arXiv:2301.04934v1 [math.DG] 12 Jan 2023

乘积流形上的旋量 Yamabe 问题中的曲率效应

Thomas Bartsch, Tian Xu*

摘要

设 $(M_1,g^{(1)})$、$(M_2,g^{(2)})$ 为闭黎曼自旋流形。我们研究配备度量族 $\varepsilon^{-2}g^{(1)}\oplus g^{(2)}$, $\varepsilon>0$ 的乘积 $M_1\times M_2$ 上旋量 Yamabe 问题的解的存在性。通过变分方法和爆破解，我们证明了解的存在性：这些解仅依赖于因子 M_1，并且当 $\varepsilon\to 0$ 时呈现尖峰层。此外，我们根据 $(M_1, g^{(1)})$ 上的曲率张量，确定了解的峰值点的渐近位置。

2010年数学主题分类：主要分类：53C27；次要分类：35B40、35Q40、35R01、58E30、58J60

关键词：旋量 Yamabe 方程；强不定泛函；爆破解；尖峰层解

1 引言

设 N 是一个 n 维闭自旋流形， $n\geq 2$，其黎曼度量为 g，并带有固定的自旋结构 σ：$P_{Spin}(N)\to P_{SO}(N)$。记 ρ：$Spin(n)\to End(\mathbb{S}_n)$ 为自旋表示，则用 $\mathbb{S}(N)=P_{Spin}(N)\times_\rho \mathbb{S}_n$ 表示 N 上的旋量丛，并用 D_g^N:$C^\infty(N,\mathbb{S}(N))\to C^\infty(N,\mathbb{S}(N))$ 表示（Atiyah-Singer）狄拉克算子。

旋量 Yamabe 方程的一个类似形式可写为

$$D_g^N\psi=|\psi|_g^{n^*-2}\psi,\quad \text{on } (N,g,\sigma) \tag{1.1}$$

其中 $n^*:=\frac{2n}{n-1}$——事实上，方程 (1.1) 是共形不变的，并且是一个类似于 Yamabe 问题的变分问题的欧拉-拉格朗日方程（见 [3]）。若 $\psi\in C^1(N,\mathbb{S}(N))$ 是方程 (1.1) 的非平凡解，则（广义）共形度量 $\tilde{g}=|\psi|^{\overline{n-1}}g$ 在 $(N,\tilde{g}\ \sigma)$ 上诱导出一个旋量场 φ，使得

$$D_{\tilde{g}}^N\varphi=\varphi,\quad |\varphi|_{\tilde{g}}\equiv 1 \tag{1.2}$$

在 $N\setminus\psi^{-1}(\{0\})$ 上。作为一项重要的几何应用，二维流形 N 上方程 (1.2) 的一个解对应于存在一个等距浸入 $(N,g)\to\mathbb{R}^3$

*受中国国家自然科学基金（NSFC 11601370）和德国亚历山大·冯·洪堡基金会资助

~万有覆盖 N 到具有常平均曲率的欧几里得三维空间中的浸入（关于更多几何背景，参见 [3,21] 及其中的参考文献）。

B. Ammann及其团队的一系列工作 [3–9] 简要展示了如何运用变分方法研究 (1.1)。从分析的角度来看，正如 [3], 所指出的，标准变分方法并不能直接推出解的存在性。这是由于 (1.1) 中非线性项的临界性。事实上，指数 $n^* = \frac{2n}{n-1}$是临界的，因为其中涉及的索伯列夫嵌入恰好是紧性丧失的情形。与求解 Yamabe问题的思路类似，可以找到一个恢复紧性的判据。这里的关键观察是，旋量版本的 Aubin不等式成立（见 [7]）：

$$\lambda^+_{min}(N,[g],\sigma) := \inf_{\tilde{g}\in[g]} \lambda_1^+(\tilde{g})\mathrm{Vol}(N,\tilde{g})^{\frac{1}{n}} \le \lambda^+_{min}(S^n,[g_{S^n}],\sigma_{S^n}) = \frac{n}{2}\omega_n^{\frac{1}{n}} \tag{1.3}$$

其中 $[g] = \{f^2 g : f \in C^1(N),\ f \ge 0、\ \mathrm{supp}\ f = N\}$ 是 g 的（广义）共形类；对每个 ~ $g \in [g]$, $\lambda_1^+(\tilde{g}) > 0$ 表示相应狄拉克算子 $D_{\tilde{g}}^N$的最小正特征值；$(S^n, g_{S^n}, \sigma_{S^n})$ 是配备典范度量 g_{S^n}和自旋结构 σ_{S^n}的 n维球面；而 ω_n是 (S^n, g_{S^n}) 的体积。量 $\lambda^+_{min}(N,[g],\sigma)$ 称为 B¨ar-Hijazi-Lott 不变量。 [3] 中得到的主要结果之一表明，若不等式 (1.3) 是严格的，则旋量 Yamabe 问题 (1.1) 存在一个非平凡解。然而，目前仅在一些特殊情形下验证了 (1.3) 中的严格不等式，一般性结果仍然缺失（参见 [6,9,22]）。

本文旨在证明：即使不知道（1.3）中的严格不等式是否成立，仍可在紧自旋流形的乘积上得到方程（1.1）的存在性结果。此外，我们也关注曲率张量对这些存在性结果的影响。具体而言，给定带有固定自旋结构的闭自旋流形 $(M_1, g^{(1)}, \sigma_1)$ 和 $(M_2, g^{(2)}, \sigma_2)$, 考虑乘积 $N = M_1 \times M_2$ 上由 $g_\varepsilon = \varepsilon^{-2} g^{(1)} \oplus g^{(2)}, \varepsilon > 0$ 定义的度量族 g_ε。设 m_1 和 m_2 分别为 M_1 和 M_2 的维数，我们将研究乘积流形 (N, g_ε) 上旋量 Yamabe 方程的解：

$$D^N_{g_\varepsilon}\phi = |\phi|^{n^*-2}_{g_\varepsilon}\phi \tag{1.4}$$

其中 $n^* = \frac{2n}{n-1}$ 和 $n := \dim N = m_1 + m_2$。按照变量分离的思路，我们将研究范围限定为形如 $\phi = \psi \otimes \varphi \in C^1(N, \mathbb{S}(N))$ 的旋量场，其中 $\psi \in C^1(M_1, \mathbb{S}(M_1))$ 和 $\varphi \in C^1(M_2, \mathbb{S}(M_2))$ 分别是 M_1 和 M_2 上的旋量场。

为了介绍我们的主要结果，回顾微分几何中的一些记号和定义会很有帮助，参见例如 [17, 28]。对于闭黎曼 m 流形 (M, g)，令 $\exp : TM \to M$ 为定义在 M 的切丛 TM 上的指数映射。由于 M 是闭的，存在 $r > 0$，使得对于任意 $\xi \in M$，$\exp_\xi : B_r(0) \subset \mathbb{R}^m \cong T_\xi M \to B_r(\xi) \subset M$ 都是微分同胚。全文中，$B_r(0)$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中以 0 为中心、半径为 r 的球；对于 $\xi \in M$，$B_r(\xi)$ 表示相对于度量 g、以 ξ 为中心的 M 中的球。对于 M 上的向量场 X、Y、W、Z，黎曼曲率张量 $\mathcal{R}$ 定义为

$$\mathcal{R}(X,Y,W,Z) = g(\nabla_X\nabla_Y W, Z) - g(\nabla_Y\nabla_X W, Z) - g(\nabla_{[X,Y]}W, Z)$$

其中 ∇ 是黎曼联络。对于 $T_\xi M$ 的标准正交基 $\{e_1,\dots,e_m\}$， $\xi\in M$，里奇张量 Ric : $T_\xi M\times T_\xi M\to\mathbb{R}$ 定义为 $\mathcal{R}$ 的迹，即

$$\mathrm{Ric}(X,Y)=\sum_{j=1}^{m}\mathcal{R}(e_j,X,Y,e_j)$$

标量曲率和高斯曲率分别记为 $Scal_g(\xi)$ 和 $K_g(\xi)$。在自旋流形上，由于切丛嵌入在克利福德代数丛中，向量场对旋量有两种不同的作用，即克利福德乘法和协变导数。这里，为了区分这两种对旋量 ψ 的作用，我们分别用 $\partial_j\cdot_g\psi$ 表示 ∂_j 的克利福德乘法，用 $\nabla_{\partial_j}\psi$ 表示相对于背景度量 g 的协变导数 $j=1$、.....、m。此外，当存在一个与 ε 无关的常数 $C>0$，使得 $f_\varepsilon\le Cg_\varepsilon$ 时，我们也采用记号 $f_\varepsilon\lesssim g_\varepsilon$ 表示两个依赖于 ε 的函数 f_ε 和 g_ε。

1.1 一个示例

我们先描述一个 $n=3$ 的例子，其中 $N=\Sigma\times S^1$ 对于闭黎曼曲面 Σ，而 S^1 是标准圆。令 g 表示 Σ 上的背景度量，并令 $d\tau$ 表示 S^1 上的标准度量，其总长度为 2π，那么我们关注乘积度量 $\varepsilon^{-2}\mathsf{g}\oplus d\tau$、$\varepsilon>0$。我们还分别在 Σ 和 S^1 上赋予自旋结构 σ_Σ 和 σ_{S^1}。在这种情形下，我们有 $n^*=3$，式 (1.4) 可写为

$$D^N_{g_\varepsilon}\phi=|\phi|_{g_\varepsilon}\phi,\quad \phi:N\to\mathbb{S}(N) \tag{1.5}$$

其中，旋量丛 $\mathbb{S}(N)$ 被识别为张量积 $\mathbb{S}(N)=\mathbb{S}(\Sigma)\otimes\mathbb{S}(S^1)$。由于 S^1 上相应的狄拉克算子就是 $i\frac{d}{d\tau}$，并且我们要寻找形如 $\phi=\psi\otimes\varphi$ 的解，因此可取 $\varphi=e^{-i\lambda\tau}$ 为 S^1 上对应某个特征值 $\lambda\neq0$ 的特征旋量（即 $i\frac{d}{d\tau}\varphi=\lambda\varphi$）。那么， $\phi=\psi\otimes e^{-i\lambda\tau}$ 是方程 (1.5) 的解，当且仅当 $\psi:\ \Sigma\to\mathbb{S}(\Sigma)$ 是下述约化方程的解（详细说明见第 3 节）

$$\varepsilon D^\Sigma_g\psi+\lambda\omega^\Sigma_{\mathbb{C}}\cdot_g\psi=|\psi|_g\psi,\quad \text{on }\Sigma \tag{1.6}$$

其中， $\omega^\Sigma_{\mathbb{C}}$ 是克利福德丛 $\mathbb{C}l(T\Sigma)$ 中的手征算子，“$\cdot_g$”表示克利福德乘法。

我们还引入下述方程，它对应于当 ε 趋于零时，问题 (1.6) 的一个极限方程：

$$D_{g_{\mathbb{R}^2}}\psi+\lambda\omega_{\mathbb{C}}\cdot_{g_{\mathbb{R}^2}}\psi=|\psi|\psi,\quad \psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{S}(\mathbb{R}^2)\cong\mathbb{C}^2 \tag{1.7}$$

其中，$\mathsf{g}_{\mathbb{R}^2}$ 表示标准欧几里得度量， $\omega_{\mathbb{C}}=i\partial_1\cdot_{g_{\mathbb{R}^2}}\partial_2$ 是相应的手征算子，“$\cdot_{g_{\mathbb{R}^2}}$”表示克利福德乘法，而 $\partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1}$、 $\partial_2=\frac{\partial}{\partial x_2}$ 是切丛 $T\mathbb{R}^2$中的典范基。

方程 (1.6) 的解序列中出现的爆破剖面（即所谓的集中现象）（当 $\varepsilon\to0$ 时），可由上述极限方程 (1.7) 的重标度解描述。正如我们将在第 4.1 节中看到的，方程 (1.7) 具有强不定型的变分结构。方程 (1.7) 的基态解（即具有最小能量的解）可通过标准的链接论证得到；此外，这些解在无穷远处呈指数衰减。

注意，方程 (1.7) 在平移下保持不变，我们将 $\mathcal{B}$ 记为 (1.7) 中在原点处模达到最大值的基态解集合，即 $|\psi(0)| = \max_{x\in\mathbb{R}^2} |\psi(x)|$，其中 $\psi \in \mathcal{B}$。如引理 4.4 所述， $\mathcal{B}$ 在 $W^{1,\,q}(\mathbb{R}^2, \mathbb{S}(\mathbb{R}^2))$ 中是紧的， $q \geq 2$。现在我们准备陈述关于 $N = \Sigma \times S^1$ 的结果：

定理 1.1. 存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于任意 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，方程 (1.6) 都存在一个解$\psi_\varepsilon \in C^1(\Sigma, \mathbb{S}(\Sigma))$。此外，存在一个最大值点 $y_\varepsilon \in \Sigma$，使得

(1) 对于某个常数 $c > 0$,

$$|\psi_\varepsilon(\xi)|_g \lesssim \exp\Big(-\frac{c}{\varepsilon}\operatorname{dist}(\xi, y_\varepsilon)\Big), \quad \textit{for all } \xi \in \Sigma$$

其中 dist 表示由度量 g 诱导的距离；

(2) 当 $\varepsilon \to 0$ 时，经过取子序列后，变换后的旋量 $z_\varepsilon(x) \equiv \psi_\varepsilon \circ \exp_{y_\varepsilon}(\varepsilon x)$ 一致收敛于方程 (1.7) 的一个基态解 $z_0 \in \mathcal{B}$，且 $y_\varepsilon \to y_0$ 在 (Σ, g) 中满足

$$\Theta(y_0, z_0) = \max_{(y,\psi)\in\Sigma\times\mathcal{B}} \Theta(y, \psi),$$

其中 $\Theta\colon\ \Sigma \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ 是一个定义如下的泛函

$$\begin{aligned}\Theta(y,\psi) = {} & \frac{K_g(y)}{36}\int_{\mathbb{R}^2} |\psi|^3 |x|^2 dx \\ & + \frac{K_g(y)}{12}\operatorname{Re}\int_{\mathbb{R}^2} \big((x_2\nabla_{\partial_1} - x_1\nabla_{\partial_2})\psi, (x_2\partial_1 - x_1\partial_2)\cdot_{g_{\mathbb{R}^2}}\psi\big) dx.\end{aligned} \tag{1.8}$$

上述结果表明，方程 (1.5) 的解的集中行为受 Σ 上的高斯曲率 K_g 影响。由于 $\Sigma \times \mathcal{B}$ 是紧的， Θ 存在一个最大化元。

注 1.2. 欧几里得空间的自旋结构相当明确，方程 (1.7) 可用矩阵记法改写为

$$\Big(\gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)\psi + \lambda\gamma_3\psi = |\psi|\psi \tag{1.9}$$

其中 γ_k、 $k = 1$、2、3 是 2×2 泡利矩阵

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中转换为极坐标，即 $(x_1, x_2) \mapsto (r, \vartheta)$，方程 (1.9) 可写为

$$\begin{cases} e^{-i\vartheta}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\Big)\psi_2 = \sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}\,\psi_1 - \lambda\psi_1 \\ e^{i\vartheta}\Big(i\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\vartheta}\Big)\psi_1 = \sqrt{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2}\,\psi_2 + \lambda\psi_2 \end{cases}$$

其中 $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$，这提示我们采用以下特殊试探形式（见 [18]）

$$\psi(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} v(r)e^{iS\vartheta} \\ iu(r)e^{i(S+1)\vartheta}\end{pmatrix}, \quad r>0,\ \vartheta\in[0,2\pi) \tag{1.10}$$

其中 u、v 为实值，且 $S\in\mathbb{Z}$。将此类试探形式代入泛函 Θ，我们发现（1.8）中的第二项消失，即 Θ 可表示为更简单的形式

$$\Theta(y,\psi) = \frac{\pi K_g(y)}{18}\int_0^\infty \left(u^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}} r^3 dr.$$

这将为定理 1.1 中的集中现象提供一个简化的视角，即 y_0 必须是 (Σ,g) 上高斯曲率 K_g 的全局最大值点。遗憾的是，我们没有发现任何证据表明极限方程（ 1.7 ）的基态解应当具有（1.10）的形式。这可能引出如下猜想：除去平移和某些群作用（例如，当 $\omega\in[0,2\pi]$ 时乘以 $e^{i\omega}$），方程（1.7）的基态解 ψ 是唯一确定的，并且具有（1.10）的形式（或者可能是其他对称试探形式）。此外，我们还指出，具有（1.10）形式的二维非线性狄拉克方程（带有克尔型临界非线性） $|\psi|^2\psi$ 的解已在 [12, 13] 中得到研究。此外， $\mathbb{R}^n$ 上的旋量 Yamabe 方程（1.1）的基态解最近已在 [14] 中得到分类。

1.2 结果的完整陈述

为了在一般乘积空间 $N = M_1\times M_2$ 上建立方程 (1.4) 的存在性与集中理论，我们首先用因子 M_1 和 M_2 显式地引入 N 上的旋量丛 $\mathbb{S}(N)$，即

$$\mathbb{S}(N) = \begin{cases} (\mathbb{S}(M_1)\oplus\mathbb{S}(M_1))\otimes\mathbb{S}(M_2) & \text{both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ are odd,}\\ \mathbb{S}(M_1)\otimes\mathbb{S}(M_2) & \text{else.}\end{cases}$$

在这种情形下，不难理解旋量 $\phi\in\mathbb{S}(N)$ 具有形式 $\phi=\psi\otimes\varphi$，其中 $\varphi\in\mathbb{S}(M_2)$ 和 $\psi=\psi_1\oplus\psi_2\in\mathbb{S}(M_1)\oplus\mathbb{S}(M_1)$（若 m_1 和 m_2 均为奇数），而 $\psi\in\mathbb{S}(M_1)$（若 m_1 或 m_2 为偶数）。

受前述例子的启发，我们对第二个因子 $(M_2, \mathrm{g}^{(2)}, \sigma_2)$ 作出以下假设：

(H) 存在一个解 φ_λ，其常长度为 $|\varphi_\lambda|_{g^{(2)}}=1$，且满足狄拉克方程 $D^{M_2}{}_{g^{(2)}}\varphi=\lambda\varphi$，其中 $\lambda\neq 0$。

在此假设下，$\phi=\psi\otimes\varphi_\lambda$ 是方程 (1.4) 的解，当且仅当 ψ 是下列约化方程的解

$$\varepsilon\tilde{D}^{M_1}_{g^{(1)}}\psi + \lambda\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}\cdot_{g^{(1)}}\psi = |\psi|^{n^*-2}_{g^{(1)}}\psi, \quad \text{on } M_1 \tag{1.11}$$

其中

$$\tilde{D}^{M_1}_{g^{(1)}} = \begin{cases} D^{M_1}_{g^{(1)}}\oplus -D^{M_1}_{g^{(1)}} & \text{both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ are odd,}\\ D^{M_1}_{g^{(1)}} & \text{if } m_1 \text{ is even,}\end{cases}$$

