非自治 Lotka–Volterra 竞争合作系统的前向吸引子：详细的几何描述

Juan Garcia-Fuentes[1],Piotr Kalita[1,2],Jos´e A. Langa[1],Antonio Su´arez[1]

[1]塞维利亚大学微分方程与数值分析系，雷娜梅赛德斯校区，41012，塞维利亚，西班牙

[2]数学与计算机科学学院，雅盖隆大学，Lojasiewicza街6号，30-348克拉科夫，波兰

电子邮箱地址：J.G.-F.： jgfuentes@us.es J.A.L.： langa@us.es P. K.： piotr.kalita@ii.uj.edu.plA.S.： suarez@us.es

2024年2月8日

摘要

非自治微分方程呈现出高度复杂的动力学，人们已提出各种概念来描述其定性行为。一般而言，当时间趋于正无穷时，难以获得时变的不变紧吸引集。此外，文献中探讨此类集合几何结构的论文也寥寥无几。本文研究种群动力学中合作型 n 维非自治 Lotka–Volterra 系统的长期行为。我们给出了充分条件，以确保存在一个全局稳定的（正向时间上的）整体解，其中一个物种灭绝，或除一个物种外的所有物种均灭绝。此外，在物种持存和灭绝的情形下，我们通过建立全局稳定解与半稳定解之间的异宿连接，得到了非自治前向吸引子在一维、二维和三维情形下的精确几何结构。我们认为，理解时变前向吸引子将为全面分析非自治现象的瞬态和长期行为铺平道路。

1 引言

过去三十年来，非自治动力系统的分析受到了广泛关注。特别是，为理解这类系统的长期行为，人们发展出了两个主要研究方向：一方面是回拉动力学，着重考察系统从过去经过长时间演化后，在时间 t 的状态；另一方面是前向动力学，关注时间趋于正无穷 [CLR13, BCL20, CV02, KR11]时系统的长期行为。在前一种情况下，我们得到一个依赖时间的

关键词：动力系统、非自治常微分方程、Lotka–Volterra 模型、前向吸引子、生态学模型 / *MSC* 分类号：37B35, 37C60, 37C70, 34D45。

不变集族；在后一种情况下，研究对象是一致吸引子，它是能够一致地吸引所有初始时间下所有有界集的最小紧集（不一定是不变集）。然而，有一种非常有趣的情形，能够为非自治系统的渐近行为带来新的认识。事实上，有时我们会观察到一个依赖时间的紧集不变族，它具有前向吸引性，兼具两种方法的优势，即回拉动力学所体现的不变性，以及一致吸引子理论所体现的前向吸引性。然而，这类集合通常难以获得，关于其存在性的成熟理论仍然缺乏。此外，吸引子的一个最重要且最有前景的性质，只有在我们了解其几何结构时才会显现出来；也就是说，了解其由复返点构成的不变子集，以及由梯度轨道形成的连接。在定义这些系统的结构稳定性时，这种结构仍得以保留 [BCL20]。本文研究 n 维 Lotka–Volterra 系统的前向吸引子，并详细刻画其内部几何结构。我们认为，本文获得的两类结果都是对现有文献的新颖且重要的贡献。

Lotka–Volterra 系统是种群动力学中的经典模型，用于表示生态系统中物种的行为。该模型由以下 n 维微分方程系统组成，其中未知量 u_i 对应于第 i 个物种的个体密度

$$u_i' = u_i \left(a_i(t) - b_{ii}(t)u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij}(t)u_j \right) \quad \text{for } i \in \{1, ..., n\}. \tag{1}$$

函数 a_i 确定物种 i 的内禀增长率，而 b_{ij} 表示物种 i 与 j 之间的相互作用。特别地，b_{ii} 表示同一物种 i 的内禀竞争。如果 b_{ij} 为负，则物种 j 对物种 i 的增长起积极作用，此时我们称之为合作系统。相反，如果 b_{ij} 为正，则 j 对 i 的增长起消极作用，这意味着该物种与其他物种存在竞争。

当这些系数为常数时，该系统是自治的。在这种情况下，如果矩阵$B = (b_{ij})_{i,\ j=1}^{n}$ 是 Volterra–Lyapunov稳定的（例如参见 [Tak96]），则该系统解的渐近行为已有完整刻画。特别地，可以给出关于系数 $(a_i)_{i=1}^{n}$ 的条件，以保证存在一个全局渐近稳定平衡点，其中所有物种均存在；或者相反，给出相应条件，使得在该稳定平衡点处一个或多个物种灭绝。这些观察结果使我们能够确定与（1）[Tak96、Gue17、HS22、AKL22] 相关的全局吸引子的完整结构。然而，在非自治情形下，情况完全不同，此时系数依赖于时间。相应理论尚未得到充分发展，尤其是在吸引子的几何结构的详细描述方面。本文研究非自治合作型 Lotka–Volterra 系统，并给出描述其长期行为的条件，包括对低维情形下其吸引子的完整刻画。

我们简要回顾此前针对这一非自治问题版本所得出的最重要结果。在 Gopalsamy 的研究中 [Gop86a, Gop86b] ，作者考察了竞争框架下的周期函数和几乎周期函数情形 $a_i(t)$ ，即 $b_{ij}(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $i \neq j$均成立。文中给出了确保存在全局稳定解的条件，且该解的所有分量在所有时刻都严格为正 $t \in \mathbb{R}$。Ahmad 和 Lazer 将研究扩展到竞争情形，并放宽了系数必须为周期函数或几乎周期函数的要求。他们

仍然能够证明存在唯一全局稳定的严格正永久解，其中所有物种均存在 [AL95, AL00], ；或者其中一个物种灭绝 [Ahm93, AL98]。另一方面，Redheffer 在 [Red96] 中找到了关于系数的一些一般条件，这些条件能够保证存在全局稳定解，且对种间参数的符号没有限制，但仅适用于系统具有持久性的情形。

在本文的第一部分，我们得到了此前尚未考虑过的结果，为合作情形下任意给定物种子群落的灭绝提供了判据。证明的主要困难在于，尽管其他物种可能提供合作作用，仍需证明物种密度会衰减。在引理 4.1 中，我们证明，在非自治矩阵 $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 满足对角占优条件（$H1$）以及条件（B）的情况下，其中后一个条件将矩阵 B 与单个物种的内禀增长率 $a = (a_i)_{i=1}^{n}$ 联系起来，给定物种子群落的密度会共同趋于零。条件（B）是 [Red96] 中条件的一种变体，尽管我们通过允许部分增长率 $a_i(t)$ 为负值而对其进行了扩展。我们还证明了 n 维物种群落中两种特殊灭绝情形下稳定解的存在性：一种情形是除一个物种外的所有物种都灭绝；另一种情形是仅有一个物种灭绝。这些结果分别包含在第 4.3 节和第 4.4 节中。

系统 (1) 的一个特点是，将某些变量设为零后，对于群落 $\{1、\ldots\ldots、n\}$ 的每个子集，都能得到一个较小的系统，用来描述相应子群落的动力学，并嵌入原系统之中。因此，Redheffer、Ahmad 和 Lazer 的上述结果，以及我们第 4 节中的结果，使我们能够构造整个群落及其所有子群落的渐近稳定解。受非自治动力系统吸引子理论近期进展的启发，[KR11、CLR13、BCL20]提出了一个自然的问题：如何描述所有在过去和未来都有界的解？当时间趋于正无穷或负无穷时，这些解在吸引意义上又有何关联？这个问题自然引出了对非自治吸引子几何结构的研究。这类吸引子由全局渐近稳定解（此前分析系统 (1) 的研究者主要关注这类解）、子群落的渐近稳定解以及它们之间的异宿连接构成。根据线性化系统的指数二分性理论（见第 2 节），并以 [BP15] 关于上三角系统二分性的结果，以及 Hadamard–Perron 定理关于局部稳定流形和不稳定流形存在性的非自治版本 [CLR13、KR11] 为基础，我们能够构造各种稳定解和半稳定解（即对原系统的子系统稳定的解）之间的异宿连接。我们还证明，所有其他解在过去都必定无界。因此，我们在第 5、6 和第 7 节中，分别针对一维、二维和三维情形，展示了灭绝与持久性的各种情况下非自治吸引子的完整结构。对非自治吸引子进行如此详尽的描述始终是一项极具挑战性的任务，目前关于这一主题的近期论文寥寥无几（例如 [CRLO23]）。然而，借助先前的结果，我们构造出了由微分方程系统 (1) 所支配的非自治问题的前向吸引子（以及拉回吸引子）的完整结构。

2 非自治合作型 Lotka–Volterra 系统及全局解的存在性

2.1 Lotka–Volterra 系统

对于定义在实数轴上的函数，我们采用以下约定： $a^L = \text{下确界}_{t\in\mathbb{R}}\, a(t)$、$a^U = \text{上确界}_{t\in\mathbb{R}}\, a(t)$。此外，对于两个这样的函数 a，b 我们称 $a > b$，如果 $a(t) > b(t)$ 对于 $t \in \mathbb{R}$ 成立；非严格不等式 $a \geqslant b$ 也类似定义。

我们将考虑以下 n 维合作型 Lotka–Volterra 系统。

$$u_i' = u_i\left(a_i(t) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j\right), \tag{LV-n}$$

其中 $i = 1, \ldots\ldots, n,$ ， $a_i(t)$ 和 $b_{ij}(t)$ 是连续实值函数。假设该系统是合作型的，即对于 $i \neq j$，有 $b_{ij}(t) \leqslant 0$；并且对于所有 $t \in \mathbb{R}$，有 $b_{ii}(t) > 0$；对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$。此外，我们作出以下行对角占优的常设假设

$$\left(c_i b_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} c_j b_{ij}\right)^L \geqslant \delta > 0 \quad \text{for all } i = 1, ..., n, \tag{$H1$}$$

对于某些正常数 $\{c_i\}_{i=1}^n$，并且列对角占优

$$\left(\overline{c}_i b_{ii} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \overline{c}_j b_{ji}\right)^L \geqslant \delta > 0 \quad \text{for all } i = 1, ..., n, \tag{$H2$}$$

对于另一个正的常数 $\{c_i\}_{i=1}^n$。

2.2 全局吸引解的存在性：持久性情形

我们回顾 [Red96] 中的结果，该结果给出了存在正解 $u^* = (u_1^*, \ldots, u_n^*)$ 的条件。该正解远离零和无穷远，并且对所有具有正初始数据 $u(t_0) > 0$ 的轨道都具有向前全局吸引性。

我们需要以下假设：存在正向量 $d > 0$ 和 $\bar{d} > 0$，使得

$$\bar{d}_i b_{ii} \leqslant a_i \leqslant d_i b_{ii} + \sum_{j\neq i} d_j b_{ij} \quad \text{for all } i = 1, ..., n. \tag{A}$$

以下结果出自 Redheffer（[Red96，定理 1（ii）、（v）和（vi）]）：

定理 2.1。 假设 (A) 和 $(H2)$成立。那么存在唯一的完备正轨道 u^*，且其远离零和无穷远。该轨道对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都满足 $d_i \leqslant u_i^* \leqslant \bar{d}_i$。此外，对于 (LV-$n$) 的每个解 u，若满足 $u(t_0) > 0$，则有以下收敛关系

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - u^*(t)| \to 0.$$

以下结果确立了正向有界解对初始数据的利普希茨连续依赖。

引理 2.2. 设两个解 u 和 v 在 t_0 处具有初始数据，并且在 $t \geqslant t_0$内有界。假设 $|a_i|$、$|b_{ij}|$ 均有界，且其界与时间无关。那么存在 $0 < \kappa$ （取决于系数及两个解的有界范围），使得

$$|u(t_0+t) - v(t_0+t)| \leqslant e^{\kappa t}|u(t_0) - v(t_0)| \quad for \quad t \geqslant 0.$$

证明。 我们略去证明；利用 Gronwall 引理并估计两个解之差，可按标准方法得出该结论。 □

I若这些解与零保持一定距离，则在列对角占优假设下可得到更强的结果 al dom（$H2$）。下述引理见 [Red96, 引理 8]。

引理 2.3。 假设$(H2)$，并设 u、v 是(LV-n) 的两个解，且存在正常数 σ_1、$\sigma_2 > 0$，使得对每个 $\tau \geqslant t_0$和 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $\sigma_1 \leqslant u_i(\tau)$、$v_i(\tau) \leqslant \sigma_2$。那么

$$|u(t_0+t) - v(t_0+t)| \leqslant \frac{\sigma_2}{\sigma_1}|u(t_0) - v(t_0)|e^{-\delta\sigma_1 t},$$

对每个 $t \geqslant 0$。

2.3 全局解的存在性：灭绝情形

我们给出上述条件（A）的一个推广版本，在该条件下，存在一个全局解：它在由 J 表示的指标子集上为零，而在由 I 表示的其余指标子集上远离零和无穷大。具体而言，我们用以下假设替代（A）

$$0 < \bar{d_i} b_{ii} \leqslant a_i \leqslant d_i b_{ii} + \sum_{j \neq i, j \in I} d_j b_{ij} \quad \text{for all } i \in I \subset \{1, ..., n\}, \tag{A_I}$$

对于正向量 $(d_j)_{j\in I}$ 和 $(d_j)_{j\in I}$。 $^-$

作为定理 2.1 的一个应用，我们得到以下结果。若指标被划分为两个不相交集 I 和 J，则可以假设零是在集合 J 上的一个解。注意，（$H2$）对任意指标子集均成立。

定理 2.4。 若$(H2)$ 和(A_I) 成立，则存在一个(LV-n)的完全轨道 u^*，使得对于 $i \in J = \{1, \ldots, n\} \backslash I$，有 $u_i^* \equiv 0$；对于 $i \in I$，有 $d_i \leqslant u_i^* \leqslant d_i$。对于(LV-$\bar{n}$) 的每个满足以下条件的解 u：当 $i \in I$ 时，$u_i(t_0) > 0$；当 $i \in J$ 时，$u_i(t_0) = 0$，以下收敛成立

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - u^*(t)| \to 0.$$

注 1。 如果 J 非空，我们称该解为半平凡解，因为它在某些坐标上等于零。注意，如果 (A) 成立，那么对于任意一组指标 I，(A_I) 也成立。同理，如果 (A_I) 成立，那么在 I 的任意子集上也满足相同条件。请注意，虽然定理 *2.1* 给出了所有坐标上的初始数据均非零时解的收敛性，但在上述定理中，我们只能证明指标为 I 的坐标上的初始数据非零时解的收敛性。我们将给出一些条件，以保证所有初始数据均非零的解也收敛到这样的半平凡解，其中某些物种（指标为 J）已经灭绝。

