随机替换所产生测度的多重分形分析

安德鲁·米切尔 & Alex Rutar

摘要。我们研究随机替换所产生频率测度的正则性。随机替换是（确定性）替换的一种推广：每个字母被替换后的像，都是从一个固定的有限集合中独立选取的。特别地，对于这类测度中的一个自然类别，我们推导出 L^q-谱的闭式解析公式，并证明多重分形形式成立。这为满足多重分形形式的测度提供了一个有趣的新类别。更一般地，我们建立了关于广泛一类频率测度的 L^q-谱的结果。我们引入一种称为随机替换的 膨胀词 L^q-谱 的新概念，并证明对于所有 $q \geq 0$，它都与相应频率测度的 L^q-谱一致。作为应用，我们在分离条件下得到闭式公式，并重新推导出关于拓扑熵和测度论熵的已知结果。

目录

1 引言 **2**
1.1 熵与 L^q-谱 .41.2 随机替换 .51.3 主要结果的陈述与讨论 .51.4 后续工作 .9

2 预备知识 9
2.1 符号记法 .102.2 动力学、熵与维数 .102.3 L^q-谱与光滑性 .122.4 多重分形谱与多重分形形式 . . . . . 142.5 随机替换 .162.6 本原随机替换 .182.7 相容随机替换 .182.8 频率测度 .202.9 分离条件与可识别性 .21

3 L^q频率测度的 - 谱23
3.1 膨胀词 L^q-谱.233.2 L^q-谱，针对非负 q .26

3.3 L^q-谱，针对负 q：下界 .293.4 一般界的证明 L^q 谱 .313.5 L^q-谱，针对负 q 在可识别性条件下 .313.6 从 L^q-谱恢复熵 .32

4 可识别性与多重分形形式 33
4.1 非典型局部维数 .334.2 多重分形形式的证明 .39

5 例子、反例与应用 40
5.1 负值情况下界的失效 q 在不可识别的情况下 . . . . . 405.2 可识别性条件下的例子 .425.3 不可识别情况下的例子 .45

致谢 46

参考文献 46

1. 引言

一种替换是一个组合学对象，由一个有限字母表 $\mathcal{A}$ 以及一组变换规则构成。替换理论及其系统在反复迭代下的统计性质，是组合学与符号动力系统交界处一个规模庞大且备受关注的研究领域。关于替换的统计性质与动力学的详细介绍，可参见 [BG13；Que87]。与（确定性）替换相关联的是一个频率测度，它编码了反复迭代下子词的出现频率。值得注意的是，支撑该测度的相应子移位具有零拓扑熵，且该频率测度是此子移位上支撑的唯一遍历测度。

随机替换是（确定性）替换的一种推广[GL89]，其中我们对每个字母应用一个变换规则，该规则从有限种可能性中随机且独立地选取。与确定性情形类似，与随机替换相关联的子移位支撑着遍历频率测度，用以刻画随机迭代下子词的预期出现率。然而，与确定性情形不同，相应的子移位通常具有正拓扑熵，并支撑不可数多个遍历测度。随机替换既包括呈现确定性行为的例子，也包括有限型子移位 [GRS19]的例子。此外，还存在大量介于两者之间的行为：随机替换的子移位可以同时呈现长程关联 [BSS18]（表明有序性）和正拓扑熵 [Goh20]（表明无序性）。

作为代换的一种推广，随机替换用于模拟带有误差的准晶体；即具有局部无序的晶体结构 [AL10；GL89]。随机替换也已被证明是模拟分形渗流的有效工具

[DG88；DM90；DW01]。这些物理现象的性质可与对应于底层随机替换的频率测度的几乎必然性质联系起来 [Pey81]。

本文从多重分形分析的角度研究与随机替换相关的频率测度的精细尺度性质。这一视角适用于广泛的情境，例如分形集与测度的几何，以及动力系统；其典型应用涉及几何测度论和数论。在我们的研究框架中，主要研究对象是 L^q谱和局部维数。前者是一个参数化的量族，用以刻画测度的非齐次尺度性质；后者刻画测度在某一点附近的指数增长率。 L^q谱与局部维数之间存在一种启发式关系，称为多重分形形式，最初是在物理学背景下提出并研究的，见 [HJK+86]。确定多重分形形式在哪些情境下成立，并找出描述其失效的定性条件，是一个重要且受到广泛研究的问题。