且 $\omega_{\mathbb{C}}^{M_1}\cdot_{g^{(1)}}$ 表示相对于度量 $g^{(1)}$的手征算子作用。若m_1 为奇数且 m_2 为偶数，则可以交换 M_1 和 M_2，从而得到上述方程。

与 (1.11) 对应的极限方程如下:

$$\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\psi+\lambda\omega_{\mathbb{C}}\cdot_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\psi=|\psi|^{n^*-2}\psi \quad \text{on } \mathbb{R}^{m_1} \tag{1.12}$$

其中 $g_{\mathbb{R}^{m_1}}$ 是标准欧几里得度量,

$$\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}=\begin{cases} D_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\oplus -D_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}} & \text{if both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ are odd,}\\ D_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}} & \text{if } m_1 \text{ is even,}\end{cases}$$

且 $\omega_{\mathbb{C}}=i^{[\frac{m_1+1}{2}]}\partial_1\cdot_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\cdots\cdot_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\partial_{m_1}$是克利福德代数 $\mathbb{C}l(T\mathbb{R}^{m_1})$ 中相应的手征算子，其中“$\cdot_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}$”表示克利福德乘法；$\partial_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\partial_{m_1}=\frac{\partial}{\partial x_{m_1}}$是切丛 $T\mathbb{R}^{m_1}$的典范基。

方程 (1.12) 可视为泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\mathcal{L}(\psi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{m_1}}\big(\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\psi+\lambda\omega_{\mathbb{C}}\cdot_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}\psi,\psi\big)dx-\frac{1}{n^*}\int_{\mathbb{R}^{m_1}}|\psi|^{n^*}dx$$

该泛函定义在 $\psi\in H^{1/2}(\mathbb{R}^{m_1},\mathbb{S}(\mathbb{R}^{m_1}))$ 上。由于线性微分算子$\tilde{D}_\lambda=\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}}+\lambda\omega_{\mathbb{C}}$的谱为 $Spec(\tilde{D}_\lambda)=\big(-\infty,-|\lambda|\big]\cup\big[|\lambda|,+\infty\big)$, 上述泛函是强不定的。已有若干技术可用于处理此类情形（例如参见 [10, 11, 15, 27, 35] 及其中的参考文献）。注意，我们令 $n=m_1+m_2$和$n^*=\frac{2n}{n-1}$，可得索伯列夫嵌入

$$H^{1/2}(\mathbb{R}^{m_1},\mathbb{S}(\mathbb{R}^{m_1}))\hookrightarrow L^{n^*}(\mathbb{R}^{m_1},\mathbb{S}(\mathbb{R}^{m_1}))$$

是局部紧的（由于 $n^*<m_1^*=\frac{2m_1}{m_1-1}$）。这意味着，泛函 $\mathcal{L}$ 的帕莱-斯梅尔序列在 L^{n^*} 中具有局部强收敛性，因而在 $H^{1/2}$中也具有局部强收敛性。在集中紧性理论的框架下, 通过标准的变分论证可得方程 (1.12) 的基态解存在。

为方便记号起见，我们仍用 $\mathcal{B}$ 表示满足 $|\psi(0)|=\max_{x\in\mathbb{R}^{m_1}}|\psi(x)|$ （其中 $\psi\in\mathcal{B}$）的 (1.12) 的所有基态解的集合。由引理 4.4 可知， $\mathcal{B}$ 在$W^{1,q}(\mathbb{R}^{m_1},\mathbb{S}(\mathbb{R}^{m_1}))$内是紧的， $q\geq 2$。于是我们的主要结果表述如下:

定理1.3。假设 $\dim M_1=m_1\geq 2$，且 $(M_2, g^{(2)},\sigma_2)$ 满足假设 (H)。设当 $n=m_1+m_2$ 为奇数时， m_1 为偶数。则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对于任意 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$，方程 (1.11) 存在形如 $\psi_\varepsilon\in C^1(M_1,\mathbb{S}(M_1))$ 的解。此外，存在一个最大值点 $y_\varepsilon\in M_1$，使得

（1）对于一个常数 $c>0$,

$$|\psi_\varepsilon(\xi)|_{g^{(1)}}\lesssim\exp\Big(-\frac{c}{\varepsilon}\operatorname{dist}^{(1)}(\xi,y_\varepsilon)\Big),\quad \textit{for all } \xi\in M_1$$

其中，$\operatorname{dist}^{(1)}$ 表示由度量 $g^{(1)}$诱导的距离;

(2) 当 $\varepsilon \to 0$ 时，经过抽取子序列后，变换后的旋量 $z_\varepsilon(x) \equiv \psi_\ell \circ \exp_{y_\varepsilon}(\varepsilon x)$ 一致收敛于 (1.12) 的一个基态解 $z_0 \in \mathcal{B}$，并且 $y_\varepsilon \to y_0$ 属于 $(M_1, \mathrm{g}^{(1)})$，使得

$$\Theta(y_0, z_0) = \max_{(y,\psi)\in M_1\times\mathcal{B}} \Theta(y, \psi),$$

其中 $\Theta\colon\ M_1 \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ 是一个泛函，定义如下

$$\Theta(y,\psi) = \frac{1}{12n}\int_{\mathbb{R}^{m_1}} \mathit{Ric}_y(x,x)|\psi|^{\frac{2n}{n-1}}dx + \frac{1}{12}\sum_{j,k}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^{m_1}} \mathcal{R}_y(e_j,x,x,e_k)(\nabla_{\partial_k}\psi, \partial_j \cdot_{g_{\mathbb{R}^{m_1}}} \psi)dx.$$

情形 $m_1 = m_2 = 1$对应于 $N = S^1 \times S^1$，较为简单，并不能体现曲率的影响，因为该问题可化为第一圆上的常微分方程（见 [34]）。

注 1.4. a) 假设（H）并无太大限制。许多流形都满足这一条件，包括圆 S^1、 m球面以及许多共形平坦流形（例如见 [6,9]）。

b) 定理1.3并未直接讨论 m_1 为奇数且 m_2 为偶数的情形。正如定理陈述所示，集中现象将在偶数维因子上出现。这主要是因为当 $n = m_1+m_2$为奇数时，旋量表示具有特殊性（见下文（2.3））。

c) 与注 1.2 类似，若我们还掌握方程（1.12）的基态解的对称刻画，则泛函 Θ 可以大幅简化。在高维情形下，如何对解给出一般的对称刻画仍不十分清楚（尽管拉普拉斯算子与旋转可交换，狄拉克算子却并非如此）。然而，对于三维狄拉克方程，已知存在一种候选对称试探形式（见 [20,36]）。

最后，我们想将问题 (1.11) 与其椭圆型对应问题进行比较:

$$-\varepsilon^2\Delta_g u + u = u^{p-1}, \quad u > 0 \tag{1.13}$$

在光滑闭黎曼流形（M，g）上，其中 $\dim M = m \geq 3$ 且 $p \in (2, \frac{2m}{m-2})$。一个有趣的观察是，我们关于（1.11）的结果同时取决于曲率张量和极限方程的基态解。事实上，在我们的结果中，点 $y_0 \in M_1$ 定位了爆破（或集中）的位置，而基态解 $z_0 \in \mathcal{B}$ 给出了爆破泡的剖面。这不同于 [16,19,32] 等文献中关于（1.13）的众所周知结果，在那些结果中只有标量曲率参与其中。我们定理中的泛函 Θ 似乎复杂而神秘，尤其是 Θ 中的第二项对我们而言并不十分清楚。这是因为，对于强不定问题（1.7）和（1.12）的基态解，我们能够获得的信息非常有限。由于欧几里得空间 $\mathbb{R}^m$ 上的（1.13）的极限方程已有明确理解，其中存在唯一的正解（除平移外），且该解具有径向对称性，因此（1.13）的正解结果只依赖于几何量。若能刻画狄拉克方程（1.7）和（1.12）的那些基态解，将会非常有趣；如此一来，人们或许能更好地理解泛函 Θ。

1.3 论文概要

我们的结果将分几个步骤加以证明。首先，在第2节中，我们回顾一些预备知识，并确定所使用的记号。特别地，我们将形式化地给出乘积空间上的旋量丛和狄拉克算子。在第3节中，我们明确引入方程（1.11），将其作为旋量 Yamabe 方程（1.4）的约化方程，并建立相应的变分框架。存在性结果是标准的，因为方程（1.11）中的非线性项具有次临界增长（就索伯列夫嵌入而言）。在这种情况下，集中现象体现为：当参数 ε 较小时，很难定位解的行为。这里的关键在于推论 3.8，它为我们的变分框架中的临界能级提供了一个精细的上界估计。事实上，推论 3.8使得我们能够根据 ε计算临界能级的渐近展开。第4节专门用于给出主要结果的完整证明。在本节中，我们首先汇集极限方程（1.12）的基态解的基本性质，因为它们在集中现象中充当泡。对集中现象的分析相当精细，需要对临界能级进行仔细的渐近展开。借助一种恰当选取的旋量丛平凡化（即所谓的 Bourguignon-Gauduchon 平凡化）以及我们的推论 3.8，我们建立了关于 ε 的临界能级展开，其中曲率张量的影响得以体现。

2 S乘积空间上的旋量丛与狄拉克算子 S

本节汇集旋量几何中的一些基本记号。相关教学材料可见 [29, 第一章第 5 节和第二章 7]。

2.1 代数预备知识

记 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 为定向欧几里得空间 V的标准基，记 $\mathbb{C}\ell(V)$ 为 V的复克利福德代数，其乘法记作“$\cdot$”。当 V 的维数 m 为偶数，即 $m = 2k$时，克利福德代数同构于代数 $\mathcal{M}(2^k;\mathbb{C})$，后者由所有复 $2^k \times 2^k$ 矩阵构成。因此， $\mathbb{C}\ell(V)$恰有一个不可约模，即旋量模 $\mathbb{S}_{2k}$，其维数为 $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{S}_{2k} = 2^k$。将此表示限制到偶子代数 $\mathbb{C}\ell^0(V)$时，模 $\mathbb{S}_{2k}$ 分解为两个不可约酉表示$\mathbb{S}_{2k} = \mathbb{S}^+_{2k} \oplus \mathbb{S}^-_{2k}$，它们由端同态 $\omega^V_{\mathbb{C}} := i^k e_1 \cdots e_m$ 对应于特征值 ± 1的特征子空间给出。在本文中，我们称 $\omega^V_{\mathbb{C}}$ 为“手征算子”或“复体积元”。

当 m 为奇数时，也就是说 $m = 2k+1$，克利福德代数 $\mathbb{C}\ell(V)$ 同构于 $\mathcal{M}(2^k;\mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}(2^k;\mathbb{C})$。因此，若分别将克利福德乘法投影到第一和第二个分量上，我们便得到两个 2^k 维的不可约旋量模 $\mathbb{S}^0_{2k+1}$ 和 $\mathbb{S}^1_{2k+1}$。与偶数维时的分解类似，这两个模 $\mathbb{S}^0_{2k+1}$ 和 $\mathbb{S}^1_{2k+1}$ 可由手征算子 $\omega^V_{\mathbb{C}} := i^{k+1} e_1 \cdots e_m$ 区分：在 $\mathbb{S}^j_{2k+1}$ 上，它的作用为 $(-1)^j$, $j = 0, 1$。为简便起见，我们可将 $\mathbb{S}^0_{2k+1}$ 和 $\mathbb{S}^1_{2k+1}$ 视为同一个向量空间，即 $\mathbb{S}_{2k+1} = \mathbb{S}^0_{2k+1} = \mathbb{S}^1_{2k+1}$，并赋予它们符号相反的克利福德乘法；这样做不会引起混淆。

设 V和 W是两个定向欧几里得空间，其维数分别为 $V = m_1$和 $W = m_2$。我们分别用 $\mathbb{C}\ell(V)$ 和 $\mathbb{C}\ell(W)$ 表示 V和 W的相应克利福德代数。通过

滥用记号，我们对 $\mathbb{C}\ell(V)$、 $\mathbb{C}\ell(W)$ 中的克利福德乘法及其表示中的克利福德乘法均使用同一符号“$\cdot$”。众所周知，两个向量空间之和的克利福德代数是两个加项的克利福德代数的 $\mathbb{Z}_2$-分次张量积，即 $\mathbb{C}\ell(V\oplus W) = \mathbb{C}\ell(V)\widehat{\otimes}\mathbb{C}\ell(W)$（见 [29]）。因此，我们可以由 V和 W的旋量模构造$V\oplus W$的旋量模，如下:

$$\mathbb{S}_{m_1+m_2} = \begin{cases} (\mathbb{S}_{m_1}\oplus\mathbb{S}_{m_1})\otimes\mathbb{S}_{m_2} & \text{if both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ are odd,} \\ \mathbb{S}_{m_1}\otimes\mathbb{S}_{m_2} & \text{if } m_1 \text{ is even.} \end{cases} \tag{2.1}$$

这里，正如前面所述，我们仅排除了 m_1 为奇数且 m_2 为偶数的情形，因为 V和 W可以互换。至于克利福德乘法在$\mathbb{S}_{m_1+m_2}$上的表示，若 m_1和 m_2均为奇数，令 $\xi\in V$、 $\zeta\in W$、$\varphi\in\mathbb{S}_{m_2}$和 $\psi=\psi_1\oplus\psi_2\in\mathbb{S}_{m_1}\oplus\mathbb{S}_{m_1}$；若 m_1为偶数，则令 $\psi\in\mathbb{S}_{m_1}$。我们定义

$$(\xi\oplus\zeta)\cdot(\psi\otimes\varphi) = (\xi\cdot\psi)\otimes\varphi + (\omega_{\mathbb{C}}^V\cdot\psi)\otimes(\zeta\cdot\varphi), \tag{2.2}$$

其中，当 m_1和 m_2均为奇数时， $\xi\cdot\psi = (\xi\cdot\psi_1)\oplus(-\xi\cdot\psi_2)$ 以及 $\omega_{\mathbb{C}}^V\cdot\psi = i($ $\psi_2\oplus-\psi_1)$。采用这一记号，容易验证

$$(\xi\oplus\zeta)\cdot(\xi\oplus\zeta)\cdot(\psi\otimes\varphi) = -|\xi\oplus\zeta|^2(\psi\otimes\varphi).$$

因此， $\mathbb{S}_{m_1+m_2}$是一个非平凡的 $\mathbb{C}\ell(V\oplus W)$-模，其（复）维数为 $2^{[\frac{m_1+m_2}{2}]}$。此外，当 m_1+m_2为偶数时， $\mathbb{S}_{m_1+m_2}$分解为半旋量模的形式为

$$\mathbb{S}^+_{m_1+m_2} = \big\{(\psi\oplus\psi)\otimes\varphi:\ \psi\in\mathbb{S}_{m_1},\ \varphi\in\mathbb{S}_{m_2}\big\},$$

$$\mathbb{S}^-_{m_1+m_2} = \big\{(\psi\oplus-\psi)\otimes\varphi:\ \psi\in\mathbb{S}_{m_1},\ \varphi\in\mathbb{S}_{m_2}\big\}$$

对于 m_1和 m_2均为奇数的情形，以及

$$\mathbb{S}^+_{m_1+m_2} = (\mathbb{S}^+_{m_1}\otimes\mathbb{S}^+_{m_2})\oplus(\mathbb{S}^-_{m_1}\otimes\mathbb{S}^-_{m_2}),$$

$$\mathbb{S}^-_{m_1+m_2} = (\mathbb{S}^+_{m_1}\otimes\mathbb{S}^-_{m_2})\oplus(\mathbb{S}^-_{m_1}\otimes\mathbb{S}^+_{m_2})$$

对于 m_1和 m_2均为偶数的情形。

接下来，我们转向流形的情形。设 $(M_1,\mathrm{g}^{(1)})$ 和 $(M_2,\mathrm{g}^{(2)})$ 分别是维数为 m_1 和 m_2 的两个定向黎曼流形。下文假设这两个流形都带有固定的自旋结构（关于自旋结构的细节，请参阅 [21, 29] ，或参阅这篇写得很好的自包含引言 [25]）。这将在黎曼乘积 $(N=M_1\times M_2,\ \mathrm{g}=\mathrm{g}^{(1)}\oplus\mathrm{g}^{(2)})$ 上诱导出唯一的自旋结构。事实上，令 π_{M_1}和 π_{M_2}分别表示到 M_1和 M_2的投影，则 N的切丛可分解为

$$TN = \pi_{M_1}^*TM_1\oplus\pi_{M_2}^*TM_2.$$

为简便起见，我们省略投影，并记作 $TN = TM_1\oplus TM_2$。这一分解关于 g 是正交的。因此， N 的标架丛可约化为一个 $SO(m_1)\times SO(m_2)$-主丛，且该主丛同构于 M_1和 M_2上的标架丛的乘积。

2.2 狄拉克算子

固定自旋结构 σ_{M_1} 和 σ_{M_2}，考虑分别定义在 M_1 和 M_2 上的克利福德丛（带克利福德乘法）$(\mathbb{C}l(TM_1), \cdot_{g^{(1)}})$、$(\mathbb{C}l(TM_2), \cdot_{g^{(2)}})$ 以及旋量丛 $\mathbb{S}(M_1)$、$\mathbb{S}(M_2)$。根据前面对代数情形的讨论，我们知道，对于旋量丛，有

$$\mathbb{S}(N) = \begin{cases} (\mathbb{S}(M_1) \oplus \mathbb{S}(M_1)) \otimes \mathbb{S}(M_2) & \text{if both } m_1 \text{ and } m_2 \text{ are odd,} \\ \mathbb{S}(M_1) \otimes \mathbb{S}(M_2) & \text{if } m_1 \text{ is even.} \end{cases}$$

对于 $X \in TM_1, Y \in TM_2, \varphi \in \Gamma(\mathbb{S}(M_2))$ 和 $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2 \in \Gamma(\mathbb{S}(M_1) \oplus \mathbb{S}(M_1))$，在 m_1 和 m_2 为奇数且 $\psi \in \Gamma(\mathbb{S}(M_1))$ 对于 m_1 为偶数的情形下，我们有

$$(X \oplus Y) \cdot_g (\psi \otimes \varphi) = (X \cdot_{g^{(1)}} \psi) \otimes \varphi + (\omega_{\mathbb{C}}^{M_1} \cdot_{g^{(1)}} \psi) \otimes (Y \cdot_{g^{(2)}} \varphi) \tag{2.3}$$

其中，在 m_1 和 m_2 为奇数的情形下，我们令 $X \cdot_{g^{(1)}} \psi = (X \cdot_{g^{(1)}} \psi_1) \oplus (-X \cdot_{g^{(1)}} \psi_2)$ 和 $\omega_{\mathbb{C}}^{M_1} \cdot_{g^{(1)}} \psi = i(\psi_2 \oplus -\psi_1)$。

