arXiv:2301.04953v1 [math.LO] 12 Jan 2023

强化 Yomdin-Gromov 代数引理

DMITRY NOVIKOV，BENNY ZACK

Abstract. 我们在 #o-极小结构中，构造了具有有界 C^r 范数的映射所给出的尖锐柱状参数化，用以参数化柱状细胞分解，从而推广并强化 Yomdin-Gromov 代数引理。

我们引入了堡垒这一几何对象，用以编码 o-极小几何中柱状细胞分解的组合结构。在堡垒范畴中，柱状分解、此类分解的细化，以及此类分解的柱状参数化都成为态射。我们用堡垒的语言表述并证明了上述结果。

Contents

1. 引言 2 1.1. Yomdin-Gromov代数引理 2 1.2. 胞腔与柱状分解 4 1.3. 尖锐柱状分解 5 1.4. 柱状参数化与主要结果 6 1.5. 主要结果的应用 8 1.6. 本文结构 9 2. 尖锐结构的预备结果 9 2.1. 尖锐 o-极小结构的定义 9 2.2. 算术运算的尖锐性 10 2.3. 细化的尖锐性 11 2.4. C^r locus 的尖锐性 11 2.5. 锐性可定义选择 11 3. 堡垒 12 3.1. 堡垒与态射 12 3.2. 组合等价 15 3.3. 逆像堡垒结构与命题 3.18 的证明 17 3.4. 沿扩张拉回 18 3.5. 塔构造 18 3.6. 光滑化 19

日期：2023年1月13日。

3.7. 重新表述主要结果 203.8. 最后备注 214. 该步骤 $F_{1,\ k}$ 225. 该步骤 $S_{\ell-1,\ k}+F_{\ell-1,\ k}\to S_{\ell,\ k}$ 256. 该步骤 $S_{\leq\ell,\ k}+F_{\leq\ell-1,\ k}\to F_{\ell,\ k}$ 266.1. 约化到如下情形：$fc,\ j,\ \lambda$ 是 C^r ，且$fc,\ j,\ \lambda(x_1,\ \cdot)$ 对所有 x_1都是一个 r-函数。6.2. 对第一个无界导数的归纳 参考文献 28 29 30

1. Introduction

1.1. **Yomdin-Gromov代数引理**。 记 $I=(0,\ 1)$。对于 $m\geq n$，我们用 π^m_n: $I^m\to I^n$ 表示到前 n 个坐标的投影。通常我们会在记号中省略 m 。

此外，符号 $O_a(1)$表示一个特定的普适固定函数 $a\mapsto C_a$ ，其中 $C_a>0$；符号$\mathrm{poly}_a(b)$表示一个 p_a 多项式在 b处的取值，其中 $a\mapsto p_a$ 是一个普适固定映射。

定义 1.1。 设 $U\subset\mathbb{R}^\ell$ 为一个定义域。对于一个 C^r 函数 $f\colon\ U\to I$，我们将$||f||$ 记为其上确界范数，并定义

$$||f||_r:=\max_{|\alpha|\leq r}\frac{||f^{(\alpha)}||}{\alpha!}.$$

对于一个 C^r 映射 $f\colon\ U\to\mathbb{R}^m$，我们定义 $||f||_r:=$ 最大值$_{1\leq i\leq m}||f_i||_r$ ，其中 f_i 是 f的坐标函数。如果一个 C^r函数（分别为映射）满足 $||f||_r\leq 1$，我们将其称为r-函数（分别为 r-映射）。

Yomdin-Gromov 代数引理及其在 o-极小结构中的推广，在动力系统和丢番图几何领域有着重要应用。现在我们陈述其原始的半代数版本。固定 $r\in\mathbb{N}$。

定理 1.2 ([8], 第 3.3 节). 设 $X\subset I^\ell$ 是一个 μ 维半代数集合，并设 β 为定义 X 的方程与不等式的次数之和 。那么存在常数 $C=C(\beta,r,\ell)$ 以及 r-映射 $f_1,\dots,f_C\colon\ I^\mu\to X$，使得 $X=\cup_i f_i(I^\mu)$。

注 1.3. *G.Binyamini* 和 *D.Novikov* [2] 证明， C 可以由上界 $\mathrm{poly}_\ell(\beta)\cdot r^\mu$控制；此外， f_i 可以取为复杂度为 $\mathrm{poly}_\ell(\beta,r)$ 的半代数集。

Pila 和 Wilkie [9] 将定理1.2 推广到 o-极小结构中，从而证明了他们著名的 Pila-Wilkie 计数定理，该定理讨论可定义集上的有理点。现在我们陈述他们的版本。在一般的 o-极小结构中，无法定义复杂度的概念，因此将以族上的一致性取而代之。有关 o-极小结构的介绍，请参见 [10]。固定一个 o-极小结构，并取一个 $r \in \mathbb{N}$。

定理 1.4 ([9], 推论 5.2)。 设 $\{X_\lambda \subset I^\ell\}_{\lambda \in I^k}$ 是一个可定义集族，满足 维数 $X_\lambda \leq \mu$ 对所有 λ均成立。那么存在常数 $C = C(X, r)$ 使得对每个 λ，都存在可定义映射 $f_{1,\lambda}, \ldots, f_{C,\lambda} : I^\mu \to X_\lambda$，其像覆盖 X_λ。

关于该引理、更详细的阐述及其应用和局限性，请参见[2, 3]。在 [3], Binyamini 和 Novikov 通过证明映射 1.4可以选为$f_{i,\lambda}$ 胞腔的胞腔的，参见下文定义 1.7 。

定义 1.5。 长度为 ℓ 的基本胞腔 $C \subset \mathbb{R}^\ell$ 是 ℓ 个点 $\{0\}$ 与区间 I的乘积。

注记 1.6. 虽然基本胞腔 C 通常不是定义域，但我们往往会默认将其与省略 C中的 $\{0\}$ 因子后得到的基本胞腔等同。特别地，对于映射 $f : C \to \mathbb{R}$，称其为 C^r有自然的含义。

定义 1.7. 设 $X, Y \subset \mathbb{R}^\ell$。若映射 $f = (f_1, \ldots, f_\ell) : X \to Y$满足以下条件，则称其为前胞腔的：

(1) 它是三角形的，也就是说，对于每个 $i = 1, \ldots, \ell$，坐标函数 f_i 仅依赖于 $x_1, \ldots, x_i$。(2) 对于每个 $1 \leq i \leq \ell$ 以及每个固定的 $x_1, \ldots, x_{i-1}$，函数 $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot)$都是严格递增函数。

胞腔映射是连续的前胞腔映射。

注 *1.8.* 若 $f : X \to Y$ 是胞腔的，则对于任意 $1 \leq j \leq \ell$，映射 $f_{1\ldots i} := (f_1, \ldots, f_i) : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ 也是胞腔的。此外，对于任意 $1 \leq i \leq n$，若 $(x_1, \ldots, x_i) \in \pi_i(X)$，则映射 $f(x_1, \ldots, x_i, \cdot) : \pi_i^{-1}(x_1, \ldots, x_i) \to \pi_i^{-1}(f_{1\ldots i}(x_1, \ldots, x_i))$ 是胞腔的。

现在陈述 [3]的主要结果。记号 S_ℓ 和 F_ℓ 分别源自下文中的“集合”和“函数”。

定理 1.9 ([3], 定理 19)。设 ℓ， $r \in \mathbb{N}$则：

S_ℓ：对于每个可定义集 $X \subset I^\ell$，都存在一个有限的、由长度为 ℓ 的基本胞腔组成的集族 $\{C_\alpha\}$，以及一个由胞腔的 r-映射组成的集族 $\{\phi^\alpha : C_\alpha \to X\}$，使得 $X = \cup_\alpha \phi^\alpha(C_\alpha)$。

F_ℓ：对于每一对由可定义集 $X \subset I^\ell$ 和可定义映射 $F : X \to I^q$（对任意 $q \in \mathbb{N}$）构成的对象 (X, F)，都存在一个由有限个长度为 ℓ 的基本胞腔组成的集族 $\{C_\alpha\}$，以及一个

胞腔的 r-映射集族 $\{\phi^\alpha : C_\alpha \to X\}$，使得 $X = \cup_\alpha \phi^\alpha(C_\alpha)$，且对每个 α，映射 $(\phi^\alpha)^* F$ 都是一个 r-映射。

注记 1.10. 由于注记 *1.8*，这一表述自动对族具有一致性。另外，请注意 F_ℓ 可由 $S_{\ell+1}$ 推出。

尽管 [3, 定理 19] 的证明在技术上比以往的证明简单，但它并未在半代数或 Pfaffian 情形下给出关于 q 的多项式界。本文最初的主要目的之一，是扩充定理 1.9 的证明，从而在这些情形下获得关于 q 的多项式界。然而，鉴于尖锐 o-极小结构（#简称 o-极小，见[6, 4, 5]）的最新发展，自然有必要将这一证明推广到 o-极小结构的框架下。

回顾一下，在 #o-极小结构中，每个可定义集都与两个自然数相关联，即“格式” $\mathcal{F}$ 和“次数” D，它们分别推广了半代数几何中的环境维数和复杂度。完整定义见定义 2.2。详细介绍见 [5]。

我们的主要结果（见下文定理 1.18、1.19 ）特别推出了适用于#o-极小结构的定理 1.9 的以下版本，其多项式界为 q。

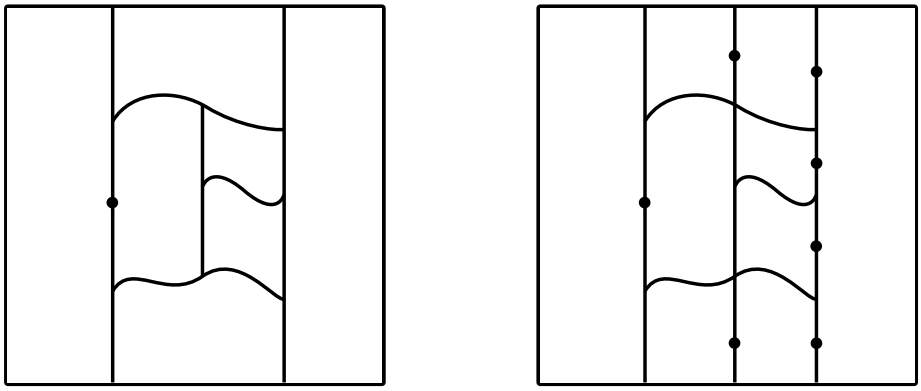
定理 1.11。 设 $\Sigma = (\mathbf{S}, \Omega)$ 是一个尖锐 *o*-极小结构。${}^{\#}S_\ell$：设 $X \subset I^\ell$ 的格式为 $\mathcal{F}$，次数为 D。则存在一个由 $\{C_\alpha\}$个$\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 基本胞腔组成的集族，以及胞腔的 r-映射 $\{\phi^\alpha : C_\alpha \to X\}$，使得 $X = \cup_\alpha \phi^\alpha(C_\alpha)$。

${}^{\#}F_\ell$：设可定义集 $X \subset I^\ell$ 的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D，且有一个可定义映射F: $X \to I^q$，使得对每个 $j = 1, \ldots, q$， F 的坐标函数 F_j 的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D。那么存在一个由 $\mathit{poly}_{\mathcal{F}}(D, q)$ 个长度为 ℓ 的基本胞腔组成的集族 $\{C_\alpha\}$，以及一个由胞腔的 r-映射 $\{\phi^\alpha : C_\alpha \to X\}$ 组成的集族，其格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 $\mathit{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，使得 $X = \cup_\alpha \phi^\alpha(C_\alpha)$，并且对每个 α，映射 $(\phi^\alpha)^* F$ 都是一个 r-映射。

该陈述 ${}_{\#}S_\ell$ 在（受限）子 Pfaffian 情形下归功于 Binyamini、Jones、Schmidt 和 Thomas [1]，，而对其证明稍作改写即可推广到一般的 #o-极小情形。该陈述 ${}_{\#}F_\ell$ 则更强，且不能由${}^{\#}S_{\ell+1}$推出。事实上，我们的主要结果明显强于定理 1.11。我们证明了存在一种胞腔的 r参数化，并对参数化映射的组合结构和几何结构进行严格控制。见下文定理 1.18、1.19 。我们先回顾柱状分解的概念，再引入柱状参数化的概念。

1.2. **胞腔与柱状分解**。

固定一个 $\mathbb{R}$。我们回顾 [10]中介绍的胞腔概念。



Cellular Decomposition　　Cylindrical Decomposition

FIGURE 1. 一个胞腔分解的示例 I^2，它不是柱状分解；以及一个对 I^2进行细化的胞腔分解(参见定义1.17)。

定义 1.12（胞腔）。长度为1 的胞腔是一个子集 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^1$，它要么是一个点，要么是一个开区间；其类型分别定义为（0）或（1）。

令 $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^\ell$ 为一个长度为 ℓ、类型为 $\tau \in \{0,1\}^\ell$的胞腔，并令 $f, g\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ 为在 $f < g$ 处处连续的可定义函数。长度为 $\ell+1$ 的胞腔 $\mathcal{C}$ 是以下集合之一：

- $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \odot (f,g) := \{(x,y)\colon\ x \in \mathcal{C},\ f(x) < y < g(x)\}$，此时 $\widetilde{\mathcal{C}}$ 的类型为 $(\tau, 1) \in \{0,1\}^{\ell+1}$。
- $\underset{\sim}{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \odot f := \{(x,y)\colon\ x \in \mathcal{C};\ y = f(x)\}$，此时 $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ 的类型是$(\tau,\ 0) \in \{0,1\}^{\ell+1}$。

胞腔 $\mathcal{C}$ 与集合 X 相容，当且仅当 $\mathcal{C} \subset X$ 或 $\mathcal{C} \cap X = \emptyset$。集族 $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ 是 X 的胞腔分解，当且仅当胞腔 $\mathcal{C}_i$ 两两不相交，且 $\cup_i \mathcal{C}_i = X$。

我们将使用以下更强的概念，见图 1。

定义 1.13（柱状分解）。设 $X \subset I$ 是一个可定义集。X 的柱状分解是 X 的胞腔分解。设 $X \subset I^\ell$ 是可定义的。若胞腔分解 Φ 是 X 的分解，且集族 $\pi_{\ell-1}(\Phi) := \{\pi_{\ell-1}(\mathcal{C}) |\ \mathcal{C} \in \Phi\}$ 是 $\pi_{\ell-1}(X)$ 的柱状分解，则称其为 X 的柱状分解。

1.3. **尖锐柱状分解**。我们回顾一下 [5]中尖锐胞腔分解的定义。

定义 1.14。 设 S 是一个 *o*-极小结构，Ω 是S上的 *FD*-过滤。若对任意 X_1、……、$X_s \subset I^\ell$ 这些格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D的可定义集，都存在一个将 I^ℓ 分解为多项式$\mathcal{F}(D$、 $s)$ 个格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$、次数为多项式$\mathcal{F}(D)$ 的胞腔的柱状分解，且该分解与 X_1、……、 X_s相容，则称S、Ω) 具有尖锐柱状分解 性质（简称$\#$CD ）。

