arXiv:2301.04940v1 [math.AG] 12 Jan 2023

Lefschetz 超平面定理的失效

ANANYO DAN

Abstract. 本文给出了一个关于非奇异拟射影簇的 Lefschetz 超平面定理的反例。Hamm-Lˆe 的经典结果表明，对于处于一般位置的超平面，Lefschetz 超平面定理可以成立。我们指出，“超平面”这一条件是严格的，不能将其替换为高次超曲面。这个反例非常简单：从射影空间中去掉有限多个点。此外，作为中间步骤，我们证明 Grothendieck-Lefschetz 定理在准射影情形下也不成立。

1. 引言

底域始终取为 $\mathbb{C}$。考虑一个维数为 n 的非奇异射影簇 Y。Lefschetz 超平面定理（LHT）指出，对于任意满足 $\mathcal{O}_X(Y)$ 充分丰富的超曲面 $X \subset Y$，限制态射

$$H^k(Y,\mathbb{Z}) \to \text{对所有 } k < n-1\text{，} H^k(X,\mathbb{Z}) \text{ 都是同构；对 } k = n-1\text{.，它是单射} \tag{1.1}$$

如果 Y 是射影空间，那么定理还可以进一步推广。特别地，对于非常一般的超曲面 X，从 $H^{n-1}(\mathbb{P}^n)$ 到 $H^{n-1}(X)$ 的限制是同构。关于同构失效时超曲面轨迹（也称为 Noether-Lefschetz 轨迹）的几何性质，已有大量研究 [1–4, 11, 12]。因此显然，Lefschetz 超平面定理的失效会引出霍奇理论和变形理论中的重要问题。本文旨在研究该定理在准射影情形下的失效。

Hamm 和 Lˆe [6, 7] 指出，如果准射影簇 Y 中的超平面截面 X 处于“一般”位置，那么（1.1）成立。一般位置的判据可以用 Y 的 Whitney 分层明确给出（见 §2.2）。由此自然引出以下问题：

问题：如果将“超平面”替换为高次数超曲面，Hamm-Lˆe 定理（定理 2.1）是否仍然成立？

当 Y 是一个射影非奇异簇时，这一结论成立。令人惊讶的是，即使 Y 是射影空间中去掉一个点后的补集，这一结论也可能不成立。特别地，我们给出一个高次数超曲面的例子，它满足 Hamm-Lˆe 定理的所有条件，唯独不是超平面。然而，在这种情况下，LHT 不成立。下面我们将详细讨论这一点。回顾一下，如果一个射影簇 X 的除子类群 Div(X)（即 X 上除子模去线性等价关系所得的自由阿贝尔群）的秩与皮卡群 Pic(X) 的秩不同，则称其为非唯一分解。我们证明：

Date:2023年1月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 14C30, 32S35, 32S50。
Key words and phrases. 霍奇理论、Lefschetz 超平面定理、拟射影簇、阶乘性、Grothendieck-Lefschetz定理、皮卡群。

定理 1.1. 设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个具有孤立奇点且带有 $n \geq 4$ 的非阶化超曲面。记 X 的奇异轨迹为 X_{sing}。那么，自然限制态射

$$H^2(\mathbb{P}^n \backslash X_{\text{sing}}, \mathbb{Z}) \to H^2(X \backslash X_{\text{sing}}, \mathbb{Z})$$

不是满射。

利用这个定理，我们现在给出一个具体例子。

例 1.2。设 $X \subset \mathbb{P}^4$ 是由方程 $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$ 定义的超曲面，其中 X_0、...、X_4 是 $\mathbb{P}^4$ 上的坐标。显然，X 恰有一个奇点 $x = [0 : 0 : 0 : 0 : 1]$。除子类群 Div(X) 同构于 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$（见 [8, 例 II.6.5]）。由 Lefschetz 超平面定理，我们有 $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$。利用指数正合列，可以验证 Pic($X$) $\cong \mathbb{Z}$。因此，X 是非唯一分解的。于是，定理 1.1 蕴含从 $H^2(\mathbb{P}^4 \backslash \{x\}, \mathbb{Z})$ 到 $H^2(X \backslash \{x\}, \mathbb{Z})$ 的限制态射不是满射。

作为中间步骤，我们证明 Grothendieck-Lefschetz定理 [5] 在准射影情形下不成立（见备注 3.2）。

致谢：感谢 I. Kaur 博士参与讨论。作者受英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/T019379/1。