3 指数二分性与线性化

3.1 上三角系统的指数二分性

我们将考虑以下线性非自治常微分方程系统

$$x'(t) = D(t)x(t), \tag{2}$$

其中 $D\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ 连续且有界，即 $\sup_{t\in\mathbb{R}} \|D(t)\| \leqslant M$，其中 M 是一个正常数。该常微分方程系统的解在初始条件 $x(t_0) = x_0$ 下，由初始数据乘以下列基本矩阵 $x(t) = M_D(t,\ t_0)x_0$ 给出。该基本矩阵可逆，且若 $t < t_0$，则 $M_D(t,\ t_0) = M_D(t_0,\ t)^{-1}$。当 $t_0 = 0$ 时，我们使用记号 $M_D(t,\ 0) = M_D(t)$。于是 $M_D(t,\ s) = M_D(t)M_D(s)^{-1}$。此外，对于每个 $t\in\mathbb{R}$ 且初始数据为 $M_D(0) = I$，该基本矩阵满足以下变分常微分方程 $M_D'(t) = D(t)M_D(t)$ 。

定义 3.1。 如果基本矩阵满足不变性，则称系统 (2) 在区间 I 上具有指数二分性，投影为 $P\colon\ I \to \mathbb{R}^{n\times n}$，常数为 $k \geqslant 1$ ，指数为 α、$\beta > 0$ 。

$$P(t)M_D(t,s) = M_D(t,s)P(s) \quad for\ all\ \ t,s\in I, \tag{3}$$

并且满足以下不等式

$$\|M_D(t,s)P(s)\| \leqslant ke^{-\alpha(t-s)} \quad for\ all\ \ s\leqslant t\in I, \tag{4}$$

$$\|M_D(t,s)(I-P(s))\| \leqslant ke^{\beta(t-s)} \quad for\ all\ \ t\leqslant s\in I. \tag{5}$$

通常， $I = \mathbb{R}$、 $I = [0,\ \infty)$ 或 $I = (-\infty,\ 0]$。在这些情况下，若将 $s = 0$ 代入 (3)，可得到 $P(t)M_D(t) = M_D(t)P(0)$，进而得到 $P(t) = M_D(t)P(0)M_D(t)^{-1}$，因此可以根据 $P(0)$ 和基本矩阵恢复$P(t)$。记作 $P(0) = P$。将 $s = t$ 代入 (4)，可得到 $\|P(t)\| \leqslant k$。这意味着，如果系统 (2) 具有指数二分性，则 $\|P(t)\|$ 关于 $t\in I$一致有界，因此矩阵 $P(t)$的所有元素的模也必定有界。如果 $I = \mathbb{R}$ ，则投影 P 唯一确定，参见 [Cop78，第 19]页。如果$I = \mathbb{R}^-$，则二分性定义中的 P 可以替换为具有相同核的任意其他投影，参见 [BF20，命题 2]，；如果 $I = \mathbb{R}^+$，则 P 可以替换为具有相同值域的任意其他投影。如果方程在 $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^-$ 上具有相同投影 P 和指数的指数二分性，那么它在 $\mathbb{R}$ 上也具有相同投影和指数的指数二分性，参见 [BF20，命题 1] ，或 [Cop78，第 19]页。

我们回顾 [BP15] 关于上三角系统的结果。我们将考虑由以下系统支配的问题

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

假设 $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$ 有界且连续。我们讨论由对角块 $x'(t) = A(t)x(t)$和 $y'(t) = B(t)y(t)$ 给出的矩阵所支配的较小系统具有二分性这一事实，与 (6) 具有指数二分性这一事实之间的关系。我们引用以下结果，参见 [BP15，推论 1]

推论 3.2。假设线性系统 $x'(t) = A(t)x(t)$ 和 $y'(t) = B(t)y(t)$ 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性，其中 $A(t) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 和 $B(t) \in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}$，且 $C(t)$ 是分段连续且有界的 $d \times (n-d)$ 矩阵。那么 (6) 在 $\mathbb{R}$上具有指数二分性。

（6）的投影 P 可按以下方式构造。首先，我们按以下方式构造 $\mathbb{R}^-$ 和 $\mathbb{R}^+$ 上的二分性的投影，参见 [BP15，定理 1]

$$P^+ = \begin{pmatrix} P^A & L^+P^B \\ 0 & P^B \end{pmatrix} \text{ on } \mathbb{R}^+ \qquad P^- = \begin{pmatrix} P^A & L^-(I_{n-d} - P^B) \\ 0 & P^B \end{pmatrix} \text{ on } \mathbb{R}^-, \tag{7}$$

其中， P^A和 P^B分别是具有 $A(t)$和 $B(t)$的系统的投影，而 L^+、 L^-是连接算子，定义如下:

$$L^+ = -\int_0^\infty M_A(s)^{-1}(I_d - P^A(s))C(s)M_B(s)\,ds,$$
$$L^- = \int_{-\infty}^0 M_A(s)P^A(s)C(s)M_B(s)^{-1}\,ds.$$

接下来，我们构造唯一的投影 P，使其核与 P^-的核一致，值域与 P^+的值域一致。该投影给出了 $\mathbb{R}$上的二分性。

3.2 非自治 Lotka–Volterra 系统的线性化

假设 $(u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_k^*(t), 0, \ldots, 0)$是（LV-$n$）的一个解，且 u_i^*在 $i \in \{1, \ldots, k\}$上与零和无穷远保持距离。我们考虑该解附近的线性化系统。记 $u_j^* = 0$为 $j \in \{k+1, \ldots, n\}$，并令 $w_i = u_i - u_i^*$，可得以下微分方程组

$$w_i'(t) = a_i(t)w_i(t) - u_i^*(t)\sum_{j=1}^n b_{ij}(t)w_j(t) - w_i(t)\sum_{j=1}^k b_{ij}(t)u_j^*(t) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)w_j(t)w_i(t). \tag{8}$$

上述系统可写为 $w'(t) = \mathcal{M}(t)w(t) + R(w(t), t)$，其中 R 是关于 w的二次余项。舍去这一二次项后，得到线性化系统 $v'(t) = \mathcal{M}(t)v(t)$，此时未知量记为 v。该系统具有如下分块对角形式

$$v'(t) = \begin{pmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix} v(t), \tag{9}$$

其中 $A(t)$是一个 $k \times k$矩阵，其元素由 $a_{ii}(t) = a_i(t) - \sum_{j=1}^k b_{ij}(t)u_j^*(t) - b_{ii}(t)u_i^*(t)$和 $a_{ij}(t) = -b_{ij}(t)u_i^*(t)$给出，其中 $j \neq i$。矩阵 $B(t)$是一个 $(n-k)\times(n-k)$对角矩阵，具有 $c_{ii}(t) = a_i(t) - \sum_{j=1}^k b_{ij}(t)u_j^*(t)$。最后， $C(t)$是一个 $k \times (n-k)$矩阵，其元素由$c_{ij}(t) = -u_i^*(t)b_{ij}(t)$给出。

以下引理已在 [AL98，引理 3.6]，中得到证明，它指出该系统 m with 矩阵 $A(t)$ 总是具有指数二分性，且 $P = I$。

引理 3.3. 假设列对角占优条件 $(H2)$成立。设 $u^*(t)$ 是 (LV-n) 的一个远离零和无穷大的正解，且设 $A(t) = (a_{ij}(t))$ 是一个 $n \times n$ 矩阵

，它是围绕 $u^*(t)$ 线性化的系统的矩阵，即 $a_{ii}(t) = a_i(t) - \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)u_j^*(t) - b_{ii}(t)u_i^*(t)$ 且 $a_{ij}(t) = -b_{ij}(t)u_i^*(t)$ 对于 $j \neq i$。设 $M_A(t)$ 为系统 $v'(t) = A(t)v(t)$ 的一个基本矩阵，即

$$M_A'(t) = A(t)M_A(t), \quad M_A(0) = I.$$

存在常数 $K > 0$ 和 $\gamma > 0$，使得

$$\|M_A(t,s)\| = \|M_A(t)M_A^{-1}(s)\| \leqslant Ke^{-\gamma(t-s)}$$

当 $-\infty < s \leqslant t < \infty$时。

当然，如果将维数 n 替换为更小的数值 k，上述引理仍然成立，此时线性稳定性在 k 维子空间中成立。

4 灭绝解的渐近稳定性

4.1 给定物种子集的灭绝条件

本节介绍关于 a_i 和 b_{ij} 的假设，这些假设使集合 $\{1、.....、n\}$ 能够拆分为两个不相交的指标集 I和 J之和。对于任意初始数据 $u(t_0) > 0$，由 J 索引的物种都会灭绝，也就是说，当 $t \to \infty$ 时，对于 $i \in J$， $u_i(t) \to 0$；而当 $i \in I$时， $u_i(t)$ 会随时间向前推移而与零保持距离。我们作出以下条件。

$$\begin{cases} b_{ii}\bar{d}_i + \varepsilon \leqslant a_i \leqslant b_{ii}d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^n b_{ij}(d_j + \theta c_j) - \varepsilon \text{ for } i \in I \\ a_i \leqslant \sum_{j=1,j\neq i}^n b_{ij}(d_j + \theta c_j) - \varepsilon \text{ for } i \in J \end{cases} \tag{B}$$

对于某些正向量 d、$d > 0$以及正数 ε、$\theta > 0$。常数 c_j出现在 $(H1)$ 中。注意，若 $i \in J$，则 $a_i^U \leqslant -\varepsilon$；若 $i \in I$，则 $a_i^L \geqslant \varepsilon$。因此，对于 $i \in J$， a_i 为负且与零保持距离；对于 $i \in I$，则为正且与零保持距离。

以下结果的证明是将 Ahmad[Ahm93, 引理 2], 中的结果推广到 n 维情形；其中考虑的是二维问题，且两个集合 I 和 J 各仅由一个指标组成。

引理 4.1。若(B) 和$(H1)$ 成立，则对于(LV-n) 的每个解 u，只要 $u(t_0) > 0$，就存在 $t^* > t_0$，使得对于每个 $t \geqslant t^*$

- $\bar{d}_i < u_i(t) < d_i$ *for* $i \in I$,
- $u_i(t) < d_i$ *for* $i \in J$.

证明。 **步骤 1**。我们首先证明，对于每个 $i \in I$，都存在 $t_i = t(i)$，使得对每个 $t \geqslant t_i$，都有 $u_i(t) > d_i$。首先假设存在 $t \geqslant t_0$，使得 $u_i(t) \geq d_i$。我们证明，对每个 $s \geqslant t$，都有 $u_i(s) > d_i$。事实上，假设对某个 $s > t$，有 $u_i(s) \leqslant d_i$。定义 $r = \min\{r \geqslant t : u_i(r) = d_i\}$。一方面，必有 $\dot{u}_i(r) \leqslant 0$。另一方面

$$u_i'(r) = \overline{d}_i \left(a_i(r) - b_{ii}(r)\overline{d}_i - \sum_{j=1,j\neq i}^n b_{ij}(r)u_j(r) \right) \geqslant \overline{d}_i\varepsilon,$$

¯这就产生了矛盾。现在假设存在 $t > t_0$，使得对每个 $s \geqslant t$，都有 $u_i(s) \leqslant d_i$。那么我们就会有

$$\frac{u_i'(s)}{u_i(s)} = a_i(s) - b_{ii}(s)u_i(s) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)u_j(s) > a_i(s) - b_{ii}(s)\bar{d_i} \geqslant \varepsilon > 0$$

对于每个 $s \geqslant t$。这意味着当 $s \to \infty$ 时 $u_i(s) \to \infty$，因此我们得出矛盾。

步骤 2。定义集合

$$A_k = [0, d_1 + k\theta c_1) \times [0, d_2 + k\theta c_2) \times ... \times [0, d_n + k\theta c_n) \quad \text{for} \quad k \geqslant 0. \tag{10}$$

我们首先证明，如果 $u_0 \in A_k$，那么对于所有 $t \geqslant t_0$都有 $u(t) \in A_k$，即集合 A_k 是正向不变的。假设情况并非如此，即 $u(t_0) \in A_k$ 且对于某个 $t \geqslant t_0$ $u(t) \notin A_k$。那么必然存在 $s > t_0$ 以及一个指标 i，使得 $u_i(s) = d_i + k\theta c_i$ 和 $\dot{u}_i(s) \geqslant 0$，并且对于$j \neq i$有 $u_j(s) \leqslant d_j + k\theta c_j$。我们计算

$$\begin{aligned}
a_i(s) &\geqslant b_{ii}(s)u_i(s) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)u_j(s) = b_{ii}(s)c_i k\theta + b_{ii}(s)d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)u_j(s) \\
&\geqslant b_{ii}(s)c_i k\theta + b_{ii}(s)d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)d_j + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)c_j k\theta \\
&= b_{ii}(s)d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)d_j + \theta k\left(\sum_{j=1}^{n} c_j b_{ij}(s)\right) \\
&> b_{ii}(s)d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)d_j > b_{ii}(s)d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)(d_j + \theta c_j).
\end{aligned}$$

现在，如果 $i \in I$，我们直接得到与（B）的矛盾；如果 $i \in J$，则上述计算意味着

$$a_i(s) > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(s)(d_j + \theta c_j),$$

从而也得到与（B）的矛盾。

步骤 3. 现在令 $k \geqslant 0$。我们证明，如果 $u(t) \in A_{k+1}$，那么存在 $s > t$，使得$u(s) \in A_k$。为此，只需证明：如果 $u(t) \in A_{k+1} \backslash A_k$，那么存在 $s > t$，使得 $u(s) \in A_k$。

步骤 3.1. 我们首先证明，若对每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 以及每个$t \geqslant t_0$，都有 $u_j(t) < d_j + (k+1)\theta c_j$，那么对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都存在 $s > t_0$，使得 $u_i(s) < d_i + k\theta c_i$。为此

假设对所有 $t \geqslant t_0$，都有 $u_i(t) \geqslant d_i + k\theta c_i$。那么对每个 $t \geqslant t_0$

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= u_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_i(r) - b_{ii}(r)u_i(r) - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(r)u_j(r)\,dr\right)\\
&\leqslant u_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_i(r) - b_{ii}(r)d_i - b_{ii}(r)c_j k\theta - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(r)(d_j + (k+1)\theta c_j)\,dr\right)\\
&= u_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_i(r) - b_{ii}(r)d_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(r)(d_j + \theta c_j) - k\theta\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(r)c_j\,dr\right)\\
&\leqslant u_i(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_i(r) - b_{ii}(r)d_i - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(r)(d_j + \theta c_j)\,dr\right)
\end{aligned}$$