通常并不清楚每个$\#$o-极小结构是否都具有$\#$CD。不过， [5] 已证明，对于定量应用，我们总能将问题归约到具有$\#$CD 的某个$\#$o-极小结构的情形，详见 [5, 备注 1.3 和定理 1.9] 。因此，我们将假设我们的$\#$o-极小结构具有$\#$CD，这对于定量应用而言已足够。

例如，尽管目前尚不清楚我们的主要结果按原文所述对一般的$\#$o-极小结构是否成立，但这些结果足以证明，对每个$\#$o-极小结构，Pila-Wilkie 计数定理的一个尖锐版本都成立，详见第 1.5 节。

1.4. **柱状参数化与主要结果**。 我们的目标是加强定理 1.9 ，使得映射 ϕ^α 具有额外的组合性质。更确切地说，我们证明可以将它们选取得构成一个柱状参数化，见下文定义 1.15。

定义 1.15. 设 $\Phi = \{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 $X \subset I^\ell$ 的柱状分解。 Φ 的柱状参数化是由满射胞腔映射 $\{\phi^\alpha : C_\alpha \to \mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 组成的集族，其中 C_α 是与 $\mathcal{C}_\alpha$ 类型相同的基本胞腔，并满足以下条件：对于任意两个胞腔 $\mathcal{C}_\alpha$、 $\mathcal{C}_\gamma$，以及任意 $1 \le k \le \ell - 1$，若 $\pi_k(\mathcal{C}_\alpha) = \pi_k(\mathcal{C}_\gamma)$ ，则 $\phi^\alpha_k \circ \pi_k = \phi^\gamma_k \circ \pi_k$。

例 1.16. 图*1*中的柱状分解的柱状参数化可视为一个满射的前胞腔映射 ϕ ：$\mathscr{F} \to I^2$，其中 $\mathscr{F}$ 是下方图*2*中的集合。注意， $\mathscr{F}$ 可自然地分解为一些胞腔，这些胞腔是基本胞腔的整数平移；并且 ϕ 限制在任意这样的胞腔上时都是连续的。集合 $\mathscr{F}$、 I^2 是堡垒的例子，而 堡垒之间的 ϕ 是态射的一个例子，见定义*3.9*。

定义 1.17。 给定集合 X 的两个柱状分解 $\Phi = \{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\Phi' = \{\mathcal{C}_\beta\}_{\beta\in B}$ ，如果存在映射 $s\colon B \to A$ ，使得对于所有 $\beta \in B$，都有 $\mathcal{C}_\beta \subset \mathcal{C}_{s(\beta)}$ ，则称 Φ' 是 Φ 的细化。

如果柱状参数化中的所有映射都是 r-映射，则称其为 r-参数化。现在陈述我们的主要结果。

定理 1.18。固定 ℓ， $r \in \mathbb{N}$。
S^*_ℓ：设 Φ 是 I^ℓ的柱状分解。那么存在其细化 Φ' ， 它具有柱状 r-参数化。

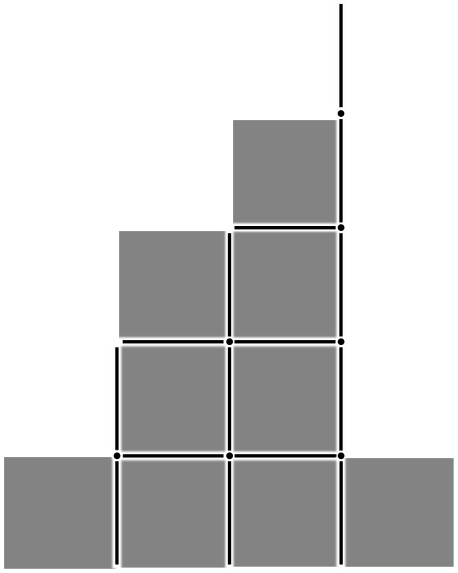


FIGURE 2. 堡垒 (0，1) ×(0，1) ⋃{1} ×(0，2) ⋃(1，2) ×(0，3) ⋃{2} ×(0，3) ⋃(2，3) ×(0，4) ⋃{3} ×(0，5) ⋃(3，4) ×(0，1)。

F_ℓ^*：设 $\Phi = \{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 I^ℓ的柱状分解，并配有一组可定义映射 $\{f_{\mathcal{C}_\alpha,j}: \mathcal{C}_\alpha \to I\}_{\alpha\in A,\ j\in J}$。那么存在 Φ 的细化 $\Phi' = \{\mathcal{C}'_\gamma\}_{\gamma\in A'}$，它具有柱状 r-参数化 $\{\phi^\gamma : C_\gamma \to \mathcal{C}'_\gamma\}_{\gamma\in A'}$，使得若 $\mathcal{C}'_\gamma \subset \mathcal{C}_\alpha$，则对每个 j，$(\phi^\gamma)^* f_{\mathcal{C}_\alpha,\ j}$ 都是一个 r- 函数。

这个定理可以相当容易地由定理 1.9 推得。然而，其精确对应结果意义重大得多。

定理 1.19。固定 ℓ，$r \in \mathbb{N}$。
S_ℓ^*：设 I^ℓ 的一个柱状分解 Φ 的大小为 N，由格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的胞腔组成。那么，存在 Φ 的一个细化 Φ'，其大小为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\ r}(D, N)$，使得 Φ' 具有柱状 r-参数化，其映射的格式为 $O_{\mathcal{F},\ r}(1)$，次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\ r}(D)$。

F_ℓ^*：设 $\Phi = \{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 I^ℓ 的一个柱状分解，其大小为 N，分解为格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的胞腔，并配有一族可定义映射 $\{f_{\mathcal{C}_\alpha,j} : \mathcal{C}_\alpha \to I\}_{\alpha\in A,\ j\in J}$，使得每个 $f_{\mathcal{C}_\alpha,j}$ 的格式为 $\mathcal{F}$，次数为 D。那么存在 Φ 的一个细化 $\Phi' = \{\mathcal{C}'_\gamma\}_{\gamma\in A'}$，其大小为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D, N, |J|)$，以及 Φ' 的一个柱状 r-参数化 $\{\phi^\gamma : C_\gamma \to \mathcal{C}'_\gamma\}$，使得映射 ϕ^γ 的格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$，次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$；并且对每个 j，只要 $\mathcal{C}'_\gamma \subset \mathcal{C}_\alpha$，$(\phi^\gamma)^* f_{\mathcal{C}_\alpha,j}$ 就是一个 r-函数。

注 1.20. （关于指标集 J）先验地， J 可能依赖于 α。然而，我们可以且将始终在集族中添加常函数，使得指标集 J 可以选取得与胞腔 $\mathcal{C}$ 无关。

我们的主要结果以下述方式推广了定理 1.9（以及定理 1.11）。设 $X_1, \ldots,$ $X_s \subset I^\ell$ 是可定义的。由 o-极小性，存在一个与 X_i 相容的柱状分解 Φ，适用于 $1 \leq i \leq s$。根据定理 1.18，我们可以假设 Φ 具有一个柱状 r-参数化 $\{\phi^\alpha\}_{\alpha \in I}$。固定 i，并设 $\{\mathcal{C}_\beta\}_{\beta \in J}$ 为包含于 X_i 中的 Φ 的胞腔。于是，集族 $\{\phi^\beta\}_{\beta \in J}$（它是 X_i 的一个柱状 r-参数化）满足定理 1.9 对 X_i 的要求。定理 1.11 的证明类似。事实上，如果集合 X_i 是在具有 #CD 的尖锐 o-极小结构中定义的，那么我们可以使用 $^{\#}$CD 和定理 1.19，而非通常的柱状分解和定理 1.18，得到尖锐柱状参数化。

注 1.21。 *Binyamini* 和 *Novikov* 已证明，在定理 *1.2* 中，参数化映射的复杂度可以取为关于 r 的多项式。这本质上归因于半代数结构的解析性质。在一般的尖锐情形下，我们无法得到关于 r 的多项式界。然而，在 [6]，中，*Binyamini*、*Novikov* 和 *B.Zack* 证明了 *Yomdin-Gromov* 引理的一个逼近版本：在假设具有尖锐导数的情况下，其关于 r 的依赖是多项式的（见 [6]或 [5] 第 *3* 节）。尽管我们猜想，在具有尖锐导数的情况下，定理 r *1.18*、*1.19* 中关于 r 的依赖可以取为多项式的，但我们尚未找到利用尖锐导数实现这一点的明确方法。

注 1.22 （有效性）。 如果从一个有效的 $^{\#}$ *o*-极小结构开始（其含义见 [5, 注 1。24], ），那么我们的所有结果在相同意义下都是有效的。

1.5. **主要结果的应用**。 Binyamini、Jones、Schmidt 和 Thomas[1] 证明了 Pila-Wilkie 计数定理的一个尖锐版本（见 [9]），针对受限子 Pfaffian 结构，并使用了 [7] 的结果以及$^{\#}S_\ell$ 定理 1.11 中针对该结构的一个版本。相同的论证将给出任意具有尖锐柱状分解的 $_{\#}$o-极小结构的 Pila-Wilkie 计数定理的尖锐版本，从而也适用于任意 $^{\#}$o-极小结构，见下文定理 1.25 。我们注意到，在假设具有尖锐导数的条件下，成立一个推广 Wilkie 猜想的 Pila-Wilkie 定理的多重对数版本，见 [6, 定义 8、定理 1]。

定义 1.23。 令 $A \subset \mathbb{R}^\ell$。我们将 A^{alg} 记为 A 的所有连通 1 维半代数子集的并集，并且 $A^{\mathrm{tran}} = A \backslash A^{\mathrm{alg}}$。

定义 1.24. 对于有理数 $x = \frac{p}{q}$，其中 p、q 是互素整数，我们将 $H(x) :=$ 最大值 $\{|p|, |q|\}$, $H(x)$ 称为 x的高度。对于向量 $x \in \mathbb{Q}^\ell$，我们将 $H(x)$ 定义为 x'各坐标高度中的最大值。

定理 1.25. 设 $(\mathcal{S},\Omega)$ 是一个尖锐 *o*-极小结构。设 $A \subset \mathbb{R}^\ell$ 是一个格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D的可定义集。那么对于每个 $\epsilon > 0$，我们有

$$|\{x \in A^{\mathrm{tran}} \cap \mathbb{Q}^\ell : H(x) \le H\}| \le \mathrm{poly}_{\mathcal{F},\epsilon}(D)H^\epsilon. \tag{1}$$

1.6. **本文结构**。在 [3], 中，我们使用标准的 o-极小技术，从 F_ℓ推出 F_ℓ 的族版本。这种技术并不精确。例如，复杂度为 $\le \beta$ 的所有半代数集所构成空间的维数是关于 β的多项式，因此我们无法在#o-极小结构的框架下与之“交互”。作为替代，我们为每个单独的步骤证明一个族版本，同时追踪所涉及全空间的格式和次数。

第 2 节回顾若干标准 o-极小构造的精确版本。

第 3 节正式引入堡垒，并研究其基本性质和构造。我们用堡垒的术语重新表述 S^*_ℓ，F^*_ℓ，并将它们记为 $S_{\ell,\ k}$，$F_{\ell,\ k}$，其中 k 表示族中的参数数量。

我们通过归纳法证明 $S_{\ell,k}$,$F_{\ell,k}$ 。首先证明，对每个 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，都有 $F_{1,k}$ 。然后证明以下步骤：$S_{\le \ell,k} + F_{\le \ell,k} \to S_{\ell+1,k}$ 和 $S_{\ell+1,k} + F_{\le \ell,k+1} \to F_{\ell+1,k}$。第 4、5、6 节分别讨论 $F_{1,k}$ 以及两个归纳步骤。

最后，我们指出，定理 1.19 的证明完全可以原样用于定理 1.18；只需忽略 FD-过滤，并沿用相同的构造即可。因此，我们将始终采用尖锐 o-极小结构。

2. Preliminary results for Sharp Structures

2.1. **尖锐 o-极小结构的定义**。我们沿用#文献中出现的 o-极小结构定义 [5]。

定义 2.1 (FD-过滤)。设 S 是实数域的一个 *o*-极小扩张。*S* 上的 *FD*-过滤是由两个自然数指标构成的可定义集集族上的过滤$\Omega = \{\Omega_{\mathcal{F},\ D}\}_{\mathcal{F},\ D\in\mathbb{N}}$，满足以下条件。

(1) 每个可定义集都属于$\Omega_{\mathcal{F},\ D}$，其中 $\mathcal{F}$、$D \in \mathbb{N}$，(

2) 对于每个 $\mathcal{F}$、$D \in \mathbb{N}$，都有

$$\Omega_{\mathcal{F},D} \subset \Omega_{\mathcal{F}+1,D} \cap \Omega_{\mathcal{F},D+1}. \tag{2}$$

我们称一个可定义集具有格式 $\mathcal{F}$ 且次数为 D，如果 $X \in\Omega_{\mathcal{F},D}$。我们称一个可定义映射具有格式 $\mathcal{F}$ 且次数为 D，如果其图具有格式 $\mathcal{F}$ 且次数为 D。

定义 2.2 (尖锐 o-极小性)。 设 $\mathbf{S}$ 是实数域的一个 *o*-极小扩张，且 Ω 是 $\mathbf{S}$上的一个 *FD*-过滤。若满足以下条件，则称这对 $(\mathbf{S}\ \Sigma)$ 为尖锐 *o*-极小结构（简称 $^{\#}$*o*-极小结构）。

(1) 对于每个 $\mathcal{F} \in \mathbb{N}$，都存在一个系数为正的一元多项式 $P_{\mathcal{F}}$，使得如果 $X \subset \mathbb{R}$ 的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D，那么它至多有 $P_{\mathcal{F}}(D)$ 个连通分支。*(2)* 如果 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ 的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D，那么集合 $\mathbb{R} \times X$、$X \times \mathbb{R}$、$\mathbb{R}^\ell \setminus X$ 和 $\pi_{\ell-1}(X)$ 的格式为 $\mathcal{F}+1$、次数为 D。此外，$\mathcal{F} \geq \ell$ 必然成立。*(3)* 如果 $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ 是格式为 $\mathcal{F}_i$、次数为 D_i 的可定义集，其中 $i = 1, \ldots, k$，那么并集 $\cup X_i$ 的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D，交集 $\cap X_i$ 的格式为 $\mathcal{F}+1$、次数为 D，其中 $\mathcal{F} := \max_i \mathcal{F}_i$ 且 $D := \sum_i D_i$。*(4)* 如果 $P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_\ell]$ 的次数为 d，那么零点集 $\{P = 0\} \subset \mathbb{R}^\ell$ 的格式为ℓ、次数为 d。

固定一个尖锐 o-极小结构。我们经常处理族，因此引入以下定义，以便简化记号。

定义 2.3. 设 $F_\lambda = \{f_\lambda : X \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是可定义映射的一个族。若该族 F_λ 是一个 $(\mathcal{F}, D)$-族，则称其全空间 $F_\Lambda = \{(\lambda, x, y) \in \Lambda \times X \times Y : y = f_\lambda(x)\}$ 具有格式 $\mathcal{F}$ 和次数 D。类似地，若 X_λ 是 $\mathbb{R}^\ell$ 的子集族，则称其为$(\mathcal{F}, D)$-族，当且仅当其全空间 $X_\Lambda = \{(\lambda, x) : \lambda \in \Lambda,\ x \in X_\lambda\}$ 具有格式 $\mathcal{F}$ 和次数 D。

2.2. **算术运算的尖锐性**。 以下关于算术运算尖锐性的基本引理，在 [5, 6], 中并未得到严格处理，尽管在那里曾被隐式使用。我们在此证明这些引理，因为它们进一步展示了$^{\#}$o-极小公理的作用机制。

引理 2.4. 若 $X_\lambda \subset \mathbb{R}^a$，$Y_\lambda \subset \mathbb{R}^b$ 是可定义的$(\mathcal{F}, D)$-族，则纤维积 $X_\lambda \times Y_\lambda$ 是一个$(O_{\mathcal{F}}(1)$, 多项式$_{\mathcal{F}}(D))$ 族。

证明。 非族版本可直接由公理和等式 $X \times Y = \big(X \times \mathbb{R}^b\big) \cap (\mathbb{R}^a \times Y)$ 得出。因此，集合

$$X_\Lambda \times Y_\Lambda = \{(\lambda, x, \mu, y) : \lambda, \mu \in \Lambda,\ x \in X_\lambda,\ y \in Y_\mu\} \tag{3}$$

具有格式 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为多项式 $_{\mathcal{F}}(D)$。只需注意，族 $X_\lambda \times Y_\lambda$ 的全空间是 $(X_\Lambda \times Y_\Lambda) \cap \{\lambda = \mu\}$ 的一个投影。□

同理，可以证明以下引理。

引理 2.5。 设 $f_\lambda, g_\lambda : X \to Y$和 $h_\lambda : Y \to Z$是可定义的$(\mathcal{F}, D)$-族。则族 $f_\lambda \pm g_\lambda, h_\lambda \circ f_\lambda$ 是$(O_{\mathcal{F}}(1)$, 多项式$_{\mathcal{F}}(D))$-族。若 $Y \subset \mathbb{R}$，则 $f_\lambda g_\lambda$也如此；若进一步有 $g_\lambda \neq 0$，则 f_λ / g_λ也如此。

2.3. **细化的锐度**。 我们将经常隐式地使用以下引理。

引理 2.6.

