq \varepsilon$。

我们还回顾一下粗嵌入的概念：

定义 2.4. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间，且 $f: X \to Y$ 为一个映射。若存在函数 $\rho_\pm: [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足 $\lim_{t\to+\infty} \rho_\pm(t) = +\infty$，使得对任意 x、$y \in X$，都有

$$\rho_-(d_X(x,y)) \le d_Y(f(x),f(y)) \le \rho_+(d_X(x,y)).$$

如果另外存在 $C > 0$ 使得 $Y = \mathrm{N}_C(f(X))$，那么我们称f是一个粗等价，并称（X,d_X）和（Y,d_Y）是粗等价的。

2.3. 一致 Roe 代数。设 (X, d) 是一个离散度量空间。每个算子 $T \in B(l^2(X))$ 都可以写成矩阵形式 $T = (T(x,y))_{x,y\in X}$，其中 $T(x,y) = \langle T\delta_y, \delta_x\rangle \in \mathbb{C}$。我们也将 $T \in B(l^2(X))$ 视为 $X \times X$ 上的有界函数，即 $l^\infty(X \times X)$ 中的一个元素。记 $\|T\|$ 为 T 在 $B(l^2(X))$ 中的算子范数，而将 T 视为 $l^\infty(X \times X)$ 中的函数时，记 $\|T\|_\infty$ 为其上确界范数。显然，对于任意 $T \in B(l^2(X))$，都有 $\|T\|_\infty \le \|T\|$。

给定算子 $T \in B(l^2(X))$，我们将T 的支撑 定义为

$$\mathrm{supp}(T) := \{(x,y) \in X \times X : T(x,y) \neq 0\},$$

并将T 的传播 定义为

$$\mathrm{prop}(T) := \sup\{d(x,y) : (x,y) \in \mathrm{supp}(T)\}.$$

定义 2.5. 设 (X,d) 是一个空间。

(1) $B(l^2(X))$ 中所有有限传播算子构成一个 $*$-代数，称为X 的代数一致Roe代数，记作 $C_u[X]$。对于每个$R \ge 0$，记子集

$$\mathbb{C}_u^R[X] := \{T \in \mathfrak{B}(\ell^2(X)) : \mathrm{prop}(T) \le R\}.$$

显然，$C_u[X] = \overline{\bigcup_{R\ge 0} C_u^R[X]}$。

(2)X 的一致 Roe 代数 定义为 $C_u[X]$ 在 $B(l^2(X))$ 中的算子范数闭包，它构成一个C^*-代数，记作$C_u^*(X)$。

以下概念最初由 Yu 引入：

定义 2.6. 若算子 $T \in C_u^*(X)$ 满足 $T \in C_0(X \times X)$，其中将 T 视为 $l^\infty(X \times X)$ 上的函数，则称其为幽灵。换言之，对于任意 ε，存在一个有限子集 $F \subseteq X$，使得对于任意 $(x,y) \notin F \times F$，都有 $|T(x,y)| < \varepsilon$。

容易看出，$C_u^*(X)$ 中所有幽灵算子构成$C_u^*(X)$ 的一个理想，记作 I_G。直观地说，幽灵算子在所有方向上于无穷远处都是局部不可见的。下文将对此作更精确的说明。

2.4. **群胚与 C^*-代数**。这里汇集群胚的一些基本概念和术语。更多细节可见 [34], ，或参见 [45] 中关于 ´etale 情形的讨论。

回忆一下，群胚 是一个小范畴，其中每个态射都可逆。更准确地说，一个群胚由一个集合 G、一个称为单位空间的子集 $G^{(0)}$、两个映射 $s, r : G \to G^{(0)}$（分别称为源 映射和目标 映射），以及一个复合律组成：

$$\mathcal{G}^{(2)} := \{(\gamma_1,\gamma_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : s(\gamma_1) = r(\gamma_2)\} \ni (\gamma_1,\gamma_2) \mapsto \gamma_1\gamma_2 \in \mathcal{G},$$

以及一个逆映射 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$。这些运算满足若干公理，包括结合律，以及 $G^{(0)}$ 中的元素充当单位元这一事实。

对于$x \in G^{(0)}$，记 $G^x := r^{-1}(x)$ 和 $G_x := s^{-1}(x)$。对于$Y \subseteq G^{(0)}$，记 $G^Y{}_Y := r^{-1}(Y) \cap s^{-1}(Y)$。注意，$G^Y{}_Y$ 是 G 的一个子群胚（即在乘法和逆运算下稳定），称为 G关于 Y的约化。如果一个子集Y 满足不变性，即 $r^{-1}(Y) = s^{-1}(Y)$，则称其为不变的，此时我们用 G_Y 代替 $G^Y{}_Y$。

局部紧豪斯多夫群胚是指配备局部紧豪斯多夫拓扑的群胚，且其结构映射（复合和逆）相对于诱导拓扑是连续的。如果值域映射（因而源映射）是局部同胚，则称该群胚为 *étale*（也称为*r*-离散）。显然，在这种情况下，每个纤维 G^x（以及 G_x）在诱导拓扑下都是离散的，并且 $G^{(0)}$ 在 G 中既开又闭。群胚的 étale 性可视为群情形下离散性的类比。

例 2.7. 设X为一个集合。X的对群胚作为集合为$X \times X$，其单位空间为 $\{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$，为简便起见，将其与$X$ 等同。源映射是投影到第二坐标，值域映射是投影到第一坐标。复合定义为 $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$，其中$x$、$y$、$z \in X$。当 X 是离散豪斯多夫空间时，$X \times X$ 是局部紧豪斯多夫étale 群胚。

现在我们介绍与群胚相关的代数。这里我们只关注 可迁群胚的情形，并引导读者参阅 [34] 了解一般情形。

设 G 是一个局部紧、豪斯多夫且 可迁的群胚，其单位空间为 $G^{(0)}$。注意，空间 $C_c(G)$ 关于以下运算构成一个 $*$-对合代数：对于f、$g \in C_c(G)$，

$$\begin{aligned}(f * g)(\gamma) &= \sum_{\alpha \in G_{s(\gamma)}} f(\gamma\alpha^{-1})g(\alpha),\\ f^*(\gamma) &= \overline{f(\gamma^{-1})}.\end{aligned}$$

考虑 $C_c(G)$ 上定义的以下代数范数：

$$\|f\|_I := \max\left\{\sup_{x \in G^{(0)}} \sum_{\gamma \in G_x} |f(\gamma)|,\ \sup_{x \in G^{(0)}} \sum_{\gamma \in G_x} |f^*(\gamma)|\right\}.$$

$C_c(G)$ 关于范数 $\|\cdot\|_I$ 的完备化记作 $L^1(G)$.

最大（全）群胚 C^*-代数 $C^*_{\max}(G)$ 定义为 $C_c(G)$ 关于以下范数的完备化：

$$\|f\|_{\max} := \sup \|\pi(f)\|,$$

其中，上确界取遍 $L^1(G)$ 的所有 $*$-表示 π。

为了定义约化对应物，我们回顾一下：对于每个$x \in G^{(0)}$，其在 x 处的正则表示记为 λ_x：$C_c(G) \to B(l^2(G_x))$，定义如下：

$$\left(\lambda_x(f)\xi\right)(\gamma) := \sum_{\alpha \in G_x} f(\gamma\alpha^{-1})\xi(\alpha), \quad \text{where } f \in C_c(\mathcal{G}) \text{ and } \xi \in \ell^2(\mathcal{G}_x). \tag{2.1}$$

验证 λ_x 是一个良定义的 $*$-同态是常规工作。约化范数在 $C_c(G)$ 上为

$$\|f\|_r := \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|\lambda_x(f)\|,$$

而约化群胚 C^*-代数 $C_r^*(\mathrm{G})$ 定义为.....的完备化
$*$-代数 $C_c(\mathrm{G})$，关于此范数。显然，每个正则表示 λ_x 都可以自动延拓为同态 $\lambda_x : C^*_r(\mathrm{G}) \to \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(\mathrm{G}_x))$。直接验证也可得，存在一个从$C^*_{\max}(\mathrm{G})$到$C^*_r(\mathrm{G})$的典范满射同态。

2.5. **粗群胚**。 设 (X, d) 是第 2.2 节中的空间。X 上的粗群胚$G(X)$由 Skandalis、Tu 和 Yu 引入 [46] （另见 [40, 第10]章），旨在将粗几何学与群胚理论联系起来。作为一个拓扑空间，

$$G(X) := \bigcup_{r>0} \overline{E_r}^{\beta(X\times X)} \subseteq \beta(X \times X).$$

回顾例 2.7，$X \times X$ 是具有源映射和范围映射的对群胚，$\mathrm{s}(x,y) = y$ 且 $\mathrm{r}(x,y) = x$。这些映射可延拓为映射$G(X) \to \beta X$，仍记作 r 和 s。

现在考虑 $(\mathrm{r}, \mathrm{s}) : G(X) \to \beta X \times \beta X$。 [46, 引理 2.7] 已证明映射 (r, s) 是单射，因此 $G(X)$ 可赋予由对群胚 $\beta X \times \beta X$诱导的群胚结构，称为*coarse groupoid* （粗群胚）。因此，$G(X)$ 也可以等价地定义为

$$G(X) := \bigcup_{r>0} \overline{E_r}^{\beta X\times \beta X} \subseteq \beta X \times \beta X,$$

赋予弱拓扑。 [46, 命题 3.2] 还证明了粗群胚 $G(X)$ 是局部紧、豪斯多夫、 ´ét ale 且为主群胚。显然，$G(X)$ 的单位空间可识别为 βX。

给定 $f \in C_c(G(X))$，则 f 是一个支撑于E_r 上的连续函数，其中$r > \overline{0}$；等价地，我们可以将f 视为E_r上的有界函数。因此，我们定义算子 $\theta(f)$ 作用于 $\mathrm{l}^2(X)$，令其矩阵系数为 $\theta(f)(x, y) := f(x, y)$，其中$x$、$y \in X$。我们有如下结论：

命题 2.8 ([40, 命题 10。29])。 映射 θ 给出了从 $C_c(G(X))$ 到 $\mathbb{C}_u[X]$, 的 $*$-同构，并延拓为 C^*-同构 Θ： $C^*_r(G(X)) \to C^*_u(X)$。注意，Θ 将 C^*-子代数 $C^*_r(X \times X)$ 映到紧算子 $\mathfrak{K}(\mathrm{l}^2(X))$上。

回顾第 2.3 节，算子 $T \in \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(X))$ 可视为 $\mathrm{l}^\infty(X \times X)$ 中的一个元素。沿用 [14], 中的记号，当将 $T \in \mathrm{l}^\infty(X \times X)$ 看作作用于 $\beta(X \times X)$ 上时，我们将 T 记为 T 的连续延拓。于是

$$\mathrm{supp}(\overline{T}) = \overline{\mathrm{supp}(T)}.$$

注意，$G(X)$ 在 $\beta(X \times X)$ 中是开集，因此 $C_0(G(X))$ 是 $C(\beta(X \times X))$ 的一个子代数。限制到 $G(X)$ 上时，我们也将 T 视为定义在 $G(X)$ 上的函数，因此可以讨论 $T(\alpha, \gamma)$ 在 $(\alpha, \gamma) \in G(X)$ 处的取值。此外，我们有如下结论：

引理 2.9。 对于 $T \in \mathbb{C}_u[X]$, ，我们有 $\overline{T} \in C_c(G(X))$ 且 $\overline{\theta(T)} = T$。对于 $T \in C^*_u(X)$，我们有 $\overline{T} \in C_0(G(X))$ 且 $\Theta(T) = T$。

证明。 第一条陈述直接由命题 2.8 推出。由于对于任意 $T \in \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(X))$，均有 $\|T\|_\infty \leq \|T\|$，因此第二条陈述由第一条推出。□

2.6. **群胚的可和性与 a-T-可和性**。 可和群胚构成了一大类具有相对良好性质的群胚，从字面上说，它们是群胚世界中可和群的对应物。这里我们只关注 ´etale 的情形，在这种情形下，可和性的概念表现得相当良好。一个标准参考文献是 [1] ，而关于仅有 ´etale 群胚的另一篇参考文献是 [11,第 5 章。6]

定义 2.10([1])。 若局部紧、豪斯多夫且 ´étale 群胚 G 满足以下条件，则称其为（拓扑）可和的：对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及紧集$K \subseteq$ G，都存在$f \in C_c$(G)，其值域包含于 $[0,1]$，使得对于任意 $\gamma \in K$，都有

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}} f(\alpha) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}} |f(\alpha) - f(\alpha\gamma)| < \varepsilon.$$

与性质 A 的情形类似，通过标准的归一化论证可得：

引理 2.11. 若局部紧、豪斯多夫 且 *´étale* 群胚$\mathcal{G}$ 是可和的，当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及紧集 $K \subseteq \mathcal{G}$，都存在 $f \in C_c(\mathcal{G})$，其值域包含于 $[0,+\infty)$，使得对于任意 $\gamma \in K$，都有

$$\Big| \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}} f(\alpha) - 1 \Big| < \varepsilon \quad \textit{and} \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}} |f(\alpha) - f(\alpha\gamma)| < \varepsilon.$$

´étale 群胚的可和性具有与群的情形类似的保续性质。例如，可和的 ´étale 群胚的开或闭子群胚仍然可和，而且群胚扩张保可和性。详情参见 [1, 第 5] 节。另请回顾以下结论：

命题 2.12 ([11, 推论 5.6。17])。 设$\mathcal{G}$ 是一个局部紧、豪斯多夫、 *´étale* 且可和的群胚。那么自然商映射 $C^*_{\max}(\mathcal{G}) \to C^*_r(\mathcal{G})$ 是一个同构。

现在我们回顾 Tu[47] 引入的群胚 a-T-可和性的概念。设 G 是一个局部紧、豪斯多夫且 ´étale 的群胚。若连续函数f: G → R 满足以下条件，则称其为负定型 函数：

(1) $f|_{\mathcal{G}^{(0)}} = 0$；(2) 对任意 $\gamma \in$ G，$f(\gamma) = f(\gamma^{-1})$；(3) 给定具有相同值域的 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in$ G，以及满足 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in$ R，则 $\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j f(\gamma_i^{-1} \gamma_j) \leq 0$。

连续函数f: G → R 称为局部真，如果对于任意紧子集$K \subseteq \mathrm{G}^{(0)}$，函数$f$ 在 $\mathrm{G}^K{}_K$ 上的限制是适当的。

定义 2.13 ([47, 第 3 节.3]). 若局部紧、豪斯多夫且 ´etale 群胚 G 上存在一个负型连续局部适当函数f: G → R，则称 G 为*a-T*-可容许。

与群的情形类似，Tu [47] 证明了，局部紧、 σ-紧、豪斯多夫且 ´etale 群胚 G 是 a-T-可容许的当且仅当G 上存在一个希尔伯特空间连续场，并且 G 在其上有适当仿射作用。我们还需要 Tu 提出的以下重要结果：

命题 2.14([47, 定´理` 0.1]). 设$\mathcal{G}$ 是局部紧、 σ-紧、豪斯多夫、 *´étale* 且 *a-T*-可容许的群胚。那么$\mathcal{G}$ 是 *K*-可和的。特别地，商映射诱导一个 $K_*(C^*_{\max}(\mathcal{G})) \to K_*(C^*_r(\mathcal{G}))$ 的同构，其中 $* = 0,1$。

最后，我们记录粗群胚的以下结果：

命题 2.15 ([46, 定理 5.3 和 5.4])。 设(X,d) 是一个空间，$G(X)$ 是其关联的粗群胚。那么：

(1) X 具有性质 A 当且仅当 $G(X)$ 是可和的；*(2)* X 可粗嵌入希尔伯特空间当且仅当 $G(X)$ 是 a-T- 可容许的。

3. 极限空间与极限算子

本节回顾 ˇSpakula 和 Willett 在 [50], 中针对度量空间发展起来的极限空间与极限算子理论，该理论将成为后续研究的重要工具。

在本节中，我们始终假设 (X,d) 是一个空间（参见第 2.2 节中的“约定”），且 $G(X)$ 是其粗群胚。我们将自由使用关于X上超滤子的概念，相关材料回顾于附录 A。

3.1. 极限空间。 首先回顾，函数 $t : D \to R$，其中 $D,R \subseteq X$，称为部分平移，如果 t 是从 D 到 R的双射，且 $\sup_{x\in X} d(x,t(x))$ 有限。t 的图为 $\{(t(x), x) : x \in D\}$，记作 $\mathrm{gr}(t)$。众所周知，得益于X的有界几何学，X 上的每个邻近E 都可以分解为有限多个部分平移的图（例如， [40, 引理 4.10]）。

定义 3.1 ([50, 定义 3.2 和 3.6]). 固定一个超滤子 $\omega \in \beta X$。X 上的部分平移 $t : D \to R$ 若与 ω 兼容，则称为兼容，即 $\omega(D) = 1$。此时，将t 视为从 D 到 βX的函数，利用引理 A.2 定义如下：

$$t(\omega) := \lim_{\omega} t \in \beta X.$$

换言之，考虑扩张$t : D \to R$，则$t(\omega) = \overline{t}(\omega)$。

超滤子 $\alpha \in \beta X$ 与 ω 相容，当且仅当存在一个部分平移t，它与 ω 相容，且 $t(\omega) = \alpha$。记$X(\omega)$为X 上所有与 ω相容的超滤子构成的集合。ω 的相容族是由部分平移组成的集合$\{t_\alpha\}_{\alpha\in X(\omega)}$，其中每个$t_\alpha$ 都与 ω 相容，且$t_\alpha(\omega) = \alpha$。

固定X上的一个超滤子 ω，以及一个相容族$\{t_\alpha\}_{\alpha\in X(\omega)}$。定义函数$d_\omega : X(\omega) \times X(\omega) \to [0,\infty)$，其定义如下：

$$d_\omega(\alpha,\beta) := \lim_{x\to\omega} d(t_\alpha(x), t_\beta(x)).$$

在 [50, 命题 3.7] 中证明了，d_ω 是$X(\omega)$上的一致离散度量，且具有有界几何；它不依赖于$\{t_\alpha\}$的选取。

由此得到如下结论：

定义 3.2 ([50, 定义 3.8])。 对于 X 上的每个非主超滤子 ω，度量空间 $(X(\omega),d_\omega)$ 称为 X 在 ω 处的极限空间，它是第 2.2 节“约定”意义下的空间。

在 [50, 命题 3.9] 中证明了，对于任意 $\alpha \in X(\omega)$，作为度量空间，$X(\alpha) = X(\omega)$。还需注意，当 ω 是主超滤子时，即即， $\omega \in X$，显然 $(X(\omega),d_\omega) = (X,d)$。

我们回顾以下结果，它揭示了X 的局部几何可以通过极限空间的局部几何重新构造。

命题 3.3 ([50, 命题 3.10])。 设 ω 是 X 上的一个非主超滤子，且$\{t_\alpha : D_\alpha \to R_\alpha\}$ 是关于 ω 的一个相容族。那么对于每个有限 $F \subseteq X(\omega)$，存在一个子集 $Y \subseteq X$，使得 $\omega(Y) = 1$，并且对于每个 $y \in Y$，存在一个有限子集 $G(y) \subseteq X$，使得映射

$$f_y : F \to G(y), \alpha \mapsto t_\alpha(y)$$

是一个满射等距。这样的集合 $\{f_y\}_{y\in Y}$ 称为 F 的局部坐标系，映射 f_y 称为局部坐标。

此外，若 F 是度量球 $B(\omega,r)$，则存在 $Y \subseteq X$，使得 $\omega(Y) = 1$，并且存在局部坐标系 $\{f_y : F \to G(y)\}_{y\in Y}$，使得每个 $G(y)$ 都是球 $B(y,r)$。

如 [50, 附录 C], 所示，极限空间可以用粗群胚 $G(X)$ 来描述:

Lemma3.4 ([50, 引理 C。3])。 给定一个非主超滤子 $\omega \in \beta X$，映射

$$F : X(\omega) \to G(X)_\omega, \quad \alpha \mapsto (\alpha, \omega)$$

是一个双射。因此，$X(\omega)$ 是包含 ω 的 βX 的最小不变子集。这里我们将 $G(X)$ 视为 $\beta X \times \beta X$ 的子集，详见第 *2.5* 节。