若 $i \in I$，则根据（B），$u_i(t) \leqslant u_i(t_0)\exp(-\varepsilon(t-t_0))$，这与对每个 $t \geqslant t_0$ 都有 $u_i(t) \geqslant d_i + k\theta c_i$ 相矛盾。若 $i \in J$，则当 $b_{ii}(r)d_i > 0$ 时，由（B）可得 $u_i(t) \leqslant u_i(t_0)\exp(-\varepsilon(t-t_0))$，从而得到同样的矛盾。

步骤 3.2. 现在证明，若对某个 t 和某个 i，有 $u_i(t) < d_i + k\theta c_i$，且对每个 $s \geqslant t$ 及每个 $j \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $u_j(s) < d_j + (k+1)\theta c_j$，那么对每个 $s \geqslant t$，也有 $u_i(s) < d_i + k\theta c_i$。反设不然，则存在 $t^* > t$ 使得 $u_i(t^*) = d_i + k\theta c_i$ 且 $\dot{u}_i(t^*) \geqslant 0$。这意味着

$$\begin{aligned}
a_i(t^*) &\geqslant b_{ii}(t^*)u_i(t^*) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t^*)u_j(t^*)\\
&\geqslant b_{ii}(t^*)d_i + b_{ii}(t^*)k\theta c_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t^*)d_j + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t^*)(k+1)\theta c_j\\
&= b_{ii}(t^*)d_i + k\theta\sum_{i=1}^{n} b_{ii}(t^*)c_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t^*)(d_j + \theta c_j)\\
&\geqslant b_{ii}(t^*)d_i + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t^*)(d_j + \theta c_j).
\end{aligned}$$

现在，如果 $i \in I$，我们立即得到与 (B) 矛盾；如果 $i \in J$，最后一个估计表明 $a_i(t^*) \geqslant \sum_{j=1,j\neq i}^{n} b_{ij}(t^*)(d_j + \theta c_j)$ 这同样根据 (B) 导致矛盾，从而完成步骤 3 的证明。

步骤 4. 对于每个初始条件 $u_0 = (u_1(t_0), u_2(t_0), ..., u_n(t_0)) > 0$，存在某个 $k \geqslant 0$ 使得 $u_0 \in A_k$。因此，重复上述过程可知，存在某个 t^* 使得$u(t^*) \in A_0$，于是

$$u_i(t) < d_i$$

对于每个 $i = 1, ..., N$以及每个 $t \geqslant t^*$。 □

注 2. *Redheffer* 在 *[Red96* 的引理 *5]* 中得到了类似的结果。不过请注意，我们并不需要

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)d_j > 0 \quad \textit{for} \quad i \in J.$$

行对角占优条件 $(H1)$ 对常数 c_j成立，但不一定对常数 d_j成立，而 b_{ij} 和 a_j 与这些常数有关。

引理 4.2. 假设 $(H1)$ 和 (B)。令 $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ 为 (LV-n) 的解，满足$u_i(t_0) > 0$，其中 $i = 1, .., n$。若 $i \in J$，则当 $t \to \infty$时， $u_i \to 0$。

证明。由引理 4.1 可知，存在 $t^* \geqslant t_0$，使得对任意 $t \geqslant t^*$，都有$u_i(t) < d_i$，其中 $i = 1, ..., n$。那么，只要 $k \in J$

$$\begin{aligned}\hat{u}_k(t) &= \hat{u}_k(t^*) \exp\left(\int_{t^*}^{t} a_k(s) - \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(s)u_j(s)ds\right) \leqslant d_k \exp\left(\int_{t^*}^{t} a_k(s) - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} b_{kj}(s)d_j\, ds\right) \\ &\leqslant d_k \exp\left(-\varepsilon(t - t^*)\right) \to 0,\end{aligned}$$

因此，当 $t \to \infty$时， $u_k(t) \to 0$。 □

4.2 灭绝情况下解的反向无界性

本小节证明：若集合 J 非空，则任何具有全正初始数据的解都必定反向无界。

引理 4.3。假设 $(H1)$ 和 (B)成立，且 J 非空。对于满足初始条件 $u(t_0) > 0$ 的 (LV-n) 的每个解 u，其向后无界。

证明。取满足初始条件 $u(t_0) \in A_0$的解 u，其中 A_0 由 (10) 在$k = 0$下给出。取 $i \in J$，则

$$u_i' = u_i\left(a_i - b_{ii}u_i - \sum_{j\neq i} b_{ij}u_j\right) \leqslant u_i\left(a_i - \sum_{j\neq i} b_{ij}d_j\right) - b_{ii}u_i^2 \leqslant u_i\left(\sum_{j\neq i} b_{ij}c_j\theta - \varepsilon\right) - b_{ii}u_i^2 \leqslant -\varepsilon u_i.$$

由于 A_0 是正向不变的，直接应用 Gronwall 引理可得
连同
这一事实，即 $u(t_0) \in A_0$

$$d_i \geqslant u_i(t_0) \geqslant u_i(t)e^{\varepsilon(t-t_0)}.$$

We d由此可知，存在 t_0^* 使得 $u(t_0^*) \notin A_0$，否则就会得到一个矛盾
经过 passi
ng 并取 $t_0 \to \infty$。
现在假设解的初始条件为 $u(t_0) \in A_{k+1}\backslash A_k$。我们将证明存在 $t^* \leqslant t_0$ 使得 $u(t^*) \in A_{k+2}\backslash A_{k+1}$，进而通过迭代得到该解的向后无界性。反设对于每个 $t \leqslant t_0$ 都有$u(t) \in A_{k+1}$。那么，由于族 $\{A_k\}_{k\geqslant 0}$ 中的每个集合都是正向不变的，对于每个 $t \leqslant t_0$ $u(t) \notin A_k$，并按照引理 4.1 的步骤 3.2 中的论证，可知存在 $i \in \{1, 2, ..., n\}$，使得对于每个 $t \leqslant t_0$都有 $u_i(t) \geqslant d_i + k\theta c_i$。

假设 $i \in I$。我们证明，对于每个 $t \leqslant t_0$，必有 $\dot{u}_i(t) \leqslant -\varepsilon$ $t_1 \leqslant t_0$。事实上，若存在 $t_1 \leqslant t_0$ 使得相反的不等式成立，那么在该时刻

$$a_i > b_{ii}u_i + \sum_{j\neq i} b_{ij}u_j - \varepsilon \geqslant b_{ii}d_i + b_{ii}k\theta c_i + \sum_{j\neq i}(b_{ij}d_j + b_{ij}k\theta c_j + b_{ij}\theta c_j) - \varepsilon \geqslant b_{ii}d_i + \sum_{j\neq i} b_{ij}(d_j + \theta c_j) - \varepsilon$$

于是我们得到与 (B) 矛盾的结论。因此，存在 $t^* \leqslant t_0$ 使得 $u_i(t^*) \geqslant d_i + (k+2)\theta c_i$，所以它不可能在过去的所有时刻都满足 $u(t) \in A_{k+1}$，这就产生了矛盾。

用 $i \in J$ 进行类似的论证，可得不等式

$$a_i > \sum_{j \neq i} b_{ij} d_j + b_{ij}\theta c_j - \varepsilon,$$

这同样会导致矛盾。 □

4.3 除一个物种外所有物种灭绝的情形

我们给出了一些条件，以保证给定的物种子集灭绝。本节研究由 I 标记的持续存在的物种的渐近行为。我们证明，当时间趋于无穷时，这些物种的数量趋于子系统的唯一解，该解与零和无穷远离；该子系统由指标为 I 的方程给出。我们先考虑只有一个物种持续存在的情形。因此，我们给出关于向量 $a(t)$ 的条件，使得轨道 $(u_1^*, 0, ..., 0)$ 是系统 (LV-n) 的全局吸引解。函数 u_1^* 是逻辑斯蒂方程的解

$$\dot{u}_1(t) = u_1(t)(a_1(t) - b_{11}(t)u_1(t))$$

该解与零和无穷远离；根据定理 2.1，在下文假设 ($B1$)（这对一维系统意味着 (B)）和 ($H2$) 下，该解是唯一的。因此，我们需要施加条件 $b_{11} > 0$（初始假设中已施加），以及带有 $I = \{1\}$ 和 $J = \{2, ..., n\}$ 的 (B) 的相应版本；也就是说，我们假设存在一个数 $d_1 > 0$、一个向量 $d > 0$ 和两个数ε，$\theta > 0$，使得，

$$\begin{cases} b_{11}\bar{d_1} + \varepsilon \leqslant a_1 \leqslant b_{11}d_1 + \sum_{j=2}^{n} b_{1j}(d_j + c_j\theta) - \varepsilon \\ a_i \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}(d_j + c_j\theta) - \varepsilon \text{ for } i = 2, ..., n \end{cases} \tag{$B1$}$$

我们略去以下结果的证明，其证明思路与 [Ahm93, Lemma 4], 完全相同；不过，该处只考虑了两个物种，一个能够持续存在，另一个则会衰亡。

引理 4.4. 假设 $(B1)$。设 $(u_1, u_2, ..., u_n)$ 是 (LV-n) 的一个解，满足 $d_1 < u_1(t_0) < d_1$，且对于每个 $i = 2, ..., n$，都有 $0 < u_i(t_0) < d_i$，则当时间趋于无穷时，$u_1^* - u_1 \to 0$。

最后，将上述引理与引理 4.1 和引理 4.2 结合，可得关于渐近行为的以下结果。

定理 4.5. 假设条件 $(H1)$ 和 $(B1)$ 成立，并设对于 $j = \{2, ..., n\}$，有 $|b_{1j}|^U < \infty$。若 $(u_1, u_2, ..., u_n)$ 是一个解，且初始条件为 $u_i(t_0) > 0$（对于 $i = 1, ..., n$），则对于$i = 2, ..., n$，有 $u_i \to 0$，并且当时间趋于无穷时，$u_1 - u_1^* \to 0$。

证明。 根据引理 4.1，我们可以选择 t^* 作为初始时间，此时 $d_1 < u_1(t^*) < d_1$ 且 $0 < u_i(t^*) < d_i$ 对于 $i = 2$、.....、n成立。然后，根据引理 4.4，我们有 $u_1(t) - u_1^*(t) \to 0$；再由引理 4.2 可推得，当 $t \to \infty$时，对于 $i = 2$、.....、n，有 $u_i(t) \to 0$。 □

4.4 一个物种灭绝的情形

我们继续分析仅有一个物种灭绝的情形。因此，我们给出系数 $a_i(t)$、$b_{ij}(t)$ 所满足的条件，以保证当 $t\to\infty$ 时，对于 (LV-n)，轨道$(u_1^*$、u_2^*、.....、u_{n-1}^*、$0)$ 是全局吸引解；其中，$(u_1^*$、u_2^*、.....、$u_{n-1}^*)$是通过去除最后一个变量得到的 Lotka–Volterra $(n-1)$ 维系统的解。

现在需要同时施加 $(H1)$，以及 (B) 的如下版本，其中 $I=\{1,...,n-1\}$ 和 $J=\{n\}$，即存在向量 $d,d\in\mathbb{R}^n$ 和参数 $\theta,\varepsilon>0$，使得

$$\begin{cases} b_{ii}\bar{d}_i+\varepsilon\leqslant a_i\leqslant b_{ii}d_i+\sum_{j=1;j\neq i}^{n}b_{ij}(d_j+c_j\theta)-\varepsilon \quad \text{for} \quad i=1,...,n-1 \\ a_n\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}b_{nj}(d_j+c_j\theta)-\varepsilon \end{cases} \tag{$B2$}$$

对每个 $t\in\mathbb{R}$ 都成立。此外，对于前 $n-1$ 个坐标，还必须满足列对角占优，因此我们称 $(H2)_{n-1}$ 成立。

引理 4.6。 假设 $(H2)_{n-1}$ 和 $(B2)$成立。设 $\bar{u}$ 是一个 $(n-1)$ 维 *Lotka–Volterra* 系统的解，该系统由将最后一个变量设为零（$u_n=0$）得到，初始数据为 $\bar{u}(t_0)>0$。存在唯一的 u^*，它是 $(n-1)$ 维系统的解，与零和无穷远保持正距离，并且满足

$$|\bar{u}(t)-u^*(t)|\to 0 \quad when \quad t\to\infty$$

and

$$\bar{d}_i\leqslant u_i^*(t)\leqslant d_i$$

对于 $i=1,...,n-1$，以及所有 $t\in\mathbb{R}$。

证明。 我们针对维数 $n-1$ 使用定理 2.1。 □

引理 4.7。 假设 $(H1)$, $(H2)_{n-1}$ 以及$(B2)$，并令 $|b_{in}|^U<\infty$，其中 $i\in\{1,\dots,n-1\}$。令$u^*=(u_1^*,u_2^*,...,u_{n-1}^*)$ 为引理 *4.6* 给出的 $(n-1)$ 维 *Lotka–Volterra* 系统的解，并令 $\hat{}u=(u_1^*,u_2^*,...,u_{n-1}^*,0)$。存在常数 $\delta>0$，使得若对某个 $t_0\in\mathbb{R}$ 有 $|\hat{}u(t_0)-u_0|<\delta$，则 $\lim_{t\to\infty}|\hat{}u(t)-u(t)|=0$，其中 u 满足(LV-n) 且 $u(t_0)=u_0$。

证明。 我们首先研究在 $\hat{}u=(u_1^*,...,u_{n-1}^*,0)$ 附近线性化的系统。记

$$w(t)=u(t)-\hat{u}(t)$$

其中 $u(t)$ 是一个解，其初始条件位于 $\hat{}u$ 的邻域内。于是我们得到

$$w'(t)=\mathcal{M}(t)w(t)+R(w(t),t),$$

其中 $\mathcal{M}(t)$ 和 $R(w,\ t)$ 如式 (8) 所示。线性化系统具有式 (9) 的形式，其中 $C(t)$ 是一个 $(n-1)\times 1$，由 b_{in} 的有界性可知它有界。此外，$B(t)$ 是 1×1 矩阵，其元素为 $a_n(t)-\sum_{j=1}^{n-1}b_{n,j}(t)u_j^*(t)$。我们注意到，一维系统 $v_n'=B(t)v_n$ 具有投影 $P(t)=1$ 对应的指数二分性，因为由式 $(B2)$ 可知，$B(t)\leqslant-\varepsilon<0$。此外，根据引理 3.3，系统 $(v_1,\ .....,\ v_{n-1})'=A(t)(v_1,\ .....,\ v_{n-1})$ 具有指数二分性，其中$P(t)=I_{(n-1)\times(n-1)}$是 $(n-1)\times(n-1)$ 单位矩阵。