(1) 设 Φ 是 I^ℓ 的一个柱状分解，其胞腔的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D；对于每个胞腔 $\mathcal{C} \in \Phi$，设 $\Phi_{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个柱状分解，其胞腔的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D。那么存在 I^ℓ 的一个柱状分解 Ψ，其大小为 $\mathit{poly}_{\mathcal{F}}(D, \sum_{\mathcal{C}\in\Phi} |\Phi_{\mathcal{C}}|)$，胞腔的格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 $\mathit{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，且该分解细化所有分解 $\Phi_{\mathcal{C}}$。更准确地说，Ψ 的每个胞腔都包含于某个 $\Phi_{\mathcal{C}}$ 的胞腔中，其中 $\mathcal{C} \in \Phi$。*(2)* 设 $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ 是 I^ℓ 的柱状分解，其胞腔的格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D。那么存在 I^ℓ 的一个柱状分解 Ψ，其大小为 $\mathit{poly}_{\mathcal{F}}(D, \sum_{i=1}^{s} |\Phi_i|)$，胞腔的格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 $\mathit{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，且该分解细化 $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$。

证明。 对于第一项，对 $\cup_{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}}$ 中的所有胞腔组成的集族使用 $\#$CD。对于第二项，对 $\cup_i \Phi_i$ 中的所有胞腔组成的集族使用 $\#$CD。 □

2.4. **轨迹的尖锐性**。 我们需要以下关于 [5, 命题 31] 的稍强表述。不过，证明保持不变。

命题 2.7。 设 f_1、……、$f_s\colon I^\ell \to I$ 是格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的可定义函数。那么，在余维为 ≥ 1、格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$ 且次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D, s)$ 的可定义集 V 之外，f_1、……、f_s 都是 C^r。

证明。 参见 [5, 命题 3.1] 的证明。 □

注 2.8。 同样的证明表明，若 f 是 C^r，则对于任意满足 $|\alpha| \leq r$ 的 $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$，偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} f$ 的格式为 $O_{\mathcal{F},|\alpha|}(1)$，次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},|\alpha|}(D)$。我们将使用这一事实，而不再援引此注。

2.5. **锐性可定义选择**。

命题 2.9. 设 $\{X_y \subset \mathbb{R}^\ell\}_{y\in Y}$ 是一族非空可定义集$(\mathcal{F}, D)$。那么存在一个可定义映射 $g\colon Y \to \mathbb{R}^\ell$，其格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为$\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，使得 $g(y) \in X_y$ 对所有 $y \in Y$ 都成立。

证明。 见 [5, 第 4]节。 □

注2.10。 以下是一个等价表述：设 $f\colon X \to Y$ 是格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的可定义满射函数。那么存在一个可定义截面 $g\colon Y \to X$，它是 f 的截面，格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 多项式$_{\mathcal{F}}(D)$。

3. Forts

3.1. 堡垒与态射。 设 $q_i^m\colon I^m \to I^{m-i}$ 为最后 $m-i$ 个坐标上的投影。 m 通常省略。

对于满足 $1 \le i \le \ell$ 的集合 $X \subset \mathbb{R}^\ell$ 和 $x \in \pi_i(X)$，我们记作 $X_x := q_i(\pi_i|_X^{-1}(x))$。对于点 $x \in \mathbb{R}^\ell$ 和整数 $1 \le i \le \ell$，我们记作 $x_{1\dots i} := (x_1, \dots, x_i)$。

定义 3.1。 长度为1 的整数胞腔要么是一个点 $\{k\}$，要么是一个区间 $(k, k+1)$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。长度为 ℓ 的整数胞腔是由 ℓ 个长度为1的整数胞腔构成的乘积。

注 3.2。 从现在起，记号 $\mathcal{C}$ 专用于整数胞腔，而非定义*1.12.*中的一般胞腔

堡垒有两种有用的归纳定义。定义 3.3根据堡垒沿 x_1 轴的结构来定义堡垒，而定义3.5则类似于 o-极小几何中胞腔的归纳定义。我们将在下文的命题 3.8中证明这两种定义等价。

定义 3.3。 长度为 $\mathscr{F}$ 1 的堡垒是一个区间 $(0, n)$，其中正整数为 n。它自然地划分为整数胞腔，并定义 $C(\mathscr{F})$ 为这些整数胞腔的集合。我们用 $\mathrm{Forts}(1)$ 表示长度为 1的堡垒集合。

设 $\mathscr{F}^1$ 是一个长度为 1的堡垒，并设 $s\colon \ C(\mathscr{F}^1) \to \mathrm{Forts}(\ell-1)$ 是任意函数。长度为 ℓ的堡垒是集合

$$\mathscr{F}^1 \ltimes s := \bigcup_{\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^1)} \mathcal{C} \times s(\mathcal{C}). \tag{4}$$

堡垒 $\mathscr{F}^1 \ltimes s$ 自然地划分为整数胞腔 $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$，其中 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^1)$ 以及 $\mathcal{C}' \in C(s(\mathcal{C}))$。我们用 $C(\mathscr{F}^1 \ltimes s)$ 表示这些胞腔的集合。最后，用$\mathrm{Forts}(\ell)$ 表示长度为 ℓ的堡垒集合。

注记3.4. 我们常用带上标的 $\mathscr{F}$ 表示其长度。也就是说，除非另有说明，$\mathscr{F}^\ell$ 表示 $\mathscr{F}$ 是一个长度为 ℓ的堡垒。

定义3.5. 设 $\mathscr{F}^{\ell-1}$ 是一个堡垒，且 $\varphi\colon \ \mathscr{F}^{\ell-1} \to \mathbb{N}$ 是一个在每个胞腔 $\mathcal{C} \in C\ (\mathscr{F}^{\ell-1})$ 上为常数的函数。那么集合

$$\mathscr{F}^{\ell-1} \odot \varphi := \{(x_1, \dots, x_\ell) : \ (x_1, \dots, x_{\ell-1}) \in \mathscr{F}^{\ell-1},\ 0 < x_\ell < \varphi(x_1, \dots, x_{\ell-1})\} \tag{5}$$

是一个长度为 ℓ的堡垒。

例3.6. 设 $\mathscr{F}^\ell$ 是一个堡垒。那么对于任意 $1 \le i < \ell$，集合 $\pi_i(\mathscr{F}^\ell)$ 是一个堡垒。我们还称 $\mathscr{F}^\ell$ 扩展了 $\pi_i(\mathscr{F}^\ell)$。

例3.7. 设 $\mathscr{F}^\ell$ 是一个堡垒。那么对于任意 $1 \le i \le \ell$ 以及每个 $(x_1, \dots, x_i) \in \pi_i(\mathscr{F}^\ell)$，集合 $\mathscr{F}^\ell_{(x_1,\dots,x_i)}$ 是一个堡垒。

命题3.8。 定义 *3.5* 等价于定义 *3.3*。

证明。首先注意，用这两种定义验证例 3.6 都很直接。我们对 ℓ 使用归纳法，$\ell = 1$、2 这两种情况显然成立。设 $\mathscr{F}^\ell$ 是定义 3.3 意义下的一个堡垒，并记为 $\mathscr{F}^\ell = \mathscr{F}^1 \ltimes s$。对每个胞腔 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^1)$，记 $s'(\mathcal{C}) := \pi_{\ell-2}(s(\mathcal{C}))$。由归纳法，存在一个函数 $\varphi_{\mathcal{C}} : s'(\mathcal{C}) \to \mathbb{N}$，它在 $s'(\mathcal{C})$ 的各个胞腔上为常数，并且满足 $s'(\mathcal{C}) \odot \varphi_{\mathcal{C}} = s(\mathcal{C})$。我们将 $\varphi_{\mathcal{C}}$ 延拓到 $\mathcal{C} \times s'(\mathcal{C})$，令其与 $x_1 \in \mathcal{C}$ 无关，并继续使用同一记号 $\varphi_{\mathcal{C}}$。

接下来，注意到 $\mathscr{F}^{\ell-1} := \pi_{\ell-1}(\mathscr{F}^\ell) = \mathscr{F}^1 \ltimes s'$，因此 $\varphi := \bigcup_{\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^1)} \varphi_{\mathcal{C}}$ 是一个函数 $\mathscr{F}^{\ell-1} \to \mathbb{N}$，它在 $\mathscr{F}^{\ell-1}$ 的胞腔上为常数。接下来只需证明 $\mathscr{F}^\ell = \mathscr{F}^{\ell-1} \odot \varphi$。

在 $\mathscr{F}^\ell$ 中固定一个胞腔，它的形式为 $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times \mathcal{C}''$，其中 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^1)$ 且 $\mathcal{C}'' \in C(s(\mathcal{C}))$。由于 $s'(\mathcal{C}) \odot \varphi_{\mathcal{C}} = s(\mathcal{C})$，$\varphi_{\mathcal{C}}$ 在 $\pi_{\ell-2}(\mathcal{C}'')$ 上的值不小于 $\sup q_{\ell-2}(\mathcal{C}'')$。根据 φ 的定义，这意味着该胞腔也是 $\mathscr{F}^{\ell-1} \odot \varphi$ 的一个胞腔。同样的论证表明，$\mathscr{F}^{\ell-1} \odot \varphi$ 的每个胞腔都是 $\mathscr{F}^\ell$ 的一个胞腔。

Th证明定义 3.5 蕴含定义 3.3 是完全类似的。 □

接下来，我们为 Forts(ℓ) 配备态射，使其成为一个范畴。

定义 3.9。 设 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \in$ 堡垒(ℓ)。可定义映射 $\phi : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ 称为态射，如果：

(1) ϕ是满射(2) ϕ是前胞腔的。(3) 对于每个 $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{C}(\mathscr{F}_1)$，存在 $\mathcal{C}_2 \in C(\mathscr{F}_2)$ 使得 $\phi(\mathcal{C}_1) \subset \phi(C_2)$，并且限制映射 $\Phi|_{\mathcal{C}_1}$ 是连续的。

例 3.10。 设 $\mathscr{F}$ 是一个堡垒。那么，对于 $d \in \mathbb{N}$，集合 $d\mathscr{F} = \{d \cdot x,\ x \in \mathscr{F}\}$ 也是一个堡垒，而由 $x \mapsto d^{-1}x$ 给出的映射 $d\mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 是一个称为 d 阶线性细分的态射。

例 3.11。 设 $\phi : \mathscr{F}_1^\ell \to \mathscr{F}_2^\ell$是一个态射。则对于任意 $1 \le i < \ell$、$\phi_{1\dots i} := (\phi_1, \dots, \phi_i)$ 是一个态射 $\pi_i(\mathscr{F}_1^\ell) \to \pi_i(\mathscr{F}_2^\ell)$。

例 3.12。 设 $\phi : \mathscr{F}^\ell \to \mathscr{G}^\ell$ 是一个态射。则对于任意 $1 \le i \le \ell$，以及每个 $(x_1, \dots, x_i) \in \pi_i(\mathscr{F}^\ell)$，映射 $\phi_{(x_1,\dots,x_i)} := \phi(x_1, \dots, x_i, \cdot, \dots, \cdot)$ 是一个态射 $\mathscr{F}^\ell_{(x_1,\dots,x_i)} \to \mathscr{G}^\ell_{\phi_{1\dots i}(x_1,\dots,x_i)}$。

以下是态射的一个重要例子。它们是通过 o-极小胞腔的规范逐坐标仿射参数化构造的。

定义 3.13. 设 $X \subset \mathbb{R}^m, Y \subset \mathbb{R}^n$ 是可定义集。若映射 $f\colon X \to Y$ 是仿射的，则称其为仿射，即 f 是仿射映射 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$的一个限制，也就是说，$f = Ax + b$ 对于$A \in M_{n\times m}, b \in \mathbb{R}^n$。

定义 3.14. 设 $\mathcal{C}$ 是长度为 ℓ的整数胞腔。若对每个 $1 \le i \le \ell$ 以及每个 $(x_1, \ldots, x_{i-1}) \in \pi_{i-1}(\mathcal{C})$，函数$\phi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot)$ 都是仿射的，则称胞腔映射 $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}^\ell$ 是自然的。

下面的引理显而易见。

引理 3.15. 设 C 是一个长度为 ℓ的胞腔（不一定是整数胞腔），并设 $\mathcal{C}$ 是任意一个与 C类型相同的整数胞腔。则存在唯一的满射自然胞腔映射 $A^{\mathcal{C},C}\colon \mathcal{C} \to C$。若 C 在一个尖锐 o-极小结构中可定义，且其格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D，则 $A^{\mathcal{C},C}$的格式为 $O_F(1)$，次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。

定义 3.16. 若对每个 $\mathcal{C}_1 \in C(\mathscr{F}_1^\ell)$，限制映射 $\phi|_{\mathcal{C}_1}$都是自然的，则称态射 $\phi\colon \mathscr{F}_1^\ell \to \mathscr{F}_2^\ell$ 是自然的。

给定 I^ℓ 的柱状分解 Φ，存在唯一的一对 $(\mathscr{F}^\ell, \phi)$，其中 $\phi\colon \mathscr{F}^\ell \to I^\ell$ 是一个自然态射，且对于每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell)$，其限制 $\phi|_{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 与 Φ 的一个胞腔之间的同胚。堡垒 $\mathscr{F}^\ell$ 将称为 Φ 的类型。现在我们将描述一系列双射，以说明态射与柱状参数化之间的等价性。