因此，我们得到如下结论:

推论 3.5。 作为一个集合，我们有

$$G(X) = \Big(X \times X\Big) \sqcup \bigcup_{\omega\in\partial_\beta X} \Big(X(\omega) \times X(\omega)\Big).$$

现在我们希望为推论 3.5 给出一个定量版本。首先记录如下观察，其证明是直接的，并且几乎与引理 3.4 的证明完全相同（最初源自 [40, 在 10.18-10.24] 中的讨论）:

引理 3.6。 设 $t : D \to R$ 是 X 上的一个部分平移。则有:

$$\overline{\mathrm{gr}(t)}^{\beta X\times\beta X} = \mathrm{gr}(t) \sqcup \bigcup_{\omega\in\partial_\beta X} \Big\{(\alpha,\omega) : \omega(D) = 1 \text{ and } \alpha = t(\omega)\Big\}.$$

一般而言，我们有如下结论:

引理 3.7。 对于任意 $S \geq 0$，我们有:

$$\overline{E_S}^{\beta X\times\beta X} = E_S \sqcup \bigcup_{\omega\in\partial_\beta X} \Big\{(\alpha,\gamma) \in X(\omega) \times X(\omega) : d_\omega(\alpha,\gamma) \leq S\Big\}.$$

证明。 正如本小节开头所解释的，我们可以将其分解为

$$E_S = \mathrm{gr}(t_1) \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{gr}(t_N)$$

其中每个$t_i : D_i \to R_i$ 都是一个部分平移。因此我们有

$$\overline{E_S} = \overline{\mathrm{gr}(t_1)} \cup \cdots \cup \overline{\mathrm{gr}(t_N)}.$$

应用引理 3.6，我们得到E_S 包含于陈述中的右侧。

另一方面，给定 $\omega \in \partial_\beta X$ 和 $\alpha, \gamma \in X(\omega)$，其中 $d_\omega(\alpha, \gamma) \leq S$，则有 $(X(\omega), d_\omega) = (X(\gamma), d_\gamma)$。取一个部分平移 $t: D \to R$，使得 $\gamma(D) = 1$ 且 $\alpha = t(\gamma)$。注意到

$$d_\gamma(\alpha, \gamma) = \lim_{x \to \gamma} d(t(x), x) \leq S.$$

因此，对于 $D' := \{x \in D : d(t(x), x) \leq S\}$，有 $\gamma(D') = 1$。考虑 t 在 D' 上的限制，记为 t'。那么 t' 也是一个部分平移，并且 $\alpha = \underline{t'(\gamma)}$。由引理 3.6，我们得到 $(\underline{\alpha}, \gamma) \in \mathrm{gr}(t')$，它包含于 E_S 中，正如所需。□

现在我们计算极限空间的具体例子。首先回顾附录 B [50, 中的群情形]。设 Γ 是一个可数离散群，赋予左不变有界几何和强离散度量 d。对于每个 $g \in \Gamma$，记

$$\rho_g : \Gamma \to \Gamma, h \mapsto hg$$

右平移映射。每个 ρ_g 都是定义域为全集的部分平移，因此与每个 $\omega \in \beta\Gamma$ 都相容。此外，我们有如下结论：

Lemma3.8 ([50, 引理 B.1]). 对于每个非主超滤子 $\omega \in \beta\Gamma$，映射

$$b_\omega : \Gamma \longrightarrow \Gamma(\omega), g \mapsto \rho_g(\omega)$$

是一个等距双射。

受引理 3.8 启发，我们给出以下一般方法：

引理 *3.9.* 设 $\{t_\lambda : D_\lambda \to R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 上满足以下条件的部分平移族：对于每个 $S > 0$，存在一个有限子集 $\Lambda_S \subseteq \Lambda$，使得对于 λ、μ 属于 Λ_S 且 $E_S \mid \left(S_{\lambda \in \Lambda_S}, gr(t_\lambda) \cap gr(t^\mu)\right.$ 是有限的，并且 $_\lambda\big)$ 是有限的。那么，对于 X 上的任意非主超滤子 ω 和 $\alpha \in X(\omega)$，存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得 $\omega(D_\lambda) = 1$ 且 $\alpha = t_\lambda(\omega)$。

证明。根据定义，我们假设 $\alpha = t(\omega)$ 对某个部分平移 $t: D \to R$e 成立，其中 $\omega(D) = 1$。对于 $\lambda \in \Lambda$，令 $D_\lambda := \{x \in D \cap D_\lambda : t(x) = t_\lambda(x)\}$。选取 $S > 0$ 使得 $\mathrm{gr}(t) \subseteq E_S$，因此存在一个有限子集 $F \subseteq E_S$，使得

$$\mathrm{gr}(t) \subseteq \Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda_S} \mathrm{gr}(t_\lambda) \Big) \sqcup F.$$

这意味着存在某个有限的 $D \subseteq \left(\mathrm{S}_{\lambda \in \Lambda_S} \mathrm{e}D_\lambda\right) \sqcup F'$。由于 ω 是非主的，Λ_S 是有限的，并且对任意 λ，$\mu \in \Lambda_S$，$D_\lambda \cap D^\mu$ 都是有限的，因此存在唯一的 $\mathrm{e}\lambda \in \Lambda_S$ 使得 $\omega(D_\lambda) = 1$。这意味着 $\omega(D_\lambda) = 1$，且 $\alpha = t_\lambda(\omega)$，由此完成证明。□

回到群 Γ 的情形，集合 $\{\rho_g : \Gamma \to \Gamma\}_{g \in \Gamma}$ 满足引理 3.9 中的条件，因此引理 3.8 中的映射 b_ω 是满射。容易验证 b_ω 是等距的，从而重现了引理 3.8 的证明。

例子3.10. 考虑带有通常度量的 $X = \mathbb{N}$。对每个满足 $k \geq 0$ 的 $k \in \mathbb{Z}$，定义一个部分平移

$$\rho_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + k.$$

对于满足 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $k < 0$ 的情形，定义一个部分平移

$$\rho_k : [-k, \infty) \cap \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + k.$$

那么显然，集合 $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足引理 3.9 中的条件。现在，对于自然数集 N 上的非主超滤子 ω，考虑映射

$$b_\omega : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}(\omega), \quad k \mapsto \rho_k(\omega).$$

注意，对于k、$l \in$ 整数集，我们有

$$d_\omega(\rho_k(\omega), \rho_l(\omega)) = \lim_{n\to\omega} |(k+n)-(l+n)| = |k-l|,$$

这意味着b_ω 是等距的。此外，引理 3.9 表明b_ω 是满射。因此，N 的每个极限空间都与整数集等距。这为 [50,例 3.14(2)]提供了详细证明。

与例 3.10 中的分析类似，我们也可以应用引理 3.9 来证明 [50, 例 3.14(3)-(5)]。细节留给读者。

3.2. **极限算子**。 现在我们回顾 ˇSpakula 和 Willett 为度量空间引入的极限算子概念:

定义 3.11 ([50, 定义 4.4])。 对于X上的一个非主超滤子 ω，固定一个相容族$\{t_\alpha\}_{\alpha\in X(\omega)}$，并令 ω，设$T \in C^*_u(X)$。称T 在 ω处的极限算子，记为 $\Phi_\omega(T)$，是一个由$X(\omega)$行、$X(\omega)$列索引的矩阵，其定义为

$$\Phi_\omega(T)_{\alpha\gamma} := \lim_{x\to\omega} T_{t_\alpha(x)t_\gamma(x)} \quad \text{for} \quad \alpha,\gamma \in X(\omega).$$

在 [50, 第 4] 章中已研究过，上述定义不依赖于相容族$\{t_\alpha\}_{\alpha\in X(\omega)}$ 的选取。对于 ω，极限算子$\Phi_\omega(T)$确实是 $l^2(X(\omega))$ 上的有界算子，并且属于一致 Roe 代数 $C^*_u(X(\omega))$。

回顾引理 2.9，对于算子 $T \in C^*_u(X)$，其连续延拓$T \in C_0(G(X))$。以下结论在 [50, 引理 C.3]的证明中曾被隐含提及。

引理 3.12。 对于 X 上的非主超滤子 ω 以及 $T \in C^*_u(X)$，有

$$\Phi_\omega(T)_{\alpha\gamma} = \overline{T}(\alpha,\gamma) \quad for \quad \alpha,\gamma \in X(\omega).$$

证明。 选取与 α,γ 相容的部分平移 t_α,t_γ，使得 $t_\alpha(\omega) = \alpha$,$t_\gamma(\omega) = \gamma$。根据定义，有

$$\Phi_\omega(T)_{\alpha\gamma} = \lim_{x\to\omega} T_{t_\alpha(x)t_\gamma(x)} = \lim_{x\to\omega} T(t_\alpha(x), t_\gamma(x)) = \overline{T}(\alpha,\gamma)$$

最后一个等号来自引理 2.9 之前的讨论。 □

由于极限算子 Φ_ω（T）包含了 T 在“ ω 方向”上的渐近行为信息，我们引入以下定义:

定义 3.13。 对于 $\omega \in \partial_\beta X$，如果算子 $T \in C^*_u$（X）在 ω 方向上局部不可见（或 消失），则称 Φ_ω（T） $= 0$。对于子集 $V \subseteq \partial_\beta X$，如果 T 在 V 方向上局部不可见（或 消失），则称 Φ_ω（T） $= 0$ 对任意 $\omega \in V$均成立。

最后，我们回顾命题 2.8：存在一个 C^*-同构 $\Theta : C^*_r(G(X)) \to C^*_u(X)$。这使我们能够将极限算子与 $C^*_r(G(X))$ 的左正则表示联系起来:

引理 3.14 ([50, 引理 C.3]). 对于 X 上的非主超滤子 ω ，令 $W_\omega : l^2(G(X)_\omega) \to l^2(X(\omega))$ 为引理 *3.4* 中由 F 诱导的酉表示。于是有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} C_r^*(G(X)) & \xrightarrow{\lambda_\omega} & \mathfrak{B}(\ell^2(G(X)_\omega)) \\ \Theta \downarrow \cong & & \cong \downarrow \mathrm{Ad}_{W_\omega} \\ C_u^*(X) & \xrightarrow{\Phi_\omega} & \mathfrak{B}(\ell^2(X(\omega))), \end{array}$$

其中 λ_ω 是式 *(2.1)* 中的左正则表示。

4. 几何理想

本节回顾几何理想的概念，该概念最初由第一作者在 [51] 中引入（另见 [14]）。在本节中，设 X 是第 2.2 节“约定”意义下的空间。

定义 4.1 ([14, 定义 3.1, 3.3])。 对于算子 $T \in C_u^*(X)$ 以及 $\varepsilon > 0$，ε-T 的支撑定义为

$$\mathrm{supp}_\varepsilon(T) := \{(x, y) \in X \times X : |T(x, y)| \geq \varepsilon\}.$$

也将 ε-T 的截断定义为

$$T_\varepsilon(x, y) := \begin{cases} T(x, y), & \text{if } |T(x, y)| \geq \varepsilon; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，$\mathrm{supp}(T_\varepsilon) = \mathrm{supp}_\varepsilon(T)$。我们还记录以下一个初等结果，以备后用。证明显然，故略去。

引理 4.2. 给定 $T \in C_u^*(X)$ 和 $\varepsilon > 0$，有

$$\overline{\mathrm{supp}(T_\varepsilon)} \subseteq \{\tilde{\omega} \in \beta(X \times X) : |\overline{T}(\tilde{\omega})| \geq \varepsilon\} \subseteq \overline{\mathrm{supp}(T_{\varepsilon/2})}.$$

以下是 [14]中的一个关键结果：

命题 4.3 ([14, 定理 3.5])。 设 I 是一致 *Roe* 代数 $C_u^*(X)$中的一个理想。对于每个 $T \in I$ 和 $\varepsilon > 0$，有 $T_\varepsilon \in I \cap \mathbb{C}_u[X]$。此外，有

$$\overline{I \cap \mathbb{C}_u[X]} = \overline{\{T_\varepsilon : T \in I, \varepsilon > 0\}}$$

其中，闭包是相对于算子范数取的。

现在我们回顾 [51]中的几何理想概念：

定义 4.4。一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$ 中的理想I 称为几何理想，若$I \cap \mathbb{C}_u[X]$ 在I中稠密。

在 [14], Chen 和第一作者的工作中，他们根据$G(X)^{(0)} = \beta X$ 的不变开子集，对$C_u^*(X)$ 中的几何理想作了完整描述。为了概述他们的工作，我们先来看以下初等观察：

引理 4.5. 设 U 是 βX 的非空不变开子集，则 $X \subseteq U$。

证明。由于X 在 βX 中稠密，且U 是非空开集，我们得到$U \cap X$， $\emptyset$。取$x \in U \cap X$，则对于任意$y \in X$，有 $(x, y) \in G(X)$。由U的不变性可知$y \in U$。这意味着$X \subseteq U$。□

给定一个不变开子集 $U \subseteq \beta X$，记 $G(X)_U := G(X) \cap s^{-1}(U)$。接下来 [14], 我们定义

$$I_c(U) := \{f \in C_c(G(X)) : f(\tilde{\omega}) = 0 \text{ for any } \tilde{\omega} \notin G(X)_U\}$$
$$= \{T \in \mathbb{C}_u[X] : \overline{T}(\tilde{\omega}) = 0 \text{ for any } \tilde{\omega} \notin G(X)_U\}.$$

显然，$I_c(U)$ 是 $C_c(G(X))$ 中的一个双边理想。记其在 $C_r^*(G(X))$ 中的闭包为 $I(U)$。根据定义，它是 $C_r^*(G(X)) \cong C_u^*(X)$ 中的一个几何理想（另见 [14, 引理 5.1]）。由此得到以下结果：

定义 4.6。 对于不变开子集 $U \subseteq \beta X$，理想 $I(U)$ 称为与 U 相关联的几何理想。

为后续使用，我们记录几何理想 $I(U)$ 的如下另一种描述：

引理 4.7。 设 U 是 βX 的一个不变开子集。那么，理想 $I(U)$ 与约化群胚 C^*-代数 $C_r^*(G(X)_U)$同构。

证明。 这已隐含在 [14, 命题 5.5]的证明中。为方便读者，现将证明列于此处。根据定义，$C_r^*(G(X)_U)$ 同构于$C_r^*(G(X))$中$C_c(G(X)_U)$的范数闭包。注意，

$$C_c(G(X)_U) = \{T \in \mathbb{C}_u[X] : \text{supp}(\overline{T}) \subseteq G(X)_U\} \subseteq I_c(U).$$

另一方面，对于$T \in I_c(U)$，我们有$T = \lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon$，因为$T$ 具有有限传播性。注意，$\text{supp}(T_\varepsilon) \subseteq G(X)_U$，这意味着$T_\varepsilon \in C_c(G(X)_U)$。因此，我们得到$C_c(G(X)_U)$和$I_c(U)$在$C_r^*(G(X))$中具有相同的闭包，从而证明了该结论。□

例 4.8。 对于$U = X$，由定义可直接得到$G(X)_X = X \times X$。因此，结合命题 2.8和引理 4.7，我们得到与X 相关的几何理想为$I(X) = \mathbb{K}(l^2(X))$。另一方面，对于$U = \beta X$，显然$I(\beta X) = C_u^*(X)$。

反过来，根据 [14, 第 4 节和 5]，我们可以将一致 Roe 代数中的任意理想与 βX 的一个不变开子集对应起来。更确切地说，设 I 是一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$中的一个理想。定义：

$$U(I) := \bigcup_{T \in I, \varepsilon > 0} \overline{\text{r}(\text{supp}_\varepsilon(T))} = \bigcup_{T \in I \cap \mathbb{C}_u[X], \varepsilon > 0} \overline{\text{r}(\text{supp}_\varepsilon(T))}, \tag{4.1}$$

其中第二个等式直接由命题 4.3 得出。此外， [14, 引理 5.2]蕴含 $U(I)$ 是 βX的一个不变开子集。此外，作为 [14, 定理 6.3], 的一个特例，我们有如下结论：

命题 4.9。 对于空间 (X,d)，映射 $I \mapsto U(I)$ 给出了 $C_u^*(X)$ 中所有几何理想构成的格与 $X\beta$ 中所有不变开子集构成的格之间的同构，其逆映射为 $U \mapsto I(U)$。

命题 4.9 表明，$C_u^*(X)$ 中的几何理想完全由 βX 的不变开子集确定。相比之下，$C_u^*(X)$ 中的一般理想无法仅由 βX 的相关子集来刻画。例如，直接计算表明，第 2.3 节中定义的理想 I_G 与 $\mathrm{B}(\mathrm{l}^2(X))$ 中的紧算子理想所对应的不变开子集相同，二者均等于 X（另见下文例 4.8 和 5.5）。

因此，正如第 1 节所指出的，对一致 Roe 代数的理想结构的研究可以归结为分析格（其序由包含映射给出）

$$\Im_U = \{I \text{ is an ideal in } C_u^*(X) : U(I) = U\}$$

对于 (1.1) 中的每个不变开子集 $U \subseteq \beta X$。以下结果给出了 I_U 中的最小元：

命题 4.10。设 U 是 βX 的一个不变开子集。那么，几何理想 $I(U)$ 是格 $\Im_U$（见 *(1.1)*）中的最小元。

命题 4.10 的证明直接由以下引理得出：

引理 4.11。设 (X,d) 是一个空间，I 是 $C_u^*(X)$ 中的一个理想。那么我们有

$$I(U(I)) = \overline{I \cap \mathbb{C}_u[X]},$$

其中闭包是在 $C_u^*(X)$ 中取的。因此，我们有 $I(U(I)) \subseteq I$。

证明。记 $\mathring{I} := I \cap \mathrm{C}_u[X]$，显然 $\mathring{I} \cap \mathrm{C}_u[X] = I \cap \mathrm{C}_u[X]$。这意味着 $\mathring{I}$ 是 $C_u^*(X)$ 中的一个几何理想，因此根据命题 4.9，有 $\mathring{I} = I(U(\mathring{I}))$。根据定义，我们有

$$U(\mathring{I}) = \bigcup_{T \in \mathring{I} \cap \mathbb{C}_u[X], \varepsilon > 0} \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))} = \bigcup_{T \in I \cap \mathbb{C}_u[X], \varepsilon > 0} \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))} = U(I).$$

因此，我们得到 $I(U(I)) = I(U(\mathring{I})) = \mathring{I} = I \cap \mathrm{C}_u[X]$，如所需。 □

我们想回顾一种基于空间中的理想这一概念、用于描述几何理想的另一种方式，该概念在 [14] 中引入。它的优点在于始终在给定的度量空间内进行，而无需前往那个神秘的 Stone-Čech 边界，因此有助于我们跨越第 8 节中的若干技术障碍。

定义 4.12 ([14, 定义 6.1])。度量空间 (X,d) 中的一个理想 是由 X 的子集组成的一个集合 $\mathbf{L}$，满足以下条件：

(1) 若 $Y \in \mathbf{L}$ 且 $Z \subseteq Y$，则 $Z \in \mathbf{L}$；(2) 若 $R \geq 0$ 且 $Y \in \mathbf{L}$，则 $\mathrm{N}_R(Y) \in \mathbf{L}$；(3) 若 Y、$Z \in \mathbf{L}$，则 $Y \cup Z \in \mathbf{L}$。

对于 X 中的理想 $\mathbf{L}$，我们定义

$$U(\mathbf{L}) := \bigcup_{Y \in \mathbf{L}} \overline{Y}^{\beta X}.$$

反过来，给定 βX 的一个不变开子集 U，我们定义

$$\mathbf{L}(U) := \{Y \subseteq X : \overline{Y}^{\beta X} \subseteq U\}.$$

作为 [14, 定理 6.3], 的一个特例，我们有如下结论：

命题 4.13. 对于空间 (X,d)，映射 $\mathbf{L} \mapsto U(\mathbf{L})$ 给出了 X 中所有理想构成的格与 βX 的所有不变开子集构成的格之间的一个同构，其逆映射为 $U \mapsto \mathbf{L}(U)$。

结合命题 4.9 和 4.13，我们得到 X 中所有理想构成的格与$C_u^*(X)$中所有几何理想构成的格之间的同构。直接计算可得（另见 [14, 定理 6.4]）：

$$I(U(\mathbf{L})) = \overline{\{T \in \mathbb{C}_u[X] : \mathrm{supp}(T) \subseteq Y \times Y \text{ for some } Y \in \mathbf{L}\}}, \tag{4.2}$$