多重分形分析的大量研究聚焦于自相似测度的局部维数（一些例子见 [AP96；Fen05；FL09；LN99；Shm19]），以及具有有限型性质的动力系统中的势函数比尔霍夫和（例如见 [FFW01；Kes01；PW97；PW99]及其中的参考文献）。一个值得注意的近期例子是，P. Shmerkin 在其最近对 Furstenberg交集猜想的证明中 [Shm19], 计算了一大类动力自相似测度的 L^q谱，并将这些结果与集合切片的多重分形分析联系起来。关于 L^q谱的信息还蕴含了伯努利卷积绝对连续性问题中的 L^p光滑性性质（有关这一经典问题的背景介绍，见 [Var18]）。关于测度的几何与多重分形分析的更多细节，请读者参阅 L. Olsen 的奠基性著作 [Ols95]，以及 K. Falconer [Fal97] 和 Ya. Pesin [Pes98]的经典著作。

回到我们的研究背景，替换动力系统具有（动力学）自相似性的典型特征，但在许多情况下，它们远非有限型移位上的遍历测度。更一般地说，频率测度构成了一个丰富的移位不变遍历测度族，以自然的方式展现出符号动力系统中有趣而独特的性质。例如， [GMR+23，定理 48] 证明，对于某一类随机替换，相应的子移位支撑着一个频率测度，且该测度是唯一的最大熵遍历测度。然而，相对于零势而言，该测度并非吉布斯测度，因此该系统不满足常见的规格性质。规格性质是证明符号动力系统具有内在遍历性的一种广为人知的策略（见 [CT21] 及其中的参考文献）。此外，还有一些随机替换的例子，其相应的子移位支撑着多个最大熵遍历测度 [GS20，例 65]。更一般地说，与随机替换相关的频率测度的许多关键性质尚未得到充分理解。

本文在某些较弱的假设下，推导了与随机替换相关的频率测度的 L^q-谱的符号表达式。

随后，在附加假设（可识别性）下，我们证明了 L^q-谱的闭式解析表达式以及一个变分公式，二者共同蕴含多重分形形式。可识别随机替换呈现出一些新颖性质，这些性质在其他多重分形形式已得到充分理解的测度类别中并未出现：唯一的最大熵频率测度往往不是零势对应的吉布斯测度，且相应的子移位并非 sofic。这些技巧和结果为相关测度的几何与动力学提供了重要的新视角。

1.1. 熵与 L^q-谱。 对于紧度量空间中的博雷尔概率测度， L^q-谱 是一个研究充分的量，它以弱次指数的意义刻画了测度的标度性质。具体而言， L^q-谱由下式给出：

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \sup \sum_i \mu\big(B(x_i,r)\big)^q}{\log r}.$$

其中，上确界取遍支撑集 μ中的所有 $2r$-分离子集 $\{x_i\}_i$。

L^q-谱刻画了测度 μ的局部标度信息。我们将 μ 在 x 处的局部维数 定义为

$$\dim_{\mathrm{loc}}(\mu,x) = \lim_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r}$$

当极限存在时。接着，我们将 μ 的多重分形谱 定义为

$$f_\mu(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}} \{x \in X : \dim_{\mathrm{loc}}(\mu,x) = \alpha\}.$$

一般而言，局部维数集合的结构可能非常复杂——例如，水平集通常是 μ的支撑集中的稠密不可数子集。然而，“多重分形奇迹”指的是这样一种现象：尽管水平集非常复杂，多重分形谱却往往是关于 α的凹解析函数。

事实上，多重分形谱与 L^q-谱通过一种称为 多重分形形式 [HJK+86]的启发式关系相联系。该关系推测，在满足某些正则性假设的条件下，多重分形谱由 凹共轭给出，即 L^q-谱的凹共轭，也就是以下量

$$\tau_\mu^*(\alpha) = \inf_{q\in\mathbb{R}} (q\alpha - \tau_\mu(q)).$$

一般而言， $\tau_\mu^*(\alpha) \geq f_\mu(\alpha)$ [LN99]：特别地， L^q-谱的渐近线斜率为球的测度的指数缩放提供界 $B(x,r)$，并且对所有 $x \in \operatorname{supp}\mu$一致成立。

在我们的具体情形中，度量空间是双边移位 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，测度 μ 是遍历的，局部维数恰好是测度 μ的信息函数 的标度率。事实上，香农–麦克米伦–布雷曼定理指出