(1) I^ℓ 的类型为 $\mathscr{F}^\ell$ 的柱状分解与自然态射 $\mathscr{F}^\ell \to I^\ell$ 之间存在 $1-1$ 对应关系。(2) I^ℓ 的类型为 $\mathscr{F}^\ell$ 的柱状分解的柱状参数化与态射 $\mathscr{F}^\ell \to I^\ell$ 之间存在 $1-1$ 对应关系。(3) 给定与自然态射 $\phi\colon \mathscr{F}^\ell \to I^\ell$ 对应的柱状分解 Φ， Φ 的类型为 $\mathscr{G}^\ell$ 的细化 Φ' 的柱状参数化与以下类型的态射交换三角形之间存在 $1-1$ 对应关系

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}^\ell & \xrightarrow{\ \phi\ } & I^\ell \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathscr{G}^\ell & & \end{array} .$$

特别是，这意味着 o-极小性中的普通柱面分解定理可以用堡垒和自然态射来重新表述。我们将采用下面这个稍强一些的表述。

定义 3.17. 设 $\mathscr{F}$ 是一个堡垒，并设 $\{X_{\mathcal{C},j}\}_{\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}),\, j\in J}$ 是 $\mathscr{F}$ 的可定义子集集族，满足 $X_{\mathcal{C},j} \subset \mathcal{C}$。若态射 $\phi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 与 $\{X_{\mathcal{C},j}\}_{\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}),\, j\in J}$ 相容，即 $\phi(\mathcal{C})$ 与每个 $X_{\mathcal{C},j}$ 相容，则称其与 $\{X_{\mathcal{C},j}\}_{\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}),\, j\in J}$ 相容。

命题 3.18. . 设 $\mathscr{F}$ 是一个堡垒，并设 $\{X_{C,j}\}_{C\in C(\mathscr{F}),\, j\in J}$ 是 $\mathscr{F}$ 的可定义子集集族，满足 $X_{C,j}\subset C$。那么存在一个与 $\{X_{C,j}\}_{C\in C(\mathscr{F}),\, j\in J}$ 相容的自然态射 $\widetilde{\phi}\colon \mathscr{F}\to\mathscr{F}$。

此外，如果该结构是 $\#$极小的，且集合 $X_{C,\,j}$ 具有格式 $\mathcal{F}$ 和 $\widetilde{\ }$次数 D，那么 $\mathscr{F}$ 的大小可以取为 多项式 $\mathcal{F}(D,|C(\mathscr{F})|,|J|)$，并且态射 ϕ 可以选取为使得对每个 $C\in C(\mathscr{F})$，限制映射 $\phi|_C$具有格式 $O_{\mathcal{F}}(1)$，且次数为 多项式$\mathcal{F}(D)$。

我们将推迟命题 3.18 的证明，直到进一步发展堡垒理论。

3.2. **组合等价**。 下面给出一个关于态射的通用且实用的引理。

引理 3.19。 设 $\phi\colon \mathscr{F}_1^{\ell}\to\mathscr{F}_2^{\ell}$是一个态射。那么 ϕ是单射；此外，对于每个 $1\le i\le \ell$以及每个 $(x_1,\dots,x_{i-1})\in \pi_{i-1}(\mathscr{F}_1^{\ell})$，函数$\phi_i(x_1,\dots,x_{i-1},\cdot)$是连续的。

证明。我们对 ℓ 使用归纳法来证明。对于 $\ell=1$，由于 ϕ 是两个区间之间的严格单调递增双射，因此显然是单射且连续。

假设命题对 $\ell-1$ 成立。固定 $(x_1,\dots,x_{\ell-1})\in\pi_{\ell-1}(\mathscr{F}_1^{\ell})$。根据例 3.12 和 $\ell=1$ 情形，函数 $\phi_\ell(x_1,\dots,x_{\ell-1},\cdot)$ 是连续的。如果 $\phi(x)=\phi(x')$，由归纳假设可知 $\pi_{\ell-1}(x)=\pi_{\ell-1}(x')$，进而由 $\phi_\ell(x_1,\dots,x_{\ell-1},\cdot)$ 严格单调这一事实可得 $x=x'$。□

假设给定一个可定义族 $\{\phi_\lambda:\mathscr{F}\to\mathscr{G}\}_{\lambda\in I}$，其元素是从堡垒$\mathscr{F}$到堡垒 $\mathscr{G}$的态射。那么，由 $(\lambda,x)\mapsto(\lambda,\phi_\lambda(x))$ 定义的映射 $I\times\mathscr{F}\to I\times\mathscr{G}$是一个满的前胞腔映射，但不一定是态射。第一个障碍是 λ 中所有胞腔 $C\in C(\mathscr{F})$ 上限制映射 $\phi_\lambda|_C$ 的连续性。为表述第二个障碍，我们引入以下定义。

定义 3.20。 设 $\phi,\psi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是态射。若对于每个 $C\in C(\mathscr{F})$，像 $\phi(C)$ $\psi(C)$ 都包含在 $\mathscr{G}$的同一个胞腔中，则称 ϕ,ψ 组合等价。

例 3.21。 设 $\mathscr{F}\in\mathrm{Forts}(\ell)$，则所有态射 $\mathscr{F}\to I^{\ell}$ 都组合等价。

例 3.22. 考虑以下两个自然态射 $\phi,\psi:(0,3)\to(0,2)$。

$$\phi=\begin{cases}\frac{x}{2},\ x\in(0,2],\\ x-1,\ x\in(2,3)\end{cases}\qquad \psi=\begin{cases}x,\ x\in(0,1],\\ \frac{x+1}{2},\ x\in(1,3)\end{cases}\tag{6}$$

它们并非组合等价，因为 $\phi(1)=\frac{1}{2}$，因此 ϕ 将胞腔 $\{1\}$映射到胞腔 $(0,1)$，而 $\psi(1)=1$，因此将胞腔 $\{1\}$ 映射到其自身。

命题 3.23. 设 $\{\phi_\lambda : \mathscr{F} \to \mathscr{G}\}_{\lambda\in I}$ 是一个组合等价态射的可定义族。此外，假设对于每个 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F})$，映射 $(\lambda,x)\mapsto\phi_\lambda(x)$ 在 $I\times\mathcal{C}$ 上连续。那么，由$(\lambda,x)\to(\lambda,\phi_\lambda(x))$ 定义的映射 $\psi: I\times\mathscr{F}\to I\times\mathscr{G}$ 是一个态射。

证明。显然，ψ 是满射且为前胞腔的。根据第二个假设，我们还知道 ψ 在 $I\times\mathscr{F}$ 的胞腔上连续。现在设 $\mathcal{C}\in C(I\times\mathscr{F})$ 是一个胞腔。那么存在 $\mathcal{C}'\in C(\mathscr{F})$ 使得 $\mathcal{C}=I\times\mathcal{C}'$。由于这些 ϕ_λ 组合等价，存在 $\mathcal{C}''\in C(\mathscr{G})$ 使得 $\phi_\lambda(\mathcal{C}')\subset\mathcal{C}''$ 对所有 λ 都成立。因此，ψ 将 $I\times\mathcal{C}'$ 映入 $I\times\mathcal{C}''$，如所需。□

Th以下是关于堡垒和态射的一条重要结构命题 s.

命题 3.24. 设 $\phi\colon \mathscr{F}^\ell\to\mathscr{G}^\ell$ 是一个态射，且 $\mathcal{C}\in C(\pi_i(\mathscr{F}^\ell))$ 对于某个 $1\le i\le\ell$成立。

(1) 对于每个 x，$x'\in\mathcal{C}$，都有 $\mathscr{F}^\ell_x=\mathscr{F}^\ell_{x'}$。因此，记号 $\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C}):=\mathscr{F}^\ell_x$是合理的。(2) 映射 $C(\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C}))\to C(\mathscr{F}^\ell)$ 由 $\mathcal{C}'\mapsto\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$ 定义，它是 $\sim$ $\sim C(\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C}))$ 与 $\mathscr{F}^\ell$ 中满足 $\pi_i(\mathcal{C}')=\mathcal{C}$ 的胞腔 $\mathcal{C}'$ 之间的一个双射。(3) 对于每个 x，$x'\in\mathcal{C}$，态射 ϕ_x、$\phi_{x'}$ 组合等价。

证明。我们通过对 i 作升序归纳来证明第一项。

1. 对于 $i=1$，由定义 3.3 可知结论显然成立。现在假设该结论对 $i-1$ 成立。令 $(x_{i+1},\dots,x_\ell)\in\mathscr{F}^\ell_x$。由于 $x_{1\dots i-1},x'_{1\dots i-1}$ 属于 $\pi_{i-1}(\mathscr{F}^\ell)$ 的同一个胞腔，根据归纳法，我们有 $\mathscr{F}^\ell_{x_{1\dots i-1}}=\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}$，因此 $(x_i,x_{i+1},\dots,x_\ell)\in\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}$，换言之，$(x_{i+1},\dots,x_\ell)\in\left(\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}\right)_{x_i}$。我们断言 x_i,x'_i 属于 $\pi_1\left(\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}\right)$ 的同一个胞腔。事实上，由于 x,x' 属于 $\pi_i(\mathscr{F}^\ell)$ 的同一个胞腔，因此 x_i,x'_i 介于相同的两个连续整数之间，或者二者都等于某个整数。这恰好意味着它们属于 $\pi_1(\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}})$ 的同一个胞腔。因此，再由归纳假设可得 $\left(\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}\right)_{x_i}=\left(\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}\right)_{x'_i}$。由此得出 $(x_{i+1},\dots,x_\ell)\in\left(\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i-1}}\right)_{x'_i}=\mathscr{F}^\ell_{x'_{1\dots i}}$。所以 $\mathscr{F}^\ell_x\subset\mathscr{F}^\ell_{x'}$，由对称性可知二者实际上相等。

2. 由于 $\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C})$ 的胞腔互不相交，显然此映射是一一映射。令$\mathcal{C}'\in C(\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C}))$，显然，$\mathcal{C}\times\mathcal{C}'$与 $\mathscr{F}^\ell$并不互不相交；又由于它是一个整数胞腔，因此可得 $\mathcal{C}\times\mathcal{C}'\in C(\mathscr{F}^\ell)$，显然 $\pi_i(\mathcal{C}\times\mathcal{C}')=\mathcal{C}$。最后，令

$\widetilde{\mathcal{C}'} \in \mathcal{C}(\mathscr{F}^\ell)$ 使得 $\pi_i(\widetilde{\mathcal{C}'}) = \mathcal{C}$。那么对于某个整数胞腔 $\mathcal{C}'$，有 $\widetilde{\mathcal{C}'} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$。同样，显然 $\mathcal{C}'$ 与 $\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C})$并不互不相交，因此 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C}))$，所以此映射是满射。

$\widetilde{\ }$3. 设 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^\ell(\mathcal{C}))$，并令 $\mathcal{C}'' \in C(\mathscr{G}^\ell)$ 为包含 $\phi(\mathcal{C} \times \mathcal{C}')$ 的胞腔。$\widetilde{\ }$根据第二项，$\mathcal{C}''$ 对应于一个胞腔 $\mathcal{C}'' \in C(\mathscr{G}^\ell_{\phi_{1\dots i}(x_{1\dots i})})$。我们声称，$\phi_x(\mathcal{C}')\ \phi_{x'}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}''$。事实上，令 $y \in \mathcal{C}'$。则 (x,y)、$(x',y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$，因此$\sim\phi(x,y)\ \phi(x',y) \in \mathcal{C}''$。再根据第二项，这恰好意味着 $\phi_x(y)\ \phi_{x'}(y) \in \mathcal{C}''$。□

3.3. **逆像fort结构与命题 3.18的证明。**

引理3.25. 设 $\mathscr{F}, \mathscr{G} \in \mathrm{Forts}(\ell)$，且设 $\phi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是一个态射。设 $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$是一个堡垒。那么 $\mathscr{F}' := \phi^{-1}(\mathscr{G}')$ 是一个堡垒，且 $\phi|_{\mathscr{F}'}\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$ 是一个态射。

证明。若 $\mathscr{F}'$ 是一个堡垒，则引理的第二部分显然成立。我们对 ℓ使用归纳法，证明它是一个堡垒。$\ell = 1$的情形显然。根据归纳假设，$\phi^{-1}_{1\dots\ell-1}(\pi_{\ell-1}(\mathscr{G}'))$ 是一个堡垒；又因 ϕ是前胞腔的，我们有 $\pi_{\ell-1}(\mathscr{F}') = \phi^{-1}_{1\dots\ell-1}(\pi_{\ell-1}(\mathscr{G}'))$。设 $\mathcal{C}$是 $\phi^{-1}_{1\dots\ell-1}(\pi_{\ell-1}(\mathscr{G}'))$ 的一个胞腔，并设 $\mathcal{C}''$是 $\pi_{\ell-1}(\mathscr{G}')$ 中包含 $\phi_{1\dots\ell-1}(\mathcal{C})$ 的胞腔。那么 $\mathscr{G}'(\mathcal{C}'')$ 自然是 $\mathscr{G}(\mathcal{C}'')$ 的一个子堡垒，因此根据归纳假设，对任意 $x \in \mathcal{C}$，$\mathscr{F}'_x$ 都是一个堡垒。此外，根据命题 3.24，对任意 $x, x' \in \mathcal{C}$，态射 $\phi_x, \phi_{x'}\colon \mathscr{F}(\mathcal{C}) \to \mathscr{G}(\mathcal{C}'')$ 组合等价，这恰好意味着，对于任意这样的 x, x'，$\mathscr{F}'_x = \mathscr{F}'_{x'}$。根据定义3.5，我们已证明 $\mathscr{F}'$是一个堡垒。□

命题 3.18 的证明。堡垒 $\mathscr{F}$ 包含于堡垒 $\mathscr{D}$ 中，后者是 $(0,1)^\ell$的一个阶为 $d \le |C(\mathscr{F})|$的线性细分。由 #CD 可知，存在一个与集合 $X_{\mathcal{C},j}$ 以及胞腔 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{D})$ 相容的 $\mathscr{D}$ 的柱状分解，该分解由格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$、次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 的 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D, |C(\mathscr{D})|, |\{X_{\mathcal{C},j}\}|) = \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D, |C(\mathscr{F})|, |J|)$ 个胞腔组成。事实上，长度为 ℓ 的整数胞腔的格式始终为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 $\mathrm{poly}(\ell) = \mathrm{poly}(\mathcal{F})$，这在我们的尺度范围内，因为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D, \mathcal{F}) = \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，而且 $|C(\mathscr{D})| = \mathrm{poly}_\ell(|C(\mathscr{F})|)$。