其中闭包是在$C_u^*(X)$中取的。

现在我们考虑一类来自子空间的特殊几何理想。给定一个子空间$A \subseteq X$，回顾 [27, 第 5]节，其中有一个I_A，即$C_u^*(X)$中的关联理想，其K理论与一致 Roe 代数$C^*(A)$的 K 理论同构。更确切地说，回顾一下，若存在$R > 0$ 使得 $\mathrm{supp}(T) \subseteq$ 自然数集$_R(A) \times$自然数集$_R(A)$，则算子$T \in \mathrm{B}(l^2(X))$称为*near* A；理想I_A 定义为 $\mathrm{C}_u[X]$ 中所有A附近算子的算子范数闭包。

理想 I_A 在 [15] 中称为空间的，因为它与X中的一个子空间有关。然而，正如 [15, 例 2.1], 所示，一般而言存在非空间理想。另一方面，空间理想在通过 Mayer-Vietoris序列论证计算 Roe 代数的K-理论时发挥着重要作用（见 [27]）。

为了证明空间理想是几何的，我们注意到X 中包含A 的最小理想是$\mathbf{L}_A := \{Z \subseteq$ 自然数集$_R(A) : R > 0\}$。因此应用命题 4.13，我们立即得到以下结论：

引理 4.14. 设 A 是 X 的一个子集。那么集合

$$U_A := U(\mathbf{L}_A) = \bigcup_{R>0} \overline{\mathcal{N}_R(A)} \tag{4.3}$$

是 βX 的一个不变开子集。此外，如果 U 是包含 A 的 βX 的一个不变开子集，那么 $U_A \subseteq U$。

因此，结合 (4.2)，我们得到以下结论：

推论 4.15. 设 A 是 X 的一个子集，则 $I(U_A) = I_A$。因此，空间理想 I_A 是几何的。

为便于后续使用，我们记录以下关于式 (4.3) 中定义的集合U_A 的结果。回顾推论 A.8：对于子集$Z \subseteq X$，Z 在 βX 中的闭包与 βZ同胚。

引理 4.16。 设 A 是 X 的一个子集。那么有：

$$G(X)_{U_A} = \bigcup_{R>0} G(\mathcal{N}_R(A)).$$

证明。根据定义，我们有 $\mathrm{G(X)}_{U_A} = \mathrm{S}\ \mathrm{R}_{>0}\mathrm{G(X)}_{\mathcal{N}_R}\mathrm{(A)}$。注意，对于每个 $\mathrm{R} > 0$以及 $(\alpha, \omega) \in \mathrm{G(X)}_{\mathcal{N}_R}\mathrm{(A)}$，我们都有 $\omega \in$ 自然数集$_R$(A)，并且根据引理 3.7，存在 $\mathrm{S} > 0$ 使得 $(\alpha, \omega) \in \overline{\mathrm{E}_S}$。因此，属于 $\mathrm{N}_{R+S}\mathrm{(A)} \times \mathrm{N}_{R+S}\mathrm{(A)}$ 的配对 (α, ω) 属于 $\mathrm{G}(\mathrm{N}_{R+S}\mathrm{(A)})$，证毕。□

最后，我们指出，对于给定的理想I，直接根据定义计算其在$C_u^*(X)$ 上对应的$U(I)$ 通常很困难。然而，对于主理想而言，这总是可以做到的：

Lem命题 4.17. 设 $I = \langle T \rangle$ 是 $C_u^*(X)$ 中由 $T \in C_u^*(X)$生成的主理想。记 *te*

$$U := \bigcup_{\varepsilon>0,R>0} \overline{\mathcal{N}_R(\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T)))}.$$

那么 U 是 βX 的不变开子集，并且有 $U(I) = U$。

证明。 由引理 4.14，显然 U 是 βX 的不变开子集。由 (4.1)，$U(I)$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都包含 $\mathrm{r}(\overline{\mathrm{supp}_\varepsilon(T)})$。由于 $U(I)$ 是不变的，再由引理 4.14 可得 $U(I)$ 包含 U 。

另一方面，我们考虑 $S = \mathrm{P}_{n\ i=1}\ a_i T b_i$，其中 a_i、b_i 均非零，且其支撑是包含于某个 E_R 的部分平移。于是对任意$\varepsilon > 0$，有

$$\mathrm{r}\left(\mathrm{supp}_\varepsilon(S)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{r}\left(\mathrm{supp}_{\frac{\varepsilon}{n}}(a_i T b_i)\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{N}_R\left(\mathrm{r}\left(\mathrm{supp}_{\frac{\varepsilon}{n\|a_i\|\cdot\|b_i\|}}(T)\right)\right),$$

这意味着 $\mathrm{r}\left(\mathrm{supp}_\varepsilon(\mathrm{S})\right) \subseteq \mathrm{U}$。~~注~~意，形如 $\mathrm{P}^n\ \mathrm{i}_{=1}\ \mathrm{a}_i\mathrm{Tb}_i$ 的算子在 I 中稠密。因此，对于一般元素 $\mathrm{S} \in \mathrm{I}$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathrm{S} = \mathrm{P}_n\ \mathrm{i}_{=1}\ \mathrm{a}_i\mathrm{Tb}_i$，其中 a_i、b_i 均非零，且其支撑是部分平移˜ ˜，使得 $\mathrm{kS} - \mathrm{Sk} < \varepsilon/2$。因此 $\mathrm{supp}_\varepsilon(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{supp}_{\varepsilon/2}(\mathrm{S})$，证毕。□

5. 幽灵理想

在上一节中，我们观察到，对于 βU 这一 βX 的不变开子集，相应的几何理想 $I(U)$ 是格中的最小元

$$\Im_U = \{I \text{ is an ideal in } C_u^*(X) : U(I) = U\}.$$

在本节中，我们想要探究 I_U 中的最大元。正如第 1 节所揭示的，一个自然的想法是纳入所有属于某个理想I 的算子$T \in C_u^*(X)$，且满足$U(I) = U$，由此得到如下定义：

定义 5.1。 对于空间 (X,d) 及其不变开子集U（βX 的子集），记

$$\tilde{I}(U) := \{T \in C_u^*(X) : \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))} \subseteq U \text{ for any } \varepsilon > 0\}.$$

我们称 ˜$I(U)$ 为与 U 相关联的幽灵理想。

这个术语稍后便会明了（见下文命题 5.6 和备注 5.8）。首先，我们来验证 ˜$I(U)$ 确实是$C_u^*(X)$ 中的一个理想。

引理 5.2。 对于 βX 的一个不变开子集 U，˜$I(U)$ 是 $C_u^*(X)$ 中的理想。

证明。对于 $\mathrm{T}, \mathrm{S} \in \mathrm{C}_u^*(\mathrm{X})$ 和 $\varepsilon > 0$，我们有 $\mathrm{supp}_\varepsilon(\mathrm{T} + \mathrm{S}) \subseteq \mathrm{supp}_{\varepsilon/2}(\mathrm{T}) \cup \mathrm{supp}_{\varepsilon/2}(\mathrm{S})$。由此可知，˜I(U) 是 $\mathrm{C}_u^*(\mathrm{X})$ 中的一个线性空间。给定 $\mathrm{T} \in$ ˜I(U) 和 $\varepsilon > 0$，注意到˜$\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(\mathrm{T}^*)) = \mathrm{s}(\mathrm{supp}_\varepsilon(\mathrm{T}))$，因此 $\mathrm{T}^* \in \mathrm{I}(\mathrm{U})$，因为 U 是不变的。现在，给定一个序列 $\{\mathrm{T}_n\}_n$ in ˜I(U)，它收敛于 $\mathrm{T} \in \mathrm{C}_u^*(\mathrm{X})$，且给定一个 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathrm{n} \in$ 自然数集˜使得 $\mathrm{supp}_\varepsilon(\mathrm{T}) \subseteq \mathrm{supp}_{\varepsilon/2}(\mathrm{T}_n)$。因此我们得到 $\mathrm{T} \in \mathrm{I}(\mathrm{U})$。

最后，给定 $T \in \tilde{}\mathrm{I}(U)$ 和 $S \in \mathrm{C}_u^*(X)$，我们需要证明 TS 和 ST 属于 $\tilde{}\mathrm{I}(U)$。注意到 $ST = (T^*S^*)^*$，且 I(U) 对取 $*$-运算封闭，因此只需证明 $TS \in \tilde{}\mathrm{I}(U)$。由于 $\tilde{}\mathrm{I}(U)$ 在 $\mathrm{C}_u^*(X)$ 中关于算子范数是闭的，只需考虑 $S \in \mathrm{C}_u[X]$ 的情形。我们还可以假设 S 是一个部分平移，因为 $\tilde{}\mathrm{I}(U)$ 对加法封闭。在这种情况下，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有 $\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(TS)) \subseteq \mathrm{r}(\mathrm{supp}_{\varepsilon/\|S\|}(T))$。因此我们得以完成证明。□

使用 X 中理想的语言，我们记录如下：对于 X 中的理想 $\mathbf{L}$ 以及 $T \in C_u^*(X)$，有 $T \in \tilde{}I(U(\mathbf{L}))$ 当且仅当 对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $R > 0$ 和 $Y \in \mathbf{L}$，使得对任意 $(x, y) \notin E_R \cap (Y \times Y)$，都有 $|T(x,y)| < \varepsilon$。

以下结果表明，幽灵理想 $\tilde{}I(U)$ 确实是格 I_U 中的最大元：

引理 5.3. 设 U 是 βX 的一个不变开子集，则有如下结论：

(1) 对于 $C_u^*(X)$ 中的理想 I，若 $U(I) = U$，则 $I \subseteq \tilde{}I(U)$。 *(2)* $U(\tilde{}I(U)) = U$。

证明。 (1)。设 $T \in I$，条件 $U(I) = U$ 意味着 $\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T)) \subseteq \overline{U}$ 对每个 $\varepsilon > 0$都成立。因此，根据定义，有 $T \in I(U)$。

(2). 注意

$$U(\tilde{I}(U)) = \bigcup_{T\in\tilde{I}(U),\varepsilon>0} \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))} \subseteq U.$$

另一方面，命题 4.9 表明 $U(I(U)) = U$，这结合（1）意味着 $\tilde{}I(U) \supseteq I(U)$。因此，由命题 4.9 再次可得 $U(\tilde{}I(U)) \supseteq U(I(U)) = U$，由此证明得证。□

结合命题 4.10，我们得到如下所需结果：

定理 5.4。 设 (X,d) 是第 *2.2* 节中的空间，且 U 是 βX 的一个不变开子集。那么，$C_u^*(X)$ 中的任意理想 I，只要 $U(I) = U$，就位于 $I(U)$ 与 $\tilde{}I(U)$ 之间。更确切地说，几何理想 $I(U)$ 是最小元，而幽灵理想 $\tilde{}I(U)$ 是格 $\Im_U$ *in (1.1)* 中的最大元。

如第 1 节所述，定理 5.4 勾勒出了格 I_U 的边界。因此，一旦我们能够针对每个不变开子集 $U \subseteq \beta X$，找出介于 $I(U)$ 和 $\tilde{}I(U)$ 之间的每一个理想，那么我们就能完整描述一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$ 的理想结构（见问题9.1）。

现在我们旨在为幽灵理想提供一种几何描述，这有助于解释这一术语。先来看一个简单的例子。

例 5.5. 取 $U = X$，则 $\tilde{}I(X)$ 是第 2.3 节中定义的理想 I_G。事实上，$T \in \tilde{}I(X)$ 当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，$\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))$ 都是有限的。这等价于 $T \in C_0(X \times X)$，因为 $T \in C_u^*(X)$。另一方面，显然 $\tilde{}I(\beta X) = C_u^*(X)$。

更一般地，我们有如下结果。注意，对于 βU 是 βX 的任意不变开子集，$G(X)_U$ 是 $\beta(X \times X)$ 的一个开子集。因此，$C_0(G(X)_U)$ 和 $I_c(U)$ 均可视为 $C(\beta(X \times X)) \cong l^\infty(X \times X)$ 中的子代数。

命题 5.6。 对于不变开子集 $U \subseteq \beta X$ 以及 $T \in C_u^*(X)$，以下条件等价：

(1) $T \in \tilde{I}(U)$；*(2)* $T \in C_0(G(X)_U)$；*(3)* $T \in I_c(U)^{\|\cdot\|_\infty}$；*(4)* T 在$(\beta X \setminus U)$方向上消失，即，$\Phi_\omega(T) = 0$ 对任意 $\omega \in \beta X \setminus U$。

证明。 “(1) $\Rightarrow$ (2)”：根据定义，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\mathrm{r}(\mathrm{supp}(\overline{T_\varepsilon})) = \mathrm{r}(\overline{\mathrm{supp}(T_\varepsilon)}) = \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T))} \subseteq U.$$

考虑紧集$K := \{\tilde{\omega} \in \beta(X \times X) : |T(\tilde{\omega})| \geq 2\varepsilon\}$。由引理 4.2，我们有 $\mathrm{r}(K) \subseteq \mathrm{r}(\mathrm{supp}(T_\varepsilon)) \subseteq U$，这意味着 $K \subseteq \overline{G(X)_U}$。此外，对于任意 $\tilde{\omega} \in \beta(X \times X) \setminus K$，我们有 $|T(\tilde{\omega})| < 2\varepsilon$，因此$T \in C_0(G(X)_U)$。

“(2) $\Rightarrow$ (1)”: 假设 $T \in C_0(\overline{G(X)_U}) \subseteq C(\beta(X \times X))$。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 G(X) 的一个紧子集 $K \subseteq_U$，使得对于任意 $\tilde{\omega} \in \beta(X \times X) \setminus K$，都有$|T(\tilde{\omega})| < \varepsilon$。这意味着 $\{\tilde{\omega} \in \beta(X \times X) : |T(\tilde{\omega})| \geq \varepsilon\} \subseteq K$。利用引理 4.2，我们得到 $\mathrm{supp}(T_\varepsilon) \subseteq K$，从而 $\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(T)) \subseteq U$。因此 $T \in \tilde{I}(U)$。

“(2) $\Leftrightarrow$ (3)”: 这是因为

$$\overline{I_c(U)}^{\|\cdot\|_\infty} = \{f \in C_0(G(X)) : f(\tilde{\omega}) = 0 \text{ for } \tilde{\omega} \notin G(X)_U\}.$$

“(3) $\Leftrightarrow$ (4)”: 根据引理 3.12，(4) 成立当且仅当对于任意 $\alpha, \gamma \in X(\omega)$ 以及 $\omega \in \beta X \setminus U$，$T(\alpha, \gamma) = 0$。应用引理 2.9 和引理 3.4，当且仅当对满足 $\tilde{\omega} \notin G(X)_U$ 的情形，$\overline{T}(\tilde{\omega}) = 0$ 时，上述条件成立；这描述了$I_c(U)^{\|\cdot\|_\infty}$中的元素。因此证明完毕。□

注意，$G(X)_X = X \times X$。因此，作为直接推论，我们得到幽灵算子的如下刻画：

推论 5.7 ([50, 命题 8.2]). 算子 $T \in C_u^*(X)$ 是幽灵算子，当且仅当对任意$\Phi_\omega(T) = 0$ X 上的非主超滤子均成立。

注 5.8。 换言之，推论 5.7 表明，$C_u^*(X)$ 中的幽灵在所有方向上都是局部不可见的。这启发我们将 $\tilde{I}(U)$ 中的算子视为“部分”幽灵，从而阐明了“幽灵理想”这一术语。

作为命题 5.6 的一个应用，我们现在将从算子代数的角度给出幽灵理想的另一种描述，这将在第 7 节中用到。我们先从所研究的短正合列开始 [24] (另见 [22, 第 2] 节)。

给定不变开子集 $U \subseteq \beta X$，注意到 $U^c = \beta X \backslash U$ 也是不变的。记 $G(X)_{U^c} := G(X) \cap \mathfrak{s}^{-1}(U^c)$，显然我们有如下分解：

$$G(X) = G(X)_U \sqcup G(X)_{U^c}.$$

注意，$G(X)_U$ 在 $G(X)$ 中是开集，因此上述内容导出如下短正合序列：

$$0 \longrightarrow C_c(G(X)_U) \longrightarrow C_c(G(X)) \longrightarrow C_c(G(X)_{U^c}) \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

其中，映射$C_c(G(X)_U) \longrightarrow C_c(G(X))$ 是包含映射，而映射 $C_c(G(X)) \longrightarrow C_c(G(X)_{U^c})$ 是限制。

我们可以关于最大群胚C^*-范数对序列 (5.1) 进行完备化，并得到以下序列：

$$0 \longrightarrow C^*_{\max}(G(X)_U) \longrightarrow C^*_{\max}(G(X)) \longrightarrow C^*_{\max}(G(X)_{U^c}) \longrightarrow 0, \tag{5.2}$$

根据定义很容易验证，该序列自动正合（参见例如， [31, 引理 2.10]）。我们也可以相对于约化群胚C^*-范数完备化该序列，从而得到以下序列：

$$0 \longrightarrow C^*_r(G(X)_U) \xrightarrow{i_U} C^*_r(G(X)) \xrightarrow{q_U} C^*_r(G(X)_{U^c}) \longrightarrow 0. \tag{5.3}$$

根据构造，i_U 是单射，q_U 是满射，且$q_U \circ i_U = 0$。另请回忆引理 4.7，$i_U(C^*_r(G(X)_U)) = I(U)$，即与$U$相关的几何理想。然而一般而言，(5.3) 在中间项处并不正合。这一点对于 [24]构造一个带系数的 Baum-Connes 猜想反例至关重要。

更确切地说，当$U = X$时， [41, 群的情形已由命题 2.11] 证明，Roe 代数的情形则由命题 4.4] 证明（另见命题 8.2]）： $\mathrm{Ker}(q_X) = I_G$，即，它是由$C^*_u(X)$ 中所有幽灵算子构成的理想。因此，由例 4.8 和例 5.5 可知，当$U = X$ *ifand only if* $I(X) = \tilde{I}(X)$）。更一般地，我们有如下结论：

命题 5.9。 给定一个不变开子集 $U \subseteq \beta X$，$q_U : C^*_r(G(X)) \to C^*_r(G(X)_{U^c})$ 的核与幽灵理想 $\tilde{I}(U)$相同。因此，序列 *(5.3)* 正合当且仅当 $I(U) = \tilde{I}(U)$。

证明。容易看出，算子$T \in C^*_u(X) \cong C^*_r(G(X))$ 当且仅当 $\lambda_\omega(T) = 0$ 对任意 $\omega \in \beta X \setminus U$成立时，才属于$q_U$ 的核，其中 λ_ω 是来自 (2.1) 的左正则表示。现在，引理 3.14 表明，对任意 $\omega \in \beta X \setminus U$， $\Phi_\omega(T) = 0$ 。最后，借助命题 5.6，我们完成证明。 □

我们用一个来自 [51, 第 3] 节（另见[22, 第 5]节）的启发性例子结束本节；该例子对于构造 Baum-Connes 型猜想的反例至关重要：

例 5.10. 设 $\{\mathrm{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是一列扩张图或扰动扩张图（精确定义见 [51] ）。对所有 $\mathrm{j} \in$ 自然数集，令 $\mathrm{Y}_{i,j} = \mathrm{X}_i$ ，并设 $\mathrm{Y} := \mathrm{F}_{\mathrm{i,j}}\, \mathrm{Y}_{i,j}$。我们在 Y 上赋予度量 d，使其在每个 $\mathrm{Y}_{i,j}$ 上都是图度量，并满足 $\mathrm{d}(\mathrm{Y}_{i,j}, \mathrm{Y}_{k,l}) \to \infty$ ，当 $\mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k} + \mathrm{l} \to \infty$ 时。

令 $P_{i,j} \in \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(Y_{i,j}))$ 为到$Y_{i,j}$ 上常值函数空间的正交投影，并在强算子拓扑下将 P 定义为 $P_{i,j}$ 的直和。根据 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的扩张假设，显然$P \in C^*_u(Y)$。 [51, 节 3] （另见 [22, 引理 5.1]）说明，P 并非幽灵，即，$P \notin \tilde{I}(X)$。然而直观地说，P 应当在“i方向上”消失。我们将在下文对此作出更精确的说明。