设 $\nabla^{\mathbb{S}(M_1)}$ 和 $\nabla^{\mathbb{S}(M_2)}$ 分别是 $\mathbb{S}(M_1)$ 和 $\mathbb{S}(M_2)$ 上的（提升后的）列维-奇维塔联络。根据

$$\nabla^{\mathbb{S}(M_1)\otimes\mathbb{S}(M_2)} = \nabla^{\mathbb{S}(M_1)} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_2)} + \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_1)} \otimes \nabla^{\mathbb{S}(M_2)}$$

我们指的是 $\mathbb{S}(M_1) \otimes \mathbb{S}(M_2)$ 上的张量积联络。若取 $\{X_1, \ldots, X_{m_1}\}$ 为 $(M_1, \mathrm{g}^{(1)})$ 的局部正向正交标架，则 M_1 上的狄拉克算子（局部）定义为 $D^{M_1}{}_{g^{(1)}} = \sum_{j=1}^{m_1} X_j \cdot_{g^{(1)}} \nabla^{\mathbb{S}(M_1}_{X_j})$。类似地，若取 $\{Y_1, \ldots, Y_{m_2}\}$ 为 $(M_2, \mathrm{g}^{(2)})$ 的局部正向正交标架，则有 $D^{M_2}{}_{g^{(2)}} = \sum_{j=1}^{m_2} Y_j \cdot_{g^{(2)}} \nabla^{\mathbb{S}(M_2}_{Y_j})$。显然，在乘积情形下，$\{X_1 \oplus 0, \ldots, X_{m_1} \oplus 0, 0 \oplus Y_1, \ldots, 0 \oplus Y_{m_2}\}$ 是 N 的标架丛的一个局部截面。因此，公式 (2.3) 给出

$$\begin{aligned} D_g^N &:= \sum_{j=1}^{m_1} (X_j \oplus 0) \cdot_{g^{(1)}} \nabla^{\mathbb{S}(M_1)\otimes\mathbb{S}(M_2)}_{X_j \oplus 0} + \sum_{j=1}^{m_2} (0 \oplus Y_j) \cdot_{g^{(2)}} \nabla^{\mathbb{S}(M_1)\otimes\mathbb{S}(M_2)}_{0 \oplus Y_j} \\ &= \tilde{D}^{M_1}_{g^{(1)}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_2)} + (\omega_{\mathbb{C}}^{M_1} \cdot_{g^{(1)}} \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_1)}) \otimes D^{M_2}_{g^{(2)}} \end{aligned}$$

这定义了 $N = M_1 \times M_2$ 上的狄拉克算子，其中，如果 m_1 和 m_2 都是奇数，则 $\tilde{D}^{M_1}{}_{g^{(1)}} = D^{M_1}{}_{g^{(1)}} \oplus -D^{M_1}_{(1)\,g}$；如果 m_1 是偶数，则 $\tilde{D}^{M_1}{}_{g^{(1)}} = D^{M_1}_{(1)\,g}$。

对于 $m_1 + m_2$ 为偶数的情形，我们有分解 $\mathbb{S}(N) = \mathbb{S}(N)^+ \oplus \mathbb{S}(N)^-$；此外，将 D_g^N 限制在那些半旋量空间上时，我们得到 D_g^N: $\Gamma(\mathbb{S}(N)^{\pm}) \to \Gamma(\mathbb{S}(N)^{\mp})$。

3 变分设定

在下文中，我们始终考虑 $N = M_1 \times M_2, m_1 = \dim M_1 \geq 2$ 和 $m_2 = \dim M_2 \geq 1$的情形。为了给出适用于奇数和偶数情形的统一表达式，我们将简写为$\mathbb{S}(N) = \mathbb{S}(M_1) \otimes \mathbb{S}(M_2)$，其中

$$\tilde{\mathbb{S}}(M_1) = \begin{cases} \mathbb{S}(M_1) \oplus \mathbb{S}(M_1) & \text{if } m_1 \text{ is odd,} \\ \mathbb{S}(M_1) & \text{if } m_1 \text{ is even.} \end{cases}$$

在不会引起混淆时，用 $\psi\otimes\varphi$ 表示 $\mathbb{S}(N)$中的旋量场。

考虑扭曲度量 $\mathsf{g}_\varepsilon := \varepsilon^{-2}\mathsf{g}^{(1)}\oplus\mathsf{g}^{(2)}$，其中 $\varepsilon>0$ 是一个参数。根据上一节的讨论，我们知道对于狄拉克算子，有

$$D^N_{g_\varepsilon} = \tilde{D}^{M_1}_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{S}(M_2)} + (\overline{\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}}\cdot_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\mathrm{Id}_{\tilde{\mathbb{S}}(M_1)})\otimes D^{M_2}_{g^{(2)}}$$

其中 $\overline{\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}}$表示手征算子，而“$\cdot_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}$”表示与共形度量 $\varepsilon^{-2}\mathsf{g}^{(1)}$ 相对应的M_1 上的克利福德乘法。

转向非线性问题，记$|\cdot|_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}$ 和 $|\cdot|_{g^{(2)}}$ 分别为 $\mathbb{S}(M_1)$ 与 $\mathbb{S}(M_2)$ 上的自然厄米度量，并记 $|\cdot|_{g_\varepsilon}$ 为 $\mathbb{S}(N)$ 上的诱导度量。回顾记号 $n=m_1+m_2$ 和 $n^*=\frac{2n}{n-1}$，我们可以展开旋量 Yamabe 方程

$$D^N_{g_\varepsilon}\phi = |\phi|^{n^*-2}_{g_\varepsilon}\phi,\quad \phi=\bar{\psi}\otimes\varphi\in\mathbb{S}(N)$$

into

$$(\tilde{D}^{M_1}_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\bar{\psi})\otimes\varphi + (\overline{\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}}\cdot_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\bar{\psi})\otimes(D^{M_2}_{g^{(2)}}\varphi) = \big(|\bar{\psi}|_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}|\varphi|_{g^{(2)}}\big)^{n^*-2}\bar{\psi}\otimes\varphi. \tag{3.1}$$

现在我们将说明假设 (H) 如何影响 $(M_2, \mathsf{g}^{(2)},\sigma_{M_2})$。事实上，如果 M_2 存在一个非平凡的特征旋量 φ_{M_2}，其常长度对应于某个 $\lambda\neq 0$，那么将$\pm\psi\otimes\varphi_{M_2}$ 代入 (3.1)，即可得到等价问题

$$\tilde{D}^{M_1}_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\bar{\psi} + \lambda\overline{\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}}\cdot_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\bar{\psi} = \big(|\bar{\psi}|_{\varepsilon^{-2}g^{(1)}}\big)^{n^*-2}\bar{\psi} \tag{3.2}$$

它位于 M_1 上。这里，我们采用约定 $\lambda>0$，因为（对 M_1 上的定向作适当改变后）$\lambda<0$ 的证明完全相同。

注意，狄拉克算子在共形变化下的表现非常好（参见 [24, 26]）：设 g_0 和 $\mathsf{g}=e^{2u}\mathsf{g}_0$ 是黎曼自旋 m 维流形 M 上的两个共形度量，则存在一个向量丛同构 $\iota:\ \mathbb{S}(M,\mathsf{g}_0)\to\mathbb{S}(M,\mathsf{g})$，它是纤维等距映射，并且满足

$$D^M_g\big(\iota(\psi)\big) = \iota\big(e^{-\frac{m+1}{2}u}D^M_{g_0}\big(e^{\frac{m-1}{2}u}\psi\big)\big).$$

因此，方程 (3.2) 在共形意义下等价于

$$\varepsilon\tilde{D}^{M_1}_{g^{(1)}}\psi + \lambda\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}\cdot_{g^{(1)}}\psi = |\psi|^{n^*-2}_{g^{(1)}}\psi \quad \text{on } M_1 \tag{3.3}$$

其中，$\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}\cdot_{g^{(1)}}$ 表示相对于度量 $\mathsf{g}^{(1)}$ 的手征算子作用。

3.1 构型空间与拉格朗日量

显然，我们的目标归结为求出随 $\varepsilon>0$ 变化的方程 (3.3) 的解。注意，方程 (3.3) 在 M_1 和 $n^*=\frac{2n}{n-1}<\frac{2m_1}{m_1-1}=m_1^*$ 上都有良好定义。在证明过程中，无需保留 $(M_1,\mathsf{g}^{(1)})$、$\tilde{D}^{M_1}{}_{g^{(1)}}$ 和 $\omega^{M_1}_{\mathbb{C}}$ 中的上标与下标。因此，为简化记号，我们考虑如下广义问题

$$\varepsilon\tilde{D}_g\psi + a\omega_{\mathbb{C}}\cdot_g\psi = f(|\psi|_g)\psi,\quad \psi: M\to\tilde{\mathbb{S}}(M) \tag{3.4}$$

在闭自旋 m-流形 $(M, \mathrm{g}\ \sigma)$ 上，其中 $a>0$ 是一个常数，而 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是非线性项。显然， $f(s)=s^{n^*-2}$ 是我们主要关注的问题。除非另有说明，为了记号上的便利，我们将偶尔省略 $|\cdot|_g$ 在 $\mathbb{S}(M)$ 中的下标。

下文中，对于 $q>1$，记 $L^q := L^q(M,\tilde{\mathbb{S}}(M))$，其范数为 $|\cdot|_q^q := \int_M |\cdot|^q d\mathrm{vol}_g$。特别地，对于 $q=2$，我们有 L^2 是一个希尔伯特空间，其内积为 $(\cdot,\cdot)_2 = \mathrm{Re}\int_M (\cdot,\cdot) d\mathrm{vol}_g$。

对每个固定的 $\varepsilon>0$，令 $A_\varepsilon := \varepsilon \tilde{D}_g + a\omega_{\mathbb{C}}\cdot_g$ 表示作用在 L^2 上的自伴算子，其定义域为 $\mathcal{D}(A_\varepsilon) = H^1 \equiv H^1(M,\mathbb{S}(M))$。已知在闭自旋流形 (M,g) 上， $Spec(A_\varepsilon) \subset (-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$ 的谱关于原点对称，并由一个无界的离散特征值序列组成（每个特征值的重数有限），详情见 [34]。

因此，根据椭圆自伴算子的经典谱理论，我们可以选取 L^2 的一组完备标准正交基 $\psi^\varepsilon_{\pm 1}, \psi^\varepsilon_{\pm 2}, \ldots$，它由 A_ε的特征旋量组成，即$A_\varepsilon \psi^\varepsilon_{\pm k} = \lambda_{\pm k}(\varepsilon)\psi^\varepsilon_{\pm k}$，而谱 $Spec(A_\varepsilon)$ 记作

$$\cdots \le \lambda_{-2}(\varepsilon) \le \lambda_{-1}(\varepsilon) < 0 < \lambda_1(\varepsilon) \le \lambda_2(\varepsilon) \le \cdots,$$

其中每个特征值均按其重数计入。特别地，我们有 $\lambda_k(\varepsilon) = -\lambda_{-k}(\varepsilon)$，且 $|\lambda_{\pm k}(\varepsilon)| \to +\infty$作为 $k\to\infty$。

定义无界算子 $|A_\varepsilon|^s\colon L^2 \to L^2, s\ge 0$，其定义为

$$|A_\varepsilon|^s \psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^s \alpha_k \psi^\varepsilon_k$$

其中 $\psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \psi^\varepsilon_k \in L^2$。由此，我们可以将 $|A_\varepsilon|^s$ 在 L^2 中的定义域引入为

$$\mathscr{H}^s := \left\{ \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi^\varepsilon_k \in L^2 : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^{2s} |\alpha_k|^2 < \infty \right\}.$$

值得指出的是，$\mathscr{H}^{\frac{1}{2}}$与阶数为$1\,2$的索об列夫空间一致，即 $W^{\frac{1}{2},2}(M,\tilde{\mathbb{S}}(M))$（例如参见 [1,3]）。此外，我们可以在 $\mathcal{H} := \mathscr{H}^{\frac{1}{2}}$ 上赋予内积

$$\langle \psi, \varphi \rangle_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^m} \mathrm{Re} \int_M \left(|A_\varepsilon|^{1/2}\psi, |A_\varepsilon|^{1/2}\varphi \right) d\mathrm{vol}_g \tag{3.5}$$

以及诱导范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$，使得 $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon)$ 成为一个希尔伯特空间。请注意，在上述记号中，我们强调了对参数 ε 的依赖性，因为它出现在微分算子及其谱中。 $\mathcal{H}$ 的对偶空间记为 $\mathcal{H}^* = W^{-\frac{1}{2},2}(M,\tilde{\mathbb{S}}(M))$。将 $\mathcal{H}$ 与 $\mathcal{H}^*$ 等同后，我们将使用相同的记号 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$ 表示 $\mathcal{H}^*$ 上的范数。

回顾一下，我们有一个 $(\cdot,\cdot)_2$-正交分解

$$L^2 = L^+_\varepsilon \oplus L^-_\varepsilon, \quad \psi = \psi^+ + \psi^-$$

with

$$L^+_\varepsilon := \overline{\bigoplus_{k=1}^{+\infty} \ker(A_\varepsilon - \lambda_k(\varepsilon))} \quad \text{and} \quad L^-_\varepsilon := \overline{\bigoplus_{k=1}^{\infty} \ker(A_\varepsilon - \lambda_{-k}(\varepsilon))}$$

使得 A_ε 在 L^+_ε上正定，在 L^-_ε上负定。因此，关于内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varepsilon$， $\mathcal{H}$ 的正交分解为

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+_\varepsilon \oplus \mathcal{H}^-_\varepsilon, \quad \mathcal{H}^\pm_\varepsilon = \mathcal{H} \cap L^\pm_\varepsilon.$$

在巴拿赫空间 $L^q, q > 1$ 上，我们引入新的范数

$$|\psi|_{q,\varepsilon} = \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M |\psi|^q d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{for each } \varepsilon > 0.$$

接着，回顾 $m^* = \frac{2m}{m-1}$，我们有（参见 [34]）

引理 3.1. 若 $\varepsilon > 0$ 足够小，则对任意 $q \in [2, m^*]$，嵌入 $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}: (\mathcal{H}, \|\cdot\|_\varepsilon) \hookrightarrow (L^q, |\cdot|_{q,\varepsilon})$ 有界，且其界与 ε 无关；也就是说，存在 $c_q > 0$ 使得

$$|\psi|_{q,\varepsilon} \le c_q \|\psi\|_\varepsilon \quad \textit{for all } \psi \in \mathcal{H} \textit{ and all } \varepsilon > 0 \textit{ small.}$$

特别地，当 $q \in [2, m^*)$ 时，该嵌入是紧的。

注记 3.2. 这个引理的证明结合了 Lichnerowicz 公式

$$(\tilde{D}_g)^2 = \nabla^*\nabla + \frac{1}{4}Scal_g,$$

其中 $Scal_g$ 是 (M, g) 的标量曲率，并应用 Calder´on-Lions 插值定理（见 [33]），介于 $\mathscr{H}^1$ 和 L^2 之间。事实上，对于 $\psi \in C^\infty(M, \tilde{\mathbb{S}}(M))$，我们有

$$\big||A_\varepsilon|\psi\big|_2^2 = \int_M \varepsilon^2 |\nabla\psi|^2 + \Big(a^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}Scal_g\Big)|\psi|^2 d\mathrm{vol}_g. \tag{3.6}$$

由此可知，当 ε 为较大的正值时，标量曲率 $Scal_g$ 的影响便会显现。在这种情况下，若 $Scal_g$ 含有某些负部分，(3.6) 可能不再是一个范数。这一事实可能会影响 $\mathcal{H} = \mathscr{H}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow L^{m^*}$ 的嵌入常数。

利用引理 3.1，我们为式 (3.4) 中的非线性项 f 引入以下条件，其中幂函数 $f(s) = s^{p-2}$ 是其一个特例：

(f_1) $f(0) = 0, f \in C^1(0,\infty)$ 且 $f'(s) > 0$，对 $s > 0$ 成立；

(f_2) 存在 $p \in (2, m^*)$，使得 $c > 0$ 满足 $f'(s)s \le c(1 + s^{p-2})$，对 $s \ge 0$ 成立；

(f_3) 存在 $\theta > 0$，使得 $f(s) \le \frac{1}{\theta} f'(s)s$，对 $s > 0$ 成立。

令 $F(s)$ 为 $f(s)s$ 的原函数，即 $F(s) = \int_0^s f(t)t\,dt$，容易看出，方程 (3.4) 是泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(\psi) &= \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \Big(\frac{1}{2}(A_\varepsilon\psi,\psi) - F(|\psi|)\Big)d\mathrm{vol}_g \\ &= \frac{1}{2}\big(\|\psi^+\|^2_\varepsilon - \|\psi^-\|^2_\varepsilon\big) - \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M F(|\psi|)d\mathrm{vol}_g \end{aligned} \tag{3.7}$$

定义在 $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+_\varepsilon \oplus \mathcal{H}^-_\varepsilon$ 上。由引理 3.1，我们有 $\mathcal{L}_\varepsilon \in C^2(\mathcal{H}, \mathbb{R})$。

我们强调， F与 f之间的关系是 $F'(s) = f(s)s$。此外，略去记号中的细节，我们简单地用 $\psi = \psi^+ + \psi^-$ 表示 $\mathcal{H}$ 的正交分解，而不提及其对 ε的依赖关系。不过，应始终牢记，对于 ε的不同取值，旋量 ψ 的这一分解也不同。

3.2 约化作用量

我们先来讨论泛函 $\mathcal{L}_\varepsilon$的紧性。

引理 3.3. 对每个足够小的 $\varepsilon>0$， $\mathcal{L}_\varepsilon$ 满足关于 $c\geq 0$ 的 $(P.S.)_c$-条件，即，

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_\varepsilon(\psi_n)\to c\\ \mathcal{L}'_\varepsilon(\psi_n)\to 0\end{array}\right\}\Rightarrow\{\psi_n\}\ \textit{possesses a convergent subsequence in}\ \mathcal{H}.$$

此外，当且仅当 $\psi_n\to 0$ 时， $c=0$。

证明。由于 $\mathcal{L}'_\varepsilon(\psi_n)$ 在 $\mathcal{H}^*$ 中 $\to 0$，我们有

$$c+o(\|\psi_n\|_\varepsilon)=\mathcal{L}_\varepsilon(\psi_n)-\frac{1}{2}\mathcal{L}'_\varepsilon(\psi_n)[\psi_n]=\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M\frac{1}{2}f(|\psi_n|)|\psi_n|^2-F(|\psi_n|)d\mathrm{vol}_g. \tag{3.8}$$

我们还有

$$o(\|\psi_n\|_\varepsilon)=\mathcal{L}'_\varepsilon(\psi_n)[\psi_n^+-\psi_n^-]=\|\psi_n\|_\varepsilon^2-\frac{1}{\varepsilon^m}\mathrm{Re}\int_M f(|\psi_n|)(\psi_n,\psi_n^+-\psi_n^-)d\mathrm{vol}_g.$$