因此，根据推论 3.2 以及 [BP15] 在第 3 节回顾的结果，线性化系统 (9) 具有投影为 $P = I_{n\times n}$ 的指数二分性。容易看出，时变投影 $P(t)$ 由 $P(t) = M(t,\ 0)PM(0,\ t) = I_{n\times n}$ 给出。因此

$$|v(t)| \leqslant K|v(s)|e^{-\gamma(t-s)} \quad \text{for all} \quad t, s \in \mathbb{R},$$

对于某些常数 K，$\gamma > 0$，根据 [Cop65，第 70] 页可知，得到引理断言中所给的 $\hat{u}$ 的局部渐近稳定性。

□

在下一个结果中，我们将证明全局渐近稳定性。由于证明过程与 [AL98，定理 2.3]的证明完全相同，因此略去。

定理 4.8. 假设$(H1)$、$(H2)$ 和$(B2)$ 成立，并令 $|b_{ij}|^U < \infty$ 和 $|a_i|^U < \infty$ 对于 i、j ∈{1、.....、n}。设 u 是(LV-n) 的一个解，满足 $u(t_0) > 0$。则

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - \hat{u}(t)| = 0$$

其中，$\hat{}u = (u_1^*$、.....、u_{n-1}^*、$0)$、$(u_1^*$、.....、$u_{n-1}^*)$ 是引理 *4.6* 中给出的 $(n-1)$ 维系统的全局渐近稳定正解。

5 非自治逻辑斯蒂方程吸引子的结构

我们从一维非自治问题的分析入手。尽管本节的结果大多已为人所知，但研究二维和三维问题时需要用到这些结果。因此，本章旨在研究

$$u'(t) = u(t)(a(t) - b(t)u(t)), \tag{11}$$

其中 a，$b \in C(\mathbb{R})$，$b > 0$。

5.1 持久性

我们需要以下假设

$$\overline{d}b(t) \leqslant a(t) \leqslant db(t) \ \text{ and } \ b^L > 0, \tag{12}$$

其中常数为 d，$\overline{d} > 0$。下一个结果由 [Red96，定理 1. (ii)]，（上文引用为定理 2.1）得出。

引理 5.1。函数 $u(t) = 0$ （ $t \in \mathbb{R}$ ）是(11)的一个解。此外，存在函数 $d \leqslant u^*(t) \leqslant d$ （ $t \in \mathbb{R}$ ），它是(11)的一个解。这是唯一一个与零和无穷远保持正距离的完全解。

下一个引理给出了除 u^* 之外的 (11) 的解的渐近行为特征。

引理 5.2. 若 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满足 $u(t_0) \geqslant 0$ 的(11) 的一个解，则下列四种可能性中恰有一种成立：

(a) 对每个 $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = 0$

(b) $u = u^*$, *(c)* 如果 $u(t_0) \in (0, u^*(t_0))$，那么 $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty} u^*(t) - u(t) = 0$, *(d)* 如果 $u(t_0) > u^*(t_0)$，那么 $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \infty$ 且 $\lim_{t\to\infty} u(t) - u^*(t) = 0$。

证明。取初始数据 $u(t_0) \in (0, u^*(t_0))$，则显然对于每个t，都有 $u(t) \in (0, u^*(t))$。若 $\inf_{t\in\mathbb{R}} u(t) > 0$, 则根据 [Red96，定理 1 (v)]，可得矛盾，因为与零保持正距离的解必定唯一。因此我们假设 $\inf_{t\in\mathbb{R}} u(t) = 0$。若存在时刻$t_1 \in \mathbb{R}$ 使得 $u(t_1) = 0$，则由解的唯一性可得 $u = 0$。于是存在递减序列 $\{t_n\}$，使得 $t_n \to -\infty$, $u(t_n) \to 0$ 且 $u(t_n) < d$。若对某个 $t \in (t_{n+1}, t_n)$，有$u(t) > u(t_n)$，则存在 $t^* \in [t, t_n)$，使得 $u(t^*) > u(t_n)$，并且在 (t^*, t_n) 上，函数 u严格小于 d。因此

$$0 > u(t_n) - u(t^*) = \int_{t^*}^{t_n} u(s)(a(s) - b(s)u(s))\, ds \geqslant \int_{t^*}^{t_n} u(s)(a(s) - b(s)\bar{d})ds \geqslant 0,$$

矛盾，因此 $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 0$。根据 Red96 的定理 1 (vi)]，当 $t \to \infty$ 时收敛到 u^*。若 $u(t_0) > u^*(t_0)$，则类似于情形 (c)，我们有在$+\infty$ 处的收敛，并且存在递减序列 $t_n \to -\infty$，使得 $u(t_n) \to \infty$ 且 $u(t_n) > d$。若$u(t) < u(t_n)$ 对 $t \in (t_{n+1}, t_n)$ 成立，则存在 $t^* \in [t, t_n)$，使得 $u(t^*) < u(t_n)$，且 u 在 $[t^*, t_n)$ 上严格大于 d；因此，类似于情形 (c)，$\lim_{t\to-\infty} u(t) = \infty$。 □

我们在本节最后回顾两个关于一维问题的结果，它们对后续分析很有用。首先回顾一个结果：线性化问题具有指数二分性，且其唯一方向是指数稳定的。

引理 5.3. 存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得若 $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是围绕 u^*线性化后的以下一维问题的解

$$w'(t) = w(t)(a(t) - 2b(t)u^*(t)),$$

则有

$$|w(t)| \leqslant M|w(t_0)|e^{-\delta(t-t_0)} \quad for\ every \quad t \geqslant t_0.$$

证明. 该结果可直接由引理 3.3 得出，而引理 3.3 又可由 [AL98, 引理 3.6] 推出。

□

最后，我们证明一维问题 (11) 的解的不变性和单调性结果。

引理 5.4. 若 $u(t_0) \geqslant d$，则对每个 $t \geqslant t_0$，都有 $u(t) \geqslant d$；若 $u(t_0) \leqslant d$，则对每个$t \geqslant t_0$，都有 $u(t) \leqslant d$。若 $0 < u(t_0) < d$，则对每个 $t \geqslant t_0$，都有 $u(t) \geqslant u(t_0)$；若 $u(t_0) > d$，则对每个 $t \geqslant t_0$，都有 $u(t) \leqslant u(t_0)$。

证明。第一部分由 [Red96，定理 1. (i)] 得出。对于第二部分，只需证明若 $0 < u(t) < d$，则 $u'(t) > 0$。事实上，若 $u(t_0) \in (0, d)$

$$u'(t) = u(t)\,(a(t) - b(t)u(t)) > u(t)\left(a(t) - b(t)\left(\frac{a}{b}\right)^L\right) = u(t)b(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} - \left(\frac{a}{b}\right)^L\right) \geqslant 0.$$

反过来，若 $u(t) > d$，则

$$u'(t) = u(t)\left(a(t) - b(t)u(t)\right) < u(t)\left(a(t) - b(t)\left(\frac{a}{b}\right)^U\right) = u(t)b(t)\left(\frac{a(t)}{b(t)} - \left(\frac{a}{b}\right)^U\right) \leqslant 0,$$

证明至此完成。 □

5.2 灭绝

为得到单一物种灭绝的判据，我们给出一个可直接由引理 4.2 得出的定理。

引理 5.5. 若 $a^U < 0$，则对于(11) 的每个解，只要 $u(t_0) > 0$，就有$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$且$\lim_{t\to-\infty} u(t) = \infty$。

证明。 为得到断言 $\lim_{t\to-\infty} u(t) = \infty$，注意到由于

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = a(t) - b(t)u(t),$$

我们推 deduce that

$$\ln(u(t)) - \ln(u(t_0)) = a(t) - b(t)u(t) \leqslant a^U.$$

因此

$$u(t_0) \geqslant u(t)e^{-a^U(t-t_0)},$$

且证明完毕。 □

6 非自治洛特卡-沃尔泰拉二维系统的吸引子

在第 2 节中，我们回顾了 [Red96] 关于存在有界且与零分离的完整轨道的结果。特别地，我们证明了保证此类解存在的条件。该条件可用于整个 n 维系统，也可用于通过将某些变量 u_i 设为零而得到的子系统。利用这一 n定理并结合第 4 节的结果，我们给出了在二维合作型 Lotka–Volterra 问题中刻画非自治吸引子结构的条件。我们将根据全局渐近稳定解考虑三种情形：具有两个非零分量的解、具有一个非零分量的解，或两个分量均为零的解。因此，我们将考虑系统

$$\begin{cases} u_1' = u_1(a_1(t) - b_{11}(t)u_1 - b_{12}(t)u_2) \\ u_2' = u_2(a_2(t) - b_{21}(t)u_1 - b_{22}(t)u_2), \end{cases} \tag{LV-2}$$

其中 b_{11}^L，$b_{22}^L > 0$ 和 b_{12}，$b_{21} \leqslant 0$。

我们将使用记号 $S(t,\tau)u_0$ 表示 $\tau \in \mathbb{R}$ 和 $t \geqslant \tau$，用以表示与 (LV-2) 相关的过程，即由初始数据 u_0 在时刻 τ 映射到 (LV-2) 在时刻 t的解的一族映射。

6.1 持久性情形下吸引子的结构

我们首先研究这样一种情形：存在一个完全解，其两个变量都远离零和无穷，并且当 $t \to \infty$时，它吸引所有初始数据非零的解。在这种两个物种具有持久性的情况下，非自治吸引子的结构如图1所示。

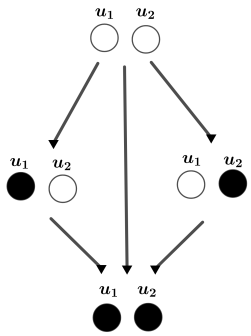


图1：对于具有全局渐近稳定共存状态的二维问题，四个完全解及其连接。黑点表示严格为正的函数，白点表示恒等于零的函数。

根据定理 2.1，我们必须施加以下条件

$$\begin{cases} (\bar{c}_1 b_{11} + \bar{c}_2 b_{21})^L > 0, \\ (\bar{c}_2 b_{22} + \bar{c}_1 b_{12})^L > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{d}_1 b_{11} \leqslant a_1 \leqslant d_1 b_{11} + d_2 b_{12}, \\ \bar{d}_2 b_{22} \leqslant a_2 \leqslant d_1 b_{21} + d_2 b_{22}, \end{cases} \tag{13}$$

with 一些常数 d_1, d_2, $\bar{d}_1$, d_2, $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$。这些界限正是条件 (A) and (H2) 对于二维情形。我们还假设

$$|b_{12}|^U, |b_{21}|^U, a_1^U, a_2^U < \infty. \tag{14}$$

注意到，上述假设特别意味着 a_1, $a_2 > 0$。下一个结果由[Red96, 定理 1. (ii)]，（上文引用为定理 2.1）推出。

引理 6.1. 存在一个函数 $u^* = (u_1^*, u_2^*)$，定义于 $t \in \mathbb{R}$，它是 (LV-2) 的完全解，并满足 $d_i \leqslant u_i \leqslant d_i$ 对于 $i = 1, 2$。这是在两个变量中均与零和无穷远保持有界距离的唯一完全轨道。此外，存在函数 $(\widehat{u}_1, 0), (0, \widehat{u}_2)$ 和 $u(t) = (0, 0)$，定义于 $t \in \mathbb{R}$，它们是 (LV-2) 的完全解，并满足 $d_i \leqslant \widehat{u}_i \leqslant d_i$ 对于 $i = 1, 2$。

下一个引理直接由引理 5.2 得出。

引理 6.2. 如果函数 $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 是满足 $u_1(t_0) \geqslant 0$ 和 $u_2(t_0) = 0$ 的(LV-2) 的一个解，那么以下四种情况中恰有一种成立：

(a) 对每个 $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = (0、 0)$,

(b) $u = (\widehat{u}_1, 0)$,

(c) 若 $u_1(t_0) \in (0, \widehat{u}_1(t_0))$, 则 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \widehat{u}_1(t) - u_1(t) = 0$, 且对于 $t \in \mathbb{R}$, $u_2(t) = 0$,

(d) 若 $u_1(t_0) > \widehat{u}_1(t_0)$, 则 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} u_1(t) - \widehat{u}_1(t) = 0$, 且对于 $t \in \mathbb{R}$, $u_2(t) = 0$ 。

与引理 6.2 类似的结果成立，并使我们能够建立从 $(0, 0)$ 到 $(0, \widehat{u}_2)$ 的连接。为得到图 1 所示的结构，还需建立从 $(0, \widehat{u}_2)$、 $(\widehat{u}_1, 0)$ 和 $(0, 0)$ 到 (u_1^*, u_2^*) 的连接。

定理 6.3。 存在一条 (LV-2) 的轨道，记为 $z = (z_1, z_2)$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 使得

$$\lim_{s\to-\infty} |(z_1(s), z_2(s)) - (\widehat{u}_1(s), 0)| = 0.$$

and

$$\lim_{s\to\infty} |(z_1(s), z_2(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s))| = 0.$$

对于 $(0, \widehat{u}_2)$, 也有类似的结果。

证明。 我们证明解 $(\widehat{u}_1, 0)$ 是局部不稳定的，也就是说，它的非自治不稳定流形

$$\begin{aligned} W^u((\widehat{u}_1, 0)) = \{(t, (w_1, w_2)) :\ &\text{there exists a solution } z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \text{ such that} \\ &z(t) = (w_1, w_2) \ \text{ and } \ \lim_{s\to-\infty} |z(s) - (\widehat{u}_1(s), 0)| = 0\}, \end{aligned}$$

非空，且与正象限的内部相交。正如我们在第 2 节中所见，参见定理 2.1，永久解 $(u_1^*(s), u_2^*(s))$ 在正向时间上吸引初始数据位于该交集中的解。我们首先证明局部不稳定流形的存在性。为此，我们先研究在 $(\widehat{u}_1, 0)$附近线性化的系统。记

$$w(t) = u(t) - \widehat{u}(t)$$

其中 $\widehat{u}(t) = (\widehat{u}_1(t), 0)$, 且 $u(t)$ 是一个初始条件位于 $\widehat{u}$邻域内的解。于是得到

$$w'(t) = \mathcal{M}(t)w(t) + R(w(t), t)$$

其中 $\mathcal{M}(t)$ 是向量场在 $\widehat{u}(t)$ 处的导数， $R(t)$ 是关于 w的高阶（二次）余项。在二维情形下，我们有如下常微分方程

$$w'(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) - 2b_{11}(t)\widehat{u}_1(t) & -b_{12}(t)\widehat{u}_1(t) \\ 0 & a_2(t) - b_{21}(t)\widehat{u}_1(t) \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} -b_{11}(t)w_1(t)^2 - b_{12}(t)w_1(t)w_2(t) \\ -b_{21}(t)w_1(t)w_2(t) - b_{22}(t)w_2(t)^2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