换言之，存在一个满射前胞腔映射 $\phi\colon \mathscr{F}' \to \mathscr{D}$，其中 $\mathscr{F}'$是一个堡垒，并且具有 $|C(\mathscr{F}')| = \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D,\ |C(\mathscr{F})|,\ |J|)$，使得对于任意 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}')$，$\phi|_{\mathcal{C}'}$ 都是连续的，且具有格式 $O_{\mathcal{F}}(1)$ 和次数 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。此外，由于 $\phi(\mathcal{C}')$ 与 $\mathscr{D}$ 的胞腔相容，而这些胞腔彼此不相交，因此可知存在 $\mathscr{D}$ 的一个胞腔 $\widetilde{\ }$，其中包含 $\phi(\mathcal{C}')$。因此，ϕ 是态射。记 $\mathscr{F} := \phi^{-1}(\mathscr{F})$。现在很容易看出，$\phi|_{\widetilde{\mathscr{F}}}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ 满足命题的要求。□

3.4. 沿扩张拉回。 沿着到堡垒 $\pi_{\ell-1}(\mathscr{F}^\ell)$ 的态射对堡垒 $\mathscr{F}^\ell$ 进行拉回，是一种有用的自然构造。

定义 3.26。 设 $\phi\colon\ \mathscr{F}_1^{\ell-1} \to \mathscr{F}_2^{\ell-1}$是一个态射，并设 $\mathscr{F}_2^\ell$扩张 $\mathscr{F}_2^{\ell-1}$。我们定义堡垒 $\phi^*\mathscr{F}^\ell$。假设 $\mathscr{F}_2^\ell = \mathscr{F}_2^{\ell-1} \odot \varphi$（如定义 3.5所述），那么我们定义 $\phi^*\mathscr{F}_2^\ell := \mathscr{F}_1^{\ell-1} \odot (\varphi \circ \phi)$。态射 ϕ 可扩张为态射 $(\phi,\ Id)\colon\ \phi^*\mathscr{F}_2^\ell \to \mathscr{F}_2^\ell$。

若有态射 $\phi\colon\ \mathscr{F}_1^k \to \mathscr{F}_2^k$，且对 $1 \le k < \ell$ 和堡垒 $\mathscr{F}_2^\ell$ 扩张 $\mathscr{F}_2^k$，则 $\phi^*\mathscr{F}_2^\ell \in \mathrm{Forts}(\ell)$ 可通过归纳法定义，而 ϕ 也将再次扩张为态射 $\phi^*\mathscr{F}_2^\ell \to \mathscr{F}_2^\ell$。

我们需要以下引理，留给读者作为练习。

引理 3.27. 设 $\phi, \psi\colon \mathscr{F}^k \to \mathscr{G}^k$ 组合等价，且 $\mathscr{G}^\ell$ 延拓$\mathscr{G}^k$。那么 $\phi^*\mathscr{G}^\ell = \psi^*\mathscr{G}^\ell$，此外，$\phi, \psi$ 到 $\phi^*\mathscr{G}^\ell$ 的延拓也组合等价。

3.5. 塔构造。 给定一个态射 $\phi\colon\ \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，与其记录 ϕ 本身的格式和次数，不如记录 ϕ 在 $\mathscr{F}$的整数胞腔上的限制的格式和次数，这样更方便。因此，我们引入以下一个有用但略有滥用的记号。

定义 3.28. 我们称态射族 $\{\phi^\lambda\colon\ \mathscr{F} \to \mathscr{G}\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个$(\mathcal{F}, D)$-态射族，若对每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F})$，族 $\{\phi^\lambda|_{\mathcal{C}}\}_{\lambda\in\Lambda}$是一个$(\mathcal{F}, D)$-族，如定义 2.3所述。

注 3.29。 设 ϕ 是任意态射，那么特别地，ϕ作为态射时的格式和次数，与其作为映射时的格式和次数不同。

若 $\mathcal{C}$ 是整数胞腔，令 $b(\mathcal{C})$ 为与 $\mathcal{C}$ 类型相同的基本胞腔。若 $m \in \mathbb{Z}$，记 $t_m(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_\ell) := (x_1 + m,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_\ell)$。

下面命题 3.30 的要点是，要构造一个到堡垒 $\mathscr{F}^1 \ltimes s$的态射，只需对每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^1)$ 构造一个到 $b(\mathcal{C}) \times s(\mathcal{C})$ 的态射。

命题 3.30（塔构造）。设 $\mathscr{F}^1 \ltimes s$ 是一个长度为 ℓ 的堡垒，且 $\mathcal{C}_1,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{C}_n$ 是 $\mathscr{F}^1$ 的胞腔，其排列与它们在 $\mathbb{R}$ 中的阶相容。假设对每个 $1 \le i \le n$，都有一个格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的态射 $\phi_{\mathcal{C}_i}\colon\ \mathscr{F}^\ell_{\mathcal{C}_i} \to b(\mathcal{C}_i) \times s(\mathcal{C}_i)$。令 $:=$ 上确界 $\pi_1(\mathscr{F}^\ell_{\mathcal{C}_i})$，且 $m_0 = 0$。那么

$$\mathscr{F}^\ell := \bigcup_{i=0}^{n-1} t_{m_0+\cdots+m_i}(\mathscr{F}^\ell_{\mathcal{C}_{i+1}}) \tag{7}$$

是一个堡垒，并且由 $\phi|_{t_{m_0+\cdots+m_i}(\mathscr{F}^\ell_{\mathcal{C}_{i+1}})} := \phi_{\mathcal{C}_i} \circ t_{-(m_0+\cdots+m_i)}$ 定义的映射 $\phi\colon\ \mathscr{F}^\ell \to \mathscr{F}^1 \ltimes s$是一个格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$、次数为 多项式$_{\mathcal{F}}(D)$的态射。

证明显而易见。注意，ϕ 的导数与 $\phi_{\mathcal{C}_i}$的导数相等，这一点对于构造具有有界导数的态射至关重要。

3.6. **光滑化**。我们称堡垒之间的态射为 C^r-态射，若其在每个整数胞腔上的限制都是 C^r。我们以下述方式在堡垒的语境中使用命题 2.7 。

命题 3.31。
Sm_ℓ：设 $\phi\colon \mathscr{F}^\ell \to \mathscr{G}^\ell$ 是一个格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D的自然态射，并固定$r \in \mathbb{N}$。那么存在一个大小为 $\mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D, |C(\mathscr{F}|))$ 的堡垒 $\mathscr{K}^\ell$，以及一个格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$、次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 的自然C^r-态射 $\psi\colon \mathscr{K}^\ell \to \mathscr{F}^\ell$，使得 $\phi\circ\psi$是一个 C^r-态射。

Fsm_ℓ：设 $\mathscr{F}^\ell$是一个堡垒，并且对每个胞腔 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F})$，令 $F_C = \{f_{\mathcal{C},j}\colon \mathcal{C} \to I\}_{j\in J}$为一族格式为 $\mathcal{F}$ 、次数为 D的可定义函数。那么存在一个格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$、次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 的自然 C^r- 态射 $\phi\colon \mathscr{K}^\ell \to \mathscr{F}^\ell$，其中 $|C(\mathscr{K}^\ell)| = \mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D, |\mathscr{F}|, |J|)$，使得对于每个 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{K}^\ell)$ 以及每个满足 $\phi(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$的$\mathcal{C} \in C(\mathscr{F})$，函数 $\phi|^*_{\mathcal{C}'} f_{\mathcal{C},j}$对每个 $j \in J$都是 C^r。

证明。证明采用与主要结果的归纳证明结构相似的归纳法。也就是说，我们证明 FSm_1，$FSm_{\ell-1} \to Sm_\ell$，$Sm_\ell \to FSm_\ell$。

FSm_1：根据塔构造，我们可以假设 $\mathscr{F}^1 = I$，并在记号中省略 $\mathcal{C}$ $f_{\mathcal{C},\,j}$。根据命题 2.7，每个 f_j 都是 C^r 多项式之外的 $\mathcal{F},\,r(D)$ 点。因此，所有 f_j 都是 C^r 多项式之外的 $|J|\cdot$点$_{\mathcal{F},\,r}(D)$。最后，将命题 3.18 应用于这些点，并注意到任何长度为 1 的自然态射都自动是 C^r。

$FSm_{\ell-1} \to Sm_\ell$：设 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell)$ 是一个胞腔。由于 ϕ 是自然的，若 $\mathrm{type}(\mathcal{C}) = (\ldots, 1)$，则存在 $f_{\mathcal{C}}$，$g_{\mathcal{C}}$：$\pi_{\ell-1}(C) \to \mathbb{R}$ 使得

$$\phi|_{\mathcal{C}}(x_1,\ldots,x_\ell) = (1-x_\ell) f_C(x_1,\ldots,x_{\ell-1}) + x_\ell g_C(x_1,\ldots,x_{\ell-1}). \tag{8}$$

如果类型为 $\mathcal{C} = (\ldots, 0)$，那么 ϕ_ℓ可以视为定义在 $\mathcal{C}' = \pi_{\ell-1}(\mathcal{C})$ 上的一个函数。令 $\mathscr{F}^{\ell-1} := \pi_{\ell-1}(\mathscr{F}^\ell)$，并对每个 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^{\ell-1})$ 定义

$$\begin{aligned} F^1_{\mathcal{C}'} &:= \{f_{\mathcal{C}}, g_{\mathcal{C}} :\ \mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell),\ \pi_{\ell-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}',\ \mathrm{type}(\mathcal{C}) = (\ldots,1)\},\\ F^2_{\mathcal{C}'} &:= \{\phi_\ell|_{\mathcal{C}} :\ \mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell),\ \pi_{\ell-1}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}',\ \mathrm{type}(\mathcal{C}) = (\ldots,0)\},\\ F^3_{\mathcal{C}'} &:= \{\phi_1|_{\mathcal{C}'}, \ldots, \phi_{\ell-1}|_{\mathcal{C}'}\}. \end{aligned} \tag{9}$$

换言之，$F^1_{\mathcal{C}'}$和 $F^2_{\mathcal{C}'}$对应于 ϕ的 $\ell' th$ 坐标，而 $F^3_{\mathcal{C}'}$对应于前 $\ell-1$ 个坐标。现在，将 $FSm_{\ell-1}$ 应用于堡垒 $\mathscr{F}^{\ell-1}$和$F_{\mathcal{C}'} = F^1_{\mathcal{C}'} \cup F^2_{\mathcal{C}'} \cup F^3_{\mathcal{C}'}$。我们得到一个自然的 C^r-态射 ψ'：$\mathscr{K}^{\ell-1} \to \mathscr{F}^{\ell-1}$。由于

$F^3_{\mathcal{C}'} \subset F_{\mathcal{C}}$，态射 $\phi_{1\dots\ell-1}\circ\psi'\colon\ \mathscr{K}^{\ell-1}\to\pi_{\ell-1}(\mathscr{G}^\ell)$是一个 C^r-态射。现在令 $\mathscr{K}^\ell := (\psi')^*\mathscr{F}^\ell$，这样 ψ'就延拓为一个自然的 C^r-态射 $\psi\colon\ \mathscr{K}^\ell\to\mathscr{F}^\ell$。最后，由于$F^1_{\mathcal{C}'}$，$F^2_{\mathcal{C}'}\subset F_{\mathcal{C}'}$，我们看到 $\phi\circ\psi$是 C^r，正如所需。很容易追踪这一构造的格式和次数。

$Sm_\ell\to FSm_\ell$：令 k 为满足下述条件的最小整数：存在一个胞腔 $\mathcal{C}$，其类型中至少有 k 个零点，并且存在一个 $j\in J$ 使得$f_{\mathcal{C},j}$ 在 $\mathcal{C}$上不是 C^r。根据命题 2.7，对于每个 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F})$，都存在一个格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$、次数为 $\mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D,|J|)$ 的可定义集 $V_{\mathcal{C}}\subset\mathcal{C}$，其维数 $\dim(\mathcal{C})-\dim(V_{\mathcal{C}})\geq 1$，使得在该集合之外，对每个 $j\in J$，$f_{\mathcal{C},j}$ 都是C^r。由命题 3.18，存在一个自然态射 $\psi\colon\mathscr{G}^\ell\to\mathscr{F}^\ell$，它与集族 $\{V_{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^\ell)}$ 相容。根据 Sm_ℓ，我们可以假设 ψ 是一个C^r-态射。因此，我们将 k 增加了 1；重复这一过程，直到 $k=\ell$，此时便完成了。□

3.7. **主要结果的重新表述**。如果态射的所有整数胞腔限制都是 r-映射，则称其为 r-态射。现在我们可以用堡垒和态射来陈述主要结果的族版本。为简便起见，我们先陈述不含参数的情形。请读者牢记定义 3.28 。

定理 3.32。$S_{\ell,\,0}$：设 $\phi\colon\ \mathscr{F}^\ell\to\mathscr{G}^\ell$ 是一个格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D的自然态射。那么存在一个堡垒 $\mathscr{K}^\ell$，满足 $|C(\mathscr{K}^\ell)|=$多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|)$，以及一个格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$、次数为多项式$_{\mathcal{F}}(D,r)$ 的 r-态射$\psi\colon\ \mathscr{K}^\ell\to\mathscr{F}^\ell$，使得复合$\phi\circ\psi$ 是一个 r-态射。

$F_{\ell,0}$：设 $\mathscr{F}^\ell$ 是一个堡垒，并且对于每个 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^\ell)$，令 $F_{\mathcal{C}}=\{f_{\mathcal{C},j}\colon\ \mathcal{C}\to I\}_{j\in J}$为一个可定义函数集族，其中每个 $f_{\mathcal{C},j}$ 的格式为 $\mathcal{F}$，次数为D。那么存在一个堡垒 $\mathscr{K}^\ell$，使得 $|C(\mathscr{K})|=\mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|)$，以及一个格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$、次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 的 r- 态射 $\phi\colon\ \mathscr{K}^\ell\to\mathscr{F}^\ell$，使得对于每个 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^\ell)$ $j\in J$，以及每个满足 $\phi(\mathcal{C}')\subset\mathcal{C}$ 的 $\mathcal{C}'\in C(\mathscr{K})$，函数 $(\phi|_{\mathcal{C}'})^*f_{\mathcal{C},j}$都是一个 r-函数。

$S_{\ell,0}$ 以如下方式推出定理 1.19 的 S^*_ℓ。设 Φ是将大小为 N、格式为 $\mathcal{F}$ 且次数为 D 的 I^ℓ 分解为胞腔的柱状分解。于是 Φ对应于一个自然态射 $\phi\colon\mathscr{F}^\ell\to I^\ell$，满足 $|C(\mathscr{F}^\ell)|=N$，且对于所有 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^\ell)$，限制映射 $\phi|_{\mathcal{C}}$的格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。设 $\psi\colon\ \mathscr{K}^\ell\to\mathscr{F}^\ell$ 是由 $S_{\ell,0}$ 保证存在的、针对 ϕ 的态射。那么复合 $\phi\circ\psi\colon\ \mathscr{K}^\ell\to I^\ell$ 对应于对 Φ 的一个细化 Φ' 的柱状 r-参数化，其大小为 $|C(\mathscr{K})|=\mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|)=\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D,N)$。此外，对于每个 $\mathcal{C}'\in\mathscr{K}$，限制映射 $(\phi\circ\psi)|_{\mathcal{C}'}$ 是两个映射的复合，它们的格式为$O_{\mathcal{F}}(1)$，次数分别为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$、$\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$。因此，由引理 2.5，$(\phi\circ\psi)|_{\mathcal{C}'}$

具有形式t $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为 poly$_{\mathcal{F},\,r}(D)$，正如所需。$F_{\ell,\,0}$以类似方式推出 F_ℓ^* .