由 (f_1)-(f_3)，容易验证，对于任意小的 $\delta>0$，都存在 $c_\delta>0$ 使得 $f(s)s\leq\delta s+c_\delta(f(s)s^2)^{\frac{p-1}{p}}$且 $F(s)\leq\frac{1}{\theta+2}f(s)s^2$ 对所有 $s\geq 0$ 均成立。由此结合引理 3.1，可得

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|_\varepsilon^2 &\leq \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M f(|\psi_n|)|\psi_n|\cdot|\psi_n^+-\psi_n^-|d\mathrm{vol}_g+o(\|\psi_n\|_\varepsilon)\\ &\leq \delta|\psi_n|_{2,\varepsilon}|\psi_n^+-\psi_n^-|_{2,\varepsilon}+c_\delta\Big(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M f(|\psi_n|)|\psi_n|^2d\mathrm{vol}_g\Big)^{\frac{p-1}{p}}|\psi_n^+-\psi_n^-|_{p,\varepsilon}+o(\|\psi_n\|_\varepsilon)\\ &\leq \delta c_2\|\psi_n\|_\varepsilon^2+C_{p,\delta}\big(c+o(\|\psi_n\|_\varepsilon)\big)^{\frac{p-1}{p}}\|\psi_n\|_\varepsilon+o(\|\psi_n\|_\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.9}$$

通过适当选取较小的 $\delta>0$，由 (3.9) 可知， $\{\psi_n\}$ 关于范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}$ 中有界。又由于 $\mathcal{H}\hookrightarrow L^p$ 的紧嵌入，容易验证 $\{\psi_n\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是紧的。

最后，我们指出，(3.8) 和 (3.9) 一起意味着： $\psi_n\to 0$ 当且仅当 $c=0$。证明至此完成。 □

由 (3.7) 可见，泛函 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的二次部分是强不定型的，即在 $\mathcal{H}$ 的无限维子空间上分别为正定和负定。因此，为了得到 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的一个临界点，现在关键是为 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 找到合适的极小极大方案。幸运的是，由于我们对非线性项 f 的要求（见条件 (f_1)-(f_3)）， $\mathcal{L}_\varepsilon$ 具有非常好的几何行为，具体如下：

(i) 由于函数 F 非负，对于每个固定的 $u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+$，泛函

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u+\cdot):\mathcal{H}_\varepsilon^-\to\mathbb{R},\quad w\mapsto\mathcal{L}_\varepsilon(u+w)$$

是反强制的（即 $\mathcal{L}_\varepsilon(u+w)\to-\infty$ 当 $\|w\|_\varepsilon\to\infty$）。

(*ii*) 由于当 $s>0$ 时， $F''(s)=f'(s)s+f(s)>0$，二次型 $\mathcal{L}_\varepsilon''(u+w)[\cdot,\cdot]$ 在 $\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上是负定的，换言之，上述泛函 $\mathcal{L}_\varepsilon(u+\cdot)$ 在 $\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上是严格凹的。

(*iii*) 由于 (f_3) 蕴含存在某个常数 $c>0$，使得对所有 $s\geq 1$， $f(s)\geq cs^\theta$，因此函数F在无穷远处具有超二次增长，即 $F(s)\geq \frac{c}{2+\theta}s^{2+\theta}$当 $s\to\infty$ 时成立。因此，对每个固定的 $u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}$,

$$\mathcal{L}_\varepsilon(tu+w)\to-\infty \quad \text{as } |t|+\|w\|_\varepsilon\to\infty. \tag{3.10}$$

综合以上三条性质，对于每个 $u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}$，我们都能够在 $\mathbb{R}^+u\oplus\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上使泛函 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 取得最大值，其中 $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$。注意到 u 在空间$\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}$中变化，因此我们可以只考虑选择 $u\in S_\varepsilon^+:=\{u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+:\ \|u\|_\varepsilon=1\}$，而不改变 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 在 $\mathbb{R}^+u\oplus\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上的最大值。由 (f_1)-(f_2) 可推得，对任意小的 $\delta>0$，均有 $F(s)\leq\frac{\delta}{2}s^2+C_\delta s^p$，因此（由引理 3.1）

$$\max_{\mathbb{R}^+u\oplus\mathcal{H}_\varepsilon^-}\mathcal{L}_\varepsilon\geq\max_{t>0}\mathcal{L}_\varepsilon(tu)\geq\max_{t>0}\Big(\frac{1-\delta}{2}t^2-C_\delta t^p\Big)=\tau_0>0. \tag{3.11}$$

因此，我们为 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 找到了一个候选极小极大方案：先在 $\mathbb{R}^+u\oplus\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上最大化泛函$\mathcal{L}_\varepsilon$，然后关于 $u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}$ 取极小值。

By 总结以上观察，我们得到如下基本结论。

命题 3.4. 对每个足够小的 $\varepsilon>0$，以下结论成立。

(1) 存在 $\chi_\varepsilon\in C^1(\mathcal{H}_\varepsilon^+,\mathcal{H}_\varepsilon^-)$，使得对于 $u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+$

$$w\in\mathcal{H}_\varepsilon^-,\ w\neq\chi_\varepsilon(u)\Rightarrow\mathcal{L}_\varepsilon(u+w)<\mathcal{L}_\varepsilon(u+\chi_\varepsilon(u));$$

也就是说， $\chi_\varepsilon(u)$ 是泛函 $w\mapsto\mathcal{L}_\varepsilon(u+w)$ 在 $\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上的唯一最大化元。此外，对于 $u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+$

$$\|\chi_\varepsilon(u)\|_\varepsilon^2\leq\frac{2}{\varepsilon^m}\int_M F(|u|)d\mathrm{vol}_g$$

并且对于所有 $w\in\mathcal{H}_\varepsilon^-$， $\mathcal{L}_\varepsilon'(u+\chi_\varepsilon(u))[w]\equiv 0$；

(2) 若 $\{u_n\}$ 是约化泛函的 ($P.S.$)-序列

$$I_\varepsilon:\mathcal{H}_\varepsilon^+\to\mathbb{R},\quad I_\varepsilon(u)=\mathcal{L}_\varepsilon(u+\chi_\varepsilon(u)),$$

则 $\{u_n+\chi_\varepsilon(u_n)\}$ 是 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的 ($P.S.$)-序列；

(3) 存在 $u_\varepsilon\in\mathcal{H}_\varepsilon^+$ 使得 $I_\varepsilon'(u_\varepsilon)=0$ 且

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon)=\mu_\varepsilon:=\inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon}\max_{t\in[0,1]}I_\varepsilon(\gamma(t))>0,$$

其中 $\Gamma_\varepsilon=\big\{\gamma\in C([0,1],\mathcal{H}_\varepsilon^+):\ \ \gamma(0)=0,\ I_\varepsilon(\gamma(1))<0\big\}$。特别地， $\bar{\psi}_\varepsilon=u_\varepsilon+\chi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ 是 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的一个非平凡临界点。

证明。类似的结论可见于 [15, 第 2] 节，其中建立了某种抽象理论。这里只需指出，断言 (1) 中最大化元 $\chi_\varepsilon(u)$ 的存在性和唯一性，直接源于泛函$\mathcal{L}_\varepsilon(u+\cdot)$ 在 $\mathcal{H}_\varepsilon^-$ 上的反强制性和严格凹性。C^1-光滑性是隐函数定理的推论。

□

接下来，我们给出上面命题中得到的临界水平 μ_ε 的上界估计。

引理 3.5. 对每个 $u \in \mathcal{H}_\varepsilon^+ \setminus \{0\}$，映射 $I_{\varepsilon,\,u}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I_{\varepsilon,\,u}(t) = I_\varepsilon(tu)$ 属于 C^2 类，并满足 $I_{\varepsilon,\,u}(0) = I'_{\varepsilon,\,u}(0) = 0$ 以及 $I''_{\varepsilon,\,u}(0) > 0$。此外，有

$$I'_{\varepsilon,u}(t) = 0,\ t > 0 \quad \Longrightarrow \quad I''_{\varepsilon,u}(t) < 0.$$

证明. 首先，我们可以利用 $I'_{\varepsilon,\,u}(t) = \mathcal{L}'_\varepsilon(tu + \chi_\varepsilon(tu))[u]$ 这一事实，得出 $I_{\varepsilon,\,u}$ 属于 C^2 类。由 $(f_1)-(f_3)$ 可得

$$I_\varepsilon(tu) \geq \mathcal{L}_\varepsilon(tu) \geq \frac{(1-\delta)t^2}{2}\|u\|_\varepsilon^2 - C_{p,\delta}\, t^p \|u\|_\varepsilon^p \quad \forall u \in \mathcal{H}_\varepsilon^+ \setminus \{0\} \text{ and } t > 0,$$

对任意固定且足够小的 $\delta > 0$ 均成立。因此，$I_\varepsilon(0) = 0$ 是 $0 \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$ 邻域内的严格局部极小值。特别地，我们可以看到 $I_{\varepsilon,\,u}(0) = I'_{\varepsilon,\,u}(0) = 0$ 以及 $I''_{\varepsilon,\,u}(0) > 0$。于是，为了完成证明，只需证明

$$I'_\varepsilon(u)[u] = 0,\ u \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad I''_\varepsilon(u)[u,u] < 0. \tag{3.12}$$

为简便起见，记 $\Psi_\varepsilon\colon\ \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ 为 $\Psi_\varepsilon(\psi) = \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M F(|\psi|)d$体积$_g$，并令 $\psi = u + \chi_\varepsilon(u)$ 以及 $w = \chi'_\varepsilon(u)[u] - \chi_\varepsilon(u)$。利用 $\mathcal{L}'_\varepsilon(u+\chi_\varepsilon(u))|_{\mathcal{H}_\varepsilon^-} \equiv 0$，可见（3.12）直接由以下计算得出:

$$\begin{aligned}
I''_\varepsilon(u)[u,u] &= \mathcal{L}''_\varepsilon(\psi)[u+\chi'_\varepsilon(u)[u], u] = \mathcal{L}''_\varepsilon(\psi)[\psi+w, \psi+w] \\
&= \mathcal{L}''_\varepsilon(\psi)[\psi,\psi] + 2\mathcal{L}''_\varepsilon(\psi)[\psi,w] + \mathcal{L}''_\varepsilon(\psi)[w,w] \\
&= I'_\varepsilon(u)[u] + \big(\Psi'_\varepsilon(\psi)[\psi] - \Psi''_\varepsilon(\psi)[\psi,\psi]\big) + 2\big(\Psi'_\varepsilon(\psi)[w] - \Psi''_\varepsilon(\psi)[\psi,w]\big) \\
&\quad -\Psi''_\varepsilon(\psi)[w,w] - \|w\|_\varepsilon^2 \\
&\leq I'_\varepsilon(u)[u] - \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{f(|\psi|)f'(|\psi|)|\psi|^3}{f(|\psi|)+f'(|\psi|)|\psi|} d\mathrm{vol}_g - \|w\|_\varepsilon^2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

由于对所有 $s \geq 0$，$f(s)f'(s)s \leq (f(s) + f'(s)s)^2$，且等号当且仅当 $s = 0$ 时成立，我们有

$$0 < \frac{f(|\psi|)f'(|\psi|)|\psi|^3}{f(|\psi|)+f'(|\psi|)|\psi|} \leq f(|\psi|)|\psi|^2 + f'(|\psi|)|\psi|^3 \quad \text{for } \psi \neq 0.$$

因此，由（f_1）-（f_3），（3.13）中的积分是良定义的。 □

上述引理表明，对于每个 $u \in \mathcal{H}_\varepsilon^+ \setminus \{0\}$，函数 $I_{\varepsilon,\,u}(\cdot)$ 至多有一个临界点 $t_{\varepsilon,\,u} \in (0, +\infty)$。由 (3.10) 可知，可以验证，对于每个 u，这样的 $t_{\varepsilon,\,u}$ 都存在。于是，我们可以将约化泛函 I_ε 的一个自然约束定义为

$$\mathcal{N}_\varepsilon := \big\{u \in \mathcal{H}_\varepsilon^+ \setminus \{0\} :\ I'_\varepsilon(u)[u] = 0\big\}.$$

引理 3.5 还表明， $\mathscr{N}_\varepsilon$ 是 $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ 中余维 1 的光滑子流形。因此，命题 3.4 (3) 中找到的临界点可以表示为

$$\mu_\varepsilon := \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\psi}_\varepsilon) = \inf_{u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}} \max_{\psi\in\mathbb{R}u\oplus\mathcal{H}_\varepsilon^-} \mathcal{L}_\varepsilon(\psi) = \inf_{u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}} \max_{t>0} I_\varepsilon(tu) = \inf_{u\in\mathscr{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(u). \tag{3.14}$$

为便于后续讨论，值得提醒的是，(3.11) 意味着存在某个与 ε 无关的 $\tau_0 > 0$，使得 $\mu_\varepsilon \geq \tau_0$。

接下来，我们打算令 $\varepsilon \to 0$ 趋于极限，并考察极小极大水平 μ_ε 的渐近行为。我们的思路是围绕任意一个 $(P.S.)$-序列给出上界估计，以便将某些试验旋量代入泛函 $\mathcal{L}_\varepsilon$。

不失一般性，我们假设 $\{\phi_\varepsilon\} \subset \mathcal{H}$ 是任意一个满足以下条件的序列

$$c_1 \leq \mathcal{L}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) \leq c_2 \quad \text{and} \quad \|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon \to 0 \tag{3.15}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时趋于 c_1、$c_2 > 0$ 这两个常数。这里，我们将对偶空间 $\mathcal{H}^*$ 与 $\mathcal{H}$ 等同。

引理 3.6. 在 (3.15) 条件下，有：

(1) $\|\phi_\varepsilon\|_\varepsilon$ 在 ε 中一致有界。

(2) $\|\phi_\varepsilon^- - \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\|_\varepsilon \leq O\big(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon\big)$ *as* $\varepsilon \to 0$.

(3) $I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+) \to 0$ 作为 $\varepsilon \to 0$，属于 $\mathcal{H}_\varepsilon^+$ 的对偶空间。

证明。对于有界性，我们回顾一下，引理 3.1 表明，$\mathcal{H} \hookrightarrow L^{p^*}$ 的嵌入常数与 ε 无关，因此可以采用引理 3.3 中的论证。

对于 (2)，我们先令 $z_\varepsilon = \phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)$ 和 $v_\varepsilon = \phi_\varepsilon^- - \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)$。于是我们有 $v_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon^-$，并且根据 χ_ε 的定义，

$$0 = \mathcal{L}'_\varepsilon(z_\varepsilon)[v_\varepsilon] = -\left\langle \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+), v_\varepsilon \right\rangle_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^m} \operatorname{Re} \int_M f(|z_\varepsilon|)(z_\varepsilon, v_\varepsilon) d\mathrm{vol}_g.$$

由于当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon \to 0$，因此可得

$$o(\|v_\varepsilon\|_\varepsilon) = \mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)[v_\varepsilon] = -\left\langle \phi_\varepsilon^-, v_\varepsilon \right\rangle - \frac{1}{\varepsilon^m} \operatorname{Re} \int_M f(|\phi_\varepsilon|)(\phi_\varepsilon, v_\varepsilon) d\mathrm{vol}_g.$$

因此，我们得到

$$o(\|v_\varepsilon\|_\varepsilon) = \|v_\varepsilon\|_\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon^m} \operatorname{Re} \int_M f(|\phi_\varepsilon|)(\phi_\varepsilon, v_\varepsilon) d\mathrm{vol}_g - \frac{1}{\varepsilon^m} \operatorname{Re} \int_M f(|z_\varepsilon|)(z_\varepsilon, v_\varepsilon) d\mathrm{vol}_g. \tag{3.16}$$

由于映射 $\psi \to F(|\psi|)$ 根据 (f_1) 是凸的，我们有

$$\frac{1}{\varepsilon^m} \operatorname{Re} \int_M f(|\phi_\varepsilon|)(\phi_\varepsilon, v_\varepsilon) d\mathrm{vol}_g - \frac{1}{\varepsilon^m} \operatorname{Re} \int_M f(|z_\varepsilon|)(z_\varepsilon, v_\varepsilon) d\mathrm{vol}_g \geq 0.$$

因此，由（3.16）可推知，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\|v_\varepsilon\|_\varepsilon \leq O\big(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon\big)$。

为了验证 (3)，我们计算 $I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+) = \mathcal{L}'_\varepsilon\big(\phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\big)$，这意味着 $\|I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\|_\varepsilon \to 0$，因为 $\varepsilon \to 0$ 是 (2) 和 C^2 $\mathcal{L}_\varepsilon$的光滑性的直接结果。 □

接下来，我们引入泛函 $K_\varepsilon: \mathcal{H}_\varepsilon^+ \to \mathbb{R}$，定义为 $K_\varepsilon(u) = I'_\varepsilon(u)[u]$。显然，$K_\varepsilon$ 是 C^1，其导数由以下公式给出

$$K'_\varepsilon(u)[w] = I'_\varepsilon(u)[w] + I''_\varepsilon(u)[u, w]$$

对于 $u, w \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$。我们还有 $\mathcal{N}_\varepsilon = K_\varepsilon^{-1}(0) \setminus \{0\}$。此外，由 (3.13) 可得

$$K'_\varepsilon(u)[u] \le 2K_\varepsilon(u) - \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{f(|\psi|)f'(|\psi|)|\psi|^3}{f(|\psi|)+f'(|\psi|)|\psi|}d\mathrm{vol}_g, \quad \text{for } u \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$$

其中 $\psi = u + \chi_\varepsilon(u)$。根据 (f_3)，容易验证 $f\frac{s}{(f\ s\ +f'\ s\ )f'()()()s} \ge \frac{\theta}{\theta+1}f(s)$ 对于 $s > 0$ 成立。因此，上述估计意味着

$$K'_\varepsilon(u)[u] \le 2K_\varepsilon(u) - \frac{\theta}{(\theta+1)\varepsilon^m}\int_M f(|u+\chi_\varepsilon(u)|)|u+\chi_\varepsilon(u)|^2 d\mathrm{vol}_g, \tag{3.17}$$

对于 $u \in \mathcal{H}_\varepsilon^+$。

命题 3.7. 对于 (3.15) 中的序列 $\{\phi_\varepsilon\}$，存在 $\{t_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}$，使得 $t_\varepsilon\phi_\varepsilon^+ \in \mathcal{N}_\varepsilon$ 且 $|t_\varepsilon - 1| \le O\big(\|I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\|_\varepsilon\big)$。

证明。我们首先观察到，对于所有 $s \ge 0$，$F(s) \le \frac{1}{\theta+2}f(s)s^2$。由条件 (3.15) 和引理 3.6 (3)，可直接推出

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M f\big(|\phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)|\big)|\phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)|^2 d\mathrm{vol}_g \ge c_0 \tag{3.18}$$