对于测度（在适当选择度量的情况下），其局部维数几乎处处等于测度的熵。因此， L^q-谱提供了对信息函数标度率的一致控制。关于这些概念的更多详情见 §2。

1.2. 随机替换。（确定性）替换是一种规则，它将字母表 $\mathcal{A}$ 上有限或无限字符串中的每个符号替换为同一字母表上的一个有限词。随机替换将这一概念推广为：按照固定的有限分布，独立地为每个字母随机选取一个词进行替换。我们也可以将随机替换视为一种（确定性）集值替换 ϑ，并为其指定一组概率。

例如，给定 $p \in (0,1)$，随机斐波那契替换 定义为 b y

$$\vartheta_p\colon \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} ab & \text{with probability } p, \\ ba & \text{with probability } 1-p, \end{cases} \\ b \mapsto a. \end{cases}$$

对于给定的（本原）随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$，可以正则地关联一个子移位 X_ϑ，它属于双边移位 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，并配有一个遍历的频率测度$\mu_{\boldsymbol{P}}$，用于量化在反复应用该随机替换时给定词的相对出现频率。

正如引言中所强调的，本原随机替换会产生具有丰富多样性质的子移位和测度。因此，我们施加额外的条件。

我们称以下主要假设为相容性 (见 §2.7)：它断言，对于每个 $a \in \mathcal{A}$，每个 $b \in \mathcal{A}$ 在 a的所有可能替换像中出现的次数都相同。例如，随机斐波那契替换具有相容性，因为在 a的所有可能像中，a 出现一次，而 b 也出现一次。相容性的关键特征在于，可以定义一个确定性的 替换矩阵，使得 Perron–Frobenius特征值是反复进行替换时词长度的渐近增长率，而相应的右特征向量则编码各个字母出现的渐近频率。相容性是一项常见假设：例如，[BSS18；Goh20；MRS+23；Rus20]的主要结果中均作了这一假设。

另一项标准假设是可识别性 (见§2.9)，直观而言，它指出，子移位中的每个元素在该子移位中都有一个唯一的原像。可识别性排除了周期点 [Rus20] 的存在，也是证明 [GMR+23]中内在遍历性所需的假设之一。它也用于 [FRS22+；MRS +23]的主要结果中。

1.3. 主要结果的陈述与讨论。 现在，我们简要陈述本文的主要结果。关于本节所用符号和定义的完整说明，请参阅 §2 。

固定一个随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$，令 λ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别表示 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$的替换矩阵的 Perron–Frobenius特征值及其对应的右特征向量，

给定 $q \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，定义

$$\varphi_{\vartheta_{\boldsymbol{P}},k}(q) = \varphi_k(q) = -\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log\left(\sum_{s\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q\right).$$

我们定义 L^q的膨胀词谱（ $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$的）

$$T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q).$$

我们类似地定义上变体 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}$：用上极限替代下极限。全文中， $\mu_{\boldsymbol{P}}$表示与$\vartheta_{\boldsymbol{P}}$相关联的频率测度。直观而言，膨胀词谱通过迭代系统上的概率分布（经适当归一化），近似频率测度 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。

关于 L^q谱的主要一般性界定结果如下：该结果指出，对于所有 $q \geq 0$， $T_{\vartheta、\ \boldsymbol{P}}$和$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}$均相同；此外，对于所有 $q \in \mathbb{R}$，还给出了用函数 φ_k 表示的$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}$界。

定理 A。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 是一个本原且相容的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。则对于所有 $q \geq 0$，定义$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 和$T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q)$ 的极限均存在且相同。此外，

1. 对于所有 $0 \leq q \leq 1$，

   (1.1) $$\frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q) \leq \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \leq \frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q)$$

   并且 $(\lambda^{-k}\varphi_k(q))_{k=1}^{\infty}$ 从上方单调收敛到 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$。

2. 对所有 $q \geq 1$，

   (1.2) $$\frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q) \leq \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \leq \frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q)$$

   并且 $(\lambda^{-k}\varphi_k(q))_{k=1}^{\infty}$ 从下方单调收敛到 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$。

3. 对所有 $q < 0$，

   (1.3) $$\frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q) \leq \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q).$$

相容性的概念定义于 §2.7。对于 $q < 0$，一般而言，并非总有$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 与$T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q)$ 相同（反例如例 5.2所示）：「切分点的不唯一性」会导致测度构造中的平均过程出现碰撞（见引理 2.12）。换言之，式（1.3）中相应的上界一般不成立。