现在我们陈述主要结果的族版本。

定理3.33。
$S_{\ell,\,k}$:: 令$\mathcal{F}\{\phi\to\mathcal{G}^\ell\}_{\lambda\in I^k}$为一个由自然态射构成的（$\mathcal{F}, D$）-族。那么存在

- 一个格式为 $\varphi:\mathscr{K}^k\to I^k$ 、次数为$_{,r}(1)$、次数$\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 的自然态射，其中$|C(\mathscr{K}^k)|=\mathrm{poly}_{\max\{\mathcal{F},r\}}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|)$,
- 对于每个 $\mathcal{P}\in C(\mathscr{K})$，存在一个堡垒 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}$，其满足 $|C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})|=\mathrm{polymax}_{\{\mathcal{F},r\}}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|)$, 以及一个由组合等价的 r-态射构成的 $(O_{\mathcal{F},r}(1),\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D))$-族$\{\psi^\lambda:\mathscr{K}_{\mathcal{P}}\to\mathscr{F}^\ell\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$,

使得对于每个 $\lambda\in\varphi(\mathcal{P})$，复合 $\phi^\lambda\circ\psi^\lambda$ 是一个 r-态射。

$F_{\ell,k}$: 令 $\mathscr{F}^\ell$为一个堡垒，并且对每个 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^\ell)$，令$F_{\mathcal{C},\lambda}=\{f_{\mathcal{C},j,\lambda}:\mathcal{C}\to I\}_{\lambda\in I^k,j\in J}$为一个集族，其中每个固定的 $j\in J$ 所对应的族 $\{f_{\mathcal{C},j,\lambda}:\mathcal{C}\to I\}_{\lambda\in I^k}$都是一个由可定义函数构成的$(\mathcal{F}, D)$-族。则存在

- 一个格式为 $\varphi:\mathscr{K}^k\to I^k$ 、次数为$_{,\,r}(1)$、次数多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D)$ 的自然态射，其中$|C(\mathscr{K}^k)|=$多项式$_{\text{最大值}\{\mathcal{F},r\}}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|,|J|)$,
- 对于每个 $\mathcal{P}\in C(\mathscr{K})$，一个具有 $|C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})|=$多项式$_{\mathcal{F}}(D,|C(\mathscr{F}^\ell)|,|J|)$ 的堡垒 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}$, 以及一族由组合等价的 r-态射组成的 $(O_{\mathcal{F},r}(1),$多项式$_{\mathcal{F},r}(D))$-族 $\{\phi^\lambda:\mathscr{K}_{\mathcal{P}}\to\mathscr{F}^\ell\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$,

使得对于每个 $\lambda\in\varphi(\mathcal{P})$ 以及每个$f_{\mathcal{C},j,\lambda}\in F_{\mathcal{C},\lambda}$，其中 $\phi^\lambda(\mathcal{C}')\subset\mathcal{C}$，拉回 $\left(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}'}\right)^* f_{\mathcal{C},j,\lambda}$ 是一个 r-函数。

3.8. **最终备注**。

注 3.34。容易看出，将态射 ϕ 与阶为 d 的线性细分复合，至少会使 ϕ 的偏导数缩小 d^{-1}倍。类似地，若 $\phi:\ \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是一个态射，而 f 是定义在 $\mathscr{G}$的某个胞腔上的函数，那么对 $\mathscr{F}$ 进行 d-细分，也会至少使 ϕ^*f 的偏导数缩小 d倍。阶为 d 的线性细分会使长度为 ℓ 的堡垒的大小扩大 d^ℓ倍；我们常常会使用带有 $d=\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\,r}(D)$ 或$d=O_{\mathcal{F},\,r}(1)$的线性细分，因此会自由地使用这一约化。例如，两个r-态射的复合，在进行阶为 $O_{\ell,\,r}(1)=O_{\mathcal{F},\,r}(1)$的线性细分后，是一个 r-态射。

注 3.35. 令 $\mathscr{F}^\ell$为一个堡垒，并且对于每个 $\mathcal{C}\in C(\mathscr{F}^\ell)$令$F_{\mathcal{C},\lambda}=\{f_{\mathcal{C},j,\lambda}:\mathcal{C}\to I\}_{\{\lambda\in I^k,j\in J\}}$ 为一个由 $|J|$ 族构成的集族，使得对于每个固定的 $j\in J$，族$\{f_{\mathcal{C},j,\lambda}:\mathcal{C}\to I\}_{\lambda\in I^k}$都是一个由可定义函数构成的$(\mathcal{F}, D)$-族。假设我们希望找到

- 一个格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$、次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 的自然态射 $\varphi\colon \mathscr{K}^k \to I^k$，其中$|C(\mathscr{K}^k)| = \mathrm{poly}_{\max\{\mathcal{F},r\}}(D, |C(\mathscr{F}^\ell)|, |J|)$，
- 对于每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K})$，存在一个堡垒 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}$，其具有 $|C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})| =$多项式$_{\mathcal{F}}(D, |C(\mathscr{F}^\ell)|, |J|)$，以及一个 $(O_{\mathcal{F},r}(1),$多项式$_{\mathcal{F},r}(D))$-族，其中包含组合等价的 r-态射$\{\phi^\lambda\colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}} \to \mathscr{F}^\ell\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$，

使得对于每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ 以及每个 $f_{C,\,j,\,\lambda} \in F_{C,\,\lambda}$ 其中 $\phi^\lambda(C') \subset C$，拉回 $\left(\phi^\lambda|_{C'}\right)^* f_{C,\,j,\,\lambda}$ 具有性质 P。此外，假设当函数 $f_{C,\,j,\,\lambda}$ 具有性质 Q时，也可以做到这一点。那么，只需找到

- 一个自然态射 $\varphi'\colon \mathscr{K}'^k \to I^k$，其格式为 $O_{\mathcal{F},\,r}(1)$，次数为 多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D)$，其中 $|C(\mathscr{K}^k)| =$多项式$_{\text{最大值}\{\mathcal{F},r\}}(D, |C(\mathscr{F}^\ell)|, |J|)$，
- 对于每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}'^k)$，都有一个堡垒 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}'$，其满足 $|C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}}')| =$**poly**$_{\mathcal{F}}(D, |C(\mathscr{F}^\ell)|, |J|)$，以及一个由组合等价的 r-态射组成的 $(O_{\mathcal{F},r}(1),$**poly**$_{\mathcal{F},r}(D))$-族$\{\phi'^\lambda\colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}}' \to \mathscr{F}^\ell\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$，

使得对每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ 以及每个 $f_{C,j,\lambda} \in F_{C,\lambda}$，当 $\phi^\lambda(C') \subset C$ 时，拉回$\left(\phi'^\lambda|_{C'}\right)^* f_{C,j,\lambda}$ 具有性质 Q。事实上，我们首先将 I^k 分解为一些胞腔 $\mathcal{P}$，在这些胞腔上，函数 $f_{C,j,\lambda}$ 具有性质 Q；随后，我们再将 $\mathcal{P}$ 分解为一些胞腔，在这些胞腔上，函数 $f_{C,j,\lambda}$ 具有性质 P。上述堡垒的格式和次数上界及其大小由引理 *2.6* 和线性细分得出。

特别地，我们将逐步证明$F_{\ell,\,k}$ 并在每一步将问题归结为函数 $f_{C,\,j,\,\lambda}$ 具有附加性质的情形。

4. The step $F_{1,\,k}$

我们需要一系列引理。

引理 4.1。设 $\{f_{1,\lambda}\colon I \to I\}_{\lambda\in I^k}, \dots, \{f_{s,\lambda}\colon I \to I\}_{\lambda\in I^k}$是$(\mathcal{F}, D)$-族，且设 $r \in \mathbb{N}$。那么存在

- 一个自然态射 $\varphi\colon \mathscr{K}^k \to I^k$，其格式为 $O_{\mathcal{F},\,r}(1)$，次数为多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D, s)$，其中 $|C(\mathscr{K}^k)| =$多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D, s)$，
- 对于每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$ 堡垒 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1$，其 $|C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1)| =$多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D, s)$ 以及一个$(O_{\mathcal{F},\,r}(1)$，多项式$_{\mathcal{F},\,r}(D))$-族由组合等价的自然态射组成$\{\phi^\lambda\colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1 \to I\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$，

使得对于每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ 和每个 $C \in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})$，拉回 $(\phi^\lambda|_C)^* f_{i,\lambda}$ 均为C^r-函数。

证明。由命题 3.31 可知，存在一个自然态射 $\varphi'\colon \mathscr{K}^{k+1} \to I^{k+1}$，使得对于每个 $\mathcal{P}' \in C(\mathscr{K}^{k+1})$ 和每个 $1 \le j \le s$，拉回 $(\phi'|_{\mathcal{P}'})^* f_{j,\lambda}(x)$ 是关于 (λ, x) 的函数。记 $\mathscr{K}^k = \pi_k(\mathscr{K}^{k+1})$，$\varphi = \varphi'_{1\dots k}$，并对每个胞腔$\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$ 定义 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1 := \mathscr{K}^{k+1}(\mathcal{P})$。那么对于每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$，态射 φ'

诱导一个态射 $\phi^\lambda := \varphi'_\lambda : \mathscr{K}^1_{\mathcal{P}} \to I$，并且由命题 3.24可知，这些态射组合等价，证毕。□

以下引理是 Gromov 在[8]中的原始论证的族版本。

引理 4.2。假设 $r \geq 2$，并令 $\{f_{1,\lambda} : I \to I\}_{\lambda \in I^k}$、…、$\{f_{s,\lambda} : I \to I\}_{\lambda \in I^k}$ 为$(\mathcal{F}, D)$-族$(r-1)$-函数。那么存在

- 一个自然态射 $\varphi : \mathscr{K}^k \to I^k$，其格式为 $O_{\mathcal{F},r}(1)$，次数为 多项式$_{\mathcal{F},r}(D)$，其中$|C(\mathscr{K}^k)| =$ 多项式$_{\text{最大值}\{\mathcal{F},r\}}(1)(D, s)$，
- 对于每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$ 堡垒 $\mathscr{K}^1_{\mathcal{P}}$，若其满足 $|C(\mathscr{K}^1_{\mathcal{P}})| =$ 多项式$_{\mathcal{F},r}(D, s)$，以及一个$(O_{\mathcal{F},r}(1)$,多项式$_{\mathcal{F},r}(D))$-族 $\{\phi^\lambda : \mathscr{K}_{\mathcal{P}} \to I\}_{\lambda \in \varphi(\mathcal{P})}$ 由组合等价的 r-态射构成，

使得对于每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})$ 以及每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$，拉回 $(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}})^* f_{i,\lambda}$ 都是r-函数。

证明。注意，ϕ^λ 由引理 4.1 得到的都是自然的，这意味着根据引理 4.1、塔构造和注 3.35，经过阶为 $d = O_r(1)$ 的线性细分后，我们可以假设函数 $f_{i,\lambda}$ 是 C^{r+1}-函数。

设 I^{k+1} 的坐标为 (λ, x)，并设 $\varphi' : \mathscr{K}^{k+1} \to I^{k+1}$ 是一个自然态射，与集合 $\{f_{(r+1)\,j,\lambda} = 0\}$ 以及每个 $1 \leq j \leq s$ 对应的 $\{f^{(r)}_{j,\lambda} = 0\}$ 相容。记 $\mathscr{K}^k = \pi_k(\mathscr{K}^{k+1})$，$\varphi = \varphi'_{1\ldots k}$，并对每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$ 定义 $\mathscr{K}^1_{\mathcal{P}} := \mathscr{K}^{k+1}(\mathcal{P})$。对于每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$，态射 φ' 诱导一个态射 $\phi^\lambda := \varphi'_\lambda : \mathscr{K}^1_{\mathcal{P}} \to I$，由命题 3.24，这些态射组合等价。由于 ϕ^λ 是自然的，经过阶为 $d = O_r(1)$ 的线性细分、塔构造和注 3.35，我们归结为以下情形：族 $\{f^{(r)}_{j,\lambda}\}_{\lambda \in I^k}$要么是单调递增函数族，要么是单调递减函数族（或者是常函数族；此时结论显然），并且对于每个 $1 \leq j \leq s$，其符号恒定。此外，由于 f 的一个 r-参数化与一个 $-f$的 r-参数化相同，我们还可以假设，对于所有 x 和所有 λ，$f^{(r)}_{i\,\lambda}(x) \geq 0$。

定义 $\phi : I \to I$ 由 $x \mapsto 3x^2 - 2x^3$ 给出。它在 3 阶线性细分意义下是一个 r-态射。如果 $f^{(r)}_{i\,\lambda}$ 是单调递减的，那么

$$\frac{2}{x} \geq \frac{f^{(r-1)}_{i,\lambda}(x) - f^{(r-1)}_{i,\lambda}(0)}{x} = f^{(r)}_{i,\lambda}(c_x) \geq f^{(r)}_{i,\lambda}(x). \tag{10}$$

如果 $f_{i\,\lambda}^{(r)}$，是单调递增的，那么

$$\frac{2}{1-x} \geq \frac{f_{i,\lambda}^{(r-1)}(1) - f_{i,\lambda}^{(r-1)}(x)}{x} = f_{i,\lambda}^{(r)}(c_x) \geq f_{i,\lambda}^{(r)}(x). \tag{11}$$

我们有

$$(f_{i,\lambda}(\phi(x)))^{(r)} = O_r(1) + O_r\left((\phi')^r f_{i,\lambda}^{(r)}(\phi(x))\right) \tag{12}$$

注意，$\phi' = 6x(1-x)$。若 $f_{i\,\lambda}^{(r)}$ 单调递减，则由方程 10 可知它在 1 附近有界，因此 $(\phi')^r f_{i\,\lambda}^{(r)}$，$(\phi(x)) = O_r(1)$ 在 1 附近。在 0 附近，我们有 $(\phi')^r f_{(r)\,i,\lambda}(\phi(x)) = O_r(x^{r-2})$，这是由方程 10 以及 $r \geq 2$ 得出的；由此总体上有 $(f_{i,\lambda}(\phi(x)))^{(r)} = O_r(1)$。若 $f_{i\,\lambda}^{(r)}$ 单调递增，则由方程 11 可知它在 0 附近有界，因此 $(\phi')^r f_{(r)\,i,\lambda}(\phi(x)) = O_r(1)$ 在 0 附近。在 1 附近，我们有 $(\phi')^r f_{i\,\lambda}^{(r)}$，$(\phi(x)) = O_r((1-x)^{r-2})$，这是由方程 11 得出的；同样，由于 $r \geq 2$，我们有 $(\phi')^r f_{i\,\lambda}^{(r)}$，$(\phi(x)) = O_r(1)$。因此，由阶为 $O_r(1)$ 的线性细分即可完成证明。□

证明 $F_{1,\,k}$。证明思路如下。由上文的引理 4.2 可知，只需将问题归结为函数 $f_{j,\,\lambda}$ 均为 1- 函数的情形。设我们有可定义的 C^r 函数 $f_1, \ldots, f_s\colon I \to I$，并设 $|f_1'| < \cdots < |f_s'|$，且在 I 上，要么 $|f_s'| \geq 1$，要么 $|f_s'| \leq 1$ 处处成立。若 $|f_s'| \leq 1$，则结论成立。若 $|f_s'| \geq 1$，则可用 f_s^{-1} 对 I 重新参数化，此时结论成立。现在我们将把问题归结为上述两种情形之一。

通过塔构造，我们可以假设 $\mathscr{F}^1 = I$。由引理 4.1，还可以进一步假设函数 $f_{i,\,\lambda}(x)$ 属于 C^2。现在定义

$$\begin{aligned} g_{ij}(\lambda, x) &:= |f_{i,\lambda}'(x)| - |f_{j,\lambda}'(x)|, \\ h_i(\lambda, x) &:= |f_{i,\lambda}'(x)| - 1. \end{aligned} \tag{13}$$

令 I^{k+1} 的坐标为 (λ, x)，并令 $\varphi'\colon \mathscr{K}^{k+1} \to I^{k+1}$ 为与集合 $\{g_{ij} = 0\}$，$\{h_i = 0\}$ 相容的自然态射，且对每个 $1 \leq i, j \leq s$，$\{f_{j,\lambda}'(x) = 0\}$。记 $\varphi = \varphi'_{1\ldots k}$，并对每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$ 定义 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1 := \mathscr{K}^{k+1}(\mathcal{P})$。对每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$，定义 $\Phi_{\mathcal{P}}^{\lambda} = \{\varphi_\lambda(\mathcal{C})\colon \mathcal{C} \in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1)\}$，这是 I 的一个柱状分解，其大小为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D, s)$。

我们旨在构造一族 r-态射 $\{\phi^\lambda\colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1 \to I\}_{\lambda \in \varphi(\mathcal{P})}$，它将成为 $\Phi_{\mathcal{P}}^{\lambda}$ 的一族柱面 r-参数化，使得对于每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$、每个 $1 \leq j \leq s$ 以及每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}}^1)$，拉回 $(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}})^* f_{j,\,\lambda}$ 都是一个 1-函数。为此，对于每个区间 $L_\lambda \in \Phi^\lambda$，我们定义一个单调递增的满射 r-映射

$\phi_{L_\lambda}: I \to L_\lambda$ 使得对于每个 $1 \le j \le s$，拉回 $(\phi_{L_\lambda})^* f_{j,\lambda}|_{L_\lambda}$ 都是一个 1-函数 .