2. On the Hamm-Lê result

在 [7], Hamm 和 Lˆe 证明了一个适用于拟射影簇的 Lefschetz 超平面定理版本（见下文定理 2.1）。证明分为两个阶段。我们采用下文 §2.1 中的记号。第一步是验证，对于所有 $i \leq \dim(Y) - 2$, $H^i(Y \backslash Z)$（分别为 $H^{m-1}(Y \backslash Z)$），它同构于（分别包含于）i 阶（分别为 $(m-1)$ 阶）上同调 $V_r(L) \cap (Y \backslash Z)$，其中 L 的“半径”为 r 的某个邻域 $V_r(L)$，且对几乎所有 $r > 0$ 都成立（见 [7, 定理 1.1.1]）。第二步是验证 $L \cap (Y \backslash Z)$ 是否为 $V_r(L) \cap (Y \backslash Z)$ 的变形收缩。可以观察到，若 L 处于“一般”位置，则该结论成立。一般位置的明确描述将在下文定理 2.1 中给出。

2.1. 设定。令 Y 为 $\mathbb{P}^n$ 中维数为 m 的射影子簇，$Z \subset Y$ 为代数子空间，$L \subset \mathbb{P}^n$ 为 $\mathbb{P}^n$ 中的超平面，使得 $Y \backslash (Z \cup L)$ 非奇异。考虑 Y 的一个分层 $\{Y_i\}_{i \in I}$，满足以下条件：

(1) 每个 Y_i 都是 Y 的实半代数子集；(2) $\{Y_i\}$ 是 Whitney分层；(3) Z 是若干层的并；(4) 该分层满足下述函数的 Thom 条件：

$$\tau : Y \to \mathbb{R}, \text{ sending } y \in Y \text{ to } \frac{\sum_{i=1}^{k} |f_i(y)|^{2d/d_i}}{\sum_{i=0}^{n} |y_i|^{2d}}, \text{ where } y = (y_1, ..., y_n),$$

Z 由次数分别为 d_i 的齐次多项式 $f_1, ..., f_k$ 定义，而 d 是这些 d_i 的最小公倍数。精确定义见 [10, §1.4.4]。

2.2. 关于 Hamm-Lˆe 的结果。设 Ω 为 $\mathbb{P}^n$中与所有层横截的复射影超平面集合 Y_i。

定理 2.1。（Hamm-Lˆe [7, 定理 1.1.3]）假设 $Y\backslash Z$ 是非奇异的。那么，对于任意$L \in \Omega$，我们有

$$H^k(Y\backslash Z, L \cap (Y\backslash Z)) = 0 \text{ for all } k \leq m-1.$$

换言之，对于所有 $k \leq m-2$，从 $H^k(Y\backslash Z, \mathbb{Z})$ 到 $H^k(L \cap (Y\backslash Z), \mathbb{Z})$ 的自然态射都是同构；当 $k = m-1$ 时则为单射。

现在我们写出与例 1.2 相关的分层。

注 2.2。取由 $z_5 = 0$ 定义的 $Y = \mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$，其中 z_i 是 $\mathbb{P}^5$ 上的坐标。取 $Z := [0,0,0,0,1,0]$，即 Y 中的闭点。取由以下部分组成的 Y 的分层

$$(Y\backslash Z) \coprod Z.$$

那么，在 $\mathbb{P}^5$ 中定义 Z 的方程由 $f_i := z_i$（当 $0 \leq i \leq 3$ 时）以及 $f_5 := z_5$ 给出。函数 τ 就是

$$\tau := \frac{|z_5|^2 + \sum_{i=0}^{3} |z_i|^2}{\sum_{i=0}^{5} |z_i|^2}.$$

注意，这个分层满足上文 §2.1 中的条件 (1)-(4)，其中 $\mathbb{R}$ 上的分层由 $\mathbb{R}\backslash\{0\} \coprod \{0\}$ 给出。最后，注意由 $z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_5^2$ 定义的 $\mathbb{P}^5$ 中的超曲面 X 在点 Z 处是奇异的。因此，X 与 Y 的所有层都横截。我们将在定理 1.1 中看到，若将上文定理 2.1 中的 L 替换为 X，则结论不成立。

3. Proof of Main theorem

我们假设读者对局部上同调有基本了解。有关该主题的基本定义和结果，请参见 [9] 。

设 $X \subset \mathbb{P}^n$ 是一个具有孤立奇点的非阶化超曲面，并满足 $n \geq 4$。用X_{sing} 表示 X的奇异轨迹，$Y := \mathbb{P}^n\backslash X_{\text{sing}}$ 以及 $X_{\text{sm}} := X\backslash X_{\text{sing}}$。我们首先证明:

命题 3.1. 上同调群 $H^1(\mathcal{O}_Y)$ $H^2(\mathcal{O}_Y)$ 和 $H^1(\mathcal{O}_{X_{\text{sm}}})$ 在解析拓扑和 Zariski 拓扑中均消失。

证明。回顾局部上同调群的长正合列，它在两种拓扑中均存在（参见 [9, 推论 1.9]）：

$$... \to H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to H^1(\mathcal{O}_Y) \to H^2_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to H^2(\mathcal{O}_Y) \to H^3_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \to ...$$

回顾，$H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0 = H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$。根据 Serre 的 GAGA，$H^1(\mathcal{O}^{\text{an}}_{\mathbb{P}^n}) = 0 = H^2(\mathcal{O}^{\text{an}}_{\mathbb{P}^n})$。要证明 $H^1(\mathcal{O}_Y)$ 和 $H^2(\mathcal{O}_Y)$ 消失，只需证明 $H^i_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ 对$i = 2$，3 在两种拓扑中均消失。

考虑谱序列（见 [9, 命题 1.4]）：

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{P}^n, \mathcal{H}^q_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})) \Rightarrow H^{p+q}_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}). \tag{3.1}$$

我们关注 $p+q$等于 2 或 3 的情形。由于 $n \geq 4$和 X_{sing}是闭点，我们有（见 [13,命题 1.2]）

$$\mathcal{H}^q_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0 \text{ for } q \leq 3.$$

这意味着，对于 $p+q$ 等于 2 或 3 的情形，$E^{p,q}_2 = 0$。因此，在这种情况下，谱序列在E_2 处退化，且在两种拓扑中 $H^i_{X_{\text{sing}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = 0$。这证明了 $H^1(\mathcal{O}_Y)$和 $H^2(\mathcal{O}_Y)$的消失。

$H^1(\mathcal{O}_{X_{\rm sm}})$的消失证明方法类似。特别是，利用 [9, 推论1.9]，只需验证 $H^1(\mathcal{O}_X)$和 $H^2_{X_{\rm sing}}(\mathcal{O}_X)$的消失。由于 X是 $\mathbb{P}^n$ 中的一个超曲面，且 $n \geq 4$，$H^1(\mathcal{O}_X) = 0$。由 Serre 的 GAGA，$H^1(\mathcal{O}_X^{\rm an}) = 0$。为证明 $H^2_{\rm sing}(\mathcal{O}_X)$的消失，在将 $\mathbb{P}^n$ 替换为 X 和 $p+q=2$后，使用上面的谱序列 (3.1)。由于 dim $X \geq 3$，$[13, \text{命题 } 1.2]$意味着，对于 $q \leq 2$，$\mathcal{H}^q_{X_{\rm sing}}(\mathcal{O}_X) = 0$。这意味着谱序列在 E_2 处退化，且在两种拓扑中 $H^2_{X_{\rm sing}}(\mathcal{O}_X) = 0$ 。因此，$H^1(\mathcal{O}_{X_{\rm sm}}) = 0$ 在两种拓扑中成立。这证明了该命题。□

主要定理的证明。我们用反证法证明该定理。假设限制态射从 $H^2(Y,\mathbb{Z})$ 到 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 是满射。比较与 Y 和 $X_{\rm sm}$ 相关的指数正合列所对应的长正合列，我们得到下图，其中各水平行都是正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_Y^*) & \xrightarrow{\partial_1} & H^2(Y,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_Y) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho'} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \rho} & \circlearrowleft & \downarrow \\ H^1(\mathcal{O}_{X_{\rm sm}}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}^*_{X_{\rm sm}}) & \xrightarrow{\partial_2} & H^2(X_{\rm sm},\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_{X_{\rm sm}}) \end{array} \tag{3.2}$$

利用命题 3.1 的消失结果，我们得出 ∂_1 是同构，且 ∂_2 是单射。根据假设，ρ 是满射。我们断言 ρ' 是满射。事实上，给定 $\alpha \in H^1(\mathcal{O}^*_{X_{\rm sm}})$，由 ρ 的满射性可知，存在 $\beta \in H^2(Y,\mathbb{Z})$，使得 $\rho(\beta) = \partial_2(\alpha)$。由于 ∂_1 是同构，存在 $\alpha' \in H^1(\mathcal{O}_Y^*)$，经由 ∂_1 映到 β。利用 ∂_2 的单射性以及中间方块的交换性，我们得到 $\rho'(\alpha') = \alpha$。这就证明了该断言。