线性化系统的形式为

$$\begin{cases} v'(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) - 2b_{11}(t)\widehat{u}_1(t) & -b_{12}(t)\widehat{u}_1(t) \\ 0 & a_2(t) - b_{21}(t)\widehat{u}_1(t) \end{pmatrix} v(t) = \begin{pmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix} v(t). \end{cases} \tag{16}$$

其中 $A(t)=a_1(t)-2b_{11}(t)\widehat{u}_1(t)$、$C(t)=-b_{12}(t)\widehat{u}_1(t)$ 和 $B(t)=a_2(t)-b_{21}(t)\widehat{u}_1(t)$。我们注意到，一维系统 $v_2'=B(t)v_2$ 具有指数二分性，且投影为 $P_B(t)\equiv 0$，因为根据（13），有 $B(t)\geqslant\delta>0$，并且对于每个 $t\geqslant s$

$$v_2(t)=v_2(s)e^{\int_s^t a_2(r)-b_{21}(r)\widehat{u}_1(r)ds}\Rightarrow|v_2(t)|\geqslant|v_2(s)|e^{\delta(t-s)}.$$

我们还注意到，根据引理 5.3，系统 $v_1'=A(t)v_1$ 具有指数二分性$P_A(t)=I$。于是，根据第 3 节中回顾的结果，由于根据式 (14) 和引理 6.1，函数 $C(t)$有界，系统 (16) 存在指数二分性。根据式 (7)，投影为

$$P^+=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ on }\mathbb{R}^+\text{ and }P^-=\begin{pmatrix}1&L^-\\0&0\end{pmatrix}\text{ on }\mathbb{R}^-.$$

投影

$$P=P^-=\begin{pmatrix}1&L^-\\0&0\end{pmatrix}$$

与 P^+具有相同的值域，因此系统 (16) 具有指数二分性 P。对于时刻 $t\in\mathbb{R}$，相应的投影为 $P(t)=M(t,\ 0)PM(0,\ t)$，其中 $M(t,\ \tau)$是系统 (16) 的基本矩阵。由于 $M(t,\ 0)$和 $M(0,\ t)$均为上三角矩阵且互为逆矩阵，因此可得

$$P(t)=\begin{pmatrix}1&L(t)\\0&0\end{pmatrix},$$

对于某个有界函数 $L(t)$。特别地，dim ker $P(t)=1$且 dim 值域 $P(t)=1$。此外，

$$\text{range}(P(t))=\left\{\beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}:\beta\in\mathbb{R}\right\}\text{ and }\text{range}(I-P(t))=\left\{\alpha\begin{pmatrix}-L(t)\\1\end{pmatrix}:\alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

我们将使用 [KR11、定理 6.10 和练习 6.11]。存在 U 中零点的一个邻域 $\mathbb{R}^2$，以及一个连续函数 $\Sigma^-:\mathbb{R}\times U\to\mathbb{R}^2$，它是局部非自治不稳定流形，使得 $\Sigma^-(t,\ x)=\Sigma^-(t,\ (I-P(t))x)\in$ 值域$(P(t))$, $\Sigma^-(t,\ 0)=0$, $\lim_{|x|\to 0}\frac{\Sigma^-(t,\ x)}{|x|}=0$。此外，若对某个 $t\in\mathbb{R}$ 和 $x\in$ 值域 $(I-P(t))\cap U$，有 $y=x+\Sigma^-(t,\ x)$，那么只要 $|y|$ 足够小，方程 (15) 的反向轨迹 $w:(-\infty,\ t]\to\mathbb{R}^2$（其中 $w(t)=y$）就属于 Σ^- 的图，即 $\Sigma^-(\tau,\ (I-P(\tau))w(\tau))=P(\tau)w(\tau)$，并且对每个 $\tau\leqslant t$ 都满足 $|w(\tau)|\leqslant Ce^{\delta(\tau-t)}$。$\Sigma^-$ 的图上的点具有如下形式

$$y=x+\Sigma^-(t,x)=\alpha\begin{pmatrix}-L(t)\\1\end{pmatrix}+\Sigma^-\left(t,\alpha\begin{pmatrix}-L(t)\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\Sigma^-\left(t,\alpha\begin{pmatrix}-L(t)\\1\end{pmatrix}\right)-\alpha L(t)\\ \alpha\end{pmatrix}.\quad(17)$$

由于 $L(t)$ 有界，因此存在 $\mathbb{R}$ 中的一个零点邻域，使得对于该邻域中的 α，我们有 $x=\alpha\begin{pmatrix}-L(t)\\1\end{pmatrix}\in U$。取较小的正数 α。y的第二坐标等于 α，因此为正，而第一坐标可以任意小，所以将其与解 $(\widehat{u}_1(t),\ 0)$相加后，和的第一坐标也为正，其中 $\widehat{u}_1$ 与零保持一定距离。因此，对于任意 $t\in\mathbb{R}$，都存在一个第二坐标为正且

第一坐标任意小的点，其时间为 t，并且该点在反向时间上指数趋近于零；就原系统而言，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，都存在一个两个坐标均为正的点，该点在反向时间上指数趋近于 $(\widehat{u}_1(t),\ 0)$。根据 [Red96，定理 1 (iii) 和 (vi)]，这就证明了该定理的结论。 □

T定理 6.4. 存在一条 (LV-2) 的轨道，记为 $y = (y_1, y_2)$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，使得 t

$$\lim_{s \to -\infty} |(y_1(s), y_2(s))| = 0.$$

and

$$\lim_{s \to \infty} |(y_1(s), y_2(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s))| = 0.$$

证明. 在 $(0,0)$ 处的线性化系统具有如下形式

$$\begin{cases} v'(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 \\ 0 & a_2(t) \end{pmatrix} v(t), \end{cases} \tag{18}$$

该系统具有关于 $P(t) \equiv 0$ 的指数二分性。因此，根据 [KR11、定理 6.10 和练习 6.11]，存在 $(0,0)$ 的一个充分小邻域，使得常值函数 $\Sigma^- : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \{0\}$ 是 $(0,0)$ 的局部不稳定流形，因此每个充分小的正初始条件在反向时间上都指数趋近于零。由于它在正向时间上必定趋近于 $(u_1^*(s),\ u_2^*(s))$，证明完成。 □

定理 6.5. 如果一条轨道具有严格为正的初始条件，且在过去和未来都有界，那么它必定是上述轨道之一。

证明。 根据 [Red96 的定理 1.(v)]，我们知道 u^* 是 $\mathbb{R}$ 上唯一一个与 0 和 8 都保持正距离的解。因此，如果完全轨道 $u = (u_1,\ u_2)$ 有界、不与 u^* 重合，并且两个坐标都不为零，那么至少存在一个坐标（设为 u_1），使得存在一个递减序列 $t_n \to -\infty$，满足 $u_1(t_n) \to 0$ 和 $u_1(t_n) < d_1$。我们将证明 $\lim_{t \to -\infty} u_1(t) = 0$。证明过程与引理 5.2 类似。如果对于某个 $t \in (t_{n+1},\ t_n)$，有 $u_1(t) > u_1(t_n)$，那么存在 $t^* \in [t,\ t_n)$，使得 $u_1(t^*) > u_1(t_n)$，并且在 $(t^*,\ t_n)$ 上，函数 u_1 严格小于 d_1。因此

$$\begin{aligned} 0 > u_1(t_n) - u_1(t^*) &= \int_{t^*}^{t_n} u_1(s)(a_1(s) - b_{11}(s)u_1(s) - b_{12}(s)u_2(s))\, ds \\ &\geqslant \int_{t^*}^{t_n} u_1(s)(a_1(s) - b_{11}(s)\overline{d}_1) ds \geqslant 0, \end{aligned}$$

于是我们得到了矛盾。现在需要证明，如果 u_1 和 u_2 都不反向收敛到零，设 $u_1(t) \to 0$ 当 $t \to -\infty$ 且 $u_2(t)$ 与零保持一定距离，那么必然

$$\lim_{t \to -\infty} |u_2(t) - \widehat{u}_2(t)| = 0.$$

为此，假设存在某个序列 $t_n \to -\infty$

$$\lim_{n \to \infty} |u_2(t_n) - \widehat{u}_2(t_n)| = c > 0.$$

对于 $t \geqslant 0$，我们有

$$|u_2(t_n) - \widehat{u}_2(t_n)| \leqslant |S(t_n, t_n - t)(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t)) - S(t_n, t_n - t)(0, \widehat{u}_2(t_n - t))|.$$

由于 $u_2(t)$ 与零分离，记 $K = (u_2)^L$ 和 $M = (u_2)^U$。对于每个 $x \in [K, M]$

$$\begin{aligned}|u_2(t_n) - \widehat{u}_2(t_n)| &\leqslant |S(t_n, t_n - t)(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t)) - S(t_n, t_n - t)(0, x)| \\ &\quad + |S(t_n, t_n - t)(0, x) - S(t_n, t_n - t)(0, \widehat{u}_2(t_n - t))| \\ &\leqslant e^{\kappa t}|(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t)) - (0, x)| + \frac{2\max\{M, d_2\}^2}{\min\{K, \overline{d}_2\}} e^{-\delta \min\{K, \overline{d}_2\} t},\end{aligned}$$

其中我们使用了引理 2.2 和 2.3，且 κ 取决于 u_1，u_2 的界以及该问题的系数。取 $\varepsilon > 0$。我们可以找到 $t > 0$，使得 $2^{\text{最大值}\{M,\ d_2\}^2}\, e^{-\delta}{}^{\text{最小值}\{K,\ d_2\} t} < \frac{\varepsilon}{2}$。序列 $\overline{u}_2(t_n - t)$ 存在一个收敛子列，设 x 为该子列的极限，并取足够大的 n，使得 $Ce^{\kappa t}|(u_1(t_n - t),$ $u_2(t_n - t)) - (0,\ x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。因此，对于足够大的 n，在一个子列上，

$$|u_2(t_n) - \widehat{u}_2(t_n)| < \varepsilon,$$

一个矛盾。 □

最后，我们总结本节以上得到的结果，并构造图1所示吸引子的完整像。

定理 6.6。假设(13) 成立，则系统(LV-2) 具有以下轨道 u： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 在过去和未来均有界:

(a) $u(t) = (0, 0)$ 当 $t \in \mathbb{R}$ 时；*(b)* $u(t) = (\widehat{u}_1(t), 0)$ 以及 $u(t) = (0, \widehat{u}_2(t))$，它们对应于引理 *6.1* 中给出的一维子问题的唯一解，该解远离零和无穷大。*(c)* 类型为 $u(t) = (u_1(t), 0)$ 的解，其初始条件为 $0 < u_1(t_0) < \widehat{u}_1(t_0)$，其中 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \widehat{u}_1(t)) = 0$，见引理 *6.2*。类似地，$u(t) = (0, u_2(t))$ 的初始条件为 $0 < u_2(t_0) < \widehat{u}_2(t_0)$，其中 $\lim_{t\to-\infty} u_2(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_2(t) - \widehat{u}_2(t)) = 0$。*(d)* $u(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t))$，即引理 *6.1* 中给出的唯一解，其两个非零坐标均远离零和无穷大。*(e)* 类型为 $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ 的解，满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (0, 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t))$，见定理 *6.4*。*(f)* 类型为 $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ 的解，满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (\widehat{u}_1(t), 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)$

$u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t))$，如定理 *6.3* 所示。类似地，$u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ 使得极限$_{t\to-\infty}(u_1(t),$ $u_2(t)) = (0, \widehat{u}_2(t))$ 且极限$_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t)) = 0$。

此外，(LV-2) 的任何在过去和未来均有界的解，都是条目 *(a)-(f)* 中所述的解之一。

6.2 一个物种灭绝情况下吸引子的结构

现在我们研究一个物种的灭绝。因此，我们考虑满足以下假设的 (LV-2)

$$\begin{cases} (c_1b_{11}+c_2b_{12})^L>0, \\ (c_1b_{21}+c_2b_{22})^L>0, \end{cases} \quad \begin{cases} b_{11}\bar{d}_1+\varepsilon\leqslant a_1\leqslant b_{11}d_1+b_{12}(d_2+\theta c_2)-\varepsilon, \\ a_2\leqslant b_{21}(d_1+\theta c_1)-\varepsilon, \end{cases} \tag{19}$$

其中一些常数为 d_1，d_2，c_1，c_2，$\bar{d}_1>0$，另外一些常数为 ε，$\theta>0$。现在，第一组不等式构成条件（$H1$），而第二组不等式则是二维情形下（$B1$）中的条件。我们还假设 $|b_{12}|^U<\infty$。

我们证明，该问题的动力学由图 2 所示的图示描述。事实上，只需利用引理 4.3、定理 4.5、引理 5.1、引理 5.2 和引理 5.5，即可得出以下定理。

定理 6.7。假设（19）成立，系统（LV-2）具有以下轨道 $u:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 在过去和未来均有界

(a) $u(t)=(0,\ 0)$ 对于 $t\in\mathbb{R}$,

(b) $u(t)=(\widehat{u}_1(t),\ 0)$ 对于 $t\in\mathbb{R}$，其中 $\widehat{u}_1$ 是由引理 *5.1*给出的、与零和无穷远分离的 $u_1'=u_1(a_1(t)-b_{11}(t)u_1(t))$的唯一轨道,

(c) $u(t)=(u_1(t),\ 0)$，其中 $\lim_{t\to-\infty}u_1(t)=0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)-\widehat{u}_1(t))=0$。任何具有初始数据 $(u_1(t_0)、\ 0)$ 且满足 $0<u_1(t_0)<\widehat{u}_1(t_0)$ 的解都构成这样的轨道。

除*(a)–(c)*中所述解以外的所有解在反向时间上均无界。此外，

(d) 任意满足初始数据 $u_1(t_0)>0$ 和 $u_2(t_0)>0$ 的解 $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$ 都满足$\lim_{t\to\infty}(u_1(t)-\widehat{u}_1(t),u_2(t))=(0,0)$，且$\lim_{t\to-\infty}|u(t)|=\infty$。*(e)* 任意满足 $u_2(t_0)>0$ 的解 $u(t)=(0,u_2(t))$ 都满足$\lim_{t\to\infty}u_2(t)=0$，且$\lim_{t\to-\infty}u_2(t)=\infty$。*(f)* 任意满足 $u_1(t_0)>\widehat{u}_1(t_0)$ 的解 $u(t)=(u_1(t),0)$ 都满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)-\widehat{u}_1(t))=0$，且 $\lim_{t\to-\infty}u_1(t)=\infty$。

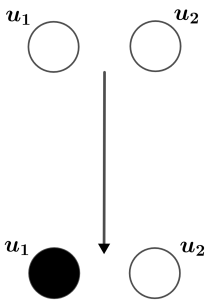


图2：对于单物种存在状态全局渐近稳定的二维问题，两个完全解及其连接。

6.3 两个物种灭绝

最后一种情况是两个物种灭绝。为得到这种情况，我们作出以下假设

$$\begin{cases} (c_1b_{11}+c_2b_{12})^L>0, \\ (c_2b_{22}+c_1b_{21})^L>0, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1\leqslant b_{12}(d_2+\theta c_2)-\varepsilon, \\ a_2\leqslant b_{21}(d_1+\theta c_1)-\varepsilon, \end{cases} \tag{20}$$

对于某些常数 d_1， d_2， c_1， $c_2>0$ 和 ε， $\theta>0$。我们注意到，第一个不等式就是条件 $(H1)$，而第二个不等式就是条件 (B)，其中 $J=\{1,\ 2\}$ 和 $I=\varnothing$。

定理 6.8. 假设 (20) 系统 (LV-2) 中唯一一条在过去和未来都有界的轨道是 $u(t)=(0,0)$，对于 $t\in\mathbb{R}$。此外，对于任意具有初始数据$u_1(t_0)>0$ 或 $u_2(t_0)>0$ 的解，我们有 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t),u_2(t))=(0,0)$.