固定 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$、一个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ 和一个区间 $L_\lambda \in \Phi^\lambda_{\mathcal{P}}$。由于 φ' 与 f'_j相容，λ，在 L_λ 上，函数 f_j、λ 中的一些是常函数（当 λ 遍历 $\varphi(\mathcal{P})$ 时，它们的指标 j 也是常数），而其余非常函数则严格单调。常函数自动是 r-函数，因此我们可以假设 f_j、λ 都不是常函数。由于 φ' 与 g_{ij}相容，我们可以重新标记指标 j，使得对于每个 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ 和每个 $x \in L_\lambda$，都有 $|f'_1{}_{,\lambda}(x)| < \cdots < |f'_s{}_{,\lambda}(x)|$。由于 φ'与 h_j相容，因此要么对于所有 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ $x \in L_\lambda$，都有 $|f'_s{}_{,\lambda}(x)| \le 1$；要么对于所有 $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$ $x \in L_\lambda$，都有 $|f'_s{}_{,\lambda}(x)| > 1$。

如果 $|f'_{s,\lambda}(x)| \le 1$，我们只需用仿射映射 $\phi_{L_\lambda}: I \to L_\lambda$ 对区间 L_λ 进行参数化。否则，不失一般性，假设 $f_{s,\lambda}$ 单调递增。我们用映射 $\phi_{L_\lambda} = f_s^{-1}{}_{,\lambda} \circ A_\lambda: I \to L_\lambda$ 对 L_λ 进行参数化，其中 $A_\lambda: I \to f_{s,\lambda}(L_\lambda)$ 是一个仿射映射。我们断言 $|\phi'_{L_\lambda}| \le 1$。事实上，

$$|\phi'_{L_\lambda}(x)| = \frac{\mathrm{length}(f_{s,\lambda}(L_\lambda))}{|f'_{s,\lambda}(\phi_{L_\lambda}(x))|} \le \frac{\mathrm{length}(I)}{1} = 1. \tag{14}$$

最后，我们还断言，对于每个 $1 \le j \le s$，$(\phi_{L_\lambda})^* f_{j,\lambda}$ 都是一个 1-函数。事实上，

$$|((\phi_{L_\lambda})^* f_{j,\lambda})'(x)| = \mathrm{length}(f_{s,\lambda}(L_\lambda)) \cdot \frac{|f'_{j,\lambda}(\phi_{L_\lambda}(x))|}{|f'_{s,\lambda}(\phi_{L_\lambda}(x))|} \le 1 \tag{15}$$

其中最后一个不等式是由 $|f'_{j,\lambda}| < |f'_{s,\lambda}|$ 得出的。因此，我们可以假设函数 $f_{j,\lambda}$ 都是 1-函数。现在可以使用引理 4.2 $r-1$ 次，证毕。□

5. The step $S_{\ell-1,k} + F_{\ell-1,k} \to S_{\ell,k}$

令 $\{\phi^\lambda: \mathscr{F}^\ell \to \mathscr{G}^\ell\}_{\lambda \in I^k}$ be 一个 $(\mathcal{F}, D)$-自然态射族。固定一个胞腔 $\mathcal{C} \in C(\pi_{\ell-1}(\mathscr{F}^\ell))$ 和一个胞腔 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^\ell)$，使得 $\pi_{\ell-1}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$。由于 ϕ^λ 是自然的，如果 $\mathrm{type}(\mathcal{C}') = (\ldots, 1)$，那么存在可定义函数 $f_{\mathcal{C}',\lambda}, g_{\mathcal{C}',\lambda}$ 定义在 $\mathcal{C}$ 上，使得

$$\phi^\lambda_\ell|_{\mathcal{C}'} = (1 - x_\ell) f_{\mathcal{C}',\lambda}(x_1, \ldots, x_{\ell-1}) + x_\ell g_{\mathcal{C}',\lambda}(x_1, \ldots, x_{\ell-1}), \tag{16}$$

并且，如果 $\mathrm{type}(\mathcal{C}') = (\ldots, 0)$，那么 ϕ^λ_ℓ可以视为定义在 $\mathcal{C}$上的函数，并保留记号 ϕ^λ_ℓ。定义

$$\begin{aligned}
F^1_{\mathcal{C},\lambda} &:= \{f_{\mathcal{C}',\lambda}, g_{\mathcal{C}',\lambda} : \mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^\ell),\ \pi_{\ell-1}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}, \mathrm{type}(\mathcal{C}') = (\cdot, 1)\},\\
F^2_{\mathcal{C},\lambda} &:= \{\phi^\lambda_\ell|_{\mathcal{C}'} : \mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^\ell),\ \pi_{\ell-1}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}, \mathrm{type}(\mathcal{C}') = (\cdot, 0)\},\\
F^3_{\mathcal{C},\lambda} &:= \{\phi^\lambda_1|_{\mathcal{C}}, \ldots, \phi^\lambda_{\ell-1}|_{\mathcal{C}}\},\\
F_{\mathcal{C},\lambda} &:= F^1_{\mathcal{C},\lambda} \cup F^2_{\mathcal{C},\lambda} \cup F^3_{\mathcal{C},\lambda}.
\end{aligned} \tag{17}$$

引理 2.5 意味着，对于每个满足 $\pi_{\ell-1}(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$ 且 $\mathsf{type}(\mathcal{C}') = (\cdot, 1)$ 的 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{F}^\ell)$，族 $\{f_{\mathcal{C}',\lambda}\}_{\lambda\in I^k}$ 和 $\{g_{\mathcal{C}',\lambda}\}_{\lambda\in I^k}$ 都是 $(O_{\mathcal{F}}(1), \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D))$-族。现在在堡垒 $\mathscr{F}^{\ell-1} := \pi_{\ell-1}(\mathscr{F}^\ell)$ 上使用 $F_{\ell-1,k}$，以及函数族 $F_{\mathcal{C},\lambda}$。

我们得到一个自然态射 $\varphi\colon \mathscr{K}^k \to I^k$，其中 $\mathscr{K}^k$ 是一个大小为 $|C(\mathscr{K}^k)| = \mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D, |C(\mathscr{F}^\ell)|)$ 的堡垒；对于每个胞腔 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$，都有一个大小为 $\mathrm{poly}^{\max\{\mathcal{F},r\}}(D, |C(\mathscr{F}^\ell)|)$ 的堡垒 $\mathscr{K}'_{\mathcal{P}}$，以及一个由组合等价的 r- 态射 $\{\psi'^\lambda : \mathscr{K}'_{\mathcal{P}} \to \mathscr{F}^{\ell-1}\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$ 构成的 $(O_{\mathcal{F},r}(1), \mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D))$- 族。

由于 $F^3_{\mathcal{C},\lambda} \subset F_{\mathcal{C},\lambda}$，我们看到 $\phi^\lambda_{1\dots\ell-1} \circ \psi'^\lambda$ 是一个 r-态射。定义 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}} := (\psi'^\lambda)^*\mathscr{F}^\ell$。由于这些 ψ'^λ 组合等价，$\mathscr{K}_{\mathcal{P}}$ 确实不依赖于 λ。ψ'^λ 扩展为一个 r-态射 $\psi^\lambda\colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}} \to \mathscr{F}^\ell$，并且由于 $F^1_{\mathcal{C},\lambda}, F^2_{\mathcal{C},\lambda} \subset F_{\mathcal{C},\lambda}$，我们看到 $\phi^\lambda \circ \psi^\lambda$ 是所需的 r-态射。

6. The step $S_{\le\ell,k} + F_{\le\ell-1,k} \to F_{\ell,k}$

我们将需要以下引理。

引理 6.1. 设 $f : I^\ell \to I$ 是格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D的可定义函数，并假设对于所有 $x_1 \in I$，函数 $f(x_1, \cdot)$ 都是 *L-Lipshitz*。那么，除去形如 $\{x_1 = \mathrm{const}\}$ 的 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$个超平面之外，函数 f 是连续的。

证明。考虑集合 $\mathsf{Var} := \{x : \lim_{y\to x} |\overline{f(y)} - f(x)| > 0\}$。显然，$f$在集合 $I^\ell \setminus \mathsf{Var}$ 上连续。我们断言，对于每个 $t \in I$，$\mathsf{Var} \cap \{x_1 = t\}$ 与超平面 $\{x_1 = t\}$的交集是开集。事实上，假设对于某个 $x \in \{x_1 = t\}$

$$\epsilon = \overline{\lim}_{y\to x} |f(y) - f(x)| > 0. \tag{18}$$

如果 $x' \in \{x_1 = t\}$ 且 $|x - x'| < \frac{\epsilon}{4L}$，那么

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x')| &\ge |f(y - x' + x) - f(x)| - |f(x') - f(x)| - |f(y - x' + x) - f(y)| \ge \\ &\ge |f(y - x' + x) - f(x)| - \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned} \tag{19}$$

因为 $y - x' + x, y$ 也具有相同的 x_1 坐标。将上述等式两边在 $y \to x'$时取极限，我们得出 $\lim_{y\to x'} |f(y) - f(x')| \ge \frac{\epsilon}{2} > 0$。

由于 f 是可定义的，因此存在 I^ℓ 的一个柱状分解 Φ，其中 $|\Phi| = \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，使得 f 在 Φ的胞腔上连续。显然，Var 只能与 Φ 中维数为 $\le \ell - 1$的胞腔相交。令 $X \in \Phi$ 满足 $X \cap \mathsf{Var} \neq \emptyset$。我们断言，$X$必然具有类型 $(0, \dots)$。事实上，假设 $\mathsf{type}(X) = (1, \dots)$。那么

对于任意 $t \in I$，交集 $X \cap \{x_1 = t\}$ 的维数为 $\leq \ell - 2$。令 $t \in \pi_1(X)$。一方面，根据上述结论，Var $\cap \{x_1 = t\}$ 的维数为 $\ell - 1$。另一方面，Var $\cap \{x_1 = t\}$ 包含于集合 $X_i \cap \{x_1 = t\}$的有限并中，其中 $X_i \in \Phi$ 是与 Var 相交且类型为 $(1, \dots)$ 的胞腔（因为 Φ 中类型为 $(0, \dots)$ 的胞腔的投影与 Φ 中类型为 $(1, \dots)$ 的胞腔的投影在 x_1 上不相交）。因此，Var $\cap \{x_1 = t\}$ 的维数为 $\leq \ell - 2$，这就产生了矛盾。

总之，Var 只能与类型为 $(0, \dots)$ 的胞腔相交，因此包含在 $\text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 个超平面 $\{x_1 = \text{const}\}$ 中，正如所需。□

下面给出引理 6.1 的族版本。

引理 6.2。 设 $\{f_\lambda \colon I^\ell \to I\}_{\lambda \in I^k}$ 是一个 $(\mathcal{F}, D)$ 族，并假设对每个$x_1 \in I$, $\lambda \in I^k$，函数 $f_\lambda(x_1, \cdot)$ 都是 *L-Lipshitz*。那么存在：

- 一个格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$、次数为 $\text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 的自然态射 $\varphi \colon \mathscr{K}^k \to I^k$，其中$|C(\mathscr{K}^k)| = \text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$,
- 对每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$，一个大小为 $\text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 的堡垒 $\mathscr{K}^1_{\mathcal{P}}$，以及一个$(O_{\mathcal{F}}(1), \text{poly}_{\mathcal{F}}(D))$-族 $\{\phi'^\lambda : \mathscr{K}^1_{\mathcal{P}} \to I\}_{\lambda \in \varphi(\mathcal{P})}$ 自然态射,

使得，如果 ϕ^λ 是 ϕ'^λ 到 $(\phi'^\lambda)^* I^\ell$ 的延拓，那么对于每个 $\mathcal{C} \in C((\phi'^\lambda)^* I^\ell)$，拉回$(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}})^* f_\lambda$ 都是连续的。

证明。令

$$
\begin{aligned}
d(\lambda, x_1, x_1') &:= \sup_{y \in I^{\ell-1}} |f(x_1, y) - f(x_1', y)|, \\
\Sigma_\lambda &:= \{x_1 : \overline{\lim}_{x_1' \to x_1} d(\lambda, x_1', x_1) > 0\}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

根据引理 6.1，对每个固定的 $\lambda \in I^k$，函数 f_λ 在超平面 $\{x_1 = c\}$ 之外连续，其中 $c \in \Sigma_\lambda$。我们将命题 3.18 应用于堡垒 I^{k+1} (坐标为 (λ, x_1)) 和集合 $\Sigma := \{(\lambda, x_1) : x_1 \in \Sigma_\lambda\}$，从而得到自然态射 $\varphi' : \mathscr{K}^{k+1} \to I^{k+1}$，它与 Σ 相容。

定义 $\mathscr{K}^k := \pi_k(\mathscr{K}^{k+1})$ $\varphi := \varphi'_{1\dots k}$，并且对每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{K}^k)$，令 $\mathscr{K}^1_{\mathcal{P}} := \mathscr{K}^{k+1}(\mathcal{P})$，以及 $\phi'^\lambda := \varphi'_\lambda$。容易看出，这一构造满足引理的要求。□