回顾一下，在 [22, 第 5 节.1] 中，我们有一个满射 $\beta Y \to \beta X \times \beta\mathbb{N}$，它由 Y 与 $X \times\mathbb{N}$之间的双射以及 βY 的泛性质所诱导。定义：

$$f : \beta Y \longrightarrow \beta X \times \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta X$$

其中，第二个映射就是到第一坐标的投影。记$U = f^{-1}(X)$，它是 βY 中的开集。注意，$U = \mathrm{F}_i f^{-1}(X_i)$，其中每个$f^{-1}(X_i)$ 都

同胚于$X_i \times \beta$自然数集。另一方面，注意到

$$U = \bigsqcup_i f^{-1}(X_i) = \bigcup_i \overline{\bigsqcup_j Y_{i,j}} = \bigcup_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(P))} = \bigcup_{\varepsilon>0,R>0} \overline{\mathcal{N}_R(\mathrm{r}(\mathrm{supp}_\varepsilon(P)))}.$$

因此，由引理 4.17 可知，U是不变的（与 [22,引理 5.2] 相比较），且 $U(\mathrm{h}P\mathrm{i}) = U$。（注意，$P \in \tilde{I}(U)$ 已在 [22,定理 5.5]，中借助命题 5.9 得到隐含证明。）由于 U 包含 Y 作为真子集，我们再次证明 P 不是幽灵。

此外，由命题 5.6 可知，P 在（$\partial_\beta Y \setminus U$）方向上消失。特别地，固定一个索引 $j_0 \in$ 自然数集，并取一个序列 $\{x_i \in Y_{i,j_0}\}_{i\in\mathbb{N}}$，我们选取一个聚点 $\omega \in \{x_i\}_i$。显然，$\omega \notin U$。直观地说，这意味着 P “沿 i方向”消失。

我们指出，第一作者在 [51, 第 3] 节中证明，主理想 $\mathrm{h}P\mathrm{i}$ 无法分解为 $I(U) + (I_G \cap \mathrm{h}P\mathrm{i})$，这为 [14]末尾的猜想提供了一个反例。上述解释揭示了这一反例背后的原因：$\mathrm{h}P\mathrm{i}$ 的幽灵部分无法仅由与 X （而非 U）相关联的幽灵元素“耗尽”。

最后，我们指出，群胚 $G(Y)_U$ 在构造[22] 中介绍的边界粗 Baum-Connes 猜想的一个反例时也发挥着关键作用（参见其中第 5.2 节）。

6. 极大理想

本节中，我们将利用第 5 节中发展的工具研究一致 Roe 代数的极大理想。本节中，设 (X,d) 是一个空间，如第 2.2 节所述。

6.1. **边界中的极小点**。 回顾前文，理想与单位空间 βX的不变开子集密切相关。因此我们引入以下定义：

定义 6.1. 称不变开子集 $U \subseteq \beta X$ 为极大的，如果 U， βX 且U不真包含于 βX的任何真不变开子集中。类似地，称不变闭子集 $K \subseteq \beta X$ 为极小 的，如果 K， $\emptyset$ 且 K 不真包含任何 βX的非空不变闭子集。

命题 6.2。 对于任意极大不变开子集 $U \subset \beta X$，幽灵理想 $\tilde{I}(U)$ 是一致 *Roe* 代数 $C^*_u(X)$ 中的极大理想。反之，对于 $C^*_u(X)$ 中的任意极大理想 I，相关联的不变开子集 $U(I)$ 是极大的，并且有 $I = \tilde{I}(U(I))$。

证明。对于 $\mathrm{C}^*_u(\mathrm{X})$ 中任意包含 $\tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U})$ 的理想 J，根据引理 5.3(2)，有 $\mathrm{U(J)} \supseteq \mathrm{U}(\tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U})) = \mathrm{U}$。由于 U 是极大的，因此 U(J) 要么 $= \beta\mathrm{X}$，要么 $\mathrm{U(J)} = \mathrm{U}$。若 $\mathrm{U(J)} = \beta\mathrm{X}$，则由引理 4.11 可知，J 包含 $\mathrm{I}(\mathrm{U(J)}) = \mathrm{C}^*_u(\mathrm{X})$，从而 $\mathrm{J} = \mathrm{C}^*_u(\mathrm{X})$。若 $\mathrm{U(J)} = \mathrm{U}$，则由引理 5.3(1) 可知，$\mathrm{J} \subseteq \tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U(J)}) = \tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U})$，这意味着 $\mathrm{J} = \tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U})$。由此可知， $\tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U})$ 是极大理想。

反过来，对于 $\mathrm{C}^*_u(\mathrm{X})$ 中的任意极大理想 I，我们有 $\mathrm{U(I)}$, $\beta\mathrm{X}$。对于任意包含 U 的开不变子集 V , β X，根据定理 5.4，$\mathrm{I} \subseteq \tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U}) \subseteq \tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{V})$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$，且 $\mathrm{I(V)}$, $\mathrm{C}^*_u(\mathrm{X})$。因此，由于 I 的极大性，我们得到 $\mathrm{I} = \mathrm{I(U)} = \mathrm{I(V)}$。这意味着 $\mathrm{U} = \mathrm{V}$，并且也有 $\mathrm{I} = \tilde{\mathrm{I}}(\mathrm{U})$，如所需。□

取补集后，我们得到如下结论：

推论 6.3. 对于任意极小不变闭子集 $K \subseteq \beta X$，幽灵理想 $\tilde{I}(\beta X \setminus K)$ 是一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$中的极大理想。此外，$C_u^*(X)$ 中的每个极大理想都具有这种形式。

因此，为了描述一致 Roe 代数中的极大理想，只需研究单位空间 βX的极小不变闭子集。回顾引理 3.4，对于每个 $\omega \in \partial_\beta X$，极限空间 $X(\omega)$ 是包含 ω 的 βX 的最小不变子集。然而，注意到一般而言，$X(\omega)$可能不是闭集。

定义 6.4. 若点 $\omega \in \partial_\beta X$ 的极限空间$X(\omega)$在 βX 中的闭包按照定义 6.1 的意义为极小，则称该点为极小。

下面的结果显然成立，因此略去证明。它提示我们研究边界中的极小点。

引理 6.5. 对于极小不变闭子集 $K \subseteq \beta X$，存在一个极小点$\omega \in \partial_\beta X$，使得 $K = \overline{X(\omega)}$。反之，对于任意极小点 $\omega \in \partial_\beta X$，集合 $X(\omega)$是极小的。

有人可能会想知道每个$\omega \in \partial_\beta X$是否都是极小的。然而，取闭包后情况会变得非常复杂；我们稍后将证明，即使在 X = 整数集的情况下，这也不成立。首先，我们注意到以下内容：

引理 6.6. 设 K 是 βX 的一个不变闭子集。那么 K 包含一个极小点。特别地，对于任意 $\omega \in \partial_\beta X$，存在一个极小点 ω'，使得 $\omega' \in X(\omega)$。

证明。 这直接由佐恩引理以及 βX是紧的这一事实得出。细节留给读者。□

因此，我们得到：

推论 6.7。 对于 $\omega \in \partial_\beta X$， ω 是极小点当且仅当 对于任意 $\alpha \in \overline{X(\omega)}$，都有 $\overline{X(\alpha)} = \overline{X(\omega)}$。将 $\overline{X(\omega)} = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{X(\omega_\lambda)}$ 写成某个 $\omega_\lambda \in \partial_\beta X$ 的形式，则 ω 是极小点当且仅当 对于任意 $\lambda \in \Lambda$， $\overline{X(\omega_\lambda)} = \overline{X(\omega)}$ 。

如前所述，现在我们研究 X = 整数集 Z 的情形，并证明其中存在若干非极小点。下面是主要结果：

定理 6.8。 带有通常度量的整数群 $\mathbb{Z}$ 的边界 $\partial_\beta \mathbb{Z}$中存在非极小点。更确切地说，对于趋于无穷的任意序列 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中元素属于 $\mathbb{Z}$，满足当 $n+m \to \infty$ 且 $n \neq m$ 时 $|h_n - h_m| \to +\infty$，以及任意 $\omega \in \partial_\beta \mathbb{Z}$，满足$\omega(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$，则 ω 不是 极小点。

为了证明定理 6.8，我们需要做一些准备。为便于后续使用，我们记录下述关于赋有左不变字长度量的可数离散群 Γ 的结果。

引理 6.9. 对于 $\omega, \alpha \in \partial_\beta \Gamma$，当且仅当$\overline{\text{对任意满足}}$ $\alpha(S) = 1$ 的 $S \subseteq \Gamma$，存在 $g_S \in \Gamma$ 使得 $\omega(S \cdot g^{-1} s) = 1$，此时 $\alpha \in \Gamma(\omega)$

证明。由引理 3.8 可知 $\Gamma(\omega) = \{\rho_g(\omega) : g \in \Gamma\}$；由附录 A 可知，$\{S : S \subseteq X\}$ 构成 βX 的一组基。因此，根据定义可得，当且仅当对任意满足 $\alpha \in S$ 的 $S \subseteq X$，存在 $g_S \in \Gamma$ 使得 $\rho_{g_S}(\omega) \in S$。等价地，这意味着，对任意满足 $\alpha(S) = 1$ 的 $S \subseteq X$，存在 $g_S \in \Gamma$ 使得 $\rho_{g_S}(\omega)(S) = \omega(S \cdot g^{-1} S) = 1$，证明完毕。□

现在我们回到 $\Gamma = Z$ 的情形，并证明定理 6.8：

定理 6.8 的证明。固定一个子集 $H = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Z$，使其趋于无穷远，并满足$|h_n - h_m| \to +\infty$ 当 $n + m \to \infty$ 且 n, m 时。对于任意非零 $g \in Z$，注意到 $h \in (g + H) \cap H$ 当且仅当存在 $h' \in H$ 使得 $h - h' = g$。由于 g 固定，且 H 中不同点之间的距离趋于无穷大，因此 $(g + H) \cap H$ 是有限集。于是，对于 Z 中任意 $g_1 \neq g_2$，$(g_1 + H) \cap (g_2 + H)$ 是有限集。

取一个满足 $\omega(H) = 1$ 的 Z 上的非主超滤子 $\omega \in \partial_\beta$，记

$$\mathcal{U} := \{B \subseteq H : \omega(B) = 1\}.$$

我们断言，对于每个 $n \in$ 自然数集，都存在 $g_n \in$ 整数集和 $B_n \in U$，使得 $\{B_n + g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$两两不相交。事实上，取 $g_0 = 0$ 和 $B_0 = H$。令 $g_1 = 1$ 和 $B_1 := H \setminus (H - g_1)$。由前一段可知 $H \cap (H - g_1)$ 是有限的，因此 $\omega(B_1) = 1$，即 $B_1 \in U$。类似地，对于每个 $n \in$ 自然数集，取 $g_n = n$ 和 $B_n := H \setminus \big((H - g_1) \cup (H - g_2) \cup \cdots \cup (H - g_n)\big)$，由此得证。

e考虑 $H := F_{n\in\text{自然数集}}(B_n + g_n)$，并对每个$n \in$自然数集，记 $U_n := \{B \subseteq B_n : \omega(B) = 1\}$。根据引理 A.4，$U_n$ 是 B_n上的一个超滤子。取 N 上的一个非主超滤子 ω_0，并考虑：

$$\widetilde{\mathcal{U}} := \Big\{ \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n + g_n) \subseteq \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n + g_n) = \widetilde{H} : \exists J \subseteq \mathbb{N} \text{ with } \omega_0(J) = 1 \text{ s.t. } \forall n \in J, A_n \in \mathcal{U}_n \Big\}.$$

e e 引理 A.6 表明，U 是 H 上的超滤子。我们定义函数 $\alpha : P(Z) \to$e e $\{0, 1\}$，规定 $\alpha(S) = 1$ 当且仅当 $S \cap H \in U$；根据引理 A.5，这确实是 e Z 上的超滤子。另请注意，α 是非主超滤子，并且 $\alpha(H) = 1$。

现在我们证明 $\alpha \in Z(\omega)$，而 $\omega \notin Z(\alpha)$，从而完成证明。为证明 $\alpha \in Z(\omega)$，我们将使用引理 6.9。对于任意满足 $\alpha(S) = 1$ 的 $S \subseteq Z$，根据定义有 $S \cap H \in U$。设 $S \cap H = F_{n\in N}(A_n + g_n)$，其中 $A_n \subseteq B_n$，则存在 $J \in \omega_0$，使得对于任意 $n \in J$，都有 $A_n \in U_n$。因此，对于任意 $n \in J$，ewe 有 $S \supseteq S \cap H \supseteq A_n + g_n$，且 $\omega(A_n) = 1$，这意味着 $\omega(S - g_n) = 1$。应用引~~理 6~~.9，我们得出 $\alpha \in Z(\omega)$。

最后，还需验证 $\omega \notin Z(\alpha)$。反之，假设引理 e e e e 6.9 蕴含存在 $g \in Z$ 以及 $B \subseteq H$，满足 $\alpha(B) = 1$，使得 $H \supseteq B - g$。e令 $B = F_{n\in\mathbb{N}}(A_n + g_n)$，其中 $A_n \subseteq B_n$，则存在 $J \in \omega_0$，使得对于任意$n \in J$，$\omega(A_n) = 1$。这意味着

$$H + g \supseteq \widetilde{B} \supseteq \bigsqcup_{n\in J} (A_n + g_n) \supseteq A_{n_0} + g_{n_0}$$

对于某个 $n_0 \in J$，使得 g^{n_0}, g （这是可以实现的，因为 J 是无限的）。然而，由第一段可知，$(H + g) \cap (H + g^{n_0})$ 是有限的。虽然这

交集包含 $A_{n_0} + g^{n_0}$，这是无限的，因为 $\omega(A_{n_0}) = 1$。因此，我们得出矛盾，并完成证明。□

6.2. **通过极限算子刻画极大理想**。 我们已经看到，一致 Roe 代数中的极大理想与底层空间的 Stone-Čech 边界中的极小点有关，并且在第 6.1 节中，我们使用拓扑方法证明了非极小点的存在。现在我们转而采用C^*-代数的观点，并利用极限算子这一工具，对这些理想给出另一种刻画。

首先回顾推论 6.3 和引理 6.5：一致 Roe 代数 $C^*_u(X)$ 中的极大理想具有 $\tilde{I}(\beta X \setminus X(\omega))$ 这种形式，其中 $\omega \in \partial_\beta X$ 是某个边界点。此外，根据命题 5.9，$\tilde{I}(\beta X \setminus X(\omega))$ 是以下满射同态的核：

$$q_{\beta X \setminus \overline{X(\omega)}} : C^*_r(G(X)) \longrightarrow C^*_r(G(X)_{\overline{X(\omega)}}).$$

因此我们得到如下结论：

推论 6.10。 点 $\omega \in \partial_\beta X$ 是极小点，当且仅当 $C^*_r(G(X)^{\overline{X(\omega)}})$ 是单的。

例6.11．考虑可数离散群 Γ 的情形。对于点 $\omega \in \partial_\beta \Gamma$，由引理 3.8 可知，极限空间 $\Gamma(\omega)$ 与 $\Gamma\omega$ 相同，因此 $C^*_r(G(\Gamma)^{\overline{\Gamma(\omega)}})$ 与约化交叉积 $C(\Gamma\omega) \rtimes \Gamma$ C^*-同构。根据推论 6.10，我们得到 ω 是极小的，当且仅当 $C(\Gamma\omega) \rtimes \Gamma$ 是单的。此外，注意到 Γ 在 $\beta\Gamma$ 上的作用是自由的（这也是引理 3.8 的一个推论）。因此，由推论 4.6] 可知，$C(\Gamma\omega)\rtimes\Gamma$ 是单的，当且仅当 Γ 在 $\overline{\Gamma\omega}$ 上的作用是极小的。综上，我们得到以下结论：

推论 6.12．在可数离散群 Γ 的情形下，点 $\omega \in \partial_\beta \Gamma$ 是极小的当且仅当 Γ 在 $\Gamma\omega$ 上的作用是极小的。

推论 6.10 表明，可以通过约化群胚C^*-代数的简单性来区分极小点。然而，这个C^*-代数仍然不易处理，因为需要考虑$X(\omega)$方向上的所有点（见命题 5.6）。现在我们证明，只需考虑 ω方向即可简化这一问题：

引理 6.13. 对于 $\omega \in \partial_\beta X$，算子 $T \in C^*_u(X)$ 属于理想 $\tilde{I}(\beta X \setminus X(\omega))$ 当且仅当 T 在 $\overline{\omega}$方向上消失，即，$\Phi_\omega(T) = 0$。

证明。假设 $\Phi_\omega(\mathrm{T}) = 0$，只需证明对于任意$\alpha \in \mathrm{X}(\omega)$，$\Phi_\alpha(\mathrm{T}) = 0$。固定这样一个 α，取 $\mathrm{X}(\omega)$ 中的网 $\{\omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，使得 $\omega_\lambda \to \alpha$，由此可得$\Phi_{\omega_\lambda}(\mathrm{T}) = 0$。对于任意 $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{X}(\alpha)$，引理 3.4 以及粗群胚 $\mathrm{G(X)}$ 是 ´étale 的事实表明，对于每个$\lambda \in \Lambda$，都存在$\gamma_{1,\lambda}$ 和$\gamma_{2,\lambda}$ 属于 $\mathrm{X}(\omega_\lambda)$，使得$\gamma_{1,\lambda} \to \gamma_1$ 且$\gamma_{2,\lambda} \to \gamma_2$。现在由引理 3.12 可得

$$\Phi_\alpha(T)_{\gamma_1\gamma_2} = \overline{T}((\gamma_1, \gamma_2)) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \overline{T}((\gamma_{1,\lambda}, \gamma_{2,\lambda})) = \lim_{\lambda\in\Lambda} \Phi_{\omega_\lambda}(T)_{\gamma_{1,\lambda}\gamma_{2,\lambda}} = 0,$$

由此证明完毕。 □

因此，对于 $\omega \in \partial_\beta X$，由引理 6.13 可知，关联理想 $\tilde{I}(\beta \setminus X(\omega))$ 与下列极限算子同态的核一致（另见[50,定理 4.10]）：

$$\Phi_\omega : C_u^*(X) \longrightarrow C_u^*(X(\omega)), \quad T \mapsto \Phi_\omega(T). \tag{6.1}$$

因此，我们得到以下结论：

推论 6.14. 点 $\omega \in \partial_\beta X$ 是极小的当且仅当 像 $\mathrm{Im}(\Phi_\omega)$ 是单的。因此，当 $X(\omega)$ 是无限的且 Φ_ω 是满射时，点 ω 不是极小的。

证明. 对于最后一条结论，只需注意到紧算子理想总是包含在 $C_u^*(X(\omega))$ 中，由此即得证明。□

注记 6.15. 我们指出，形如 $\tilde{I}(\beta \setminus X(\omega))$ 的理想已出现在 Georgescu 的工作中 [23]（记作 $\mathscr{G}_\omega(X)$），用于研究一般度量空间上的极限算子理论。

多亏推论 6.14，定理 6.8 的一个特殊情形也可以从 Roch 的一篇近期著作 [36] 中推出。更准确地说，结合 [50, 命题 B.6] 和 [36, 引理 2.1],，我们得到以下结论：

命题 6.16。 设$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是自然数集$\mathbb{Z}^N$ 中的一个趋于无穷的序列，使得

$$\|h_n - h_k\|_\infty \geq 3k \quad \textit{for any} \quad k > n.$$

那么，对于任意满足 $\omega(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$的 $\omega \in \partial_\beta \mathbb{Z}^N$，映射 $\Phi_\omega : C_u^*(\mathbb{Z}^N) \longrightarrow C_u^*(\mathbb{Z}^N(\omega))$ 是满射。

由引理 3.8 可知，极限空间 $\mathrm{Z}^N(\omega)$ 与 Z^N 双射，因此是无限的。因此，应用推论 6.14，可得如下结论（当自然数集 $= 1$时，这在一定程度上重新得到了定理 6.8）。