证明. 由引理 4.2 可得收敛 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t),\ u_2(t))=(0,\ 0)$。剩下要证明的是，任何具有初始数据 $u_1(t_0)>0$ 或 $u_2(t_0)>0$ 的解都向后无界，这一点已在引理 4.3 中证明。

□

7 非自治洛特卡-沃尔泰拉三维系统的吸引子

本节将研究以下三维系统的非自治吸引子结构的不同情形。

$$\begin{cases} u_1'=u_1(a_1(t)-b_{11}(t)u_1-b_{12}(t)u_2-b_{13}(t)u_3), \\ u_2'=u_2(a_2(t)-b_{21}(t)u_1-b_{22}(t)u_2-b_{23}(t)u_3), \\ u_3'=u_3(a_3(t)-b_{31}(t)u_1-b_{32}(t)u_2-b_{33}(t)u_3). \end{cases} \tag{LV-3}$$

其中 $b_{ii}^L>0$ 和 $b_{ij}\leqslant 0$ 对应 $i,\ j\in\{1,\ 2,\ 3\}$。请注意， $S(t,\ \tau)$ 对应于 $t\geqslant\tau$ 的映射，它将时刻 τ 的初始条件映射为时刻 t的解的值，此处该映射与（LV-3）相关联。

7.1 持久性情形下的吸引子结构

第一种情况，即持久性，对应于图 3 所示的动力学。根据定理 2.1，要使三个物种具有持久性，并确保所有中间暂态均可行且所有适当的连接均存在，我们必须对该问题的系数施加以下条件。

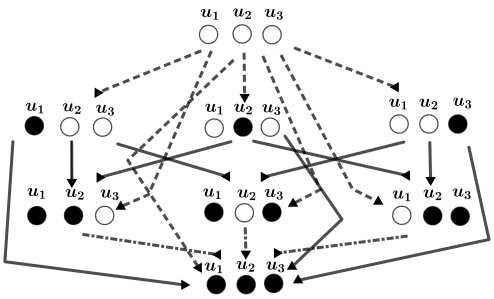


图 3：对于存在所有物种共存的全局渐近稳定状态的三维问题，八个完全解及其连接。

为此，我们假设存在常数 $c_i > 0$、 $d_i > 0$ 和 $d_i > 0$，满足 $i \in \{1, 2, \bar{3}\}$，使得以下两个不等式组成立。

$$\begin{cases} (\bar{c}_1 b_{11} + \bar{c}_2 b_{21} + \bar{c}_3 b_{31})^L > 0, \\ (\bar{c}_2 b_{22} + \bar{c}_1 b_{12} + \bar{c}_3 b_{32})^L > 0, \\ (\bar{c}_3 b_{33} + \bar{c}_1 b_{13} + \bar{c}_2 b_{23})^L > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} b_{11}\bar{d}_1 \leqslant a_1 \leqslant b_{11} d_1 + b_{12} d_2 + b_{13} d_3 \\ b_{22}\bar{d}_2 \leqslant a_2 \leqslant b_{21} d_1 + b_{22} d_2 + b_{23} d_3 \\ b_{33}\bar{d}_3 \leqslant a_3 \leqslant b_{31} d_1 + b_{32} d_2 + b_{33} d_3 \end{cases} \tag{21}$$

上述不等式恰好分别是三维情形下的条件 (A) 和 $(H2)$。此外，我们还需要假设

$$|b_{ij}|^U < \infty \text{ and } a_i^U < \infty \text{ for every } i, j \in \{1, 2, 3\}. \tag{22}$$

作为定理 2.1 的直接推论，与二维情形类似，我们有以下引理。

引理 7.1. 存在函数 $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$，其定义域为 $t \in \mathbb{R}$，且它们是 $^-$（LV-3）的完全解，并满足 $d_i \leqslant u_i^* \leqslant d_i$，其中 $i = 1, 2, 3$。这是唯一一条在所有变量上均有界且远离零和无穷的完全轨道。此外，存在函数 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, 0)$, $(0, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$,$(\hat{u}_1, 0, \hat{u}_3)$, $(\bar{u}_1, 0, 0)$, $(0, \bar{u}_2, 0)$, $(0, 0, \bar{u}_3)$，以及 $u(t) = (0, 0, 0)$，其定义域为 $t \in \mathbb{R}$，且是 $^-$完全解，满足 （LV-3），使得 $d_i \leqslant \hat{u}_i, \bar{u}_i \leqslant d_i$，其中 $i = 1, 2, 3$。

为获得吸引子结构，我们证明上述定理中得到的轨迹之间存在连接，这些轨迹起到非自治平衡态的作用。下面的定理是我们在这一背景下的第一个结果。

定理 7.2. 存在一条(LV-3) 的轨道，记为 $z = (z_1, z_2, z_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$，满足

$$\lim_{s \to -\infty} |(z_1(s), z_2(s), z_3(s)) - (\hat{u}_1(s), \hat{u}_2(s), 0)| = 0.$$

and

$$\lim_{s \to \infty} |(z_1(s), z_2(s), z_3(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s), u_3^*(s))| = 0.$$

$(0, \widehat{u}_2, \widehat{u}_3)$ 和 $(\widehat{u}_1, 0, \widehat{u}_3)$也有类似的结果。此外，存在一条轨道，记为 $w = (w_1, w_2, w_3) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$，满足

$$\lim_{s\to-\infty} |(w_1(s), w_2(s), w_3(s)) - (\bar{u}_1(s), 0, 0)| = 0.$$

and

$$\lim_{s\to\infty} |(w_1(s), w_2(s), w_3(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s), u_3^*(s))| = 0.$$

对于 $(0、\ \bar{u}_2、\ 0)$ 和 $(0,\ 0,\ \bar{u}_3)$，类似的结果也成立。

证明。证明过程与二维情形类似。首先，我们需要证明解 $(\widehat{u}_1、\ \widehat{u}_2、\ 0)$ 局部不稳定，即其非自治不稳定流形

$$W^u((\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, 0)) = \{(t, (w_1, w_2, w_3)) : \text{ there exists a solution } z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \text{ such that } z(t) = (w_1, w_2, w_3) \text{ and } \lim_{s\to-\infty} |z(s) - (\widehat{u}_1(s), \widehat{u}_2(s), 0)| = 0\},$$

非 空，且与正象限的内部相交。我们将系统在 d $(\widehat{u}_1(s)、\ \widehat{u}_2(s)、\ 0)$附近线性化。因此，写作

$$w(t) = u(t) - \hat{u}(t) \tag{23}$$

其中 $\hat{}u(t) = (\widehat{u}_1(t),\ \widehat{u}_2(t),\ 0)$，此时线性化系统的形式为

$$v'(t) = \begin{pmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix} v(t). \tag{24}$$

其中

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) - 2b_{11}(t)\widehat{u}_1(t) - b_{12}(t)\widehat{u}_2(t) & -b_{12}(t)\widehat{u}_1(t) \\ -b_{21}(t)\widehat{u}_2(t) & a_2(t) - b_{21}(t)\widehat{u}_1(t) - 2b_{22}(t)\widehat{u}_2(t) \end{pmatrix},$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} -b_{13}(t)\widehat{u}_1(t) \\ -b_{23}(t)\widehat{u}_2(t) \end{pmatrix}$$

且 $B(t) = a_3(t) - b_{31}(t)\widehat{u}_1(t) - b_{32}(t)\widehat{u}_2(t)$。我们注意到，一维系统 $v_3' = B(t)v_3$ 具有投影 $P(t) = 0$ 对应的指数二分性，因为由 (21) 可知 $B(t) \geqslant \delta > 0$。

现在，$(\widehat{u}_1(t),\ \widehat{u}_2(t))$ 是通过取 $u_3 \equiv 0$ 得到的二维系统的解，并且与零和无穷远保持距离。因此，根据引理 3.3，系统 $(v_1,\ v_2)' = A(t)(v_1,\ v_2)$ 具有 $P(t) = I_{2\times2}$对应的指数二分性。

与二维情形类似，我们沿用第 3 节的结果；由于由 (22) 和引理 7.1 可知函数 $C(t)$ 有界，且系统 (24) 具有指数二分性。因此，根据 (7)，投影为

$$P^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on } \mathbb{R}^+ \text{ and } P^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1^- \\ 0 & 1 & L_2^- \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on } \mathbb{R}^-.$$

现在，投影

$$P = P^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1^- \\ 0 & 1 & L_2^- \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

具有与 P^+ 相同的值域，因此系统 (24) 在整个 $\mathbb{R}$ 上具有带有 P 的指数二分性，并且

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1(t) \\ 0 & 1 & L_2(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对于某些有界函数 $L_1(t)$ 和 $L_2(t)$。注意，二维的值域$(P(t)) = \{(\beta_1,\ \beta_2,\ 0)\colon\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}\}$，在线性化中始终是稳定空间，而

$$\operatorname{range}(I - P(t)) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -L_1(t) \\ -L_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} :\ \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

一维的空间则是线性化中的时变不稳定空间。

与二维情形类似，我们使用非自治不稳定流形定理，参见 [KR11，定理 6.10 和练习 6.11]。存在零点在 $\mathbb{R}^3$ 中的一个邻域 U，以及一个函数 $\Sigma^-\colon \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^3$，使得 $\Sigma^-(t,\ x) = \Sigma^-(t,\ (I - P(t))x) \in$值域$(P(t))$,$\Sigma^-(t,\ 0) = 0$，$\lim_{|x|\to 0} \frac{\Sigma^-(t,\ x)}{|x|} = 0$。此外，若对于某个 $t \in \mathbb{R}$ 和 $x \in$，值域$(I - P(t)) \cap U$满足$\overline{y = x} + \Sigma^-(t,\ x)$，那么，只要 $|y|$ 足够小，方程 (23) 中满足 $w(t) = y$ 的反向轨迹 $w\colon (-\infty,\ t] \to \mathbb{R}^3$ 就属于 Σ^- 的图，即 $\Sigma^-(\tau,\ (I - P(\tau))w(\tau)) = P(\tau)w(\tau)$，且对每个 $\tau \leqslant t$ 都满足 $|w(\tau)| \leqslant Ce^{\delta(\tau - t)}$。此外，对于一个足够小的正数 α，该点的第三个坐标

$$\alpha \begin{pmatrix} -L_1(t) \\ -L_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} + \Sigma^- \left(t, \alpha \begin{pmatrix} -L_1(t) \\ -L_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

等于 α，因此为正；同时，前两个坐标足够小，所以在原坐标下它们也为正。因此，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，存在一个点，使得其在时间 t 的所有坐标均为正，并且该点以指数速度反向吸引至零点。对于原系统 (LV-3)，根据 [Red96、定理 1 (iii) 和 (vi)]，这就证明了该定理的结论。

关于 $(\bar{u}_1,\ 0,\ 0)$ 的局部不稳定性的证明是类似的。在 $(\bar{u}_1,\ 0,\ 0)$ 附近线性化后的系统具有如下形式

$$v'(t) = \begin{pmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & B(t) \end{pmatrix} v(t). \tag{25}$$

其中

$$A(t) = \big(a_1(t) - 2b_{11}(t)\bar{u}_1(t)\big), \quad B(t) = \begin{pmatrix} a_2(t) - b_{21}(t)\bar{u}_1(t) & 0 \\ 0 & a_3(t) - b_{31}(t)\bar{u}_1(t) \end{pmatrix}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} -b_{12}(t)\bar{u}_1(t) & -b_{13}(t)\bar{u}_1(t) \end{pmatrix}$$

现在，二维系统 $(v_2(t),\ v_3(t))' = B(t)(v_2(t),\ v_3(t))$ 具有投影 $P(t) = 0$ 的指数二分性，因为根据 (21)，两个对角项均为正且远离零。根据定理 6.3，系统 $v_1' = A(t)v_1$具有投影 $P(t) = I$，我们沿用第一种情形中的相同过程：函数 $C(t)$ 有界，且系统 (24) 存在指数二分性，因此根据 (7)，投影为

$$P^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on } \mathbb{R}^+ \text{ and } P^- = \begin{pmatrix} 1 & L_1^- & L_2^- \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on } \mathbb{R}^-.$$

由于投影

$$P = P^- = \begin{pmatrix} 1 & L_1^- & L_2^- \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

与 P^+ 的值域相同，因此系统 (24) 在 $\mathbb{R}$ 上具有指数二分性，其投影为

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & L_1(t) & L_2(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对于某些有界函数 $L_1(t))$ 和 $L_2(t)$。注意，在这种情况下，$\mathsf{range}(P(t)) = \{\beta(1,\ 0,\ 0) : \beta \in \mathbb{R}\}$ 的维数为 1，并且始终是线性化中的稳定空间，而

$$\operatorname{range}(I - P(t)) = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -L_1(t) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -L_2(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