对于某个常数 $c_0 > 0$。令 $\eta_\varepsilon: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 由 $\eta_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(t\phi_\varepsilon^+)$ 定义。容易验证，对于所有 $t > 0$，$t\eta'_\varepsilon(t) = K'_\varepsilon(t\phi_\varepsilon^+)[t\phi_\varepsilon^+]$。因此，由 (3.17) 和泰勒展开，可得

$$t\eta'_\varepsilon(t) \le 2\eta_\varepsilon(1) - \frac{\theta}{(\theta+1)\varepsilon^m}\int_M f\big(|\phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)|\big)|\phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)|^2 d\mathrm{vol}_g + C|t-1| \tag{3.19}$$

当 t 接近 1 时，其中某个与 ε 无关的 $C > 0$。这里我们使用了 $\eta'_\varepsilon(t)$ 在有界区间上的一致有界性。

注意到当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\eta_\varepsilon(1) = I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)[\phi_\varepsilon^+] \to 0$，由 (3.18) 和 (3.19) 可知，存在一个足够小的常数 $\delta > 0$，使得

$$\eta'_\varepsilon(t) \le -\delta \text{ for all } t \in (1-\delta, 1+\delta) \text{ and } \varepsilon \text{ small enough.}$$

此外，注意到 $K_\varepsilon(u)$ 等于 $I'_{\varepsilon,u}(1)$ 的值，由引理 3.5 可知，$\eta_\varepsilon(1-\delta) > 0$ 且 $\eta_\varepsilon(1+\delta) < 0$。于是，根据反函数定理，存在 $t_\varepsilon := \eta_\varepsilon^{-1}(0)$，并且

$$u_\varepsilon := t_\varepsilon\phi_\varepsilon^+ \in \mathcal{N}_\varepsilon \cap \mathbb{R}^+\phi_\varepsilon^+$$

对所有足够小的 ε 都有良好定义。此外，由于在（$1-\delta$，$1+\delta$）上，$|\eta'_\varepsilon(t)^{-1}|$ 被一个常数（记为 $c_\delta > 0$）所界，因此我们得到

$$\|u_\varepsilon - \phi_\varepsilon^+\|_\varepsilon = |\eta_\varepsilon^{-1}(0) - \eta_\varepsilon^{-1}(K_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+))| \cdot \|\phi_\varepsilon^+\|_\varepsilon \le c_\delta |K_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)| \cdot \|\phi_\varepsilon^+\|_\varepsilon.$$

现在由 $K_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+) \le O\big(\|I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\|_\varepsilon\big)$ 得出结论。 □

推论 3.8. 对于 (3.15) 中的序列 $\{\phi_\varepsilon\}$，存在 $\{u_\varepsilon\}$ 使得 $u_\varepsilon \in \mathscr{N}_\varepsilon$ 和 $\|\phi_\varepsilon - u_\varepsilon - \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_\varepsilon \le O(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon)$。此外，

$$\max_{t>0} I_\varepsilon(t\phi_\varepsilon^+) = I_\varepsilon(u_\varepsilon) \le \mathcal{L}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) + O\big(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon^2\big).$$

证明。为说明这一点，令 $u_\varepsilon = t_\varepsilon\phi_\varepsilon^+$ 如命题 3.7 中所述，并设 $z_\varepsilon = \phi_\varepsilon^+ + \chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)$。于是由引理 3.6 可得

$$\begin{aligned}\|\phi_\varepsilon - u_\varepsilon - \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_\varepsilon &\le \|\phi_\varepsilon - z_\varepsilon\|_\varepsilon + |t_\varepsilon - 1| \cdot \|\phi_\varepsilon^+\|_\varepsilon + \|\chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+) - \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_\varepsilon \\ &\le O\big(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon\big) + O\big(\|I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\|_\varepsilon\big)\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中我们使用了一个易于验证的不等式

$$\|\chi_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+) - \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_\varepsilon \le \|\chi'_\varepsilon(\tau\phi_\varepsilon^+)\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^+ \to \mathcal{H}_\varepsilon^-} \cdot \|\phi_\varepsilon^+ - u_\varepsilon\|_\varepsilon = O(|t_\varepsilon - 1|)$$

对于某个介于 t_ε 和 1 之间的 τ。注意到 $I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+) = \mathcal{L}'_\varepsilon(z_\varepsilon)$，并利用 C^2 的光滑性，我们有

$$\|I'_\varepsilon(\phi_\varepsilon^+)\|_\varepsilon = \|\mathcal{L}'_\varepsilon(z_\varepsilon)\|_\varepsilon \le \|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon + O(\|\phi_\varepsilon - z_\varepsilon\|_\varepsilon) = O(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon).$$

结合 (3.20) 可得

$$\|\phi_\varepsilon - u_\varepsilon - \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_\varepsilon \le O(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon).$$

现在，由泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(\phi_\varepsilon) &= \mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon + \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)) + \mathcal{L}'_\varepsilon(u_\varepsilon + \chi_\varepsilon(u_\varepsilon))[\phi_\varepsilon - u_\varepsilon - \chi_\varepsilon(u_\varepsilon)] + O\big(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon^2\big) \\ &= I_\varepsilon(u_\varepsilon) + I'_\varepsilon(u_\varepsilon)[\phi_\varepsilon^+ - u_\varepsilon] + O\big(\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\phi_\varepsilon)\|_\varepsilon^2\big).\end{aligned}$$

由于 $u_\varepsilon = t_\varepsilon\phi_\varepsilon^+ \in \mathscr{N}_\varepsilon$，我们有 $I'_\varepsilon(u_\varepsilon)[\phi_\varepsilon^+ - u_\varepsilon] \equiv 0$，这就推出了最后一个估计。 □

4 主要结果的证明

4.1 欧几里得空间上的方程：泡

我们考虑属于以下方程的解

$$\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi = f(|\psi|)\psi \quad \text{on } \mathbb{R}^m \tag{4.1}$$

属于类 $W^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$，其中

$$\tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{S}(\mathbb{R}^m) \oplus \mathbb{S}(\mathbb{R}^m) & m \text{ is odd}, \\ \mathbb{S}(\mathbb{R}^m) & m \text{ is even}, \end{cases}$$

$\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}} = D_{g_{\mathbb{R}^m}} \oplus -D_{g_{\mathbb{R}^m}}$ 若 m 为奇数，且若 $D_{g_{\mathbb{R}^m}} = D_{g_{\mathbb{R}^m}}$ 为偶数。这些解将对应于我们变分问题中的“泡”或试验旋量。我们还假设非线性函数 f 满足条件(f_1)-(f_3)。

˜首先，令 $A = D_{g_{\mathbb{R}^m}} + a\omega_{\mathbb{C}\cdot g_{\mathbb{R}^m}}$。通过直接计算可知，$A$ 是作用于 L^2 上的自伴算子，其谱为 $Spec(A) = (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$。按照 Amann [2] 的做法，令 $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ 为 A 的谱分解，并将正交投影定义为

$$P = \int_{-\infty}^{0} dE_\lambda, \quad Q = \int_{0}^{\infty} dE_\lambda.$$

那么，$\mathcal{E} = W^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m)) = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ 的分解由以下内容导出

$$\mathcal{E}^- = \mathcal{E} \cap P(L^2) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}^+ = \mathcal{E} \cap Q(L^2).$$

我们引入以下算子

$$S = \int_{-\infty}^{0} |\lambda|^{\frac{1}{2}} dE_\lambda \quad \text{and} \quad T = \int_{0}^{\infty} |\lambda|^{\frac{1}{2}} dE_\lambda.$$

以及 $\mathcal{E}$ 上的新内积

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \mathrm{Re}\left((S+T)\psi, (S+T)\varphi\right)_2, \quad \psi, \varphi \in \mathcal{E}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示相应的范数。容易看出，(4.1) 是泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\Phi(\psi) = \frac{1}{2}\left(\|Q\psi\|^2 - \|P\psi\|^2\right) - \int_{\mathbb{R}^m} F(|\psi|)dx. \tag{4.2}$$

引理 4.1. 若 $\{\psi_n\} \subset \mathcal{E}$ 是一个满足以下条件的有界序列

$$\Phi'(\psi_n) \to 0 \quad \textit{and} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi_n|)|\psi_n|^2 dx > 0.$$

那么存在 $\psi \neq 0$，使得 $\Phi'(\psi) = 0$。

证明。令 B_R^0 表示以原点为中心、半径为 R 的开球。如果

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \int_{y+B_R^0} |\psi_n|^2 dx = 0, \quad \forall R > 0,$$

那么 Lions 的一个结果 [31] 表明 $\psi_n \to 0$ 在 L^q 中对所有 $q \in (2, m^*)$ 都成立，因此 $\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi_n|)|\psi_n|^2 dx \to 0$，这就产生了矛盾。

取一个子序列，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{y_n+B_R^0} |\psi_n|^2 dx > 0$$

对于某些 $R > 0$ 和 $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^m$。利用算子 A 在平移下的不变性，我们˜可以找到 $R > 0$ 和一个新的序列 $\{\psi_n\}$，使得

$$\Phi'(\tilde{\psi}_n) \to 0 \quad \text{and} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_{B_R^0} |\tilde{\psi}_n|^2 dx > 0.$$

˜必要时取一个子序列，我们有 $\tilde{\psi}_n \rightharpoonup \psi$ 在 $\mathcal{E} \hookrightarrow L^2_{loc}$，而紧嵌入表明 $\psi \neq 0$。将极限代入 $\Phi'(\tilde{\psi}_n) \to 0$，即可得到所需的 $\Phi'(\psi) = 0$。 □

推论 4.2. 存在一个非平凡解 $\psi \in \mathcal{E}$ 满足方程（4.1）。

证明。由引理 4.1 和引理 3.3 中的有界性论证可直接得到 [15,定理 2.1]。

□

现在我们可以定义

$$\mu_0 = \inf \left\{ \Phi(\psi) : \psi \in \mathcal{E} \setminus \{0\} \text{ s.t. } \Phi'(\psi) = 0 \right\}. \tag{4.3}$$

由于 (4.2) 中的超二次部分在无穷远处具有次临界增长，容易看出 $\mu_0 > 0$ 可以取到。特别地，类似于命题 3.4 和引理 3.5–推论 3.8，以下约化原理成立。

引理 4.3。（1）存在一个 C^1 映射 $h: \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^-$ 使得 $\Phi(u+h(u)) = \max_{v \in \mathcal{E}^-} \Phi(u+v)$。

（2）泛函 $J(u) = \Phi(u+h(u))$ 的临界点与 Φ 的临界点通过映射 $u \mapsto u + h(u)$ 一一对应。

（3）对每个 $u \in \mathcal{E}^+ \setminus \{0\}$，映射 $t \mapsto J(tu)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个最大值，且 $\mu_0 = \inf_{u \in \mathcal{E}^+ \setminus \{0\}} \max_{t>0} J(tu)$。

(4) 对任意满足 $\Phi(z_n) \to c > 0$ 且 $\Phi'(z_n) \to 0$ 的有界序列 $\{z_n\} \in \mathcal{E}$，有

$$\max_{t>0} J(t z_n^+) \le \Phi(z_n) + O(\|\Phi'(z_n)\|^2).$$

由椭圆估计和自举论证可得，具有有界能量的方程 (4.1) 的（弱）解在 $\cap_{q \ge 2} W^{1,q}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$ 中一致有界。此外，我们有以下

引理 4.4. 令 $\mathcal{B} = \left\{ \psi \in \mathcal{E} : \Phi(\psi) = \mu_0, \Phi'(\psi) = 0, |\psi(0)| = \max_{\mathbb{R}^m} |\psi| \right\}$，则下述结论成立。

(1) $\mathcal{B}$ 在 $W^{1,2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$ 中是紧的。

(2) 存在 $C, c > 0$，使得对所有 $\psi \in \mathcal{B}$，$|\psi(x)| \le C \exp(-c|x|)$。

证明. 显然，$\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{E}$ 中是闭的。我们证明 B 中任意序列 $\psi_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}$ 都有一个收敛子列。

事实上，由于 $\{\psi_n\}$ 有界，我们有 $\psi_n \rightharpoonup \psi_0$ 在 $\mathcal{E}$ 中的某个子序列上成立，且显然有 $\psi_0 \in \mathcal{B}$。因此，对于 $q \in [2, m^*)$，在 L^q_{loc} 中有 $\psi_n \to \psi_0$。此外，根据这一事实

$$\mu_0 = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{2} f(|\psi_n|)|\psi_n|^2 - F(|\psi_n|)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{2} f(|\psi_0|)|\psi_0|^2 - F(|\psi_0|)dx,$$

容易看出，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在 $R > 0$，使得

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{|x| \ge R} \frac{1}{2} f(|\psi_n|)|\psi_n|^2 - F(|\psi_n|)dx \le \epsilon. \tag{4.4}$$

令 $z_n = \psi_n - \psi_0$，利用 $\Phi'(\psi_n)$ 、 $= \Phi'(\psi_0)$ 和 $= 0$，可得，

$$\langle Q\psi_n, Qz_n\rangle + \langle P\psi_n, Pz_n\rangle - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi_n|)(\psi_n, Qz_n - Pz_n)dx = 0$$

and

$$\langle Q\psi_0, Qz_n\rangle + \langle P\psi_0, Pz_n\rangle - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi_0|)(\psi_0, Qz_n - Pz_n)dx = 0.$$

因此，我们得到

$$\|z_n\|^2 = \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi_n|)(\psi_n, Qz_n - Pz_n)dx + o_n(1), \tag{4.5}$$

其中我们使用了 Re $\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi_0|)(\psi_0, Qz_n - Pz_n)dx \to 0$ as $n \to \infty$，这成立是因为 $z_n \rightharpoonup 0$ in L^q for $q \in [2, m^*]$。回顾一下，根据（f_1）-（f_3），对于任意小的 $\delta > 0$，存在$c_\delta > 0$，使得 $f(s)s \le \delta s + c_\delta(f(s)s^2)^{\frac{p-1}{p}}$，并且 $F(s) \le \frac{1}{\theta+2}f(s)s^2$对所有 $s \ge 0$成立。因此，（4.4）和（4.5）意味着

$$\begin{aligned}\|z_n\|^2 &\le \delta|\psi_n|_2|Qz_n - Pz_n|_2 + c_\delta\Big(\int_{|x|\ge R} f(|\psi_n|)|\psi_n|^2dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}|Qz_n - Pz_n|_p + o_n(1)\\ &\le \delta C\|z_n\| + C_\delta\big(\epsilon + o_n(1)\big)^{\frac{p-1}{p}}\|z_n\| + o_n(1).\end{aligned}$$

由于 $\delta, \epsilon > 0$ 的任意性，可知 $\|z_n\| \to 0$ as $n \to \infty$。

现在我们证明 $W^{1,\ 2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$ 中的紧性。作为方程˜的推论（回顾 $A = D_{g_{\mathbb{R}^m}} + a\omega_{\mathbb{C}}\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}$）

$$A\psi_n = f(|\psi_n|)\psi_n \quad \text{and} \quad A\psi_0 = f(|\psi_0|)\psi_0,$$

我们有

$$\begin{aligned}|A(\psi_n - \psi_n)|_2 &= \big|f(|\psi_n|)\psi_n - f(|\psi_0|)\psi_0\big|_2\\ &\le \big|f(|\psi_n|)(\psi_n - \psi_0)\big|_2 + \big|(f(|\psi_n|) - f(|\psi_0|))\psi_0\big|_2.\end{aligned}$$

由 $|\psi_n|_\infty \le C$ 和 $\psi_n \to \psi_0$，利用 $\mathcal{E}$，可推得

$$\big|f(|\psi_n|)(\psi_n - \psi_0)\big|_2 \le f(C)|\psi_n - \psi_0|_2 = o_n(1), \quad \text{as } n \to \infty$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}\big|(f(|\psi_n|) - f(|\psi_0|))\psi_0\big|^2dx &= \int_{|x|\le R}\big|(f(|\psi_n|) - f(|\psi_0|))\psi_0\big|^2dx + o_R(1)\\ &= o_n(1) + o_R(1)\end{aligned}$$

因为 $|\psi_0(x)| \to 0$，故 $n \to \infty$ 与 $|x| \to \infty$相等。因此，我们得到 $|A(\psi_n - \psi_n)|_2 \to 0$, 即$\psi_n \to \psi_0$ 属于 $W^{1,\ 2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$.

为观察指数衰减，我们将 (4.1) 改写为

$$\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi = -a\omega_{\mathbb{C}}\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi + f(|\psi|)\psi.$$

对上述方程两边应用算子 $\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}}$，并注意到 $\tilde{D}^2_{g_{\mathbb{R}^m}} = -\Delta$，可得

$$\Delta\psi = \big(a^2 - f(|\psi|)^2\big)\psi - \nabla f(|\psi|)\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi.$$

现在利用这一事实

$$\Delta|\psi|^2 = 2\,\mathrm{Re}(\Delta\psi, \psi) + 2|\nabla\psi|^2$$

以及 $\mathrm{Re}(\nabla f(|\psi|)\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi, \psi) \equiv 0$，我们得到

$$\Delta|\psi|^2 = 2\big(a^2 - f(|\psi|)^2\big)|\psi|^2 + 2|\nabla\psi|^2 \geq 2\big(a^2 - f(|\psi|)^2\big)|\psi|^2.$$

现在对于 $\psi \in \mathcal{B}$，由 $|\psi(x)| \to 0$ as $|x| \to \infty$，我们可以取 $R > 0$ 充分大，使得

$$\Delta|\psi|^2 \geq a^2|\psi|^2$$

对所有 $|x| \geq R$均成立。

令 $\Gamma(x) = e^{-a|x|}$。容易验证

$$\Delta\Gamma - a^2\Gamma < 0, \quad \text{for } |x| > 0.$$

取 $C > 0$ 使得 $|\psi(x)|^2 \leq C \cdot \Gamma(x)$ 在 $|x| = R$上成立，我们可以考虑 $U = |\psi|^2 - C \cdot \Gamma$ 并得到

$$\Delta U = \Delta|\psi|^2 - C \cdot \Delta\Gamma > a^2 U.$$

根据椭圆估计和比较原理，我们可以轻易得出，对于所有 $|x| \geq R$， $U(x) \leq 0$。因此，我们得到 $|\psi(x)|$ 在无穷远处指数衰减。最后，由于 $\mathcal{B}$ 的紧性，我们看到，对所有 $\psi \in \mathcal{B}$，指数衰减均一致成立。 □

4.2 Bourguignon-Gauduchon 平凡化

我们的证明依赖于在 M 上构造一个试验旋量，以证明在条件 (f_1)-(f_3) 下的集中行为。该试验旋量由 $\mathbb{R}^m$ 上的一个旋量截断后移植到 M 上而得，使其支撑集位于任意点 $y \in M$ 的一个小邻域内。首先，我们需要回顾 Ammann 等人在论文 [7] 中给出的一种构造。

首先，我们任意固定一个旋量场 $\psi \in \mathcal{B}$。令 $r < \mathrm{inj}(M)/2$，其中 $\mathrm{inj}(M) > 0$ 是 M 的单射半径，并令 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m, [0,1])$ 满足：对于 $|x| \leq r$， $|\nabla\eta| \leq 2/r$, $\eta(x) = 1$；对于 $|x| \geq 2r$， $\eta(x) = 0$。然后，我们定义 $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}_m$ 如下：

$$\varphi_\varepsilon(x) = \eta(x)\psi_\varepsilon(x) \quad \text{where} \quad \psi_\varepsilon(x) = \psi(x/\varepsilon). \tag{4.6}$$