以下是 [3] 中关于尖锐结构的引理 12 版本，这是本小节中的一个关键引理。

引理 6.3. 设 $f : I^\ell \to I$ 是一个格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的可定义的 C^1 函数，并假设对任意 $2 \leq i \leq \ell$，都有 $|\frac{\partial}{\partial x_i} f| \leq 1$。那么，函数 $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \cdot)$对于除 多项式$_{\mathcal{F}}(D)$ 个 x_1值之外的所有值都有界。

证明。 考虑集合

$$B := \left\{ x_1 : \forall M > 0 \; \exists (x_2, \dots, x_\ell) \in I^{\ell-1} \; \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \dots, x_\ell) \right| > M \right\} \tag{21}$$

根据#o-极小结构的公理和注记 2.8 集合 B 具有格式 $O_{\mathcal{F}}$（1），次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。根据 [3], 引理 12，集合 B 是有限的。因此，它由 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 个点组成，正如所需。□

以下是引理 6.3 的族版本。

引理 6.4。设 $\{f_\lambda \colon I^\ell\}_{\lambda \in I^k}$ 是一个由可定义的 C^1 函数构成的$(\mathcal{F}, D)$-族。假设对于每个 $2 \le i \le s$, $\lambda \in I^k$，都有 $|\frac{\partial}{\partial x_i} f| \le 1$。那么存在

- 一个自然态射 $\varphi \colon \mathscr{K}^k \to I^k$，其格式为 $O_{\mathcal{F}}(1)$，次数为$\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，其中$|C(\mathscr{K}^k)| = \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$,
- 对于每个 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$，一个大小为$\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$ 的堡垒 以及一个$(O_{\mathcal{F}}(1), \mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D))$-族 $\{\phi'^\lambda : \mathscr{K}^1_{\mathcal{P}} \to I\}_{\lambda \in \varphi(\mathcal{P})}$ 自然态射的

使得若 ϕ^λ 是 ϕ'^λ 在$(\phi'^\lambda)^* I^\ell$上的延拓，则对于每个 $\mathcal{C} \in C((\phi'^\lambda)^* I^\ell)$ 以及每个固定的 $x_1 \in I$，导数 $\frac{\partial}{\partial x_1} \left((\phi^\lambda|_{\mathcal{C}})^* f_\lambda(\overline{x_1, \cdot}) \right)$ 都有界。

证明。此引理可由引理 6.3 以与引理6.2 由引理 6.1 得出相同的方式推出。□

6.1. 约化到如下情形：$f_{\mathcal{C},j,\lambda}$ 是 C^r，且对于所有 x_1，$f_{\mathcal{C},j,\lambda}(x_1, \cdot)$ 是一个 r-函数。设 $\mathscr{F}^\ell$是一个堡垒，并且对于每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F})$，令 $F_{\mathcal{C},\lambda} = \{f_{\mathcal{C},j,\lambda} \colon \mathcal{C} \to I\}_{\lambda \in I^k, j \in J}$ 为一个 $|J|$ 族的集族，使得对于每个固定的 $j \in J$，族 $\{f_{\mathcal{C},j,\lambda} \colon \mathcal{C} \to I\}_{\lambda \in I^k}$ 都是一个由可定义函数构成的 $(\mathcal{F}, D)$-族。由塔构造和归纳假设，我们可以假设 $\mathscr{F}^\ell = I \times \mathscr{F}^{\ell-1}$。令$\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^{\ell-1})$，并定义 $F_{\mathcal{C},(\lambda,x_1)} = \{f_{I\times\mathcal{C},j,\lambda}(x_1, \cdot) : f_{I\times\mathcal{C},j,\lambda} \in F_{I\times\mathcal{C},\lambda}\}$。也就是说，我们将每个目标函数族 $\{f_{I\times\mathcal{C},j,\lambda}\}$ 都视为定义在 $\mathscr{F}^{\ell-1}$ 的胞腔上、带有参数 λ, x_1的函数族。

我们在 $\mathscr{F}^{\ell-1}$ 上使用 $F_{\ell-1,k+1}$ 和 $F_{\mathcal{C},(\lambda,x_1)}$。我们得到一个自然态射 $\varphi' \colon \mathscr{K}^{k+1} \to I^{k+1}$（其中 I^{k+1} 的坐标为 (λ, x_1)），并且对于每个 $\mathcal{P}' \in C(\mathscr{K}^{k+1})$，都有一族组合等价的 r-态射 $\phi^{(\lambda,x_1)} \colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}'} \to \mathscr{F}^{\ell-1}$，使得对于每个 $(\lambda, x_1) \in \varphi'(\mathcal{P}')$ 以及每个 $j \in J$，函数 $(\phi^{(\lambda,x_1)}|_{\mathcal{C}'})^* f_{I\times\mathcal{C},j,\lambda}(x_1, \cdot)$ 在 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}'})$ 且 $\phi^{(\lambda,x_1)}(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$ 时是一个 r-函数。

定义 $\mathscr{K}^k := \pi_k(\mathscr{K}^{k+1})$，并固定一个胞腔 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$。特别地，我们有一个与之组合等价的族 $\{\varphi^\lambda : \mathscr{K}^k(\mathcal{P}) \to I\}_{\lambda \in \varphi'_{1\dots k}(\mathcal{P})}$ 由 $\varphi^\lambda := \phi'^\lambda$给出。根据命题 3.24，我们可以将 $C(\mathscr{K}^k(\mathcal{P}))$ 识别为 $\mathscr{K}^{k+1}$ 位于其上方的胞腔

$\mathcal{P}$。定义ne s： $C(\mathscr{K}^k(\mathcal{P})) \to$ 堡垒$(\ell-1)$，由 $s(\mathcal{P}')$： $= \mathscr{K}_{\mathcal{P}'}$和 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}$： $= \mathscr{K}^k(\mathcal{P}) \ltimes s$.

最后，定义 ϕ^λ： $\mathscr{K}_{\mathcal{P}} \to \mathscr{F}^\ell$，使得 $\phi^\lambda(x_1,\dots,x_\ell) := (\varphi^\lambda(x_1)\ \phi^{(\lambda,x_1)}(x_2,\dots,x_\ell))$。我们希望利用命题 3.23 断言这些 ϕ^λ 是态射，因为当 x_1 在 $\mathscr{K}^k(\mathcal{P})$ 的一个胞腔中变化时，态射 $\phi^\lambda(x_1,\cdot)$ 在组合意义下等价。然而，我们不知道 $\phi^{(\lambda,x_1)}$ 关于 $x_1,\dots,x_\ell$ 是否连续。尽管如此，我们确实知道，对于每个 x_1 ，态射 $\phi^\lambda(x_1,\cdot)$ 都是一个 r-态射，尤其是 1-Lipschitz。因此，根据引理 6.2，我们可以假设 $\phi^{(\lambda,x_1)}$ 关于 $x_1,\dots,x_\ell$ 连续。于是，根据命题 3.23，对于每个 $\lambda \in \varphi'_{1\dots k}(\mathcal{P})$，映射 ϕ^λ 都是一个态射。由此我们将问题归结为如下情形：对于每个 $\lambda \in I^k$，$x_1 \in \pi_1(\mathscr{F}^\ell)$ $j \in J$ 和 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell)$，函数 $f_{\mathcal{C},j,\lambda}(x_1,\cdot)$ 是一个 r-函数。

本小节的最后一个目标，是进一步约化到函数$f_{\mathcal{C}、j、\lambda}$为 C^r的情形。由命题 3.31，我们可以找到一个自然态射 $\varphi : \mathscr{K}^k \to I^k$，并且对每个胞腔 $\mathcal{P} \in C(\mathscr{K}^k)$，找到一族组合等价的 C^r 态射$\{\phi^\lambda : \mathscr{K}_{\mathcal{P}} \to \mathscr{F}^\ell\}_{\lambda\in\varphi(\mathcal{P})}$，使得对于每个 $j \in J$，当 $\mathcal{C}' \in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})$ 且 $\phi^\lambda(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$时，$(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}'})^* f_{\mathcal{C}、j、\lambda}$均为 C^r $\lambda \in \varphi(\mathcal{P})$。根据$S_{\ell、k}$，我们可以假设 ϕ^λ 是 r-态射。注意，由链式法则可知，由于胞腔映射的第一个坐标只依赖于 x_1，我们得到 $||(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}'})^* f_{\mathcal{C}、j、\lambda}(x_1、\cdot)||_r = O_{r、\ell}(1)$，因此，经过一次阶为$d = O_\ell$的线性细分，$_r(1)$，将约化到 C^r 函数的情形并未破坏我们最初对每个 x_1约化到 r-态射的步骤。

6.2. 对第一个无界导数的归纳。 将指标 $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$按字典序排列。令 α 为第一个满足 $|\alpha| \le r$ 且存在 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell)$、 $j \in J$ 和 $\lambda \in I^k$ 使得$||f_{\mathcal{C},j,\lambda}||_r > 1$的指标。根据上一小节 $\alpha_1 > 0$。由引理 6.4、塔构造和归纳假设，我们可以假设 $\mathscr{F}^\ell = I \times \mathscr{F}^{\ell-1}$，并且对每个 $x_1 \in I$及每个 $\mathcal{C}, j, \lambda$，函数 $f_{\mathcal{C}}^{(\alpha)}{}_{,j,\lambda}(x_1,\cdot)$ 有界。

现在我们将对 x_1 重新参数化。对每个 $\mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell)$，定义

$$S_{\mathcal{C},j,\lambda} := \{|f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda}(x_1,\dots,x_\ell)| \ge \frac{1}{2}\cdot \sup_{x_{2\dots\ell}} |f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda}(x_1,\cdot)|\} \subset \mathcal{C} \tag{22}$$

根据命题 2.9 ，存在可定义曲线族 $\{\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda} : I \to S_{\mathcal{C},j,\lambda}\}_{\lambda\in I^k}$，使得 $\gamma^{\mathcal{C}}_{,\ j\,\lambda\,,1}(x_1) = x_1$。令

$$\begin{aligned} F^1_\lambda &:= \{\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda} : \mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell), j \in J, \lambda \in I^k\},\\ F^2_\lambda &:= \{f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda} \circ \gamma^{\mathcal{C},j,\lambda} : \mathcal{C} \in C(\mathscr{F}^\ell), j \in J, \lambda \in I^k\},\\ F_\lambda &:= F^1_\lambda \cup F^2_\lambda. \end{aligned} \tag{23}$$

我们将 $F_{1,k}$ 应用于堡垒 I 以及 F_λ中的函数。由此得到一个自然态射$\varphi\colon \mathscr{K}^k \to I^k$，并且对于每个 $\mathcal{P}\in C(\mathscr{K}^k)$，都有一个组合等价态射族 $\phi'^\lambda\colon \mathscr{K}'_{\mathcal{P}}\to I$，使得对于每个 $\mathcal{C}'\in C(\mathscr{K}'_{\mathcal{P}})$，拉回 $(\phi'^\lambda|_{\mathcal{C}'})^*\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda}$ 和 $(\phi'^\lambda|_{\mathcal{C}'})^*(f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda})$ 都是 r-函数。定义 $\mathscr{K}_{\mathcal{P}}:=(\phi'^\lambda)^*\mathscr{F}^\ell$，并令 $\phi^\lambda\colon \mathscr{K}_{\mathcal{P}}\to\mathscr{F}^\ell$延拓 ϕ'^λ。

令 $\mathcal{C}''\in C(\mathscr{K}_{\mathcal{P}})$ 满足 $\phi^\lambda(\mathcal{C}'')\subset\mathcal{C}$。由对 α 的归纳法以及链式法则可得，当 $\beta<\alpha$ 时，$\big((\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''})^* f_{\mathcal{C},\,j,\,\lambda}\big)^{(\beta)} = O_{\ell,\,r}(1)$。根据链式法则计算$\big((\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''})^* f_{\mathcal{C},\,j,\,\lambda}\big)^{(\alpha)}$ 时，再由对 α 的归纳法，除 $(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''})^{\alpha_1}\cdot(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''})^* f^{(\alpha)}_{\mathcal{C}\,,\,j,\,\lambda}$ 外的所有项均有界于 $O_{\ell,\,r}(1)$。现在

$$
\begin{aligned}
(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''})^{\alpha_1}\cdot(\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''})^* f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda} &\le \left(\frac{\partial\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''}}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdot 2(\phi_1^\lambda|_{\mathcal{C}''})^*(f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda})\le\\
&\le \frac{\partial\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''}}{\partial x_1}\cdot 2(\phi_1^\lambda|_{\mathcal{C}''})^*(f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda}).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

接下来我们对右侧进行估计。根据归纳假设，$(\phi_1^\lambda|_{\mathcal{C}''})^*(f_{(\alpha-1_1)\,\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda})'$ 有界于 $O_{\ell,r}(1)$。根据链式法则，它等于

$$
\frac{\partial\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''}}{\partial x_1}\cdot(\phi_1^\lambda|_{\mathcal{C}''})^*\left(f^{(\alpha)}_{\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda}+\sum_{i=2}^{\ell}(\gamma_j^{\mathcal{C},j,\lambda})'\cdot f^{(\alpha-1_1+1_j)}_{\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda}\right).
\tag{25}
$$

由于对 α 的归纳以及 ϕ^λ的定义，上述除$\frac{\partial\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''}}{\partial x_1}\cdot(\phi_1^\lambda|_{\mathcal{C}''})^*(f_{(\alpha)\,\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda})$之外的所有项均有界于$O_{\ell,r}(1)$。因此，$\frac{\partial\phi^\lambda|_{\mathcal{C}''}}{\partial x_1}\cdot 2(\phi_1^\lambda|_{\mathcal{C}''})^*(f_{(\alpha)\,\mathcal{C},j,\lambda}\circ\gamma^{\mathcal{C},j,\lambda})$ 也有界于$O_{\ell,r}(1)$，于是由$d=O_{\ell,r}(1)$阶的线性细分即可得证。 □

References

[1] G. Binyamini、G. Jones、H. Schmidt 和 M. Thomas。受限子 Pfaffian 结构中的有效 Pila-Wilkie。准备中，2023。[2]G. Binyamini 和 D. Novikov。复胞腔结构。《数学年刊》，190(1):145–248，2019。[3] G. Binyamini 和 D. Novikov。Yomdin-Gromov 代数引理再探。《*Arnold* 数学杂志》，7:419–430，2021。[4] G. Binyamini 和 D. Novikov。几何与算术中的驯性：超越 o-极小性。*EMS* 出版社，2022。[5] G. Binyamini、D. Novikov 和 B. Zak。尖锐 o-极小结构与尖锐胞腔分解。预印本，2022。[6] G. Binyamini、D. Novikov 和 B. Zak。Pfaffian 结构的 Wilkie 猜想。预印本，2022。

[7] G. Binyamini 和 N. Vorobjov。受限子 Pfaffian 集的有效柱状细胞分解。《国际数学研究通知》，2020。[8]M. Gromov。熵、同调与半代数几何。S'布尔巴基研讨会，86(145-146):225–240，1987。[9] J. Pila 和 A.J. Wilkie。可定义集的有理点。《*Duke* 数学杂志》，133(3):591–616，2006。[10] Lou van den Dries。《驯性拓扑与 o-极小结构》。剑桥大学出版社，1998。