推论 6.17。 对于自然数集$\mathbb{Z}^N$ 中任意趋于无穷的序列$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，若对任意 $k > n$ 都有$\|h_n - h_k\|_\infty \geq 3k$，且对于任意满足 $\omega(\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$的 $\omega \in \partial_\beta \mathbb{Z}^N$，则 ω 不是极小点。

注记 6.18. 从上面的讨论可知，对于 $\omega \in \partial_\beta X$，存在一个$C^*$-单态射：

$$C_r^*(G(X)_{\overline{X(\omega)}}) \cong C_u^*(X)/\tilde{I}(\beta X \setminus \overline{X(\omega)}) \longrightarrow C_u^*(X(\omega)) \tag{6.2}$$

其中，第一个来自命题 5.9，第二个则来自引理 6.13。 (6.1)

现在，我们从群胚的角度对这个映射作另一种解释。首先，推论 3.5 表明 $G(X)^{X(\omega)} = X(\omega) \times X(\omega)$，因此 $G(X)^{\overline{X(\omega)}} = X(\omega) \times X(\omega)^{G(X)}$。现在我们有

$$G(X)_{\overline{X(\omega)}} = \bigcup_{S>0} \left(\overline{E_S}^{G(X)} \cap \overline{X(\omega) \times X(\omega)}^{G(X)} \right) = \bigcup_{S>0} \overline{\overline{E_S}^{G(X)} \cap (X(\omega) \times X(\omega))}^{G(X)},$$

其中，最后一个不等式是因为$E_S{}^{G(X)}$ 在$G(X)$中既开又闭。根据引理 3.7，我们有

$$\overline{E_S}^{G(X)} \cap (X(\omega) \times X(\omega)) = \{(\alpha, \gamma) \in X(\omega) \times X(\omega) : d_\omega(\alpha, \gamma) \leq S\} =: E_S(X(\omega), d_\omega)$$

*i.e.*是极限空间（$X(\omega),d_\omega$）中的S-邻近。因此，我们得出

$$G(X)_{\overline{X(\omega)}} = \bigcup_{S>0} \overline{E_S(X(\omega), d_\omega)}^{G(X)}.$$

另一方面，根据定义，我们有

$$G(X(\omega)) = \bigcup_{S>0} \overline{E_S(X(\omega), d_\omega)}^{\beta(X(\omega)\times X(\omega))}.$$

根据 Stone-ˇCech 紧化的泛性质，存在一个连续满射$E_S(X(\omega),d_\omega)^{\beta(X(\omega)\times X(\omega))} \longrightarrow E_S(X(\omega),d_\omega)^{G(X)}$，它诱导出一个单射$C_c(G(X)_{\overline{X(\omega)}}) \longrightarrow C_c(G(X(\omega)))$。此外，容易验证它诱导出一个$C^*$-单态射

$$C_r^*(G(X)_{\overline{X(\omega)}}) \longrightarrow C_r^*(G(X(\omega))) \cong C_u^*(X(\omega)),$$

可以验证，这与映射 (6.2) 一致。细节留给读者。

特别地，我们考虑一个可数离散群$X = \Gamma$。固定一点$\omega \in \partial_\beta\Gamma$，我们在例 6.11 中提到$C_r^*(G(\Gamma)_{\overline{\Gamma(\omega)}}) \cong C(\Gamma\omega) \rtimes \Gamma$。另一方面，根据引理 3.8，我们知道$C_u^*(\Gamma(\omega)) \cong l^\infty(\Gamma\omega) \rtimes \Gamma$。此时，可以验证映射 (6.2) 是由自然嵌入 $C(\Gamma\omega) \hookrightarrow l^\infty(\Gamma\omega)$ 诱导的。

7. 几何理想与幽灵理想

本节中，我们回到（1.1）中的格 I_U。回顾定理 5.4，对于不变开子集 $U \subseteq \beta X$，几何理想$I(U)$ 和幽灵˜理想$I(U)$分别是 I_U 中的最小元和最大元。正如之前所指出的，通常 I_U 包含多个元素。

现在我们想研究何时 $I(U) = \tilde{I}(U)$，或者等价地，何时 I_U 只包含一个元素。此外，我们将讨论它们的 K-理论，并给出一个充分条件，以确保对 $* = 0, 1$，有$K_*(I(U)) = K_*(\tilde{I}(U))$。

首先回顾命题 5.9，我们已经利用短正合列给出了$I(U) = \tilde{I}(U)$ 的刻画，但其中的条件似乎仍然难以检验。现在我们旨在寻找一个更实用的判据，以确保 $I(U) = \tilde{I}(U)$。我们从以下结果开始，它结合了 [16, 定理 4.4]和 [42, 定理 1.3]。

命题 7.1。 对于空间 (X,d)，以下各项等价：

(1) X 具有性质 A；*(2)* $G(X)$ 是可和的；*(3)* $G(X)_{\partial_\beta X}$ 是可和的；*(4)* 对任意不变开子集 $U \subseteq \beta X$，$I(U) = \tilde{I}(U)$；*(5)* $I(X) = \tilde{I}(X)$。

我们指出，“(1) ⇒ (4)”最初是在 [16] 中通过核的逼近证明的。这里我们将采取一个捷径，这个思路之后也会用到。

命题 *7.1* 的证明。 “(1) ⇔ (2)”已在 [46, 定理 5.3]中证明。“(2) ⇔ (3)”则由可 amen 性的保续性质（见第 2.6 节）以及$G(X)_X \cong X \times X$ 总是可和这一事实得出。

“(2) $\Rightarrow$ (4)”：设$U \subseteq \beta X$ 是不变开子集。作为开/闭子群胚，$G(X)_U$ 和 $G(X)_{U^c}$ 也都是可和的。考虑由 (5.2) 和 (5.3) 得到的以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*_{\max}(G(X)_U) & \longrightarrow & C^*_{\max}(G(X)) & \longrightarrow & C^*_{\max}(G(X)_{U^c}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^*_r(G(X)_U) & \longrightarrow & C^*_r(G(X)) & \longrightarrow & C^*_r(G(X)_{U^c}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由命题 2.12 可知，三条竖直线都是同构。因此，第一行的正合性蕴含第二行也正合。由此，借助命题 5.9，我们得到 (4)。

“(4) $\Rightarrow$ (5)”显然成立，而“(5) $\Rightarrow$ (1)”由 [42, 定理 1.3] 以及例 4.8 和例 5.5 得出。因此，证明完成。□

命题 7.1 利用性质 A，为$I(X) = \tilde{I}(X)$给出了粗几何刻画。然而，我们注意到，假设性质 A 往往过强，无法保证对于一个仅特定的不变开子集$U \subseteq \beta X$，有 $I(U) = \tilde{I}(U)$。一个显然的例子是，对于任意空间X，都有$I(\beta X) = I(\beta X)$。这促使我们探索$I(U) = \tilde{I}(U)$的一个较弱判据，并由此得到以下结果：

命题 7.2. 设 (X,d) 是一个空间，U 是 βX 的一个不变开子集。若典范商映射 $C^*_{\max}(G(X)_{U^c}) \to C^*_r(G(X)_{U^c})$ 是一个同构，则 $I(U) = \tilde{I}(U)$。特别地，若群胚 $G(X)_{U^c}$ 是可和的，则 $I(U) = \tilde{I}(U)$。

证明。 考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^*_{\max}(G(X)_U) & \longrightarrow & C^*_{\max}(G(X)) & \longrightarrow & C^*_{\max}(G(X)_{U^c}) & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \pi_U}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{I}(U) & \longrightarrow & C^*_r(G(X)) & \longrightarrow & C^*_r(G(X)_{U^c}) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{7.1}$$

这里的映射 π_U 是以下映射的复合：

$$C^*_{\max}(G(X)_U) \to C^*_r(G(X)_U) \cong I(U) \hookrightarrow \tilde{I}(U), \tag{7.2}$$

其中，中间的同构来自引理 4.7。注意，顶端的水平线自动正合，而底端的水平线根据命题 5.9 也正合。还要注意，中间的垂直映射总是满射，且根据假设，右侧的垂直映射是一个同构。因此，通过追图论证，我们得到左侧的垂直映射是满射。由此，根据 (7.2)，可得 $I(U) = \tilde{I}(U)$。□

注记 7.3。 当$U = X$时，命题 7.2 得到了命题 7.1 中的“(3) $\Rightarrow$ (5)”。读者或许会想知道，命题 7.2 的逆命题是否像$U = X$的情形那样成立。我们将在下文第 8.4 节给出部分答案。

现在我们来讨论几何理想与幽灵理想的K理论：

命题 7.4. 设 X 是一个可粗嵌入某个希尔伯特空间的空间。那么对于任意不变开子集 $U \subseteq \beta X$，我们有一个同构

$$(\iota_U)_* : K_*(I(U)) \longrightarrow K_*(\tilde{I}(U))$$

对于 $*=0$，1，其中 ι_U 是包含映射。因此对于 $C_u^*(X)$ 中的任意理想 I，我们有一个单同态

$$(\iota_I)_*: K_*(\overline{I\cap \mathbb{C}_u[X]}) \longrightarrow K_*(I)$$

对于 $*=0$，1，其中 ι_I 是包含映射。

证明。 固定这样一个$U\subseteq \beta X$，我们考虑命题 7.2 的证明中给出的交换图 (7.1)，其中两条水平线都是正合的。这推出了以下K-理论中的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & K_*(C^*_{\max}(G(X)_U)) & \longrightarrow & K_*(C^*_{\max}(G(X))) & \longrightarrow & K_*(C^*_{\max}(G(X)_{U^c})) & \longrightarrow & K_{*+1}(C^*_{\max}(G(X)_U)) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_U)_*} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_U)_{*+1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & K_*(\tilde{I}(U)) & \longrightarrow & K_*(C^*_r(G(X))) & \longrightarrow & K_*(C^*_r(G(X)_{U^c})) & \longrightarrow & K_{*+1}(\tilde{I}(U)) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

其中两条水平线都是正合的。根据 [46, 定理 5.4] ，X 粗嵌入当且仅当 $G(X)$ 是 a-T-可容许的。由定义 2.13 可直接得出，作为子群胚，$G(X)_U$ 和$G(X)_{U^c}$ 都是 a-T-可容许的。此外，根据定义显然$G(X)$ 和$G(X)_{U^c}$ 是 σ-紧的。因此，命题 2.14 表明$G(X)$ 和$G(X)_{U^c}$ 是K-可和的。这说明上图中间的两个竖直映射是同构，由五引理可知 $(\pi_U)_*$ 是同构。因此，由 (7.2) 可得复合映射

$$K_*(C^*_{\max}(G(X)_U)) \longrightarrow K_*(C^*_r(G(X)_U)) \cong K_*(I(U)) \xrightarrow{(\iota_U)_*} K_*(\tilde{I}(U))$$

是 $*=0$ 的同构，1。

另一方面，我们声称 $K_*(C^*_{\max}(G(X)_U)) \longrightarrow K_*(C^*_r(G(X)_U))$ 是一个同构，并由此得出映射 $(\iota_U)_*$ 对 $*=0$，1 是同构。为此，请回忆 [46, 引理 3.3]，其中存在一个局部紧、第二可数、充足且 ´étale 的群胚 G'，使得 $G(X)=\beta X\rtimes G'$，这意味着 $G(X)_U = U\rtimes G'$。因此，$C^*_{\max}(G(X)_U)$ 与最大交叉积 $C_0(U)\rtimes_{\max} G'$ 一致，而 $C^*_r(G(X)_U)$ 则与约化交叉积 $C_0(U)\rtimes_r G'$ 一致。注意，G'-C^*-代数 $C_0(U)$ 可写为可分 G'-C^*-代数的归纳极限 $\varinjlim_{i\in I}(A_i,\phi_i)$。此外，由 [46, 定理 5.4]可知，$G'$ 是 a-T-可容许的，因为 $G(X)$ 是 a-T-可容许的，因此命题 2.14 蕴含 G' 也是 K-可容许的。由 [47, 命题 4.12]可知，对每个 $i\in I$，典范映射 $K_*(A_i\rtimes_{\max} G')\to K_*(A_i\rtimes_r G')$ 都是同构。取极限后，我们得到 $K_*(C_0(U)\rtimes_{\max} G')\to K_*(C_0(U)\rtimes_r G')$ 也是同构，从而证明了这一断言。

对于最后一个结论，我们假设 $U=U(I)$。根据引理 4.11，我们有$I\cap\overline{\mathbb{C}_u[X]}=I(U)$。此外，引理 5.3(1)表明 $I\subseteq \tilde{}I(U)$。因此，包含映射 ι_U 可以分解如下：

$$I(U)=\overline{I\cap\mathbb{C}_u[X]}\xhookrightarrow{\iota_I} I\hookrightarrow \tilde{I}(U).$$

因此，$(\iota_U)_*$ 是同构意味着$(\iota_I)_*$ 对于 $*=0,1.$ 是单射。 □

注记 7.5。 一般而言，我们不知道限制 $G(X)_U$ 是否是 σ-紧的，因此无法直接将命题 2.14 应用于 $G(X)_U$。在命题 7.4 的早期版本中，我们加入了可数生成性的假设（见下文定义 8.16）以绕过这一问题，而 Kang Li 指出，利用上述技巧，这一假设是多余的。

将命题 7.4 应用于 $U = X$ 的情形，我们部分地得到了 Finn-Sell 的以下结果（见 [21, 命题 35]），该结果对于构造粗 Baum-Connes 猜想的反例至关重要：

推论 7.6. 设空间 X 可以粗嵌入到某个希尔伯特空间中。那么，将 $\mathfrak{K}(l^2(X))$ 包含到 I_G 中，会在 K 理论层面诱导一个同构。

注 7.7. 对于 $C^*_u(X)$ 中的一般理想 I，我们在命题 7.4 的证明中所用的方法只能保证诱导映射 $(\iota_I)_*$ 的单射性。我们想知道，在相同假设下，该映射是否确实为同构（见问题 9.3）。

8. 部分性质 A 与部分算子范数局部化性质

在上一节中，我们找到了一个充分条件（命题 7.2），以确保对于给定的不变开子集 $U \subseteq \beta X$，有 $\mathrm{II}(U) = I(U)$。正如注 7.3 中所承诺的，现在我们研究其逆命题，并证明在附加假设下，这确实是一个等价条件。

我们的策略是遵循 $U = X$ 情形的思路。更具体地说，我们引入一个称为朝向边界的不变子集的部分性质 $A\partial_\beta X$ 的概念，然后在算子范数局部化性质的背景下考虑其对应概念，以给出所需的刻画。

8.1. **部分性质 A。** 回顾命题 7.1，空间 X 具有性质 A，当且仅当群胚 $G(X)_{\partial_\beta X}$ 是可和的，而这刻画了 $I(X) = \tilde{I}(X)$。结合命题 7.2，这启发我们引入如下定义：

定义 8.1。 设 (X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是不变开子集。如果 X 朝向部分性质 A $\partial_\beta X \setminus U$，则称 $G(X)_{\partial_\beta X \setminus U}$ 是可和的。

根据定义显然，X 具有性质 A，当且仅当它朝向整个边界 $\partial_\beta X$ 具有部分性质 A。另一方面，由命题 7.2 可知，如果 X 朝向 $\partial_\beta X \setminus U$ 具有部分性质 A，那么我们有 $I(U) = \tilde{I}(U)$。本节其余部分将致力于研究其逆命题。

首先，我们旨在阐释群胚语言，并为部分性质 A 提供一个具体的几何描述，它与性质 A 的定义相似（见定义 2.1）。以下是主要结果：

命题 8.2。 设 (X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。那么，X 朝向 $U^c = \partial_\beta X \setminus U$ 当且仅当 对于任意 $\varepsilon, R > 0$，都存在 $S > 0$、一个子集 $D \subseteq X$（满足 $D \supseteq U^c$）以及一个函数 $f : X \times X \to [0,1]$，使其满足：

(1) $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$；*(2)* 对任意 $x \in D$，均有 $\sum_{z \in X} f(z,x) = 1$；*(3)* 对任意 $x, y \in D$ 且 $d(x,y) \leq R$ 的情形，均有 $\sum_{z \in X} |f(z,x) - f(z,y)| \leq \varepsilon$。

对比命题 8.2 与定义 2.1，显然，性质 A 蕴含相对于 $\partial_\beta X$ 的任意不变闭子集的部分性质 A。

为证明命题 8.2，我们先给出以下引理：

引理 8.3. 沿用上述记号，X 对 U^c 具有部分性质 A，当且仅当对于任意 ε，$R > 0$，存在 $S > 0$ 以及函数 $f : X \times X \to [0,1]$ 满足：

(1) $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$；*(2)* 对于任意 $\omega \in U^c$，有 $\sum_{\alpha \in X(\omega)} f(\alpha, \omega) = 1$；*(3)* 对于 $\omega \in U^c$ 和 $\alpha \in X(\omega)$，若 $d_\omega(\alpha, \omega) \leq R$，则 $\sum_{\gamma \in X(\omega)} |f(\gamma, \alpha) - f(\gamma, \omega)| \leq \varepsilon$，

其中 $\overline{f} \in C_0(G(X))$ 是引理 *2.9* 中的连续延拓。

证明。 根据定义，当且仅当对于任意$\varepsilon > 0$以及紧子集 $K \subseteq G(X)_{U^c}$，存在值域包含于 $[0,1]$ 的 $g \in C_c(G(X)_{U^c})$，使得对于任意 $\gamma \in K$，我们有：X 具有朝向 U^c 的部分性质 A。

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}} g(\alpha) = 1 \quad \text{and} \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{r(\gamma)}} |g(\alpha) - g(\alpha\gamma)| < \varepsilon.$$

回顾 (5.1)，限制映射 $C_c(G(X)) \to C_c(G(X)_{U^c})$ 是满射，因此 g 可视为 $C_c(G(X))$ 中的函数。令 f 为 g 在 $X \times X$ 上的限制，则 $f \in l^\infty(X \times X)$，且存在 $S > 0$，使得 $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$，其中某个 $S > 0$。使用引理 2.9 中的记号，我们有 $g = f$。注意，$G(X)_{U^c} = \bigcup_{R>0}(E_R \cap G(X)_{U^c})$，因此 $G(X)_{U^c}$ 的紧子集总包含于形如 $E_R \cap G(X)_{U^c}$ 的集合中。此外，引理 3.7 表明

$$\overline{E_R} \cap G(X)_{U^c} = \bigcup_{\omega \in U^c} \{(\alpha, \gamma) \in X(\omega) \times X(\omega) : d_\omega(\alpha, \gamma) \leq R\}.$$

结合引理 3.4，我们得出证明。 □

作为一个直接推论（连同引理 3.7），我们得到：

推论 8.4。 假设 X 朝向 U^c 具有部分性质 A。那么，度量空间族 $\{(X(\omega), d_\omega)\}_{\omega \in U^c}$ 具有一致 *Property A*，即定义 *2.1* 中的参数可以一致地选取。

备注 8.5。 我们尚不清楚推论 8.4 的逆命题是否成立。注意，如定理 6.8 中所述，$X(\omega)$ 可能包含 $X(\omega)$ 之外的点，因此我们不知道 $X(\omega) \times X(\omega)$ 上的函数能否拼接起来，从而在 $G(X)_{U^c}$ 上提供一个连续函数。

命题 *8.2* 的证明。充分性： 对于任意 ε，$R > 0$，选取 $S > 0$、$D \subseteq X$ 以及函数 $g: X \times X \to [0,1]$，使其满足关于 ε 和 $3R$ 的条件 (1)-(3)。取映射 $p: N_R(D) \to D$，使得 p 在 D 上的限制是恒等映射，并且$d(p(x), x) \leq R$。现在我们定义：

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x, p(y)), & y \in N_R(D); \\ g(x,y), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，$\mathrm{supp}(f) \subseteq E_{R+S}$。此外，对于任意 $y_1, y_2 \in$自然数集$_R(D)$，若 $d(y_1, y_2) \leq R$，则有 $d(p(y_1), p(y_2)) \leq 3R$，因此

$$\sum_{x \in X} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \sum_{x \in X} |g(x, p(y_1)) - g(x, p(y_2))| \leq \varepsilon.$$

因此（将 S 扩大为 $S + R$），我们得到：对于任意 ε、$R > 0$，存在 $S > 0$、集合 $D \subseteq X$，其中 $D \supseteq \overline{U^c}$，以及函数 $f: X \times X \to [0,1]$，满足：

(1) $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$; (2) 对任意 $x \in D$，有 $\sum_{z \in X} f(z, x) = 1$;

(3) 对任意 $x \in D$ 及 $y \in X$，若 $d(x,y) \le R$，则有 $\mathrm{P}_{z\in X}|f(z,x) - f(z,y)| \le \varepsilon$.