为了将试验旋量移植到 M 上，我们回顾一下 Bourguignon-Gauduchon 平凡化。这里我们任意固定 $y \in M$，并令 $(x_1, \ldots, x_m)$ 为由指数映射给出的法坐标

$$\exp_y : \mathbb{R}^m \cong T_yM \supset U \to V \subset M, \quad x \mapsto \xi = \exp_y(x).$$

对于 $\xi \in V$，令 $G(\xi) = (g_{ij}(\xi))_{ij}$表示 ξ 处对应的度量。由于 $G(\xi)$ 是对称正定的，平方根 $B(\xi) = (b_{ij}(\xi))_{ij}$ of $G(\xi)^{-1}$存在且也是对称正定的。它可以看作线性等距映射

$$B(\xi) : (\mathbb{R}^m \cong T_{\exp_y^{-1}(\xi)}U, g_{\mathbb{R}^m}) \to (T_pV, g).$$

我们得到一个 $SO(m)$-主丛同构：

$$\begin{array}{ccc} P_{SO}(U, g_{\mathbb{R}^m}) & \xrightarrow{\phi} & P_{SO}(V, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_yM \supset U & \xrightarrow{\exp_y} & V \subset M \end{array}$$

其中 $\phi\{v_1, \ldots, v_m\} = \{Bv_1, \ldots, Bv_m\}$ 是 U上的定向标架 $\{v_1, \ldots, v_m\}$。注意，ϕ 与 $SO(m)$ 的右作用可交换，因此它诱导出自旋结构之间的一个同构：

$$\begin{array}{ccc} Spin(m) \times U = P_{Spin}(U, g_{\mathbb{R}^m}) & \longrightarrow & P_{Spin}(V, g) \subset P_{Spin}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_yM \supset U & \xrightarrow{\exp_y} & V \subset M \end{array}$$

因此，我们得到旋量丛 $\mathbb{S}(U)$ 与 $\mathbb{S}(V)$ 之间的一个同构：

$$\mathbb{S}(U) := P_{Spin}(U, g_{\mathbb{R}^m}) \times_\rho \mathbb{S}_m \longrightarrow \mathbb{S}(V) := P_{Spin}(V, g) \times_\rho \mathbb{S}_m \subset \mathbb{S}(M) \tag{4.7}$$

其中 $(\rho, \mathbb{S}_m)$ 是复自旋表示。

令 $\{\partial_1, \ldots, \partial_m\}$ 为欧几里得空间上的典范标架，其中 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$。令 $e_i = B(\partial_i) = \sum_j b_{ij}\partial_j$，我们便得到 (TV, g) 的正交标架 $\{e_1, \ldots, e_m\}$。由 (4.7)，我们还有

$$e_i \cdot_g \bar{\psi} = B(\partial_i) \cdot_g \bar{\psi} = \overline{\partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi} \quad \text{for } \psi \in \mathbb{S}_m.$$

现在，旋量场 $\varphi \in \Gamma(\mathbb{S}(U))$ 通过同构 (4.7) 对应于旋量 $\bar{\varphi} \in \Gamma(\mathbb{S}(V))$；对于表示这种对应关系的各种旋量场，我们将沿用这一记号。特别地，由于旋量 $\varphi_\varepsilon \in \Gamma(\mathbb{S}(U))$ 在 U 中具有紧支集，它们对应于在 V 中具有紧支集的旋量 $\bar{\varphi}_\varepsilon \in \Gamma(\mathbb{S}(M))$。

下文中，为简化记号，我们分别用 ∇ 和 ∇表示 $(TU, \mathrm{g}_{\mathbb{R}^m})$ 和 (TV, g) 上的 Levi-Civita 联络，以及这些联络在旋量丛 $\mathbb{S}(U)$ 和 $\mathbb{S}(V)$ 上的自然提升。滥用记号，我们分别用 D 和 D 表示作用于 $\Gamma(\mathbb{S}(U))$ 和 $\Gamma(\mathbb{S}(V))$ 上的狄拉克算子。由 [7, 命题 3.2] 可得

$$\bar{D}\bar{\varphi}_\varepsilon = \overline{D\varphi_\varepsilon} + W \cdot_g \bar{\varphi}_\varepsilon + X \cdot_g \bar{\varphi}_\varepsilon + \sum_{i,j}(b_{ij} - \delta_{ij})\overline{\partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \nabla_{\partial_j}\varphi_\varepsilon} \tag{4.8}$$

其中 $W \in \Gamma(Cl(TV))$ 和 $X \in \Gamma(TV)$ 定义为

$$W = \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j,k \\ i\neq j\neq k\neq i}} \sum_{\alpha,\beta} b_{i\alpha}(\partial_\alpha b_{j\beta}) b^{-1}_{\beta k} e_i \cdot_g e_j \cdot_g e_k,$$

and

$$X = \frac{1}{4} \sum_{i,k} \left(\bar{\Gamma}^i_{ik} - \bar{\Gamma}^k_{ii}\right) e_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \bar{\Gamma}^i_{ik} e_k;$$

此处，b^{-1}_{ij}表示 B的逆矩阵，且 $\bar{\Gamma}^k_{ij} := \mathrm{g}(\bar{\nabla}_{e_i} e_j, e_k)$。下文中，为方便记号起见，我们将 $x = (x_1, \ldots, x_m) \in U \subset \mathbb{R}^m$ 与$\sum_i x_i e_i \in T_yM$ 等同。

正如 [17, 30], 中所述，在 y的邻域内，度量g及其行列式有如下展开:

$$g_{ij}(\exp_y x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}\mathcal{R}_y(e_i, x, x, e_j) + O(|x|^3), \tag{4.9}$$

$$\sqrt{\det g}(\exp_y x) = 1 - \frac{1}{6}\mathrm{Ric}_y(x, x) + O(|x|^3) \tag{4.10}$$

其中

$$\mathcal{R}(e_i, e_j, e_k, e_l) = g(\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k, e_l) - g(\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k, e_l) - g(\nabla_{[e_i,e_j]}e_k, e_l)$$

是黎曼曲率张量，$\mathrm{Ric}(v, w) = \sum_{i=1}^m \mathcal{R}(e_i, v, w, e_i)$ 是里奇曲率。注意到 $B = (G^{-1})^{\frac{1}{2}}$, 如 [7], 所示，我们有

$$b_{ij} = \delta_{ij} + \frac{1}{6}\mathcal{R}_y(e_i, x, x, e_j) + O(|x|^3), \quad W = O(|x|^3) \quad \text{and} \quad X = O(|x|). \tag{4.11}$$

本小节的主要结果是以下两个引理。

引理 4.5. 设 $\bar{\varphi}_\varepsilon$ 如 (4.6) 中所示，则当 $\varepsilon \to 0$时， $\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon)\|_\varepsilon \le O(\varepsilon^2)$。

证明. 根据 (4.6) 中 φ_ε 的定义，并结合 (4.8)，容易验证

$$\varepsilon D\varphi_\varepsilon = \varepsilon\nabla\eta \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi_\varepsilon + \varepsilon\eta D\psi_\varepsilon = \varepsilon\nabla\eta \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi_\varepsilon - a\eta\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{\mathbb{R}^m} \psi_\varepsilon + \eta f(|\psi_\varepsilon|)\psi_\varepsilon \tag{4.12}$$

and

$$\varepsilon\bar{D}\bar{\varphi}_\varepsilon + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_g \bar{\varphi}_\varepsilon - f(|\bar{\varphi}_\varepsilon|)\bar{\varphi}_\varepsilon = J_1 + J_2 + \cdots + J_6 \in \mathcal{H}^*$$

其中

$$\begin{aligned}
J_1 &= \varepsilon\overline{\nabla\eta \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi_\varepsilon}, \\
J_2 &= \eta \cdot \big(f(|\bar{\psi}_\varepsilon|) - f(|\bar{\varphi}_\varepsilon|)\big)\bar{\psi}_\varepsilon, \\
J_3 &= \varepsilon\eta W \cdot_g \bar{\psi}_\varepsilon, \\
J_4 &= \varepsilon\eta X \cdot_g \bar{\psi}_\varepsilon, \\
J_5 &= \varepsilon\eta \sum_{i,j}(b_{ij} - \delta_{ij})\overline{\partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \nabla_{\partial_j}\psi_\varepsilon}, \\
J_6 &= \varepsilon \sum_{i,j}(b_{ij} - \delta_{ij})\overline{\partial_j\eta\partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

在以下估计中，我们利用 η 的支集包含于 $B_{2r}(0) \subset \mathbb{R}^m$。利用引理 4.4 中的指数衰减以及 (4.9)-(4.11)，可得:

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{R}} &\lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2r}(y)} \big|\varepsilon\overline{\nabla\eta \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \psi_\varepsilon}\big|^2 d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{r\le|x|\le 2r} \big|\varepsilon\psi_\varepsilon\big|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \varepsilon\bigg(\int_{\frac{r}{\varepsilon}\le|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} \big|\psi\big|^2 dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon\exp\Big(-\frac{c\cdot r}{\varepsilon}\Big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|J_2\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{R}} &\lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2r}(y)\setminus B_r(y)} \left|\bar{\psi}_\varepsilon\right|^2 d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2r}(y)\setminus B_r(y)} \left|\bar{\psi}_\varepsilon\right|^p d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\lesssim \left(\int_{\frac{r}{\varepsilon}\le|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} |\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\frac{r}{\varepsilon}\le|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} |\psi|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \lesssim \exp\Big(-\frac{c\cdot r}{\varepsilon}\Big), \\
\|J_3\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{R}} &\lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2r}(y)} \left|\varepsilon W\cdot_g \bar{\psi}_\varepsilon\right|^2 d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{|x|\le 2r} \big(\varepsilon|x|^3|\psi_\varepsilon|\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \varepsilon^4\left(\int_{|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} |x|^6|\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^4, \\
\|J_4\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{R}} &\lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2r}(y)} \left|\varepsilon X\cdot_g \bar{\psi}_\varepsilon\right|^2 d\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{|x|\le 2r} \big(\varepsilon|x||\psi_\varepsilon|\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim \varepsilon^2\left(\int_{|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} |x|^2|\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^2, \\
\|J_5\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{R}} &\lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{|x|\le 2r} \big(\varepsilon|x|^2|\nabla\psi_\varepsilon|\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^2\left(\int_{|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} |x|^4|\nabla\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^2, \\
\|J_6\|_{\mathcal{H}\to\mathbb{R}} &\lesssim \left(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{|x|\le 2r} \big(\varepsilon|x|^2|\psi_\varepsilon|\big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^3\left(\int_{|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}} |x|^4|\psi|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \varepsilon^3.
\end{aligned}
$$

这里，在对 J_1 和 J_2进行估计时，常数 $c>0$ 来自引理 4.4 中的指数衰减。由此最终得到 $\|\mathcal{L}'_\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon)\|_\varepsilon \le O(\varepsilon^2)$。 □

我们定义泛函 Θ： $M\times\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ 如下

$$
\begin{aligned}
\Theta(y,\psi) = \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_y(x,x)\Big(\frac{1}{2}f(|\psi|)|\psi|^2 - F(|\psi|)\Big)dx \\
+ \frac{1}{12}\sum_{i,j}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{R}_y(e_i,x,x,e_j)(\nabla_{\partial_j}\psi, \partial_i\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi)dx
\end{aligned}
$$

于是我们有以下

引理 4.6. 设 μ_0 为式 (4.1) 的基态能量（定义见 (4.3)）， $\bar{\varphi}_\varepsilon$ 定义见 (4.6)，则

$$
\mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon) = \mu_0 - \varepsilon^2\Theta(y,\psi) + o(\varepsilon^2)
$$

当 $\varepsilon\to 0$时。

证明. 再次由 (4.8) 和 (4.12)，我们得到

$$
\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M (\varepsilon\bar{D}\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{\varphi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g + \frac{a}{\varepsilon^m}\int_M (\omega_{\mathbb{C}}\cdot_g\bar{\varphi}_\varepsilon, \bar{\varphi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g = I_1+I_2+\cdots+I_7,
$$

其中

$$
I_1 = \frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M \eta\cdot(\varepsilon\overline{\nabla\eta\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi_\varepsilon}, \bar{\psi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g,
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M f(|\bar{\varphi}_\varepsilon|)|\bar{\varphi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g,\\
I_3 &= \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \eta^2\big(f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)-f(|\bar{\varphi}_\varepsilon|)\big)|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g,\\
I_4 &= \frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M \eta^2\cdot(\varepsilon W\cdot_g\bar{\psi}_\varepsilon,\bar{\psi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g,\\
I_5 &= \frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M \eta^2\cdot(\varepsilon X\cdot_g\bar{\psi}_\varepsilon,\bar{\psi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g,\\
I_6 &= \sum_{i,j}\frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M \eta^2(b_{ij}-\delta_{ij})(\varepsilon\overline{\partial_i\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\nabla_{\partial_j}\psi_\varepsilon},\bar{\psi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g,\\
I_7 &= \sum_{i,j}\frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M \eta\partial_j\eta\cdot(b_{ij}-\delta_{ij})(\varepsilon\overline{\partial_i\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi_\varepsilon},\bar{\psi}_\varepsilon)d\mathrm{vol}_g.
\end{aligned}
$$

¯与引理 4.5 中的论证类似，我们将利用 (4.9)-(4.11) 以及这一事实 $(\overline{\nabla\eta\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi_\varepsilon},\psi_\varepsilon)\in i\mathbb{R}$ 来得到

$$
\begin{aligned}
&I_1 = 0,\\
&I_2 = \frac{1}{\varepsilon^m}\int_{|x|\le r} f(|\psi_\varepsilon|)|\psi_\varepsilon|^2dx - \frac{1}{6\,\varepsilon^m}\int_{|x|\le r} f(|\psi_\varepsilon|)|\psi_\varepsilon|^2\mathbf{Ric}_y(x,x)dx + o(\varepsilon^2)\\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi|)|\psi|^2dx - \frac{\varepsilon^2}{6}\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi|)|\psi|^2\mathbf{Ric}_y(x,x)dx + o(\varepsilon^2),\\
&|I_3| \lesssim \frac{1}{\varepsilon^m}\int_{r\le|x|\le 2r}|\psi_\varepsilon|^2dx + \frac{1}{\varepsilon^m}\int_{r\le|x|\le 2r}|\psi_\varepsilon|^p dx\\
&\quad \lesssim \int_{\frac{r}{\varepsilon}\le|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}}|\psi|^2dx + \int_{\frac{r}{\varepsilon}\le|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}}|\psi|^p dx \lesssim o(\varepsilon^2),\\
&|I_4| \lesssim \frac{1}{\varepsilon^m}\int_{|x|\le 2r}\varepsilon|x|^3|\psi_\varepsilon|^2dx \lesssim \varepsilon^4\int_{|x|\le\frac{2r}{\varepsilon}}|x|^3|\psi|^2dx \lesssim \varepsilon^4,\\
&I_5 = 0,\\
&I_6 = \sum_{i,j}\frac{\mathrm{Re}}{6\,\varepsilon^m}\int_{|x|\le r}\mathcal{R}_y(e_i,x,x,e_j)(\varepsilon\partial_i\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\nabla_{\partial_j}\psi_\varepsilon,\psi_\varepsilon)dx + o(\varepsilon^2)\\
&\quad = \frac{\varepsilon^2}{6}\sum_{i,j}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{R}_y(e_i,x,x,e_j)(\partial_i\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\nabla_{\partial_j}\psi,\psi)dx + o(\varepsilon^2)\\
&\quad = -\frac{\varepsilon^2}{6}\sum_{i,j}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{R}_y(e_i,x,x,e_j)(\nabla_{\partial_j}\psi,\partial_i\cdot_{g_{\mathbb{R}^m}}\psi)dx + o(\varepsilon^2),\\
&I_7 = 0.
\end{aligned}
$$

综合以上所有估计以及事实 $\psi \in \mathcal{B}$，我们推得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\varphi}_\varepsilon) &= \frac{I_1 + I_2 + \cdots + I_7}{2} - \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M F(|\bar{\varphi}_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m} f(|\psi|)|\psi|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^m} F(|\psi|)dx - \varepsilon^2\Theta(y,\psi) + o(\varepsilon^2) \\ &= \mu_0 - \varepsilon^2\Theta(y,\psi) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

如所需。 □

4.3 集中剖面的刻画

由命题 3.4 和 (3.14)，我们推得

$$\mu_\varepsilon = \inf_{u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}}\max_{\psi\in\mathbb{R}u\oplus\mathcal{H}_\varepsilon^-}\mathcal{L}_\varepsilon(\psi) = \inf_{u\in\mathcal{H}_\varepsilon^+\setminus\{0\}}\max_{t>0} I_\varepsilon(tu) = \inf_{u\in\mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(u)$$

¯是一个临界值。与命题 3.4 中一样，我们取 ψ_ε 为 $\mathcal{L}_\varepsilon$ 的相应临界点。然后，正如 (3.11) 中所述，我们得到

$$\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{1}{2}f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 - F(|\bar{\psi}_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g = \mu_\varepsilon \geq \tau_0 \tag{4.13}$$

对某个 $\tau_0 > 0$ 成立。在下文中，对于任意 $\xi \in M$ 和 $r > 0$，$B_r(\xi) \subset M$ 表示相对于度量 g、半径为 r 的球。

引理 4.7。存在 $y_\varepsilon \in M$、r_0、$\delta_0 > 0$，使得

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{\varepsilon r_0}(y_\varepsilon)}|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g \geq \delta_0.$$

证明。反设，对于任意 $r > 0$

$$\sup_{\xi\in M}\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2\varepsilon r}(\xi)}|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g \to 0 \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{4.14}$$

对于每个 $\xi \in M$，我们选取一个光滑实值截断函数 $\beta_{\xi,\varepsilon} \equiv 1$ 定义在 $B_{\varepsilon r}(\xi)$ 上，且支集 $\beta_{\xi,\varepsilon} \subset B_{2\varepsilon r}(\xi)$。于是，对于 $s \in (0,1)$，我们考虑 $q_s = 2 + (m^* - 2)s \in (2, m^*)$，并且有

$$\int_{B_{2\varepsilon r}(\xi)}|\beta_{\xi,\varepsilon}\bar{\psi}_\varepsilon|^{q_s} d\mathrm{vol}_g \leq \Big(\int_{B_{2\varepsilon r}(\xi)}|\beta_{\xi,\varepsilon}\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g\Big)^{1-s}\Big(\int_{B_{2\varepsilon r}(\xi)}|\beta_{\xi,\varepsilon}\bar{\psi}_\varepsilon|^{\frac{2m}{m-1}} d\mathrm{vol}_g\Big)^s.$$