是一个二维空间，也是线性化中的时变不稳定空间。证明的最后部分与第一种情况类似，使用这些新的空间即可。

□

The定理 7.3。 存在一条 (LV-3) 的轨道，记为 $y = (y_1, y_2, y_3) :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$，使得 *at*

$$\lim_{s \to -\infty} |(y_1(s), y_2(s), y_3(s)| = 0.$$

and

$$\lim_{s \to \infty} |(y_1(s), y_2(s), y_3(s)) - (u_1^*(s), u_2^*(s), u_3^*(s))| = 0.$$

证明。 证明与二维情形的证明类似，参见定理 6.4，其中在 $(0,\ 0,\ 0)$ 处的线性化系统如下

$$\begin{cases} v'(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_3(t) \end{pmatrix} v(t), \end{cases} \tag{26}$$

□

现在我们证明定理 6.5 的三维类比结果。证明遵循与定理 6.5 相同的论证。

定理 7.4. 如果一条具有严格正初始条件的轨道在过去和未来都有界，那么它必定是上述轨道之一。

证明。 根据 [Red96，定理 1。(v)] 我们知道， u^* 是 $\mathbb{R}$ 上唯一一个与 0 和 8 保持正距离的解。因此，若完全轨道 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 有界、不与 u^* 重合，且三个坐标都不为零，那么至少有一个坐标存在递减序列 $t_n \to -\infty$ ，使得 $u_i(t_n) \to 0$ 且 $u_i(t_n) < d_i$。我们考虑两种情况。

情形 *1.* 两个坐标向后趋于零，另一个坐标与零保持正距离。 假设存在两个序列 $t_n \to -\infty$ 和 $\hat{} t_n \to_{-} -\infty$ ，使得 $u_1(\underline{t}_n) \to 0$, $u_2(\hat{} t_n) \to 0$,$u_1(t_n) < d_1$ 且 $u_2(\hat{} t_n) < d_2$。我们首先证明，对于 $i = 1$，有 $\lim_{t\to-\infty} u_i(t) = 0$ ，2。我们采用与引理 5.2 和定理 6.5 类似的方法。如果对某个 $t \in (t_{n+1},\ t_n)$，有 $u_1(t) > u_1(t_n)$，那么存在 $t^* \in [t,\ t_n)$，使得 $u_1(t^*) > u_1(t_n)$，并且在 $(t^*,\ t_n)^{-}$上，函数 u_1 严格小于 d_1。因此

$$0 > u_1(t_n) - u_1(t^*) = \int_{t^*}^{t_n} u_1(s)(a_1(s) - b_{11}(s)u_1(s) - b_{12}(s)u_2(s) - b_{13}u_3(s))\,ds \geqslant$$
$$\geqslant \int_{t^*}^{t_n} u_1(s)(a_1(s) - b_{11}(s)\bar{d}_1)ds \geqslant 0,$$

于是我们得到矛盾。同样的论证可得 $\lim_{t\to-\infty} u_2(t) = 0$。

现在我们需要证明，对于与零分离的 $u_3(t)$，必有

$$\lim_{t\to-\infty} |u_3(t) - \bar{u}_3(t)| = 0.$$

为此，假设存在某个序列 $t_n \to -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} |u_3(t_n) - \bar{u}_3(t_n)| = c > 0.$$

现在，由于 $u_3(t)$ 与零分离，记 $K = (u_3)^L$ 和 $M = (u_3)^U$ ，并利用引理 2.2 和引理 2.3，对于每个 $x \in [K,\ M]$

$$|u_3(t_n) - \bar{u}_3(t_n)| \leqslant |S(t_n, t_n - t)(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t), u_3(t_n - t)) - S(t_n, t_n - t)(0, 0, x)|$$
$$+ |S(t_n, t_n - t)(0, 0, x) - S(t_n, t_n - t)(0, 0, \bar{u}_3(t_n - t))|$$
$$\leqslant e^{\kappa t}|(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t), u_3(t_n - t)) - (0, 0, x)| + \frac{2\max\{M, d_3\}^2}{\min\{K, \bar{d}_3\}} e^{-\delta \min\{K, \bar{d}_3\}t},$$

其中常数 κ 取决于 u 的界以及问题的系数。取 $\varepsilon > 0$。我们可以找到 $t > 0$，使得 $^{2}{}_{\max\{M,\ d_3\}^2}$ $e^{-\delta}{}_{\min\{K,\ d_3\}}{}^{\min\{K,\ d_3\}t} < \frac{\varepsilon}{2}$。~~序列 $u_3(t_n -$~~ $t)$ 存在一个收敛子序列，设 x 为该子序列的极限，并取充分大的 n ，使得$e^{\kappa t}|(u_1(t_n - t),\ u_2(t_n - t),\ u_3(t_n - t)) - (0,\ 0,\ x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。因此，当 n 充分大时，在某个子序列上，

$$|u_3(t_n) - \bar{u}_3(t_n)| < \varepsilon,$$

一个矛盾。

情形 *2.* 只有一个坐标在反向时间趋于零。 例如，我们假设存在一个序列 $t_n \to -\infty$ 使得 $u_1(t_n) \to 0$，那么，与前一种情形类似，我们可以证明 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = 0.$ 。我们必须证明，对于 $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$，若它们在反向时间上与零分离，则必有

$$\lim_{t\to-\infty} |(u_2(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_2(t), \widehat{u}_3(t))| = 0.$$

为此，假设对于某个序列 $t_n \to -\infty$

$$\lim_{n\to\infty} |(u_2(t_n), u_3(t_n)) - (\widehat{u}_2(t_n), \widehat{u}_3(t_n))| = c > 0. \tag{27}$$

对于每一个 每一个 $x_i \in [u_i^L,\ u_i^U]$ 对于 $i \in \{2,\ 3\}$，并利用引理 2.3 以及（$H2$）和引理 2.2，我们得到 f 或$t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&|(u_2(t_n), u_3(t_n)) - (\widehat{u}_2(t_n), \widehat{u}_3(t_n))| \\
&\qquad \leqslant |S(t_n, t_n - t)(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t), u_3(t_n - t)) - S(t_n, t_n - t)(0, x_2, x_3)| \\
&\qquad\quad + |S(t_n, t_n - t)(0, x_2, x_3) - S(t_n, t_n - t)(0, \widehat{u}_2(t_n), \widehat{u}_3(t_n - t))| \\
&\leqslant e^{\kappa t}|(u_1(t_n - t), u_2(t_n - t), u_3(t_n - t)) - (0, x_2, x_3)| + \frac{2\sigma^2}{\bar{\sigma}} e^{-\bar{\sigma}\delta t},
\end{aligned}$$

其中 κ，σ，$\bar{\sigma}$ 取决于该问题的系数界、（21）中出现的常数以及 u_i^L，u_i^U。特别地，根据 [Red96，引理 2] 意味着，从 $(0,\ x_2,\ x_3)$出发的解在任意时刻都与零保持一定距离；只要 $x_i \in [u_i^L,\ u_i^U]$，该距离下界与初始时间及初始数据的选择无关。取 $\varepsilon > 0$。我们可以找到 $t > 0$ 使得 $\frac{2\sigma^2}{\bar{\sigma}} e^{-\bar{\sigma}\delta t} < \frac{\varepsilon}{2}$。序列 $(u_2(t_n - t),\ u_3(t_n - t))$ 具有一个收敛子列，令 $\overline{(x_2,\ x_3)}$ 为该子列的极限，相应的时间记为 $\{\widehat{t}_n\}$。我们取 n 足够大，使得$e^{\kappa t}|(u_1(t_n - t),\ u_2(t_n - t),\ u_3(t_n - t)) - (0,\ x_2,\ x_3)| < \frac{\varepsilon}{2}$，这将直接导致与（27）的矛盾。

□

最后，图 3 所示吸引子的完整像将在下述定理中描述；该定理总结了本节所得结果，并利用引理 5.2、定理 6.3 和定理 6.4 处理其余的异宿连接。

定理 7.5。 假设 (21) 系统 (LV-3) 具有以下解 $u\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 这些解在过去和未来均有界：

(a) $u(t) = (0,0,0)$ 当 $t \in \mathbb{R}$ 时，

(b) $u(t) = (\bar{u}_1(t), 0, 0), u(t) = (0, \bar{u}_2(t), 0)$ 以及 $u(t) = (0, 0, \bar{u}_3)$，见引理 *7.1*。

(c) 任意满足初始条件 $0 < u_1(t_0) < \bar{u}_1(t_0)$ 的解 $u(t) = (u_1(t), 0, 0)$，其中 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \bar{u}_1(t)) = 0$。类似地，$u(t) = (0, u_2(t), 0)$ 满足初始条件 $0 < u_2(t_0) < \bar{u}_2(t_0)$，其中 $\lim_{t\to-\infty} u_2(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_2(t) - \bar{u}_2(t)) = 0$；而$u(t) = (0,0, u_3(t))$ 满足初始条件 $0 < u_3(t_0) < \bar{u}_3(t_0)$，其中 $\lim_{t\to-\infty} u_3(t) = 0$ 且$\lim_{t\to\infty}(u_3(t) - \bar{u}_3(t)) = 0$。

(d) $u(t) = (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2(t), 0)$，$u(t) = (\widehat{u}_1(t), 0, \widehat{u}_3(t))$ 以及 $u(t) = (0, \widehat{u}_2(t), \widehat{u}_3(t))$，见引理 *7.1*。

(e) $u(t) = (u_1(t), u_2(t), 0)$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (0,0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_1(t), u_2(t)) - (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2(t))) = 0$。类似地，$u(t) = (u_1(t),0, u_3(t))$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_3(t)) = (0,0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_1(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_3(t))) = 0$，以及 $u(t) = (0, u_2(t), u_3(t))$ 其中$\lim_{t\to-\infty}(u_2(t), u_3(t)) = (0,0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_2(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_2(t), \widehat{u}_3(t))) = 0$。

(f) $u(t) = (u_1(t), u_2(t), 0)$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (\bar{u}_1, 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_1(t), u_2(t)) - (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2(t))) = 0$。类似地，$u(t) = (u_1(t), u_2(t), 0)$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (0, \bar{u}_2)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_1(t), u_2(t)) - (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2(t))) = 0$。*(g)* $u(t) = (u_1(t), 0, u_3(t))$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_3(t)) = (\bar{u}_1, 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_1(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_3(t))) = 0$。类似地，$u(t) = (u_1(t), 0, u_3(t))$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_3(t)) = (0, \bar{u}_3)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_1(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_3(t))) = 0$。*(h)* $u(t) = (0, u_2(t), u_3(t))$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_2(t), u_3(t)) = (\bar{u}_2, 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_2(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_2(t), \widehat{u}_3(t))) = 0$。类似地，$u(t) = (0, u_2(t), u_3(t))$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}(u_2(t), u_3(t)) = (0, \bar{u}_3)$ 且 $\lim_{t\to\infty}((u_2(t), u_3(t)) - (\widehat{u}_2(t), \widehat{u}_3(t))) = 0$。*(i)* $u(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t))$ 有界且远离零和无穷大，如引理 *7.1* 所述。*(j)* $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (0, 0, 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t)) = 0$，如定理 *7.3* 所述。*(k)* $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2(t), 0)$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)$

$u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t)) = 0$，见定理 *7.2*。类似地，$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (\widehat{u}_1(t), 0, \widehat{u}_3(t))$，且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t)) = 0$；而 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (0, \widehat{u}_2(t), \widehat{u}_3(t))$，且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t)) = 0$。*(l)* $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (\bar{u}_1(t), 0, 0)$，且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t))$，见定理 *7.2*。类似地，$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (0, \bar{u}_2(t), 0)$，且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t)) = 0$；而 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ 满足 $\lim_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (0, 0, \bar{u}_3(t))$，且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - u_1^*(t), u_2(t) - u_2^*(t), u_3(t) - u_3^*(t)) = 0$。

此外，任何在过去和未来均有界的(LV-3) 解，都是条目 *(a)-(l)* 中所述的解之一。

7.2 一种物种灭绝情况下的吸引子结构

若两个物种具有持久性，则会得到下一幅图所示的示意图。

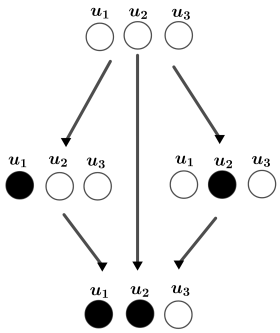


图 4：对于三维问题，当两个物种共存的状态全局渐近稳定时，四个完全解及其连接。

根据定理 4.5，为了使一个物种灭绝，我们必须对 a_1， a_2 和 a_3 施加以下条件。

$$\begin{cases} (c_1b_{11}+c_2b_{12}+c_3b_{13})^L>0, \\ (c_2b_{22}+c_1b_{21}+c_3b_{23})^L>0, \\ (c_3b_{33}+c_1b_{31}+c_2b_{32})^L>0, \end{cases} \quad \begin{cases} b_{11}\bar{d}_1+\varepsilon\leqslant a_1\leqslant b_{11}d_1+b_{12}d_2+b_{13}d_3+\theta(b_{12}c_2+b_{13}c_3)-\varepsilon, \\ b_{22}\bar{d}_2+\varepsilon\leqslant a_2\leqslant b_{21}d_1+b_{22}d_2+b_{23}d_3+\theta(b_{21}c_1+b_{23}c_3)-\varepsilon, \\ a_3\leqslant b_{31}d_1+b_{32}d_2+\theta(b_{31}c_1+b_{32}c_2)-\varepsilon, \end{cases} \tag{28}$$

¯满足某些常数 d_i， $c_i>0$ 对于 $i=1$， 2， 3， $d_j>0$ 对于 $j=1$，2 以及 ε， $\theta>0$。上述不等式即为三维情形的条件（$H1$）和（$B2$）。此外，二维子问题还需要条件（$H2$），即

$$\begin{cases} (\bar{c}_1b_{11}+\bar{c}_2b_{21})^L>0, \\ (\bar{c}_2b_{22}+\bar{c}_1b_{12})^L>0, \end{cases} \tag{29}$$

从而得到引理 6.1 所给出的一个解 $(\widehat{u}_1,\ \widehat{u}_2)$，该解有界且远离零和无穷大，并具有吸引性。此外，我们还需要假设，对于每个 $i\in\{1,\ 2\}$以及 $j\in\{1,\ 2,\ 3\}$，$|b_{ij}|^U<\infty$ 且 $|a_i|^U<\infty$。总结以上所有结果，我们可以提出以下定理。

定理 7.6。假设 (28) 和 (29) 成立，系统 (LV-3) 具有以下轨道 u： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 在过去和未来均有界