如果 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 还满足不相交集条件，或满足具有相同生成概率的相同集条件（参见定义 2.13），那么可以得到$T_{\vartheta的\boldsymbol{P}}$（参见命题 3.1）。结合这一结果与定理 A，我们得到以下推论。

推论 B。设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 为本原且相容的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。那么对于所有 $q \geq 0$:

1. 如果 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 满足不相交集条件，那么

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q).$$

2. 如果 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 满足相同集条件且具有相同的生成概率，那么

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = \frac{1}{\lambda}\varphi_1(q).$$

特别地，在满足不相交集条件，或满足相同集条件且具有相同生成概率的情况下，L^q-谱在 $(0, \infty)$ 上是解析的。

作为 定理 A 的直接应用，我们为测度论熵和拓扑熵的已知结果给出了新的证明。

(a) 我们得到了 [Goh20] 关于拓扑熵的主要结果：对于本原且相容的随机替换所产生的子移位，拓扑熵可以用膨胀词的渐近增长率来刻画。

（b）我们还获得了[GMR+23，定理 3 中3]关于对应于本原且相容的随机替换的频率测度的（测度论）熵的刻画。我们注意到，[GMR+23] 中的主要结果不要求相容性这一假设。

以下推论对此进行了描述。

推论 C。令 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 为一个本原且相容的随机替换，其对应的子移位为 X_ϑ，频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。

1. 极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log(\#\vartheta^k(a))$$

存在且等于 $h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta)$。

2. L^q-谱在1处可微。此外，极限

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{v\in\vartheta^k(a)} -\mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = v] \log(\mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = v])$$

存在，且等于 $h_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(X_\vartheta) = \text{维数}_{\mathrm{H}}\, \mu_{\boldsymbol{P}} = \tau'_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(1)$。

现在我们将注意力转向多重分形谱。一般而言，对于 $q < 0$，$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 与 $T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)$ 并不一致；但如果假设产生频率测度 $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 的随机替换还具有可识别性（见

定义 2.14），那么定义 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 和 $T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)$ 的极限均存在，且对所有 $q \in \mathbb{R}$都相等。此外，在可识别性的假设下，我们证明多重分形谱是 L^q-谱的凹共轭：换言之，多重分形形式主义适用于任何相关的频率测度 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。特别地，我们得出结论： $f_{\mu_{\boldsymbol{P}}}$ 是一个凹解析函数。

事实上，在 命题 4.5 中，我们证明了一个关于多重分形谱的更强变分公式。对于每个 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们构造测度 ν 使得 维数$_{\mathrm{H}}\,\nu \geq \tau^*(\alpha)$ 且 维数$_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) = \alpha$ 对于 ν- 几乎处处成立 $x \in X_\vartheta$。特别地，我们可以取与替换 ϑ 相对应的、由许可概率确定的频率测度。

定理 D. 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是一个本原、相容且可识别的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。那么对于所有 $q \in \mathbb{R}$,

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) = \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q).$$

此外， $f_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha) = \tau^*_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha)$ 在其支撑集上是凹且解析的。事实上，对于每个满足 $f_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha) \geq 0$ 的 $\alpha \in \mathbb{R}$，都存在许可概率 $\boldsymbol{Q}$，使得 $f_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha) =$ 维数$_{\mathrm{H}}\,\mu_{\boldsymbol{Q}}$且 维数$_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) = \alpha$ 对于 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$- 几乎处处的 $x \in X_\vartheta$ 成立。

作为本节的总结，我们注意到，关于 L^q-谱的结果还为频率测度的指数标度率提供了一致界。以下结果是定理 A和定理 D的直接应用，并结合了对可能局部维数的界（来自命题 4.4）。

推论 E. 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 是本原、相容且可识别的随机替换。那么

$$\alpha_{\min} := \lim_{q\to\infty} \frac{\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)}{q} = -\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log\left(\max_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]\right)$$
$$\alpha_{\max} := \lim_{q\to-\infty} \frac{\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)}{q} = -\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log\left(\min_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]\right).$$

并且对所有 $x \in X_\vartheta$, $\alpha_{\min} \leq$ 维数$_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) \leq$ 维数$_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) \leq \alpha_{\max}$。此外，

$$\{\dim_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) : x \in X_\vartheta\} = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}].$$