取 $s = \frac{2}{m^*}$，由引理 3.1 可得

$$\Big(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_{2\varepsilon r}(\xi)}|\beta_{\xi,\varepsilon}\bar{\psi}_\varepsilon|^{m^*} d\mathrm{vol}_g\Big)^s \leq C\|\beta_{\xi,\varepsilon}\bar{\psi}_\varepsilon\|_\varepsilon^2.$$

现在用半径为 εr 的球覆盖 M，使得任意点 $\xi \in M$ 至多被 K_M 个球覆盖，其中 K_M 不依赖于 ε。事实上，可以取 $K_M = 1 + dimM$。因此我们有

$$\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M |\bar{\psi}_\varepsilon|^{q_s} d\mathrm{vol}_g \le C \cdot K_M \Big(\sup_{\xi\in M} \int_{B_{2\varepsilon r}(\xi)} |\beta_{\xi,\varepsilon}\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g \Big)^{1-s} \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_\varepsilon^2.$$

由于 $\|\psi_\varepsilon\|_\varepsilon$ 有界，由 (4.14) 可得 $|\psi_\varepsilon|_{q_s,\ \varepsilon} \to 0$；又由于 $2 < q_s < m^*$，我们容易看出，对于所有 $q \in (2, m^*)$，都有 $|\psi_\varepsilon|_{q,\ \varepsilon} \to 0$，这与 (4.13) 矛盾 □

引理 4.8. $\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon = \mu_0$。

证明. 根据推论 3.8、引理 4.5 和 4.6 中得到的估计，我们只需证明

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon \ge \mu_0.$$

为此，取一个序列 $\{y_\varepsilon\} \subset M$ 和常数 r_0、$\delta_0 > 0$，使得引理 4.7 成立。任取 $0 < r < \mathrm{inj}(M)/2$，令 $\beta_\varepsilon \in C^\infty(M, [0,1])$ 满足 $\beta_\varepsilon \equiv 1$ 于 $B_r(y_\varepsilon)$ 上，且 $\mathrm{supp}\,\beta_\varepsilon \subset B_{2r}(y_\varepsilon)$。通过旋量丛 $\mathbb{S}(B_r(y_\varepsilon)) \to \mathbb{S}(B_r(0))$ 之间的 Bourguignon-Gauduchon 平凡化以及 $\mathbb{R}^m$ 上的重标度 $x \mapsto \frac{x}{\varepsilon}$，旋量场 $\beta_\varepsilon\psi_\varepsilon$ 对应于 $B_{2r/\varepsilon}(0) \subset \mathbb{R}^m$ 上的旋量场 $z_\varepsilon(\cdot)$。

由于相对于范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$，$\beta_\varepsilon\psi_\varepsilon$ 在 $\mathcal{H}$ 中有界，因此很容易看出，对于任意 $R > 0$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，z_ε 在 $W^{\frac{1}{2},2}(B_R(0), \tilde{\mathbb{S}}(B_R(0)))$ 中有界。由此可知

$$\int_{|x|\le \frac{r}{\varepsilon}} |z_\varepsilon|^{m^*} dx \lesssim \frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_r(y_\varepsilon)} |\bar{\psi}_\varepsilon|^{m^*} d\mathrm{vol}_g \lesssim \|\bar{\psi}_\varepsilon\|_\varepsilon < \infty$$

对所有充分小的 ε，可知存在 $z_0 \in L^{m^*}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m)) \cap {W^{\frac{1}{2}}_{,loc}}^2(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$，使得 $z_\varepsilon \rightharpoonup z_0$ 在 ${W^{\frac{1}{2}}_{,loc}}^2(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$ 中弱收敛，且对 $2 \le q < \frac{2m}{m-1}$，$z_\varepsilon \to z_0$ 属于 $L^q_{loc}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$。

设 $\varphi \in W^{\frac{1}{2},2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$ 满足 $\mathrm{supp}\ \varphi$ 紧，即存在某个较大的 $R > 0$，使得 $\mathrm{supp}\ \varphi \subset B^0_R$。那么，由 (4.8) 和 (4.9)-(4.11) 的类似恒等式可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \big(\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0 + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0 - f(|z_0|)z_0, \varphi\big) dx \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathrm{supp}\,\varphi} \big(\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon - f(|z_\varepsilon|)z_\varepsilon, \varphi\big) d\mathrm{vol}_{g_{\Theta_\varepsilon}} \\
&\quad = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^m} \int_{B_{\varepsilon R}(\xi_\varepsilon)} \big(\varepsilon \tilde{D}_g \psi_\varepsilon + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_g \psi_\varepsilon - f(|\psi_\varepsilon|)\psi_\varepsilon, \bar{\varphi}_\varepsilon\big) d\mathrm{vol}_g \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

其中 $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$，而 $\bar{\varphi}_\varepsilon$ 是通过 Bourguignon-Gauduchon 平凡化在 M 上定义的旋量。因此 z_0 满足

$$\tilde{D}_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0 + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0 = f(|z_0|)z_0 \quad \text{on } \mathbb{R}^m. \tag{4.15}$$

由（f_1）-（f_3）以及椭圆正则性可得 $D_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0 + a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0 \in L^{\frac{m^*}{m^*-1}}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$。此外，结合索伯列夫嵌入 $L^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m)) \hookrightarrow W^{-\frac{1}{2},\ 2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$，我们得到 $z_0 \in W^{\frac{1}{2},\ 2}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$。

现在，由引理 4.7 可知， z_0 是方程（4.15）的一个非平凡解。根据（4.13），我们得出

$$\begin{aligned}\liminf_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\psi}_\varepsilon) &= \liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{1}{2}f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 - F(|\bar{\psi}_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g \\ &\geq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_{B_R(0)}\frac{1}{2}f(|z_\varepsilon|)|z_\varepsilon|^2 - F(|z_\varepsilon|)dx \\ &\geq \int_{B_R(0)}\frac{1}{2}f(|z_0|)|z_0|^2 - F(|z_0|)dx\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了法图引理。由于 $R>0$ 的任意性，结合 (4.3)，我们得到

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon = \liminf_{\varepsilon\to 0}\mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\psi}_\varepsilon) \geq \mu_0.$$

□

现在，我们固定引理 4.7 中的序列 $\{y_\varepsilon\}\subset M$ 和常数 r_0、$\delta_0>0$。不妨取一个子序列，我们还假设当 $\varepsilon\to 0$ 时， $y_\varepsilon\to y_0$ 在 M 中。正如引理 4.8 所述，通过 Bourguignon-Gauduchon 平凡化和重标度，存在极限方程 (4.1) 的一个最小能量解 z_0，它对应于解 ψ_ε 的弱极限 ¯。不失 ¯ 一般性，可以假设 y_ε 是 $|\psi_\varepsilon|$ 的最大点，于是 $z_0\in\mathcal{B}$。

选取 $\beta\in C^\infty(M,[0,1])$，使得 $\beta\equiv 1$ 在 $B_r(y_0)$ 上且 supp $\beta\subset B_{2r}(y_0)$，其中某个 $r<\mathrm{inj}(M)/2$。令 $\phi_\varepsilon=\beta\bar{z}_{0,\varepsilon}$，其中 $z_{0,\varepsilon}(x)=z_0(x/\varepsilon)$，且 $\bar{z}_{0,\varepsilon}$ 是通过 Bourguignon-Gauduchon 平凡化得到的相应旋量场。我们有如下渐近刻画。

¯ ¯引理 4.9。 $\|\psi_\varepsilon-\phi_\varepsilon\|_\varepsilon\to 0$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时。

¯ ¯证明。令 $w_\varepsilon=\psi_\varepsilon-\phi_\varepsilon$，我们得到 $|w_\varepsilon|_{q,\varepsilon}\to 0$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时，对所有 $q\in(2,m^*)$ 都成立（否则，我们¯ ¯可以对 $\{w_\varepsilon\}$ 而非 $\{\psi_\varepsilon\}$ 应用引理 4.7 和 4.8， $\mathcal{L}_\varepsilon$从而得到 $\psi_\varepsilon(\geq 2\mu_0)$，这显然荒谬）。

接下来，我们再回顾一下引理 4.8 的证明，可以看到

$$\mu_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M\frac{1}{2}f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)|\bar{\psi}_\varepsilon|^2-F(|\bar{\psi}_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g=\int_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{2}f(|z_0|)|z_0|^2-F(|z_0|)dx$$

与 (4.4) 类似（但这里我们需要将其移植到流形上），容易看出，对于每个$\epsilon>0$，都存在足够大的 $R>0$，使得

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{M\setminus B_{\varepsilon R}(y_\varepsilon)}\frac{1}{2}f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)|\bar{\psi}_\varepsilon|^2-F(|\bar{\psi}_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g\leq\epsilon. \tag{4.16}$$

由事实 $\mathcal{L}'_\varepsilon(\psi_\varepsilon)=0$ 以及引理 4.5 中的估计，我们得到

$$\left\langle\bar{\psi}_\varepsilon^+,w_\varepsilon^+\right\rangle_\varepsilon+\left\langle\bar{\psi}_\varepsilon^-,w_\varepsilon^-\right\rangle_\varepsilon-\frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)(\bar{\psi}_\varepsilon,w_\varepsilon^+-w_\varepsilon^-)d\mathrm{vol}_g=0$$

and

$$\left\langle\bar{\phi}_\varepsilon^+,w_\varepsilon^+\right\rangle_\varepsilon+\left\langle\bar{\phi}_\varepsilon^-,w_\varepsilon^-\right\rangle_\varepsilon-\frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M f(|\bar{\phi}_\varepsilon|)(\bar{\phi}_\varepsilon,w_\varepsilon^+-w_\varepsilon^-)d\mathrm{vol}_g=o_\varepsilon(1).$$

因此，我们得到

$$\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2 = \frac{\mathrm{Re}}{\varepsilon^m}\int_M f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)(\bar{\psi}_\varepsilon, w_\varepsilon^+ - w_\varepsilon^-)d\mathrm{vol}_g + o_\varepsilon(1), \tag{4.17}$$

其中我们用到了，对所有 $q \in (2, m^*)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$|w_\varepsilon|_{q,\varepsilon} \to 0$。回想一下，根据 (f_1)- (f_3)，对于任意小的 $\delta > 0$，存在 $c_\delta > 0$ 使得 $f(s) \le \delta + c_\delta(f(s)s^2)^{\frac{p-1}{p}}$，且对所有 $s \ge 0$，$F(s) \le \frac{1}{\theta+2}f(s)s^2$。因此，由 (4.16)、(4.17) 和索伯列夫嵌入可得

$$\|w_\varepsilon\|_\varepsilon^2 \le \delta C\|w_\varepsilon\|_\varepsilon + C_\delta\big(\epsilon + o_\varepsilon(1)\big)^{\frac{p-1}{p}}\|w_\varepsilon\|_\varepsilon + o_\varepsilon(1),$$

对于某些常数 C、$C_\delta > 0$。由于 δ、$\epsilon > 0$ 的任意性，可知当 $\varepsilon \to \infty$ 时，$\|w_\varepsilon\|_\varepsilon \to 0$。□

引理 4.10. 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，存在正的常数 C、$c > 0$ 使得

$$|\bar{\psi}_\varepsilon(\xi)| \le C\exp\Big(-\frac{c}{\varepsilon}\,\mathrm{dist}(\xi, y_\varepsilon)\Big), \quad \textit{for all } \xi \in M.$$

证明。我们首先证明族 $\{\psi_\varepsilon\}$ 在 M 上一致衰减，其意义如下：

$$\frac{\mathrm{dist}(\xi, y_\varepsilon)}{\varepsilon} \to \infty \Longrightarrow |\bar{\psi}_\varepsilon(\xi)| \to 0, \quad \text{as } \varepsilon \to 0. \tag{4.18}$$

事实上，由于 ψ_ε 满足 (3.4)，且 $\mathcal{L}_\varepsilon(\psi_\varepsilon) = \mu_\varepsilon \to \mu_0$，根据索伯列夫嵌入和自举论证，我们可得 $\{|\psi_\varepsilon|_\infty\}$ 有界。对 (3.4) 两边应用算子 εD_g，并利用 Lichnerowicz 公式，可得

$$\varepsilon^2\Delta_g\bar{\psi}_\varepsilon - \frac{\varepsilon^2 Scal_g}{4}\bar{\psi}_\varepsilon = (a^2 - f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)^2)\bar{\psi}_\varepsilon - \varepsilon\nabla_g f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)\cdot_g \bar{\psi}_\varepsilon \quad \text{on } M,$$

其中，$\Delta_g = \mathrm{div}_g\nabla_g$ 是拉普拉斯-贝尔特拉米算子，∇_g 是梯度，$Scal_g$ 是关于度量 g 的标量曲率。利用这一事实

$$\Delta_g|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 = 2\,\mathrm{Re}(\Delta_g\bar{\psi}_\varepsilon, \bar{\psi}_\varepsilon) + 2|\nabla_g\bar{\psi}_\varepsilon|^2,$$

我们有

$$\varepsilon^2\Delta_g|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 = 2\Big(a^2 + \frac{\varepsilon^2 Scal_g}{4} - f(|\bar{\psi}_\varepsilon|)^2\Big)|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 + 2|\nabla_g\bar{\psi}_\varepsilon|^2 \ge -C|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 \tag{4.19}$$

对于某个 $C > 0$。然后，根据次解的局部有界性（例如参见[23, 定理 4.1]），可得

$$|\bar{\psi}_\varepsilon(\xi)|^2 \le \frac{C_0}{\varepsilon^m}\int_{B_\varepsilon(\xi)}|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g \tag{4.20}$$

其中 $C_0 > 0$ 与 $\xi \in M$ 和 $\varepsilon > 0$ 无关。

反设存在 $\delta > 0$ 和 $\xi_\varepsilon \in M$，使得 $\mathrm{dist}(\xi_\varepsilon, y_\varepsilon)/\varepsilon \to \infty$ as $\varepsilon \to 0$ 且 $|\psi_\varepsilon(\xi_\varepsilon)| \ge \delta$。由 (4.20) 和引理 4.9，我们推出，当 $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\delta &\le C_0\Big(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_\varepsilon(\xi_\varepsilon)}|\bar{\psi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g\Big)^{\frac{1}{2}} \le C_0|\bar{\psi}_\varepsilon - \bar{\phi}_\varepsilon|_{2,\varepsilon} + C_0\Big(\frac{1}{\varepsilon^m}\int_{B_\varepsilon(\xi_\varepsilon)}|\bar{\phi}_\varepsilon|^2 d\mathrm{vol}_g\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\le o_\varepsilon(1) + C_0\Big(\int_{B_1\left(\frac{\exp_{y_\varepsilon}^{-1}(\xi_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)}|z_0|^2 d\mathrm{vol}_g\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0\end{aligned}$$

¯，这就产生了矛盾；这里的 ϕ_ε 和 z_0 与引理 4.9 中相同。这就证明了 (4.18).

为了观察到指数衰减，根据 (4.18) 和 (4.19)，我们可以取足够大的 $R_0 > 0$，使得

$$\varepsilon^2 \Delta_g |\bar{\psi}_\varepsilon|^2 \geq a^2 |\bar{\psi}_\varepsilon|^2 \quad \text{on } M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon) \tag{4.21}$$

对所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 均成立。我们的下一步策略是使用比较原理，这与平坦情形非常相似（见引理 4.4）：我们先在 $M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon)$ 上构造一列指数衰减的正函数 Γ_ε，然后选取 $C > 0$，使得对于 $\xi \in \partial B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon)$，有 $|\bar{\psi}_\varepsilon(\xi)|^2 \leq C \cdot \bar{\Gamma}(\xi)$；最后，通过令 $U_\varepsilon = |\bar{\psi}_\varepsilon|^2 - C \cdot \bar{\Gamma}$，我们将证明

$$\varepsilon^2 \Delta_g U_\varepsilon \geq a^2 U_\varepsilon, \quad \text{on } M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon).$$

为清晰起见，考虑局部法坐标 $\exp_{y_\varepsilon}^{-1}$: $B_r(\mathbb{R}^m \cong T_{y_\varepsilon} M$ $r <$ M /5 $v_\varepsilon\ x\ = |\bar{\psi}_\varepsilon|^2 \circ$ $_{y_\varepsilon}\ \varepsilon x$ $y_\varepsilon \ \to$),

其中 inj( ) 固定，并令 ( ) exp ( )。于是我们得到

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(\varepsilon x)}} \sum_{j,k} \partial_j \big(g^{jk}(\varepsilon x) \sqrt{\det g(\varepsilon x)} \partial_k v_\varepsilon \big) - a^2 v_\varepsilon \geq 0 \quad \text{for } R_0 \leq |x| \leq \frac{r}{\varepsilon},$$

其中，$(\mathrm{g}^{ij})_{ij} = G^{-1}$ 是度量 g 的逆矩阵。

对于每个较小的 $\varepsilon > 0$，我们取 $\Gamma_\varepsilon(x) = e^{-\frac{a}{2} L_\varepsilon(|x|)}$，其中 L_ε: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个定义为如下形式的函数:

$$L_\varepsilon(\rho) = \begin{cases} \rho & 0 \leq \rho < \dfrac{r}{\varepsilon}, \\ \dfrac{1}{2}\Big(\rho + \dfrac{r}{\varepsilon} \sin\big(\dfrac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big)\Big) + \dfrac{r}{2\varepsilon} & \dfrac{r}{\varepsilon} \leq \rho < \dfrac{\pi+1}{\varepsilon} r, \\ \dfrac{\pi+2}{2\varepsilon} r & \rho \geq \dfrac{\pi+1}{\varepsilon} r. \end{cases} \tag{4.22}$$

根据 上述定义，$\Gamma_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ 是球对称的，因此满足

$$\Delta \Gamma_\varepsilon - \frac{a^2}{4} \Gamma_\varepsilon = -\frac{a}{2} e^{-\frac{a}{2} L_\varepsilon(\rho)} \Big(L_\varepsilon''(\rho) - \frac{a}{2} (L_\varepsilon'(\rho))^2 + \frac{m-1}{\rho} L_\varepsilon'(\rho) + \frac{a}{2} \Big) \quad \text{for } \rho = |x| > 0.$$

现在很容易看出

$$\Delta \Gamma_\varepsilon - \frac{a^2}{4} \Gamma_\varepsilon = \begin{cases} -\dfrac{a(m-1)}{2\rho} e^{-\frac{a}{2} L_\varepsilon(\rho)} & 0 \leq \rho < \dfrac{r}{\varepsilon}, \\ -\dfrac{a^2}{4} e^{-\frac{a}{2} L_\varepsilon(\rho)} & \rho \geq \dfrac{\pi+1}{\varepsilon} r. \end{cases}$$