现在固定 ε，$R > 0$ 并取这样的S、D 和函数f。

给定 $\omega \in U^c$，有 $\omega(D) = 1$。选取$\{t_\alpha : D_\alpha \to R_\alpha\}$作为 ω的相容族。应用命题 3.3，存在$Y_\omega \subseteq X$，使得 $\omega(Y) = 1$，并且存在局部坐标系$\{h_y : B(\omega, R+S) \to B(y,R+S)\}_{y\in Y_\omega}$，使得映射

$$h_y : B(\omega, R+S) \to B(y, R+S), \quad \alpha \mapsto t_\alpha(y)$$

对于每个$y \in Y_\omega$，它都是一个满射等距。将Y 替换为$Y_\omega \cap D$后，我们假设$Y_\omega \subseteq D$。注意 $\mathrm{supp}(f) \subseteq E_S$，因此应用引理 3.7 可得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in X(\omega)} \overline{f}(\alpha,\omega) &= \sum_{\alpha\in B(\omega,S)} \overline{f}(\alpha,\omega) = \sum_{\alpha\in B(\omega,S)} \lim_{x\to\omega} f(t_\alpha(x),x) = \lim_{x\to\omega, x\in Y_\omega} \sum_{\alpha\in B(\omega,S)} f(t_\alpha(x),x) \\ &= \lim_{x\to\omega,x\in Y_\omega} \sum_{z\in B(x,S)} f(z,x) = \lim_{x\to\omega,x\in Y_\omega} \sum_{z\in X} f(z,x), \end{aligned} \tag{8.1}$$

根据假设，最后一项等于 1。

另一方面，对于任意 $\alpha \in B(\omega, R)$，有 $\lim_{x\to\omega} d(t_\alpha(x),x) \le R$。因此，如有必要可缩小$Y_\omega$，从而假设对于任意$x \in Y_\omega$，都有$d(t_\alpha(x),x) \le R$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in X(\omega)} |\overline{f}(\gamma,\alpha) - \overline{f}(\gamma,\omega)| &= \sum_{\gamma\in B(\omega,R+S)} |\overline{f}(\gamma,\alpha) - \overline{f}(\gamma,\omega)| \\ &= \lim_{x\to\omega,x\in Y_\omega} \sum_{\gamma\in B(\omega,R+S)} |f(t_\gamma(x), t_\alpha(x)) - f(t_\gamma(x),x)| \\ &= \lim_{x\to\omega,x\in Y_\omega} \sum_{z\in B(x,R+S)} |f(z,t_\alpha(x)) - f(z,x)| \\ &= \lim_{x\to\omega,x\in Y_\omega} \sum_{z\in X} |f(z,t_\alpha(x)) - f(z,x)|, \end{aligned} \tag{8.2}$$

根据假设，最后一项不超过 ε。因此，应用引理 8.3，我们得出充分性。

必要性：给定 ε，$\mathrm{R} > 0$，引理 8.3 给出 $\mathrm{S} > 0$ 以及一个函数 $\mathrm{f} : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0,1]$，满足其中的条件 (1)-(3)。固定一个 $\omega \in \mathrm{U}^c$，并选择 $\{\mathrm{t}_\alpha : \mathrm{D}_\alpha \to \mathrm{R}_\alpha\}$ 作为 ω 的相容族。应用命题 3.3，存在 $\mathrm{Y}_\omega \subseteq \mathrm{X}$，使得 $\omega(\mathrm{Y}) = 1$，并且存在一个局部坐标系 $\{\mathrm{h}_y : \mathrm{B}(\omega, \mathrm{R}+2\mathrm{S}) \to \mathrm{B}(\mathrm{y}, \mathrm{R}+\mathrm{S})\}_{y\in Y_\omega}$，使得映射

$$h_y : B(\omega, R+S) \to B(y, R+S), \quad \alpha \mapsto t_\alpha(y)$$

对每个 $y \in Y_\omega$ 都是满射等距。根据 (8.1) 中的计算，我们得到

$$\lim_{x\to\omega,x\in Y_\omega} \sum_{z\in X} f(z,x) = 1.$$

因此，对于给定的 ε，存在 $Y'_\omega \subseteq Y_\omega$，使得对于任意$x \in Y'_\omega$，都有 $\omega(Y'_\omega) = 1$

$$\sum_{z\in X} f(z,x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon).$$

另一方面，对于任意 $\alpha \in B(\omega,R)$，我们应用 (8.2) 中的计算，得到：

$$\lim_{x\to\omega,x\in Y'_\omega}\sum_{z\in X}|f(z,t_\alpha(x))-f(z,x)|=\sum_{\gamma\in X(\omega)}|\overline{f}(\gamma,\alpha)-\overline{f}(\gamma,\omega)|\leq\varepsilon.$$

注意，对于$x \in Y'_\omega$，命题 3.3 表明，$\{t_\alpha(x): \alpha \in B(\omega, R)\} = B(x,R)$。因此，存在 $Y''_\omega \subseteq Y'_\omega$，使得 $\omega(Y''_\omega) = 1$，从而对于任意$x \in Y''_\omega$以及$y \in B(x,R)$，有

$$\sum_{z\in X}|f(z,y)-f(z,x)|<2\varepsilon.$$

取$D := \mathrm{S}_{\omega\in U^c} Y''_\omega$，则显然$D \supseteq U^c$。此外，上述分析表明：

- 对于任意$x \in D$，有 $\mathrm{P}_{z\in X} f(z, x) \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$；
- 对于任意$x \in D$以及$y \in B(x, R)$，有 $\mathrm{P}_{z\in X} |f(z, y) - f(z, x)| < 2\varepsilon$。

最后，运用标准的归一化论证（或者等价地，应用引理 2.11 并相应地修改引理 8.3），即可完成证明。□

在命题 8.2 中将函数f设为 $\xi_y(x) := f(x, y)$，即可将命题 8.2 改写如下：

命题 8.2′. 设(X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。那么，X 朝向 U 具有部分性质 A，当且仅当对于任意 $\varepsilon,R > 0$，存在 $S > 0$、一个子集 $D \subseteq X$（满足 $D \supseteq U^c$）以及一个函数 $\xi : D \to \ell^1(X)_{1,+}, x \mapsto \xi_x$ 满足：

(1) $\mathrm{supp}(\xi_x) \subseteq B(x,S)$ 对任意 $x \in D$ 均成立；*(2)* 对任意 $x,y \in D$，若 $d(x,y) \leq R$，则有 $\|\xi_x - \xi_y\|_1 \leq \varepsilon$。

注记 8.6。我们指出，命题 8.2′ 中的函数 ξ 可以选取得满足 $\xi_x \in \ell^1(D)_{1,+}$。事实上，这与性质 A 情形下的技巧相同（参见例如 [32, 命题 4.2.5]）。此外，我们还可以利用 Mazur 映射进一步将 $\ell^1(D)_{1,+}$ 替换为 $\ell^2(D)_{1,+}$（相同技巧参见例如 [52, 命题 1.2.4]）。

现在，我们利用空间中的理想这一概念，为命题 8.2 提供另一种图景（参见定义 4.12）。回忆一下，对于 $\mathbf{X}$ 中的理想 $\mathbf{L}$，我们记$U(\mathbf{L}) := \mathrm{S}_{Y\in\mathbf{L}} Y$。我们需要以下辅助引理：

引理 8.7。 设 $\mathbf{L}$ 是 X 中的一个理想，且 $D \subseteq X$。那么，$D \supseteq U(\mathbf{L})^c$ 当且仅当 存在 $Y \in \mathbf{L}$ 使得 $D \supseteq Y^c$。

证明。设 $Y \in \mathbf{L}$ 使得 $D \supseteq Y^c$。注意到 $Y \cap Y^c = \emptyset$ 且 $\overline{Y} \cup \overline{Y^c} = \beta X$。因此有 $\overline{D} \supseteq \overline{Y^c} = \beta X \setminus Y \supseteq \beta X \setminus \overline{U(\mathbf{L})} = U(\mathbf{L})^c$。

反之，设 $\mathrm{D} \supseteq \mathrm{U(L)}^c$。则 $\mathrm{(D)}^c \subseteq \mathrm{U(L)} = \mathrm{S}_{\mathrm{Y}\in\mathrm{L}} \mathrm{Y}$。由于 D 是紧空间 βX 中的既开又闭集合，集合 $\mathrm{(D)}^c$ 也是紧的。因此存在 $\mathrm{Y}_1, \cdots, \mathrm{Y}_n \in \mathrm{L}$，使得 $\mathrm{(D)}^c \subseteq \mathrm{Y}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Y}_n = \mathrm{Y}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Y}_n$。由于 L 是理想，集合 $\mathrm{Y} := \mathrm{Y}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Y}_n \in \mathrm{L}$。于是有 $\mathrm{(D)}^c \subseteq \mathrm{Y}$，这意味着 $\mathrm{D} \supseteq \mathrm{(Y)}^c = \mathrm{Y}^c$。最后得到 $\mathrm{D} = \mathrm{D} \cap \mathrm{X} \supseteq \mathrm{Y}^c \cap \mathrm{X} = \mathrm{Y}^c$，从而证明完毕。□

根据引理 8.7，我们现在可以将命题 8.2（结合注记 8.6）改写如下：

命题 8.2′′. 设 (X,d) 是一个空间，$U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集，而 $\mathbf{L} = \mathbf{L}(U)$是 X 中与之关联的理想。那么，X 对 U 具有部分性质 A^c 当且仅当 对于任意$\varepsilon, R > 0$，都存在 $S > 0$、一个子集 $Y \in \mathbf{L}(U)$ 以及一个函数 $\xi : Y^c \to l^2(Y^c)_{1,+}, x \mapsto \xi_x s$ 满足：

(1) $\mathrm{supp}(\xi_x) \subseteq B(x,S)$ 对任意 $x \in Y^c$；*(2)* 对任意满足 $d(x,y) \leq R$ 的 $x,y \in Y^c$，有 $\|\xi_x - \xi_y\|_1 \leq \varepsilon$。

与性质 A 情形下的证明类似，我们也有如下结论：

推论 8.8. 设(X,d) 是一个空间，$U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集，且 $\mathbf{L} = \mathbf{L}(U)$ 是 X 中的关联理想。那么，X 朝向 U 具有部分性质 A^c 当且仅当对于任意 $R > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在 $S > 0$、一个子集 $Y \in \mathbf{L}(U)$ 以及一个正定型核 $k : Y^c \times Y^c \to \mathbb{R}$，满足：

(1) 对于 $x, y \in Y^c$，有 $k(x,y) = k(y,x)$ 且 $k(x,x) = 1$；*(2)* 对于满足 $d(x,y) \geq S$ 的 $x,y \in Y^c$，有 $k(x,y) = 0$；*(3)* 对于满足 $d(x,y) \leq R$ 的 $x,y \in Y^c$，有 $|1 - k(x,y)| \leq \varepsilon$。

8.2. **部分算子范数局部化性质**。回顾一下，Chen、Tessera、Wang 和 Yu 在 [12], 中引入了算子范数局部化性质（ONL）的概念，随后 Sako 在 [43] 中证明了 ONL 等价于性质 A。这里我们引入 ONL 的一个部分版本，与定义 8.1 相对应。

设 ν 是 X 上的正局部有限博雷尔测度，H 是可分的无限维希尔伯特空间。对于算子 $T \in \mathrm{B}(L^2(X, \nu) \otimes \mathrm{H})$，我们也可以像第 2.3 节中那样定义其传播。我们引入如下定义：

定义 8.9. 设 (X, d) 是一个空间，且 $\mathrm{U} \subseteq \beta\mathrm{X}$ 是一个不变开子集。我们称 X 关于 $\mathrm{U}^c = \partial_\beta \mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$ 具有部分算子范数局部化性质（部分 ONL），如果存在 $\mathrm{c} \in (0, 1]$，使得对于任意 $\mathrm{R} > 0$，都存在 $\mathrm{S} > 0$ 和 $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{X}$，其中 $\mathrm{D} \supseteq \mathrm{U}^c$，满足以下条件：对于 X 上任意满足 $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{D}$ 的正局部有限博雷尔测度 ν，以及任意传播至多为 R 的算子 $\mathrm{a} \in \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \nu) \otimes \mathrm{H})$，都存在一个非零的 $\zeta \in \mathrm{L}^2(\mathrm{X}, \nu) \otimes \mathrm{H}$，使得 $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\zeta)) \leq \mathrm{S}$ 且 $\mathrm{ckak} \cdot \mathrm{k}\zeta\mathrm{k} \leq \mathrm{ka}\zeta\mathrm{k}$。

本小节余下部分的目的是证明部分 ONL 等价于部分性质 A。我们将遵循 [43] 的思路。

为简化表述，记 $\mathrm{C}^R_u[\mathrm{X}; \mathrm{H}] := \{\mathrm{T} \in \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(\mathrm{X}) \otimes \mathrm{H}) : \mathrm{prop(a)} \leq \mathrm{R}\}$，其中 $\mathrm{R} \geq 0$。对于子空间 $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}$，显然 $\mathrm{C}^R_u[\mathrm{Y}] \cong \chi_Y \mathrm{C}^R_u[\mathrm{X}]\chi_Y$（相应地，$\mathrm{C}^R_u[\mathrm{Y}; \mathrm{H}] \cong \chi_Y \mathrm{C}^R_u[\mathrm{X}; \mathrm{H}]\chi_Y$），因此可将其视为 $\mathrm{C}^R_u[\mathrm{X}]$（相应地，$\mathrm{C}^R_u[\mathrm{X}; \mathrm{H}]$）的子集，且支撑在 $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$ 中。同理，$\mathrm{C}^*_u(\mathrm{Y}) \cong \chi_Y \mathrm{C}^*_u(\mathrm{X})\chi_Y$可视为 $\mathrm{C}^*(\mathrm{X})$ 的一个 C^*_u-子代数。因此，后文中我们不作区分。对于 $\mathrm{S} > 0$，记

$$B_S^Y := \prod_{x \in X} \mathfrak{B}(\ell^2(B(x,S) \cap Y)),$$

其元素记作 $b = ([b^x(y, z)]_{y,\ z \in B(x,S) \cap Y})_{x \in X}$。我们还考虑映射

$$\psi_S^Y : C^*_u(Y) \cong \chi_Y C^*_u(X) \chi_Y \longrightarrow B_S^Y \quad \text{by} \quad a \mapsto ([a(y,z)]_{y,z \in B(x,S) \cap Y})_{x \in X}.$$

回顾完全正映射和完全有界映射的概念：

• 酉 C^*-代数 B 的自伴闭子空间 F，若 $1_B \in F$，则称其为一个算子系统。

• 若线性映射 ϕ 从F 到C^*-代数C 满足映射 $\phi_{(n)} = \phi \otimes \mathrm{id} : F \otimes M_n(\mathbb{C}) \to C \otimes M_n(\mathbb{C})$ 对每个 n均为正，则称其为完全正 映射。

• 若线性映射 $\theta : F \to C$ 使序列 $\{\|\theta_{(n)} : F \otimes M_n(\mathbb{C}) \to C \otimes M_n(\mathbb{C})\|\}$ 有界，则称其为完全有界 映射。记 $\|\theta\|_{\mathrm{cb}} := \sup_{n\in\text{自然数集}} \|\theta_{(n)}\|$。

我们有如下关于部分 ONL 的刻画，它类似于[43, 命题 3.1]。证明几乎完全相同，因此略去。

引理 8.10。设(X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。则以下条件等价：

(1) X 对 U^c具有部分 *ONL*；*(2)* 存在 $c \in (0,1]$，使得对任意 $R > 0$，都存在 $S > 0$ 和 $D \subseteq X$，满足 $D \supseteq U^c$，并满足条件 *(α)*：对任意 $a \in C_u^R[D; H]$，存在一个非零$\zeta \in l^2(X) \otimes H$，使得 $diam(supp(\zeta)) \leq S$ 且 $\|a\zeta - a\zeta\| \leq \|a\zeta\|$；*(3)* 对任意 $c \in (0, 1)$ 和 $R > 0$，都存在 $S > 0$ 和 $D \subseteq X$，满足 $D \supseteq U^c$，并满足条件 *(α)*；*(4)* 对任意 $c \in (0, 1)$ 和 $R > 0$，都存在 $S > 0$ 和 $D \subseteq X$，满足 $D \supseteq U^c$，并满足条件 *(β)*：对任意 $a \in C_u^R[D]$，都存在一个非零 $\xi \in \overline{l^2(X)}$，使得 $diam(supp(\xi)) \leq S$ 且 $\|a\xi - a\xi\| \leq \|a\xi\|$；*(5)* 对任意 ε、$R > 0$，都存在 $S > R$ 和 $D \subseteq X$，满足 $D \supseteq U^c$，使得 *(6)* 对任意 ε、$R > 0$，都存在 $S > R$ 和 $D \subseteq X$，满足 $D \supseteq U^c$，使得

$$\|(\psi_S^D|_{\mathbb{C}_u^R[D]})^{-1} : \psi_S^D(\mathbb{C}_u^R[D]) \longrightarrow \mathbb{C}_u^R[D]\| < 1 + \varepsilon;$$

$$\|(\psi_S^D|_{\mathbb{C}_u^R[D]})^{-1} : \psi_S^D(\mathbb{C}_u^R[D]) \longrightarrow \mathbb{C}_u^R[D]\|_{\mathrm{cb}} < 1 + \varepsilon;$$

我们记录如下结论，它可直接由引理 8.7 和引理 8.10 得出。

引理 *8.11.* 设 *(X, d)* 是一个空间，$U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集，$L = L(U)$ 是 X 中的关联理想。那么，X 朝向 U^c 具有部分 *ONL*，当且仅当对于任意 $c \in (0, 1)$ 和 $R > 0$，都存在 $S > 0$ 和 $Y \in L(U)$，满足以下条件：对于任意 $a \in C_u^R[Y^c]$，都存在一个非零的 $\xi \in l^2(X)$，使得 $diam(supp(\xi)) \leq S$ 且 $\|a\xi - a\xi\| \leq \|a\xi\|$。

最后，我们可以改用命题 8.2′、注记 8.6、推论 8.8 和引理 8.10，仿照 [43, 定理 4.1] 的证明，从而得到以下结论。证明几乎完全相同，故略去。

命题 8.12. 设(X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。那么，X 关于 U^c 具有部分性质 A 当且仅当 X 关于 U^c具有部分 *ONL*。

作为本小节的收尾，我们研究部分 ONL 的一种保持性质，这将有助于证明下一小节中的主要结果。

设X 是一个空间，$\mathbf{L}$ 是X中的一个理想。假设X 可以分解为$X = X_1 \cup X_2$。考虑

$$\mathbf{L}_i := \{Y \cap X_i : Y \in \mathbf{L}\} \quad \text{for} \quad i = 1, 2. \tag{8.3}$$

那么，容易验证$\mathbf{L}_i$ 是X_i 中的一个理想，其中$i = 1$、2，并且

$$\mathbf{L} = \{Y_1 \cup Y_2 : Y_i \in \mathbf{L}_i, i = 1, 2\}.$$

关于上述分解，我们现在证明部分 ONL 在有限并下保持不变。

命题 8.13。 沿用上述记号，假设对于 $i = 1,2$，X_i 具有朝向$\beta X_i \setminus U(\mathbf{L}_i)$ 的部分 ONL。那么，X 具有朝向 $\beta X \setminus U(\mathbf{L})$的部分 ONL。

证明命题 8.13 的一种方法是稍作修改后沿用 [18, 引理 3.3]的证明。这里我们采用另一种方法，使用命题 8.12。

回顾推论 A.8：对于子集 $Z \subseteq X$，其在 βX 中的闭包Z 与 βZ同胚。因此，后文我们将它们视为同一对象。现在，我们可以轻松地将 (8.3) 中理想的限制转化为不变开子集的限制（证明很直接，故略去）：

引理 8.14. 设 $X = X_1 \cup X_2$, $\mathbf{L}$ 是 X 中的一个理想，$U = U(\mathbf{L}) \subseteq \beta X$ 是与之对应的 βX 的不变开子集。那么，$U \cap X_i$ 是 $X_i = \beta X_i$ 的不变开子集，它对应于 *(8.3)* 中 $i = 1,2$ 时的理想 $\mathbf{L}_i$。

尽管$U \cap X_i$ 在 βX_i中是不变的，但一般而言，它在 βX中并非不变。这与 $\chi_{X_i} C_u^*(X)\chi_{X_i} \cong C_u^*(X_i)$只是$C_u^*(X)$的一个子代数而非理想这一事实相符。因此，我们考虑第 4 节中回顾的空间理想I^{X_i}，并证明部分性质 A 的下述保持性质：

引理 8.15. 设 $X = X_1 \cup X_2$, $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集，且 $U_i = U \cap X_i$对 $i = 1,2$ 成立。若 X_i 具有关于 $\beta X_i \setminus U_i$（对 $i = 1,2$）的部分性质 A，则 X 具有关于 $\beta X \setminus U$ 的部分性质 A。

证明。对于任意 $R > 0$ 以及 $i = 1, 2$，令 $U_i(R) := \sum_{Y \in L(U_i)} N_R(Y)$。显然，$U_i(R)$ 是 $N_R(X_i) = \beta(N_R(X_i))$ 的一个不变开子集。此外，由命题 8.2 可知，$N_R(X_i)$ 具有关于 $N_R(X_i) \setminus U_i(R)$ 的部分性质 A。根据定义，这意味着群胚 $G(N_R(X_i))_{\mathcal{N}_R(X_i)}\setminus U_i(R)$ 是可和的。因此，作为一个子群胚，$G(N_R(X_i))_{\mathcal{N}_R(X_i)}\setminus U$ 是可和的，这进一步意味着群胚 $\sum_{R>0} G(N_R(X_i))_{\mathcal{N}_R(X_i)}\setminus U$ 是可和的。

由引理 4.14 可知，S_R自然数集$_R(X_i) \setminus U$ 在 βX 中是不变的，而引理 4.16 表明

$$G(X)_{\cup_R \overline{\mathcal{N}_R(X_i)}\setminus U} = \bigcup_{R>0} G(\mathcal{N}_R(X_i))_{\overline{\mathcal{N}_R(X_i)}\setminus U},$$

因此它是可和的。注意，S_R 自然数集$_R(X_1) \cup S_R$ 自然数集$_R(X_2) = \beta X$，因此根据延拓性质，我们得到

$$G(X)_{\beta X\setminus U} = G(X)_{\cup_R \overline{\mathcal{N}_R(X_1)}\setminus U} \cup G(X)_{\cup_R \overline{\mathcal{N}_R(X_2)}\setminus U}$$

正如所需，它是可和的。 □

结合命题 8.12 和引理 8.15，我们得出命题 8.1 3.