由于 ρ' 是满射，我们得到如下满射态射:

$$\mathbb{Z} = \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Pic}(Y) \overset{\rho'}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Pic}(X_{\rm sm}) \cong \mathrm{Div}(X) \tag{3.3}$$

其中，第二个和最后一个同构来自以下事实： $X_{\rm sing}$ 在 X和 $\mathbb{P}^n$中的余维至少为 2。根据 Lefschetz 超平面定理，我们有 $H^2(X,\mathbb{Z}) \cong H^2(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，它由超平面截面的类生成。注意，$H^1(\mathcal{O}_X)$和 $H^2(\mathcal{O}_X)$均为零（使用 [8,Ex. III.5.5] 和 $n \geq 4$）。利用 X的指数短正合列，我们得出 Pic$(X) \cong \mathbb{Z}$。结合 (3.3)，这意味着 rk Div(X) = rk Pic(X)。但这与 X是非唯一分解的事实矛盾。因此，从 $H^2(Y,\mathbb{Z})$到 $H^2(X,\mathbb{Z})$的限制态射不可能是满射。这就证明了定理。□

备注 3.2. 设 X 如定理 1.1 中所述。则限制态射

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \backslash X_{\rm sing}) \to \mathrm{Pic}(X \backslash X_{\rm sing})$$

不是满射。事实上，

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \backslash X_{\rm sing}) \cong \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z} \text{ and } \mathrm{Pic}(X \backslash X_{\rm sing}) \cong \mathrm{Div}(X).$$

由射影超曲面的 Lefschetz 超平面定理，我们有 Pic$(X) \cong \mathbb{Z}$。由于 X 是非唯一分解的，Div(X) 的秩与 Pic(X) 的秩不同。因此，Pic$(\mathbb{P}^n \backslash X_{\rm sing})$ 不可能与 Pic$(X \backslash X_{\rm sing})$ 同构。

References

[1] C. Ciliberto、J. Harris 和 R. Miranda。Noether-Lefschetz轨迹的一般分支及其在所有曲面空间中的稠密性。*Mathematische Annalen*, 282(4):667–680, 1988. [2] A. Dan。关于 Griffiths 和 Harris 有关某些 Noether-Lefschetz 轨迹的猜想。*in Contemporary Mathematics* 17 5 1550002, 2015 *Communications* , ( ): . [3] A. Dan。关于 Harris 的一个猜想。 *Communications in Contemporary Mathematics*, 23(07):2050028, 2021.

[4] M. Green。显式 Noether-Lefschetz定理的新证明。 *J. Differential Geometry*, 27:155–159, 1988. [5] A. Grothendieck。SGA

2 *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie-1962-Cohomologie locale des* . , . [6] H. *faisceaux cohérents et théoremes de Lefschetz locaux et globaux (North-Holland, Amsterdam)* 1968
Hamm。奇异簇的 Lefschetz 定理。载于 *Proceedings of symposia in pure mathematics*，第 40 卷，第 547–557 页。美国数学学会，1983. [7] H. Hamm 和 D. T. Lˆe。拟射影簇上的 Lefschetz定理。 *Bulletin de la Société mathématique de France* 113 123 142, 1985 , : – . [8]

R. Hartshorne。 *Algebraic Geometry*。数学研究生教材第 52 卷。Springer-Verlag，1977. [9] R. Hartshorne。 *Local Cohomology: A Seminar Given by A. Groethendieck, Harvard University. Fall*, 1961，第 41 卷。Springer, 2006. [10] D. T. Lˆe 和 B. Teissier。消失循环、平面截面与 Whitney 条件 II，奇点，第 2 部分（加利福尼亚州阿卡塔，1981），65-103。载于 *Proc. Sympos. Pure Math*，第 40 卷。[11] C. Voisin。关于 Noether 定理的一项补充说明。 *Math. Ann.*, 280(4):605–611, 1988. [12] C. Voisin。关于 6 次和 7 次情形下的 Noether-Lefschetz 轨迹。 *Compositio Mathematica*, 75(1):47–68, 1990. [13] Y. Yoshino。 *Maximal Cohen-Macaulay Modules Over Cohen-Macaulay Rings*，第 146 卷。剑桥大学出版社，1990.

School of Mathematics and Statistics, University of Sheffield, Hicks building, Hounsfield Road,S3 7RH, UK*Email address*: a.dan@sheffield.ac.uk