对于 $\frac{r}{\varepsilon} \leq \rho < \frac{\pi+1}{\varepsilon} r$，通过直接计算可得

$$\begin{aligned} & L_\varepsilon''(\rho) - \frac{a}{2} (L_\varepsilon'(\rho))^2 + \frac{m-1}{\rho} L_\varepsilon'(\rho) + \frac{a}{2} \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a}{8} \Big(1 + \cos\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big)\Big)^2 - \frac{\varepsilon}{2r} \sin\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big) + \frac{m-1}{2\rho} \Big(1 + \cos\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big)\Big) \\ &\geq \frac{a}{2} - \frac{a}{8} \Big(1 + \cos\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big)\Big)^2 - \frac{\varepsilon}{2r} \sin\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big) + \frac{\varepsilon}{2(\pi+1)r} \Big(1 + \cos\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big)\Big) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a}{8} \Big(1 + \cos\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1\big)\Big)^2 - \frac{\varepsilon\sqrt{(\pi+1)^2+1}}{2(\pi+1)r} \sin\big(\frac{\varepsilon}{r}\rho - 1 - \vartheta\big) + \frac{\varepsilon}{2(\pi+1)r} \end{aligned}$$

其中 $\vartheta = \arcsin \frac{1}{\sqrt{(\pi+1)^2+1}} \in (0, \frac{\pi}{2})$。因此，当 $\varepsilon > 0$ 较小时，我们可以推导出

$$\Delta\Gamma_\varepsilon - \frac{a^2}{4}\Gamma_\varepsilon < 0 \quad \text{on } \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

此外，关于 Γ_ε 的梯度，我们有

$$\frac{|\nabla\Gamma_\varepsilon(x)|}{\Gamma_\varepsilon(x)} \le \frac{a}{2} \quad \text{for all } |x| > 0 \text{ and } \varepsilon > 0.$$

因此，必要时取更小的 r，由（4.9）可得

$$\frac{1}{\sqrt{\det g(\varepsilon x)}} \sum_{j,k} \partial_j \big(g^{jk}(\varepsilon x) \sqrt{\det g(\varepsilon x)} \partial_k \Gamma_\varepsilon \big) \le \Delta\Gamma_\varepsilon + o_r(1)\big(|\Delta\Gamma_\varepsilon| + |\nabla\Gamma_\varepsilon|\big) \le a^2\Gamma_\varepsilon$$

对于 $R_0 \le |x| \le r/\varepsilon$。

接下来，利用（4.18），我们可以选取 $C_0 > 0$，使得对于 $|x| = R_0$且 ε 充分小时，$v_\varepsilon(x) \le C_0 \cdot \Gamma_\varepsilon(x) = C_0 e^{-\frac{a}{2}R_0}$。借助黎曼正规坐标，我们可以通过引入以下定义，将函数 Γ_ε 移植到 $M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon)$上：

$$\bar{\Gamma}_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \Gamma_\varepsilon\Big(\dfrac{\exp_{y_\varepsilon}^{-1}(\xi)}{\varepsilon}\Big) & \xi \in B_{5r}(y_\varepsilon) \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon), \\ e^{-\frac{a(\pi+2)}{4\varepsilon}r} & M \setminus B_{5r}(y_\varepsilon). \end{cases} \tag{4.23}$$

于是，由（4.22）可知，$\bar{\Gamma}_\varepsilon > 0$ 是 $M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon)$上的一个定义良好的 C^2-光滑函数，特别地，

$$\varepsilon^2 \Delta_g \bar{\Gamma}_\varepsilon - a^2 \bar{\Gamma}_\varepsilon \le 0 \quad \text{on } M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon).$$

令 $U_\varepsilon = |\bar{\psi}_\varepsilon|^2 - C_0 \cdot \bar{\Gamma}_\varepsilon(x)$，由（4.21）可知

$$\varepsilon^2 \Delta_g U_\varepsilon - a^2 U_\varepsilon \ge 0 \quad \text{on } M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon).$$

而且，由比较原理可标准地证明 $U_\varepsilon \le 0$ on $M \setminus B_{\varepsilon R_0}(y_\varepsilon)$。

回到定义 (4.23)，我们看到

$$\bar{\Gamma}_\varepsilon(\xi) \le \exp\Big(-\frac{c}{\varepsilon} \operatorname{dist}(\xi, y_\varepsilon) \Big) \quad \text{for } \xi \in B_r(y_\varepsilon).$$

and

$$\bar{\Gamma}_\varepsilon(\xi) \le \exp\Big(-\frac{c \cdot r}{\varepsilon} \Big) \quad \text{for } \xi \in M \setminus B_r(y_\varepsilon).$$

令 $d_M = \sup\{\operatorname{dist}(\xi_1, \xi_2) : \xi_1, \xi_2 \in M\}$，容易看出 $d_M \ge \operatorname{inj}(M)$，因此

$$\bar{\Gamma}_\varepsilon(\xi) \le \exp\Big(-\frac{c \cdot r}{\varepsilon \cdot d_M} \operatorname{dist}(\xi, y_\varepsilon) \Big) \quad \text{for all } \xi \in M.$$

¯只需取平方根，即可得到 $|\psi_\varepsilon|$ 的指数衰减。 □

回顾引理 4.8 的证明，我们取了 $\beta_\varepsilon \in C^\infty(M,[0,1])$，使得 $\beta_\varepsilon \equiv 1$在 $B_r(y_\varepsilon)$ 上，且 supp $\beta_\varepsilon \subset B_{2r}(y_\varepsilon)$，其中某个 $r < \mathrm{inj}(M)$。通过旋量丛 $\mathbb{S}(B_r(y_\varepsilon)) \to \mathbb{S}(B_r(0))$ 之间的 Bourguignon-Gauduchon 平凡化，以及在 $\mathbb{R}^m$ 上的重标度 $x \mapsto \frac{x}{\varepsilon}$，旋量场 $\beta_\varepsilon\psi_\varepsilon$ 对应于 $B_{2r/\varepsilon}(0) \subset \mathbb{R}^m$ 上的旋量场 z_ε。并且，由引理~4.9 和自举论证，z_ε 在 $W^{1,q}(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}(\mathbb{R}^m))$ 中收敛到某个 $z_0 \in \mathcal{B}$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，对 $q \geq 2$成立。得益于 ψ_ε的快速衰减率，结合引理 4.8，我们得到临界水平 μ_ε的以下精细下界估计。

~引理 4.11. 设 y_ε 是 $|\psi_\varepsilon|$的最大值点。必要时取子序列，假设$y_\varepsilon \to y_0 \in M$ 关于黎曼度量 g 满足 $\varepsilon \to 0$。那么

$$\mu_\varepsilon \geq \mu_0 - \varepsilon^2\Theta(y_0, z_0) + o(\varepsilon^2).$$

~证明. 注意到 $\mathcal{L}'_\varepsilon(\psi_\varepsilon) = 0$并且

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(\bar\psi_\varepsilon) - \mathcal{L}_\varepsilon(\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon) = &\frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{1}{2}f(|\bar\psi_\varepsilon|)|\bar\psi_\varepsilon|^2 - F(|\bar\psi_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g \\ &- \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{\beta_\varepsilon^2}{2}f(|\bar\psi_\varepsilon|)|\bar\psi_\varepsilon|^2 - F(|\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g.\end{aligned}$$

由 (f_1)-(f_2)，对于每个固定的 $s \geq 0$，我们推得函数 $t \mapsto \frac{t^2}{2}f(s)s^2 - F(ts)$ 关于 $t \in [0,1]$ 单调不减。因此，由 $\beta_\varepsilon(\xi) \in [0,1]$ 对所有 $\xi \in M$ 成立，可容易看出

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon) \leq \mathcal{L}_\varepsilon(\bar\psi_\varepsilon) = \mu_\varepsilon.$$

~另一方面，由于 $\beta_\varepsilon\psi_\varepsilon$ 通过 Bourguignon-Gauduchon 平凡化和平凡化重标度，对应于 $B_{2r/\varepsilon}(0) \subset \mathbb{R}^m$ 上的旋量场 z_ε，通过对 $\beta_\varepsilon\psi_\varepsilon$ 和 z_ε展开 (4.8) 中的关系，我们得到如下旋量对应关系

$$\varepsilon\bar D(\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon) \longleftrightarrow \overline{Dz_\varepsilon} + \varepsilon^3\overline{W \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon} + \varepsilon\overline{X \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon} + \varepsilon^2\sum_{i,j}(b_{ij} - \delta_{ij})\overline{\partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} \nabla_{\partial_j} z_\varepsilon}.$$

现在，我们可以 采用与引理 4.5 和 4.6 的证明类似的论证，可得到 $\Phi'(z_\varepsilon) = o(\varepsilon)$ a nd

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon(\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^m}\int_M \frac{1}{2}(\varepsilon\bar D(\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon), \beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon) + \frac{a}{2}(\omega_{\mathbb{C}} \cdot_g \beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon, \beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon) - F(|\beta_\varepsilon\bar\psi_\varepsilon|)d\mathrm{vol}_g \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{2}(Dz_\varepsilon, z_\varepsilon) + \frac{a}{2}(\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon, z_\varepsilon) - F(|z_\varepsilon|)dx \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{12}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_{y_\varepsilon}(x,x)(Dz_\varepsilon, z_\varepsilon)dx - \frac{a\,\varepsilon^2}{12}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_{y_\varepsilon}(x,x)(\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon, z_\varepsilon)dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{6}\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_{y_\varepsilon}(x,x)F(|z_\varepsilon|)dx \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{12}\sum_{i,j}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{R}_{y_\varepsilon}(e_i,x,x,e_j)(\nabla_{\partial_j} z_\varepsilon, \partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon)dx + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

由于 $y_\varepsilon \to y_0$ 和 $z_\varepsilon \to z_0$ 属于 $W^{1,q}(\mathbb{R}^m, \tilde{\mathbb{S}}(\mathbb{R}^m))$，当 $\varepsilon \to 0$ 时，对于 $q \geq 2$，并且由于 $|z_\varepsilon|$ 呈指数衰减，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_{y_\varepsilon}(x,x)\big[(Dz_\varepsilon, z_\varepsilon) + (a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon, z_\varepsilon) - 2F(|z_\varepsilon|)\big]dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_{y_0}(x,x)\big[(Dz_0, z_0) + (a\omega_{\mathbb{C}} \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0, z_0) - 2F(|z_0|)\big]dx + o_\varepsilon(1) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{Ric}_{y_0}(x,x)\big[f(|z_0|)|z_0|^2 - 2F(|z_0|)\big]dx + o_\varepsilon(1)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{R}_{y_\varepsilon}(e_i, x, x, e_j)(\nabla_{\partial_j} z_\varepsilon, \partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_\varepsilon)dx \\
&\quad = \sum_{i,j} \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{R}_{y_0}(e_i, x, x, e_j)(\nabla_{\partial_j} z_0, \partial_i \cdot_{g_{\mathbb{R}^m}} z_0)dx + o_\varepsilon(1)
\end{aligned}$$

注意到，根据引理 4.3 (4)，我们还可以得到

$$\mu_0 = \inf_{u \in \mathcal{E}^+ \setminus \{0\}} \max_{t>0} J(tu) \leq \Phi(z_\varepsilon) + O(\|\Phi'(z_\varepsilon)\|^2).$$

因此，直接可得

$$\mu_\varepsilon \geq \mathcal{L}_\varepsilon(\beta_\varepsilon \bar{\psi}_\varepsilon) \geq \mu_0 - \varepsilon^2 \Theta(y_0, z_0) + o(\varepsilon^2).$$

□

主定理的证明。首先，由推论 3.8、引理 4.5 和 4.6 可知

$$\mu_\varepsilon = \mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\psi}_\varepsilon) \leq \mu_0 - \varepsilon^2 \max_{(y,\psi) \in M \times \mathcal{B}} \Theta(y, \psi) + o(\varepsilon^2)$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时。因此，根据引理 4.11 并取极限 $\varepsilon \to 0$，我们有

$$\Theta(y_0, z_0) \geq \max_{(y,\psi) \in M \times \mathcal{B}} \Theta(y, \psi).$$

因此，我们得出，在 $M \times \mathcal{B}$ 中，$(y_\varepsilon, z_\varepsilon) \to (y_0, z_0)$，使得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Theta(y_\varepsilon, z_\varepsilon) = \max_{(y,\psi) \in M \times \mathcal{B}} \Theta(y, \psi),$$

and

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\bar{\psi}_\varepsilon) = \mu_0 - \varepsilon^2 \max_{(y,\psi) \in M \times \mathcal{B}} \Theta(y, \psi) + o(\varepsilon^2).$$

在二维情形中，里奇张量决定了整个曲率。具体而言，我们有

$$\mathrm{Ric}(x,x) = \mathcal{R}(e_1, x, x, e_1) + \mathcal{R}(e_2, x, x, e_2) = \mathcal{R}(e_1, e_2, e_2, e_1)|x|^2$$

and

$$Scal_g = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} \mathcal{R}(e_j, e_i, e_i, e_j) = 2\mathcal{R}(e_1, e_2, e_2, e_1).$$

因此，注意到　曲面的标量曲率是高斯曲率的两倍，我们有　　e

$$\Theta(y,\psi)=\frac{K_g(y)}{6}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{2}f(|\psi|)|\psi|^2-F(|\psi|)\Big)|x|^2dx \\ +\frac{K_g(y)}{12}\,\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2}\big((x_2\nabla_{\partial_1}-x_1\nabla_{\partial_2})\psi,(x_2\partial_1-x_1\partial_2)\cdot_{g_{\mathbb{R}^2}}\psi\big)dx,$$

其中，K_g 表示（M, g）的高斯曲率。

最后，将 $f(|\psi|)|\psi|^2=|\psi|^{n^*}$ 和 $F(|\psi|)=\frac{1}{n^*}|\psi|^{n^*}$ 代入上述公式，即可完成证明。

□

致谢。作者谨向匿名审稿人致以诚挚谢意，感谢其积极的评论和建设性的建议。

参考文献

[1] R. Adams，《索伯列夫空间》，学术出版社，纽约，1975年。

[2] H. Amann，鞍点与微分方程的多重解，Math. Z. 169 (1979)，第2期，127-166。[3] B. Ammann，共形自旋几何中的一个变分问题，教授资格论文，汉堡大学，2003年。[4] B. Ammann，第一个正狄拉克特征值的自旋共形下界，Differ. Geom. Appl. 18 (2003)，21-32。[5] B. Ammann，自旋共形类中的最小狄拉克特征值与恒定平均曲率浸入，Comm. Anal. Geom. 17 (2009)，第3期，429-479。[6] B. Ammann、M. Dahl、A. Hermann、E. Humbert，质量端同态、手术与扰动，Ann. Inst. Fourier. 64 (2014)，第2期，467-487。[7] B. Ammann、J.-F. Grossjean、E. Humbert、B. Morel，Aubin不等式的自旋量类比，Math. Z. 260 (2008)，127-151。[8] B. Ammann、E. Humbert、M. Ould. Ahmedou，共形浸入平均曲率的一个障碍 $S^n\to\mathbb{R}^{n+1}$，Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007)，第2期，489-493。[9] B. Ammann、E. Humbert、B. Morel，共形平坦流形上的质量端同态与自旋量Yamabe型问题，Comm. Anal. Geom. 14 (2006)，第1期，163-182。[10] T. Bartsch、Y. Ding，不可度量化向量空间上的变形定理及其在临界点理论中的应用，Math. Nachr. 279 (2006)，第12期，1267-1288。[11] V. Benci、P.H. Rabinowitz，不定泛函的临界点定理，Invent. Math. 52 (1979)，第3期，241-273。

[12] W. Borrelli，带克尔非线性项的二维临界狄拉克方程的驻定解，J. Diff. Equ. 263 (2017)，7941-7964。[13] W. Borrelli，二维临界狄拉克方程的对称解，Commun. Contemp. Math. 24(4) (2022)，2150019[14] W. Borrelli、A. Malchiodi、R. Wu，基态狄拉克泡与杀手旋量，数学物理通讯 383 (2021)，1151-1180。[15] B. Buffoni、L. Jeanjean、C.A. Stuart，强不定半线性方程的非平凡解的存在性，Proc. Amer. Math. Soc.，119 (1993)，179-186。[16] J. Byeon、J. Park，流形上的奇异摄动非线性椭圆问题，Calc. Var. Partial Differential Equations 24 (2005)，459-477。[17] I. Chavel，《黎曼几何中的特征值》，学术出版社，1984年。[18] J. Cuevas-Maraver、P.G. Kevrekidis、A. Saxena、A. Comech、R. Lan，二维非线性狄拉克模型中孤立波与涡旋的稳定性，Phys. Rev. Lett. 116(21) (2016)，214101。[19] E.N. Dancer、A.M. Micheletti、A. Pistoia，黎曼流形上一些奇异摄动非线性椭圆问题的多峰解，数学手稿 128，2009，163-193。[20] M.J. Esteban、E. Séré，非线性狄拉克方程的驻定态：一种变分方法，数学物理通讯 171 (1995)，323-350。[21] T. Friedrich，《黎曼几何中的狄拉克算子》，数学研究生丛书，第25卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，2000年。[22] N. Ginoux，《狄拉克谱》，数学讲义，第1976卷。施普林格，柏林，2009年。[23] Q. Han、F. Lin，《椭圆偏微分方程》，美国数学会，2011年。[24] O. Hijazi，狄拉克算子最小特征值的共形下界与杀手旋量，数学物理通讯 104 (1986)，151-162。[25] O. Hijazi，狄拉克算子的谱性质与几何结构，载于《量子场论的几何方法：暑期学校论文集》，H. Ocampo 等编，比利亚德莱瓦，哥伦比亚，1999年7月12日至30日，世界科学出版社，新加坡，2001年，116-169。

[26] N. Hitchin, 调和旋量，Adv. Math. 14 (1974), 1-55.

[27] H. Hofer, 关于强不定泛函及其应用，Trans. Amer. Math. Soc. 275 (1983), no. 1, 185-214.[28] J. Jost, 黎曼几何与几何分析，Springer Berlin, 2011.[29] H.B. Lawson, M.L. Michelson, 旋量几何，普林斯顿大学出版社 1989.[30] J.M. Lee, T.H. Parker, Yamabe问题，《美国数学会通报》 New Ser. 17, (1987), 37-91.[31] P.L. Lions, 变分法中的集中紧性原理：局部紧情形，第二部分，AIP Anal. non lin´éaire 1 (1984), 223-283.[32] A.M. Micheletti, A. Pistoia, 标量曲率在黎曼流形上的一个非线性椭圆问题中的作用，Calc. Var. Partial Differential Equations, (2009) 34, 233-265.[33] M. Reed, B. Simon, 数理物理方法，第 I-IV 卷，学术出版社，1978.[34] Y. Sire, T. Xu, 乘积流形上旋量 Yamabe 方程的变分分析，比萨高等师范学院科学类年刊，已接收。[35] A. Szulkin, T. Weth, Nehari流形方法。非凸分析与应用手册，597-632，国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2010.[36] M. Wakano, 经典 Dirac-Maxwell 场方程的强局域解，《理论物理进展》35, 1117 (1966)。

THOMAS BARTSCH 数学研究所，吉森大学
35392 吉森，德国
Thomas.Bartsch@math.uni-giessen.de

TIAN XU 天津大学应用数学中心 天津，300072，中国 xutian@amss.ac.cn