8.3. **可数生成性**。 这里我们引入一个额外假设，以便稍后刻画 $\tilde{I}(U) = I(U)$。

定义 8.16。 对于 X 的子集组成的集合 S，记 **L**(S) 为 X 中包含 S 的最小理想，并称 **L**(S) 是由 S生成的 。若存在一个可数集合 S，使得 $\mathbf{L} = \mathbf{L}(S)$，则称 X 中的理想**L** 为可数生成的 。

不变开子集$U \subseteq \beta X$ 被称为可数生成的，当且仅当关联理想$\mathbf{L}(U)$是可数生成的。

例8.17。 对于空间X 及其子空间$A \subseteq X$，由引理 4.14 可知，空间理想I_A 是可数生成的。另一方面，由引理 4.17 可知，主理想总是可数生成的。特别地，在 [51, 第 3] 节中考虑的理想 hPi（另见例 5.10）是可数生成的。

可数生成性这一性质导出如下结论：

引理 8.18. 设 **L** 是 X 中的可数生成理想。那么存在一个由 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots\}$ 组成的可数子集，且该子集包含于 **L**，使得

$$\mathbf{L} = \{Z \subseteq X : \exists\, n \in \mathbb{N} \textit{ such that } Z \subseteq Y_n\}.$$

为证明引理 8.18，我们需要一个关于 **L**(S) 结构的辅助结果：

引理 8.19. 对于 X 的子集组成的集合 $\mathcal{S}$，记 $\mathcal{S}^{(1)} := \{A_1 \cup \cdots \cup A_n : A_i \in \mathcal{S}, n \in$ 自然数集$\}$ 以及 $\mathcal{S}^{(2)} := \{$自然数集$_k(\tilde{A}) : \tilde{A} \in \mathcal{S}^{(1)}, k \in$ 自然数集$\}$。那么有：

$$\mathbf{L}(\mathcal{S}) = \{Z : \exists\, Y \in \mathcal{S}^{(2)} \textit{ such that } Z \subseteq Y\}.$$

证明。 记 $\mathrm{S}^{(3)} :=$ {整数集 : $\exists\, Y \in \mathrm{S}^{(2)}$ 使得$Z \subseteq Y$}。显然 $\mathrm{S}^{(3)} \subseteq$ **L**(S)，且任何包含 S 的理想都必须包含 $\mathrm{S}^{(3)}$。因此只需验证 $\mathrm{S}^{(3)}$ 是一个理想。

对于 $\mathrm{Z} \in \mathrm{S}^{(3)}$ 和 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Z}$，存在 $\mathrm{Y} \in \mathrm{S}^{(2)}$ 使得 $\mathrm{Z} \subseteq \mathrm{Y}$。因此 $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{Y}$，这意味着 $\mathrm{W} \in \mathrm{S}^{(3)}$。另请注意，$\mathrm{Y} \in \mathrm{S}^{(2)}$ 意味着存在$\tilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{S}^{(1)}$ 和 $\mathrm{k}' \in$ 自然数集，使得 $\mathrm{Y} =$ 自然数集$_{k'}(\tilde{\mathrm{A}})$。因此，对于任意 $\mathrm{k} \in$ 自然数集，我们有自然数集$_k$(Z) $\subseteq$ 自然数集$_k$(Y) $\subseteq$ 自然数集$_{k+k'}(\tilde{\mathrm{A}})$，这意味着自然数集$_k$(Z) $\in \mathrm{S}^{(3)}$。

最后，对于 $Z_1, Z_2 \in \mathrm{S}^{(3)}$，存在 $\tilde{A}_1$，$\tilde{A}_2 \in \mathrm{S}^{(1)}$ 和 $k_1, k_2 \in$ 自然数集，使得$\tilde{Z}_i \subseteq$ 自然数集$_{k_i}(A_i)$，其中 $i = 1, 2$。因此

$$Z_1 \cup Z_2 \subseteq \mathcal{N}_{k_1}(\tilde{A}_1) \cup \mathcal{N}_{k_2}(\tilde{A}_2) \subseteq \mathcal{N}_{k_1+k_2}(\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2) \in \mathcal{S}^{(2)},$$

这意味着 $Z_1 \cup Z_2 \in \mathrm{S}^{(3)}$。因此，我们得出证明。 □

引理 *8.18* 的证明。 根据假设，存在一个可数的 S，使得 **L** = **L**(S)。采用引理 8.19 的记号，集合 $\mathrm{S}^{(2)}$ 也是可数的。因此，第一个结论可直接由引理 8.19 得出。□

以下例子说明，空间中的并非每个理想都是可数生成的。

例 8.20。 令$X =$ 自然数集 × 自然数集，并赋予由欧几里得度量d_E 在 R^2上诱导的度量。对于每个$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 以及$k \in$ 自然数集，我们定义

$$\ell_\theta := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \tan(\theta)x\}$$

and

$$S_{\theta,k} := \{(x, y) \in X : d_E((x, y), \ell_\theta) \leq k\} = \mathcal{N}_k(\ell_\theta) \cap X.$$

考虑 $\mathrm{S} := \{\mathrm{S}_{\theta,k} : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \mathrm{k} \in$自然数集$\}$，并按照引理 8.19 令 $\mathrm{S}^{(1)} := \{\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n : \mathrm{A}_i \in \mathrm{S}, \mathrm{n} \in$ 自然数集$\}$。对于任意 $\mathrm{R} > 0$ 以及 $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n \in \mathrm{S}^{(1)}$（其中 $\mathrm{A}_i \in \mathrm{S}$），我们有 $\mathrm{N}_R(\mathrm{A}) = \mathrm{N}_R(\mathrm{A}_1) \cup \cdots \cup \mathrm{N}_R(\mathrm{A}_n)$，它包含于 S 中的某个元素。因此，应用引理 8.19，由 S 生成的理想 L(S) 为：

$$\mathbf{L}(\mathcal{S}) = \{Z : \exists\, Y \in \mathcal{S}^{(1)} \text{ such that } Z \subseteq Y\}. \tag{8.4}$$

我们声称**L**(S)不是可数生成的。否则，存在一个可数子集 S′ 生成**L**(S)。此外，根据 (8.4)，我们可以假设

$$\mathcal{S}' = \{Y_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{where} \quad Y_n = S_{\theta_{n,1},k_n} \cup \cdots \cup S_{\theta_{n,p_n},k_n} \in \mathcal{S}^{(1)}.$$

取 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\theta_{n,i} : i = 1, 2, \cdots, p_n; n \in$ 自然数集$\}$，并考虑 $Y = S_{\theta,1}$。由于 S′生成 **L**(S)，由引理 8.19 可知，存在 $R > 0$ 和 $Y_{m_1}, \cdots, Y_{m_l} \in$S′，使得

$$S_{\theta,1} = Y \subseteq \mathcal{N}_R(Y_{m_1} \cup \cdots \cup Y_{m_l}).$$

注意，右侧包含在有限个某些 R′-邻域的并中，这些邻域是直线的邻域（在 $\mathbf{R}^2$ 中经过原点），其斜率属于集合

$$\left\{\tan(\theta_{n,i}) : i = 1, 2, \cdots, p_n; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

由于 θ 的选取，这导致矛盾，从而得到 **L**(S) 不能是可数生成的。

8.4. **I**(U) 的刻画 $= \tilde{I}(U)$。 在上述内容中建立了所有必要的要素之后，现在我们给出本节的主要结果：

定理 8.21。 设 (X,d) 是第 *2.2* 节中的空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个可数生成不变开子集。则以下条件等价：

(1) X 对 $\beta X \setminus U$ 具有部分性质 A；*(2)* $\tilde{I}(U) = I(U)$；

(3) 所有幽灵算子组成的理想 I_G 包含于 $I(U)$。

注意，$U = X$ 是可数生成的，因此定理 8.21 可以推出 [42,定理 1.3]（见例 4.8 和例 5.5）。借用术语来说，定理 8.21 中的[42], 条件 (3) 表明，所有幽灵算子都可以在几何理想$I(U)$中被消除。

我们沿用 [42, 定理 1.3]的证明思路。首先，我们需要引理 [42, 4.2]的一个修正版：

引理 8.22。 设(X,d) 是一个空间，$U \subseteq \beta X$ 是一个可数生成的不变开子集，且 $\mathbf{L} = \mathbf{L}(U)$ 是 X 中相应的理想。假设 X 不具有关于 U^c的部分 *ONL*。那么存在 $\kappa \in (0,1)$、$R > 0$、一个(T_n) 序列（取自$\mathbb{C}_u[X]$,）、一个由 X 的有限子集构成的(B_n)序列，以及一个由正实数构成的(S_n) 序列，使得：

(a) (S_n) 是一个随 $n \to \infty$ 趋于无穷大的递增序列；*(b)* 每个 T_n 均为正，且其范数小于1；*(c)* 对于 $n \neq m$，有 $B_n \cap B_m = \emptyset$；*(d)* 每个 T_n 的支撑均位于 $B_n \times B_n$ 中；*(e)* 对每个 n 和 $\xi \in \mathrm{l}^2(X)$，若 $\|\xi\| = 1$ 且 $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}\xi) \leq S_n$，则 $\|T_n\xi\| \leq \kappa$；*(f)* 对每个 $Y \in \mathbf{L}(U)$，存在 n 使得 $B_n \cap Y = \emptyset$。

证明。 固定一个基点 $x_0 \in X$，考虑分解 $X = X^{(1)} \cup X^{(2)}$ 满足

$$X^{(1)} := \bigsqcup_{m \text{ even}} \{x \in X : m^2 \leq d(x, x_0) < (m+1)^2\}$$

and

$$X^{(2)} := \bigsqcup_{m \text{ odd}} \{x \in X : m^2 \leq d(x, x_0) < (m+1)^2\}.$$

令 $\mathbf{L}_i := \{Y \cap X^{(i)} : Y \in \mathbf{L}\}$，其中 $i = 1, 2$。根据假设，X 不具有相对于 U^c 的部分性质 A。因此，不失一般性，我们可以假设$X^{(1)}$ 不具有相对于 $\beta X^{(1)} \setminus U(\mathbf{L}_1)$ 的部分性质 A，这归功于命题 8.13。注意，这意味着 $U(\mathbf{L}_1)$，$\beta X^{(1)}$。显然，$\mathbf{L}_1$ 也是可数生成的，因此根据引理 8.18，存在 $\mathbf{L}_1$ 的一个可数子集 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots\}$，使得

$$\mathbf{L}_1 = \{Z \subseteq X^{(1)} : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ such that } Z \subseteq Y_n\}.$$

在下文中，我们固定这样一个序列 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, \cdots\}$。

由引理 8.11 可知，存在 $c \in (0, 1)$ 和 $R > 0$，使得对于任意 $Y \in \mathbf{L}_1$ 和 $S > 0$，都存在 $T \in C_u^R[X^{(1)} \setminus Y]$，满足 $\|T\| = 1$，且满足：对于任意$\xi \in l^2(X^{(1)})$，若 $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\xi) \leq S$ 且 $\|\xi\| = 1$，则 $\|T\xi\| < c$。我们称这样的算子为 (R, c, S, Y)-局部化算子。将 T 替换为 T^*T（并将 R 替换为 $2R$、将 c 替换为 $\sqrt{c}$），可知存在 $c \in (0, 1)$ 和 $R > 0$，使得对于任意 $Y \in \mathbf{L}_1$ 和 $S > 0$，都存在一个范数为 1 的正 (R, c, S, Y)-局部化算子。在证明余下部分中，固定这样的 c 和 R，并令 $\kappa := \frac{2c}{1+c} < 1$。

注意到$X^{(1)}$ 可以分解为：

$$X^{(1)} := \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} X_m$$

其中，每个X_m 都是有限的，并且对于任意n、m，$d(X_m, X_n) > R$。因此，每个$T \in C_u^R[X^{(1)}]$ 都可相对于此分解，拆分为有限秩算子$T = \sum_m T^{(m)}$ 的块对角和，其中$T^{(m)} \in B(l^2(X_m))$。

取 $S_1 = 1$。根据假设，存在一个正的 (R, c, S_1, Y_1)-局部化算子 $T \in C_u^R[X^{(1)} \setminus Y_1]$，其范数为 1。注意，$\|T\| = \sup_m \|T^{(m)}\|$，因此存在 $m_1 \in$ 自然数集，使得 $\|T^{(m_1)}\| > \frac{1+c}{2}$。令 $T_1 := T^{(m_1)}/\|T^{(m_1)}\|$，并记 $B_1 := X_{m_1} \cap (X^{(1)} \setminus Y_1)$。由于根据假设 T 的支撑包含在 $B_1 \times B_1$ 中，因此 B 非空。于是，对于任意 $\xi \in l^2(X^{(1)})$，若 $\|\xi\| = 1$ 且 $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\xi)) \leq S_1$，，则有

$$\|T_1\xi\| \leq \frac{2c}{1+c} = \kappa < 1.$$

现在取 $S_2 > \max\operatorname{diam}\left(F \subseteq \bigsqcup_{k \leq m_1} X_k\right), 2$。根据假设，存在一个范数为 1 的正 (R, c, S_2, Y_2)- 局部化算子 $T \in C_u^R[X^{(1)} \setminus Y_2]$。同样，存在 m_2 使得 $\|T^{(m_2)}\| > \frac{1+c}{2}$，这迫使 $m_2 > m_1$。令 $T_2 := T^{(m_2)}/\|T^{(m_2)}\|$，并记 $B_2 := X_{m_2} \cap (X^{(1)} \setminus Y_2)$。由于根据假设，$T$ 的支撑包含在 $B_2 \times B_2$中，因此 B_2非空。类似地，对于任意满足 $\|\xi\| = 1$ 且 $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\xi)) \leq S_2$,的 $\xi \in l^2(X^{(1)})$，我们有 $\|T_2\xi\| \leq \kappa$。

归纳地，我们可以构造一个序列 (T_n)，它属于 $C_u[X^{(1)}] \subseteq C_u[X]$，，一个由 $X^{(1)} \subseteq X$ 的有限子集组成的序列 (B_n)，以及一个正实数序列 (S_n)，使其满足陈述中的条件 (a)-(e)。此外，对于每个$Z \in \mathbf{L}(U)$，都存在一个包含 $Z \cap X^{(1)}$的 Y_n，其中某个 n成立。根据构造可知，$B_n \cap Y_n = \emptyset$且$B_n \subseteq X^{(1)}$。因此我们有：

$$B_n \cap Z = B_n \cap X^{(1)} \cap Z \subseteq B_n \cap Y_n = \emptyset,$$

这给出了条件 (f)，并完成了证明。 □

注记 8.23。 将引理 8.22与 [42, 引理 4.2], 进行比较，我们注意到，条件 (f) 是引理 8.22 中唯一新增的条件。似乎很难用

不变开子集 U 而非理想$\mathbf{L}(U)$ 的语言来表述条件 (f)，这说明了使用第 1 节中提到的空间中的理想这一概念的重要性。

现在我们可以证明定理 8.21。

定理 *8.21* 的证明。 “(1) $\Rightarrow$ (2)”包含在命题 7.2 中，而“(2) $\Rightarrow$ (3)”显然成立，因为$I_G = \tilde{} I(X) \subseteq \tilde{} I(U)$。因此，只需证明“(3) $\Rightarrow$ (1)”，我们将遵循 [42, 定理 1.3] 的证明思路。

假设X 不具有关于U^c的部分性质 A，则由命题 8.12 可知X 不具有关于U^c的部分 ONL。接着由引理 8.22，存在 $\kappa \in (0,1)$、$R > 0$、一个位于 $\mathbf{C}_u[X]$, 中的序列(T_n)、一个由X 的有限子集构成的序列(B_n)，以及一个正实数序列(S_n)，满足其中的条件(a)-(f)。现在考虑算子

$$T := \bigoplus_n T_n,$$

它是 $\mathbf{C}_u[X]$ 中的一个范数为 1 的正算子。

现在我们取一个连续函数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$，使得 $\operatorname{supp} f \subseteq [\frac{1+\kappa}{2}, 1]$且$f(1) = 1$。考虑算子 $f(T) \in C_u^*(X)$，它是正的、范数为 1，并且存在如下分解

$$f(T) = \bigoplus_n f(T_n),$$

其中每个 $f(T_n) \in \mathrm{B}(\mathrm{l}^2(B_n))$。我们将证明 $f(T) \in \tilde{} I(X) \setminus I(U)$，从而得出矛盾。

首先我们证明 $f(T) \notin I(U)$。回顾 (4.2)，有

$$I(U) = \overline{\{T' \in \mathbf{C}_u[X] : \operatorname{supp}(T') \subseteq Y \times Y \text{ for some } Y \in \mathbf{L}(U)\}},$$

现在，对于任意满足 $\operatorname{supp}(T') \subseteq Y \times Y$ 的 $T' \in \mathbf{C}_u[X]$，其中某个 $Y \in \mathbf{L}(U)$，引理 8.22 中的条件 (f) 表明，存在一个 n 使得 $B_n \cap Y = \emptyset$。因此我们有：

$$\|f(T) - T'\| \geq \|\chi_{B_n} f(T) \chi_{B_n} - \chi_{B_n} T' \chi_{B_n}\| = \|f(T_n) - 0\| = 1,$$

这意味着 $f(T) \notin I(U)$。

另一方面，采用与 [42, 定理 1.3] 相同的论证（因为引理 8.22 提供了 [42, 引理 4.2] 所需的所有条件），我们得到 $f(T)$ 是一个幽灵算子。因此，根据例 5.5，我们有 $f(T) \in \tilde{} I(X)$。由此，我们完成了证明。□

9. 开放问题

这里我们汇集了有关这一主题的若干开放问题。

首先回顾定理 5.4：对于空间 (X,d)，一致 Roe 代数 $C_u^*(X)$ 中的任意理想 I 都必须介于 $I(U)$ 与 $\tilde{} I(U)$ 之间，其中 $U = U(I)$。然而，格的结构

$$\mathfrak{I}_U = \{I \text{ is an ideal in } C_u^*(X) : U(I) = U\}$$

在（1.1）中仍不清楚。注意，对于 X 的任意不变开子集 $V \supseteq U$，理想 $I(V) \cap \tilde{} I(U)$ 属于格 I_U。遗憾的是，我们不知道这些理想是否能覆盖 I_U 中的每个元素。因此我们提出以下问题：

问题9.1。 设 (X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。我们能否详细描述格 $\Im_U = \{I$ 是 $C_u^*(X)$ 中的理想： $U(I) = U\}$ 中的元素？对于 $I \in \Im_U$，能否找到一个不变开子集 $V \supseteq U$，使得 $I = I(V) \cap \tilde{} I(U)$?