(a) $u(t)=(0,\ 0,\ 0)$ 当 $t\in\mathbb{R}$,

(b) $u(t)=(\bar{u}_1(t),0,0),u(t)=(0,\bar{u}_2(t),0)$ 对于 $t\in\mathbb{R}$，其中 $\bar{u}_i$，对于 $i=1,\ 2$，是引理 *5.1* 给出的、与零和无穷远分离的 $u_i'=u_i(a_i(t)-b_{ii}(t)u_i(t))$ 的唯一轨道，

(c) $u(t) = (u_1(t), 0, 0)$ 其中 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \bar{u}_1(t)) = 0$。任何满足 $0 < u_1(t_0) < \bar{u}_1(t_0)$ 、初始数据为 $(u_1(t_0), 0, 0)$ 的解都构成这样的轨道。同理，任何满足 $0 < u_2(t_0) < \bar{u}_2(t_0)$、初始数据为 $(0, u_2(t_0), 0)$ 的解，都构成满足 $u(t) = (0, u_2(t), 0)$ 的轨道，其中 $\lim_{t\to-\infty} u_2(t) = 0$ 且$\lim_{t\to\infty}(u_2(t) - \bar{u}_2(t)) = 0$。

(d) $u(t) = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), 0)$，其中 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ 是根据引理 *6.1* 取 $u_3 \equiv 0$ （与零和无穷远保持距离）得到的二维系统的唯一轨道。

(e) $u(t) = (u_1(t), u_2(t), 0)$ 其中极限$_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (0, 0)$ 且极限$_{t\to\infty}((u_1(t), u_2(t)) - (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))) = 0$。

(f) $u(t) = (u_1(t), u_2(t), 0)$ 其中极限$_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (\bar{u}_1, 0)$ 且极限$_{t\to\infty}((u_1(t), u_2(t)) - (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))) = 0$。类似地，$u(t) = (u_1(t), u_2(t), 0)$ 其中极限$_{t\to-\infty}(u_1(t), u_2(t)) = (0, \bar{u}_2)$ 且极限$_{t\to\infty}((u_1(t), u_2(t)) - (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t))) = 0$。

若解 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 有界，则它必定是条目 *(a)-(f)* 中的某个解。此外，

(g) 对于任意满足初始数据 $u_i(t_0) > 0$、对应于 $i = 1, 2, 3$ 的解 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$，均有 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \hat{u}_1(t), u_2(t) - \hat{u}_2(t), u_3(t)) = (0, 0, 0)$ 且 $\lim_{t\to-\infty} |u(t)| = \infty$。*(h)* 任意满足 $u_3(t_0) > 0$ 的解 $u(t) = (0, 0, u_3(t))$ 均满足 $\lim_{t\to\infty} u_3(t) = 0$ 且 $\lim_{t\to-\infty} u_3(t) = \infty$。*(i)* 任意满足 $u_1(t_0) > \bar{u}_1(t_0)$ 的解 $u(t) = (u_1(t), 0, 0)$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \bar{u}_1(t)) = 0$ 且 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = \infty$。类似地，任意满足 $u_2(t_0) > \bar{u}_2(t_0)$ 的解 $u(t) = (0, u_2(t), 0)$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_2(t) - \bar{u}_2(t)) = 0$ 且 $\lim_{t\to-\infty} u_2(t) = \infty$。*(j)* 任意满足 $u_1(t_0) > 0, u_3(t_0) > 0$ 的解 $u(t) = (u_1(t), 0, u_3(t))$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \bar{u}_1(t), u_3(t)) = 0$ 且 $\lim_{t\to-\infty} |(u_1(t), u_3(t))| = \infty$。类似地，任意解 $u(t) = (0, u_2(t), u_3(t)$

)

其中 $u_2(t_0) > 0, u_3(t) > 0$ 满足 $\lim_{t\to\infty}(u_2(t) - \bar{u}_2(t), u_3(t)) = 0$，且 $\lim_{t\to-\infty} |(u_2(t), u_3(t))| = \infty$。

7.3 两个物种灭绝的情形

在两个物种灭绝的情况下，我们将得到如下图所示的示意图。

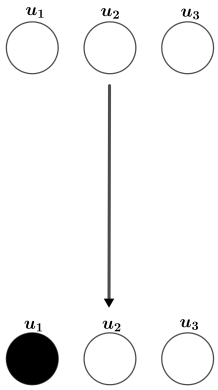


图5：对于具有单物种存在的全局渐近稳定状态的三维问题，两条完全解及其连接。

根据定理 4.5，为获得一个物种持久存在而其余两个物种灭绝的情形，我们必须对问题系数施加以下条件。

$$\begin{cases} (c_1b_{11}+c_2b_{12}+c_3b_{13})^L>0, \\ (c_2b_{22}+c_1b_{21}+c_3b_{23})^L>0, \\ (c_3b_{33}+c_1b_{31}+c_2b_{32})^L>0, \end{cases} \quad \begin{cases} b_{11}\bar{d_1}+\varepsilon\leqslant a_1\leqslant b_{11}d_1+b_{12}d_2+b_{13}d_3+\theta(b_{12}c_2+b_{13}c_3)-\varepsilon, \\ a_2\leqslant b_{21}d_1+b_{23}d_3+\theta(b_{21}c_1+b_{23}c_3)-\varepsilon, \\ a_3\leqslant b_{31}d_1+b_{32}d_2+\theta(b_{31}c_1+b_{32}c_2)-\varepsilon, \end{cases} \tag{30}$$

¯其中某些常数 d_i，$c_i>0$ 对于 $i=1$，2，3，$d_1>0$ 以及 ε，$\theta>0$。上述不等式是三维情形的条件（$H1$）和（$B1$）。我们需要再次假设，对于每个 $j\in\{1,\ 2,\ 3\}$，$|b_{1j}|^U<\infty$且 $|a_1|^U<\infty$

Theo注 7.7. 假设 (30) 系统 (LV-3) 具有以下轨道 u： $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ 有界
两者都
在过去和未来

(a) $u(t)=(0,0,0)$ 对于 $t\in\mathbb{R}$,

(b) $u(t)=(\bar{u}_1(t),0,0)$, 对于 $t\in\mathbb{R}$, 其中 $\bar{u}_1$ 是 $u_1'=u_1(a_1(t)-b_{11}(t)u_1$(的唯一轨道 $t))$
由引理 *5.1* 给出，与零和无穷远相分离，

(c) $u(t)=(u_1(t),0,0)$ 其中 $\lim_{t\to-\infty}u_1(t)=0$ 且 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)-\bar{u}_1(t))=0$。任何满足 $0<u_1(t_0)<\bar{u}_1(t_0)$ 的初始数据为 $(u_1(t_0),0,0)$ 的解都构成这样的轨道。

(a)–(c) 中描述的解是过去和未来都有界的唯一解。此外，

(d) 对于 $i=1$、2、3，任何具有初始数据 $u_i(t_0)>0$ 的解 $u(t)=(u_1(t)$、$u_2(t)$、$u_3(t))$ 都满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)-\bar{u}_1(t)$、$u_2(t)$、$u_3(t))=(0$、0，$0)$，且$\lim_{t\to-\infty}|u(t)|=\infty$。

(e) 任何满足 $u_2(t_0) > 0$ 的解 $u(t) = (0、\ u_2(t)、\ 0)$ 都满足$\lim_{t\to\infty} u_2(t) = 0$，且$\lim_{t\to-\infty} u_2(t) =\infty$。类似地，$u(t) = (0、0、\ u_3(t))$ 满足 $u_3(t_0) > 0$ 时，也满足$\lim_{t\to\infty} u_3(t) = 0$，且$\lim_{t\to-\infty} u_3(t) =\infty$，

(f) 任何满足 $u_1(t_0) > \bar{u}_1(t_0)$ 的解 $u(t) = (u_1(t),\ 0,\ 0)$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \bar{u}_1(t)) = 0$ 和 $\lim_{t\to-\infty} u_1(t) = \infty$。 *(g)* 任何满足 $u_2(t_0) > 0,\ u_3(t_0) > 0$ 的解 $(0,\ u_2(t),\ u_3(t))$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_2(t),\ u_3(t)) = 0$ 和 $\lim_{t\to-\infty} |(u_2(t),\ u_3(t))| = \infty$。 *(h)* 任何满足 $u_1(t_0) > 0$ 和 $u_3(t_0) > 0$ 的解 $(u_1(t),\ 0,\ u_3(t))$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t)-\bar{u}_1(t),\ 0,\ u_3(t)) =0$ 和 $\lim_{t\to-\infty} |(u_1(t),\ u_3(t))| = \infty$。类似地，任何满足 $u_1(t_0) > 0$ 和 $u_2(t_0) > 0$ 的解 $(u_1(t),\ u_2(t),\ 0)$ 均满足 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t) - \bar{u}_1(t),\ u_2(t),\ 0) = 0$ 和 $\lim_{t\to-\infty} |(u_1(t),\ u_2(t))| = \infty$。

7.4 所有物种灭绝

最后一种情况是所有物种灭绝。要得到这种情况，我们作出以下假设

$$\begin{cases} (c_1b_{11} + c_2b_{12} + c_3b_{13})^L > 0, \\ (c_2b_{22} + c_1b_{21} + c_3b_{23})^L > 0, \\ (c_3b_{33} + c_1b_{31} + c_2b_{32})^L > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \leqslant b_{12}d_2 + b_{13}d_3 + \theta(b_{12}c_2 + b_{23}c_3) - \varepsilon \\ a_2 \leqslant b_{21}d_1 + b_{23}d_3 + \theta(b_{21}c_1 + b_{23}c_3) - \varepsilon \\ a_3 \leqslant b_{31}d_1 + b_{32}d_2 + \theta(b_{31}c_1 + b_{32}c_2) - \varepsilon \end{cases} \tag{31}$$

对于某些常数 $d_i,\ c_i > 0$ 对于 $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$，以及 $\varepsilon,\ \theta > 0$。我们注意到，第一个不等式是条件 $(H1)$，第二个不等式是条件 (B)，其中 $J = \{1,\ 2,\ 3\}$ 和 $I = \varnothing$。

定理 7.8。假设 (31) 系统 (LV-3) 中在过去和未来均有界的唯一轨道是 $u(t) = (0,0,0)$ 对于 $t \in \mathbb{R}$。此外，对于任意初始数据为 $u_i(t_0) > 0$ 且任意 $i \in \{1,2,3\}$ 的解，我们有 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (0,\ 0,\ 0)$ 并且$\lim_{t\to-\infty} |(u_1(t), u_2(t), u_3(t))| = \infty$。

证明。由引理 4.2 可得收敛 $\lim_{t\to\infty}(u_1(t), u_2(t), u_3(t)) = (0,0,0)$。任何具有初始数据 $u_1(t_0) > 0$, $u_2(t_0)$ or $u_3(t_0) > 0$ 的解在反向时间上无界，这一事实由引理 4.3 得出。

□

资金支持

JGF 的研究部分得到了西班牙科学、创新与大学部（MCIU）、国家研究署（AEI）以及欧洲区域发展基金（FEDER）的资助，资助项目编号为 PRE2019-087385。JGF 和 JALR 还得到了项目 PGC2018-096540-B-I00 和 PID2021-122991NB-C21 的资助。PK 的研究得到了波兰国家学术交流局（NAWA）贝克尔计划的资助，项目编号为 PPN/BEK/2020/1/00265/U/00001；同时还得到了波兰国家科学中心（NCN）的资助，项目编号为 UMO-2016/22/A/ST1/00077 和 DEC-2017/25/B/ST1/00302。AS 的研究部分得到了项目 US-1381261 和 PGC2018-098308-B-I00 的资助。

参考文献

[Ahm93] S. Ahmad。《非自治 Volterra–Lotka 竞争方程》。美国数学会会刊，117：199–204，1993。[AKL22] P. Almaraz、P. Kalita 和 J.A. Langa。《广义 Lotka–Volterra 系统入侵图的结构稳定性》。https://arxiv.org/abs/2209.09802v4，2022年。[AL95] S. Ahmad 和 A. Lazer。《非自治 n 竞争物种问题》。应用分析，57：309–323，1995。[AL98] S. Ahmad 和 A. Lazer。《Lotka–Volterra 系统中的必要平均增长条件与充分平均增长条件》。《非线性分析》，34：191–228，1998。[AL00] S. Ahmad 和 A. Lazer。《非自治 Lotka–Volterra 系统全局渐近稳定性的平均条件》。《非线性分析》，40：37–49，2000。[BCL20] M.C. Bortolan、A.N. Carvalho 和 J.A. Langa。《自治与非自治扰动下的吸引子》，数学调查与专著第246卷。美国数学会，2020年。[BF20] F. Battelli 和 M. Feˇckan。《指数二分性的指数》。《数学》，8：651，2020年。[BP15] F. Battelli 和 K.J. Palmer。《三角系统的指数二分性判据》。《数学分析与应用杂志》，428：525–543，2015年。[CLR13] A.N. Carvalho、J.A. Langa 和 J.C. Robinson。《无限维非自治动力系统的吸引子》，应用数学科学第182卷。施普林格出版社，2013年。[Cop65] W.A. Coppel。《微分方程的稳定性与渐近行为》。希思数学专著丛书。D.C.Heath，1965年。[Cop78] W.A. Coppel。《稳定性理论中的二分性》，数学讲义第629卷。施普林格出版社，1978年。[CRLO23] A.N. Carvalho、L.R.N. Rocha、J.A. Langa 和 R. Obaya。《一类扩散耦合常微分方程的非自治吸引子的结构》。《离散与连续动力系统：B辑》，28：426–448，2023年。[CV02] V.V. Chepyzhov 和 M.I. Vishik。《数学物理方程的吸引子》。美国数学会，2002年。[Gop86a] K. Gopalsamy。《周期 Lotka–Volterra 系统的全局渐近稳定性》。《ANZIAM 杂志》，27：66–72，1986年。[Gop86b] K. Gopalsamy。《近周期 Lotka–Volterra 系统的全局渐近稳定性》。《ANZIAM 杂志》，27：346–360，1986年。[Gue17] G.F. Guerrero。《复杂生态系统中互利网络的动力学》。博士论文，塞维利亚大学，塞维利亚，西班牙，2017年6月。

[HS22] J. Hofbauer 和 S.J. Schreiber。通过入侵图实现持久性：将群落组装纳入现代共存理论。数学生物学杂志，85：文章编号：54，2022年。[KR11] P. Kloeden 和 M. Rasmussen。非自治动力系统，数学调查与专著第176卷。数学调查与专著。美国数学会，2011年。[Red96] R. Redheffer。非自治 Lotka–Volterra 系统 I。微分方程杂志，127：519–541，1996年。[Tak96] Y. Takeuchi。洛特卡-沃尔泰拉系统的全局渐近动力学性质。 世界科学出版公司，1996年。