请注意，上述问题的答案结合定理 5.4，将对一致 Roe 代数的理想结构给出完整描述。

接下来的问题涉及第 6.1 节讨论的极小点。回顾一下，Stone-Čech 边界中的极小点对应于一致 Roe 代数中的极大理想。然而，正如定理 6.8 所示，边界中存在许多非极小点。因此，探索一种实用的方法来区分极小点将很有意义。

问题 9.2。 给定一个空间(X, d)，我们能否找到一种实用的方法来区分 *Stone-Čech* 边界 $\partial_\beta X$ 中的极小点？

请注意，根据定理 6.8，即使在$X = \mathbb{Z}$ 这一初等情形下，答案也可能并不简单。

接下来的问题涉及第 7 节中关于K理论的讨论。回顾一下，在命题 7.4 的第二部分，我们证明了对于$C_u^*(X)$中的一个理想I，$(\iota_I)_* : K_*(I \cap \mathbb{C}_u[X]) \longrightarrow K_*(I)$在$X$粗嵌入时是单射。因此我们提出以下问题：

问题 9.3. 对于 $C_u^*(X)$ 中的一个理想 I，若 X 可粗嵌入，则映射$(\iota_I)_* : K_*(I \cap \mathbb{C}_u[X]) \longrightarrow K_*(I)$ 对 $* = 0,1$ 是否为满射？

我们的最后一个问题是围绕定理 8.21 提出的。回顾一下，可数生成性的假设在引理 8.22 中发挥着重要作用，而引理 8.22 又是定理 8.21 证明中的关键。我们想知道这一假设是否必要，并提出以下问题：

问题 9.4. 设 (X,d) 是一个空间，且 $U \subseteq \beta X$ 是一个不变开子集。若$\tilde{} I(U) = I(U)$，在不假设 U 为可数生成的情况下，我们能否推知 X 对 $\beta X \setminus U$ 具有部分性质 A？

附录 A. 超滤子

这里我们汇集了一些关于超滤子的基础知识，全文中都会用到这些内容。这些材料应该相当广为人知（参见，例如，[11, 附录 A]，[40, 第 7 章。4] 或 [50, 附录 A]）。尽管其中一些结果可能并非标准结果，而且我们也未深入查阅相关文献，但为方便读者，仍在此给出证明。

定义 A.1. 设X 是一个集合，$\mathrm{P}(X)$是其幂集。X 上的超滤子 是一个族 $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{P}(X)$，满足以下条件：

(I.1) $\emptyset \notin \mathrm{U}$；(I.2) 若$A,B \in \mathrm{U}$，则$A \cap B \in \mathrm{U}$；
(I.3) 若$A \in \mathrm{U}$且$A \subseteq B$，则$B \in \mathrm{U}$；(I.4) 对任意$A \subseteq X$，要么$A \in \mathrm{U}$，要么$X \setminus A \in \mathrm{U}$。

对于 X 上的超滤子 U，我们可以通过令 $\omega(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \mathrm{U}$，将函数 $\omega : \mathrm{P}(X) \to \{0, 1\}$ 与之对应。由上文的 (I.1)-(I.4) 可知， ω 是一个

定义在 $\mathrm{P}(X)$ 上、取值于 $\{0,1\}$ 的有限可加概率测度。反过来，对于定义在 $\mathrm{P}(X)$ 上的此类函数 ω，我们可以将族 $\mathrm{U}_\omega := \{A \subseteq X : \omega(A) = 1\}$ 与之对应。显然，U_ω 是 X 上的超滤子，而且这两个过程互为逆过程。因此，本文中我们将自由地交替使用这两个概念，而不再另作说明。

对于 $a \in X$，显然，族 $\{A \in \mathrm{P}(X) : a \in A\}$ 是X上的一个超滤子。这种超滤子称为主超滤子。非主的超滤子称为非主超滤子。利用佐恩引理可以证明，只要X 是无限集，非主超滤子就总是存在。

以下是众所周知的结果（例如， [50, 引理 A.2]）：

引理 A.2. 设 ω 是集合 X 上的一个超滤子，且 $D \subseteq X$，其中 $\omega(D) = 1$。设 $f : D \to Y$ 是从 D 到紧 *Hausdorff* 拓扑空间 Y 的函数。那么存在唯一的点 $y \in Y$，使得对于 y 的任意开邻域 U，都有 $\omega(f^{-1}(U)) = 1$。

定义 A.3. 引理 A.2 中的唯一点称为沿着ω 的f 的超极限，或称为 ω-极限，记作 $\lim_\omega f$ 或 $\lim_{a\to\omega} f(a)$。

我们记录如下局部化结果：

Le引理 A.4. 设$\mathcal{U}$ 是集合 X 上的一个超滤子，且 $A \subseteq X$，$A \in \mathcal{U}$。那么我们有 *e:*

(1) $\{S \cap A : S \in \mathcal{U}\} = \{S \subseteq A : S \in \mathcal{U}\}$ 是 A 上的一个超滤子，记作 $\mathcal{U}_A$。*(2)* $\mathcal{U} = \{S \subseteq X : S \cap A \in \mathcal{U}_A\} = \{S \subseteq X : \exists S' \in \mathcal{U}_A$ 使得 $S' \subseteq S\}$。

证明。(1)。由定义 A.1 可知，$\{S \cap A : S \in \mathrm{U}\} = \{S \subseteq A : S \in \mathrm{U}\}$，因此 (I.1)-(I.3) 对 U_A 成立。关于 (I.4)：给定 $B \subseteq A$，若 $B \in \mathrm{U}$，则$B \in \mathrm{U}_A$ 也成立；若 $B \notin \mathrm{U}$，则 $X \setminus B \in \mathrm{U}$，因此 $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathrm{U}_A$。

(2). 这显而易见，因此略去证明。 □

我们也可以将子集上的超滤子扩展到整个空间。证明显而易见，因此略去。

引理 A.5. 设 Y 是集合 X 的一个子集，且 $\mathcal{U}_0$ 是 Y 上的一个超滤子。定义

$$\mathcal{U} := \{S \subseteq X : S \cap Y \in \mathcal{U}_0\}.$$

则$\mathcal{U}$ 是 X 上的一个超滤子。

下面的结果给出了将一族超滤子合并为一个超滤子的方法：

引理 A.6. 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族集合，且$\mathcal{U}_i$ 对每个 $i \in I$ 都是 X_i 上的一个超滤子。设 ω_0 是 I 上的一个超滤子。考虑集合 $X := \bigsqcup_{i\in I} X_i$，并定义：

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigsqcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigsqcup_{i\in I} X_i : \exists\, J \subseteq I \text{ with } \omega_0(J) = 1 \text{ such that } \forall i \in J, A_i \in \mathcal{U}_i \right\}.$$

那么$\mathcal{U}$ 是 X 上的一个超滤子。

证明。首先，显然有 $\emptyset \notin \mathrm{U}$。假设 $\mathrm{F}_{i\in I}\, \mathrm{A}_i$ 且 $\mathrm{F}_{i\in I}\, \mathrm{B}_i \in \mathrm{U}$，即存在 J_A、$\mathrm{J}_B \subseteq \mathrm{I}$，使得 $\omega_0(\mathrm{J}_A) = \omega_0(\mathrm{J}_B) = 1$，从而对于任意 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}_A$，$\mathrm{A}_i \in \mathrm{U}_i$，且对于任意 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}_B$，$\mathrm{B}_i \in \mathrm{U}_i$。考虑 $(\mathrm{F}_{i\in I}\, \mathrm{A}_i) \cap (\mathrm{F}_{i\in I}\, \mathrm{B}_i) = \mathrm{F}_{i\in I}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_i)$，并令 $\mathrm{J} = \mathrm{J}_A \cap \mathrm{J}_B$。那么 $\omega_0(\mathrm{J}) = 1$，且对于每个 $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$，$\mathrm{A}_i$ 和 B_i 都属于 U_i。这意味着 $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_i \in \mathrm{U}_i$，由此得证 (I.2)。

显然，U 满足 (I.3)。最后，我们考虑 (I.4)。给定 A =F i∈I $A_i \subseteq X$，记 J := {i ∈ I : $A_i \in U_i$}。若 $\omega_0(J) = 1$，则可得 A ∈ U。否则，假设 $\omega_0(J) = 0$。接着考虑 X \ A = F i∈I($X_i \setminus A_i$)。那么 I \ J = {i ∈ I : $X_i \setminus A_i \in U_i$}，且 $\omega_0(I \setminus J) = 1$，这意味着 X \ A ∈ U，从而证明得证。□

回顾一下，超滤子也可以通过 Stone-ˇCech 紧化来刻画。更确切地说，我们有如下结论（参见例如，[40, 第 7 章。4]）：

引理 A.7。设 X 为一个集合，βX 为 X 的 *Stone-ˇCech* 紧化。

(1) 给定 $\omega \in \beta X$，族$\{A \subseteq X : \omega \in A\}$ 是 X上的一个超滤子。*(2)* 给定 X 上的一个超滤子$\mathcal{U}$，交集 $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} A$ 只包含一个点。

上述过程互为逆过程，因此 βX 可以用 X 上的超滤子来刻画。此外，$\partial_\beta X$ 中的点对应于非主超滤子。

ˇ 多亏了引理 A.7，在本文中我们也将直接使用超滤子和 Stone-Cech 紧化中的点，而不再作进一步说明。

为方便起见，我们还记录：对于$D \subseteq X$，其在 βX 中的闭包$\overline{D}$ 满足：

$$\overline{D} = \{\omega \in \beta X : \omega(D) = 1\}$$

并且$\overline{D}$ 在 βX中既开又闭。βX 的拓扑由 $\{D : D \subseteq X\}$生成。

最后，我们回顾以下结论。它既可利用 Stone-ˇCech 紧化的泛性质直接证明，也可由引理 A.4、A.5 和 A.7 直接推出：

推论 A.8. 对于子集 $Z \subseteq X$，Z 在 βX 中的闭包与 βZ 同胚。

参考文献

[1] Claire Anantharaman-Delaroche 和 Jean Renault。《可和群胚》，《数学教学论丛书》第 36 卷。L'Enseignement Math´ematique，日内瓦，2000 年。Georges Skandalis 作序，附录 B 由 E. Germain 撰写。[2] Florent P. Baudier、Bruno M. Braga、Ilijas Farah、Ana Khukhro、Alessandro Vignati 和 Rufus Willett。一致局部有限度量空间上的一致 Roe 代数具有刚性。《数学发明》，230(3):1071–1100，2022 年。[3] Paul Baum 和 Alain Connes。李群与叶状结构的几何 K 理论。《数学教学》，46(1/2):3–42，2000 年（最初于 1982 年传阅）。[4] Paul Baum、Alain Connes 和 Nigel Higson。适当作用的分类空间与群 C^*-代数的 K 理论。《当代数学》，167:241–241，1994 年。[5] Christian B¨onicke 和 Kang Li。充足群胚 C^*-代数的理想结构与纯无穷性。《遍历论与动力系统》，40(1):34–63，2020 年。[6] Bruno M. Braga、Yeong Chyuan Chung 和 Kang Li。粗 Baum-Connes 猜想与 Roe 代数的刚性。《泛函分析杂志》，279(9):108728，21 页，2020 年。[7] Bruno M. Braga 和 Ilijas Farah。关于一致局部有限粗空间上一致 Roe 代数的刚性。《美国数学会会刊》，374(2):1007–1040，2021 年。[8] Bruno M. Braga、Ilijas Farah 和 Alessandro Vignati。一致 Roe 代数的嵌入。《数学物理通讯》，377(3):1853–1882，2020 年。[9] Bruno M. Braga、Ilijas Farah 和 Alessandro Vignati。一般一致 Roe 代数的刚性。《傅里叶研究所年刊》，72(1):301–337，2022 年。[10] Kevin Aguyar Brix、Toke Meier Carlsen 和 Aidan Sims。关于 étale 群胚的 c*-代数理想结构的一些结果。《arXiv 预印本，arXiv:2211.06126》，2022 年。

[11] Nathanial P. Brown 和 Narutaka Ozawa。《C*-代数与有限维近似》，Graduate Studies in Mathematics 第 88 卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，2008 年。[12] Xiaoman Chen、Romain Tessera、Xianjin Wang 和 Guoliang Yu。度量稀疏化与算子范数局部化。《数学进展》，218(5):1496–1511，2008 年。[13] Xiaoman Chen 和 Qin Wang。关于 Roe 代数的理想的注记。《季刊数学》，52(4):437–446，2001 年。[14] Xiaoman Chen 和 Qin Wang。粗空间上一致 Roe 代数的理想结构。《泛函分析杂志》，216(1):191–211，2004 年。[15] Xiaoman Chen 和 Qin Wang。简单核上一致 Roe 代数的理想结构。《中国数学年刊》B辑，25(2):225–232，2004 年。[16] Xiaoman Chen 和 Qin Wang。粗空间上一致 Roe 代数中的幽灵理想。《数学档案》（巴塞尔），84(6):519–526，2005 年。[17] Xiaoman Chen 和 Qin Wang。粗空间的秩分布与 Roe 代数的理想结构。《伦敦数学会通报》，38(5):847–856，2006 年。[18] Xiaoman Chen、Qin Wang 和 Xianjin Wang。有限分解复杂度度量空间的算子范数局部化性质。《泛函分析杂志》，257(9):2938–2950，2009 年。[19] Xiaoman Chen、Qin Wang 和 Guoliang Yu。对可纤维粗嵌入希尔伯特空间的空间的最大粗 Baum–Connes 猜想。《数学进展》，249:88–130，2013 年。[20] Eske Ellen Ewert 和 Ralf Meyer。粗几何与拓扑相。《数学物理通讯》，366(3):1069–1098，2019 年。[21] Martin Finn-Sell。纤维粗嵌入、a-T-可和性与诺维科夫猜想的粗类比。《泛函分析杂志》，267(10):3758–3782，2014 年。[22] Martin Finn-Sell 和 Nick Wright。图空间、边界群胚与粗 Baum-Connes 猜想。《数学进展》，259:306–338，2014 年。[23] Vladimir Georgescu。关于度量空间上椭圆算子本质谱的结构。《泛函分析杂志》，260(6):1734–1765，2011 年。[24] Nigel Higson、Vincent Lafforgue 和 Georges Skandalis。Baum-Connes 猜想的反例。《几何与泛函分析》，12(2):330–354，2002 年。[25] Nigel Higson 和 John Roe。关于粗 Baum-Connes 猜想。载于《诺维科夫猜想、指标定理与刚性》第 2 卷（奥伯沃尔法赫，1993），伦敦数学会讲义丛书第 227 卷，第 227–254 页。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。[26] Nigel Higson 和 John Roe。可驯群作用与诺维科夫猜想。《纯粹与应用数学杂志》，519:143–153，2000 年。[27] Nigel Higson、John Roe 和 Guoliang Yu。粗 Mayer–Vietoris 原理。《剑桥哲学会数学会刊》，114(1):85–97，1993 年。[28] Gennadi Kasparov 和 Guoliang Yu。粗几何诺维科夫猜想与一致凸性。《数学进展》，206(1):1–56，2006 年。[29] Matthew Kennedy 和 Christopher Schafhauser。非交换边界与约化交叉积的理想结构。《杜克数学杂志》，168(17):3215–3260，2019 年。[30] Kang Li、J´an ˇSpakula 和 Jiawen Zhang。测度渐近扩张图与 Roe 代数的刚性。arXiv:2010.10749，待刊于《国际数学研究通知》，2020 年。[31] Paul S. Muhly、Jean. N. Renault 和 Dana P. Williams。连续迹群胚 C*-代数。III。《美国数学会会刊》，348:3621–3641，1996 年。[32] Piotr W. Nowak 和 Guoliang Yu。《大尺度几何》。EMS 数学教材。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2012 年。[33] Narutaka Ozawa。离散群的可和作用与正合性。《巴黎科学院纪要，数学辑》，330(8):691–695，2000 年。[34] Jean Renault。《C*-代数的群胚方法》，数学讲义第 793 卷。施普林格出版社，1980 年。[35] Jean Renault。群胚交叉积 C*-代数的理想结构。《算子理论杂志》，25(1):3–36，1991 年。附录由 Georges Skandalis 撰写。[36] Steffen Roch。带主导算子的理想。《复变函数与椭圆方程》，67(3):701–715，2022 年。[37] John Roe。开流形上的指标定理。I、II。《微分几何杂志》，27(1):87–113，115–136，1988 年。

[38] John Roe。《完备黎曼流形上的粗上同调与指标理论》，第497卷。美国数学会，1993。[39] John Roe。《指标理论、粗几何与流形拓扑》，第90卷。美国数学会，1996。[40] John Roe。《粗几何讲义》，大学讲座系列第31卷。美国数学会，普罗维登斯，2003。[41] John Roe。离散群上的带主导 Fredholm 算子。《积分方程与算子理论》，51(3):411–416，2005。[42] John Roe 和 Rufus Willett。幽灵消除与性质 A。《泛函分析杂志》，266(3):1674–1684，2014。[43] Hiroki Sako。离散度量空间的性质 A 与算子范数局部化性质。《纯粹与应用数学杂志》（Crelle 杂志），2014(690):207–216，2014。[44] Adam Sierakowski。约化交叉积的理想结构。M ¨unster 数学杂志，3:237–261，2010。[45] Aidan Sims。 ´Étale 群胚及其 C*代数。arXiv 预印本 arXiv:1710.10897，2017。[46] Georges Skandalis、Jean-Louis Tu 和 Guoliang Yu。粗 Baum-Connes 猜想与群胚。《拓扑学》，41(4):807–834，2002。[47] Jean-Louis Tu。可测叶状结构的 Baum-Connes 猜想。K 理论，17(3):215–264，1999。[48] J´an ˇSpakula。一致 K-同调理论。《泛函分析杂志》，257(1):88–121，2009。[49] J´an ˇ Spakula 和 Rufus Willett。关于 Roe 代数的刚性。《数学进展》，249:289–310，2013。[50] J´an ˇSpakula 和 Rufus Willett。极限算子的度量方法。《美国数学会会刊》，369(1):263–308，2017。[51] Qin Wang。关于扩张子序列的 Roe 代数中的幽灵投影与理想的一些评注。《数学档案》（巴塞尔），89(5):459–465，2007。[52] Rufus Willett。关于性质 A 的一些笔记。载于《群论与计算机科学中的图极限》，第191–281页。洛桑联邦理工学院出版社，洛桑，2009。[53] Rufus Willett 和 Guoliang Yu。某些扩张子与 Gromov 怪兽群的高指标理论，I。《数学进展》，229(3):1380–1416，2012。[54] Guoliang Yu。可一致嵌入希尔伯特空间的空间上的粗 Baum-Connes 猜想。《数学发明》，139(1):201–240，2000。

(Q. Wang) 华东师范大学数学科学学院算子代数研究中心、上海市纯数学与数学实践重点实验室，上海 200241，中国。

电子邮箱：qwang@math.ecnu.edu.cn

(J. Zhang) 复旦大学数学科学学院，中国上海邯郸路 220 号，邮编 200433。电子邮箱：jiawenzhang@fudan.edu.cn