特别地，当概率 $\boldsymbol{P}$ 的选取满足：对每个 $a \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s] = 1/\#\vartheta(a)$，对所有 $s \in \vartheta(a)$ 均成立时，那么 L^q-谱就是一条斜率为 $h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta)$ 且经过 $(1, 0)$ 的直线。因此， $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 的局部维数在每个 $x \in X_\vartheta$ 处都存在，并且等于常数 $\alpha_{\min} = \alpha_{\max}$。这可以用弱 Gibbs 型性质来重新表述：每个足够长的合法词（其长度仅取决于 $\epsilon > 0$）都满足

$$\exp(-|u|(h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta) + \epsilon)) \leq \mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \leq \exp(-|u|(h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta) - \epsilon)); \tag{1.4}$$

例如，参见 [Shm19，引理 1。4] 有关简短证明。一般而言，误差项 ϵ 不能通过添加一个常数因子而省略。在某些

假设下，可以证明存在无穷多个词满足 $\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \approx |u|^{-1}\exp(-|u|(h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta))$，如 [GMR+23，引理 412] 所述。这些假设例如在例 5.6中成立。

当然，在相容性假设下，类似的单侧结论也仅对 $q \geq 0$ 成立：迭代公式 φ_k，并在每一层取适当的最大值即可。事实上，由于 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 在 1 处可微，其导数给出熵，且由于 $h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta) = \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(0)$，可知 $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 是最大熵测度，当且仅当 $\tau'_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 存在且在区间 (0，1) 上为常数。

1.4. 后续工作。 我们以一系列评论和可能颇有趣的问题作为引言的结尾。

1. 当 $q < 0$ 时，相容替换的 L^q-谱是什么？即使对于例 5.1 中给出的随机替换，我们也不知道答案；该替换满足相同集条件，且具有相同的生成概率。要获得关于 $q < 0$ 的结果要困难得多，因为 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 中的求和取决于测度极小（但非零）的柱集测度。例如，在自相似情形下，若没有强分离假设，则所知甚少（与 $q \geq 0$ 情形形成对比）。2. 缺乏相容性时会发生什么？定理 A 中的公式是否普遍成立？在 [GMR+23]中，只需使用引理 2.9 的几乎必然版本。然而，由于 L^q-谱对单个点处的标度十分敏感，而 q 趋于 $\pm\infty$，因此在我们的情形下，这样的几乎必然结果并不足够。3. 在不满足不相交集条件和相同集条件时，关于 L^q-谱的可微性可以得出什么结论？对于 $q \geq 0$，我们将 L^q-谱表示为解析函数的一致极限；然而，除例外点 $q = 1$之外（我们能在该点得出更多结论），这不足以提供关于可微性的信息。4. 定理 D 中的可识别性假设能否放宽为更弱的条件，例如不相交集条件（见定义 2.13）？ 5. 式 (1.4) 中的误差项能否精确确定到一个常数？推论 E 后讨论的近似吉布斯型界，与 [GMR+23 中证明内在遍历性时所用的界密切相关，见定理 4.8]。探索内在遍历性与由 L^q-谱给出的吉布斯型性质之间的关系或许很有价值。

2. 预备知识

本节将介绍本文中始终使用的关键符号和定义。介绍一些基本符号后，在 §2.2中，我们将介绍双边移位上的符号动力系统，以及熵和维数的定义。在 §2.3 中，我们将介绍多重分形分析中的关键定义和基本结果，包括

本文始终采用的多重分形分析，包括测度的 L^q谱和局部维数。随后，在接下来的各节中，我们将介绍随机替换及其相关动力系统。在 §2.5 中，我们将通过随机替换对词的作用给出其定义，并定义与随机替换相关的子移位。接着，在 §2.6 和 §2.7中，我们将定义随机替换的本原和相容的含义，并介绍这类随机替换的关键性质。在§2.8中，我们将定义与随机替换相关的频率测度，并陈述主要结果证明中用到的一项关键结论，该结论通过随机替换的作用关联柱集的测度。最后，在 §2.9中，我们将定义替换满足互不相交或相同集条件的含义，并介绍可识别随机替换。

2.1. 符号记法。全文中，我们使用以下符号记法，它与 [BG13；LM95]中使用的记法基本相同。

对于集合 B，我们令 $\#B$ 表示 B 的基数，并令 $\mathcal{F}(B)$ 表示 B的非空有限子集构成的集合。

我们固定一个字母表 $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_d\}$，其中 $d \in \mathbb{N}$，它是由字母 a_i组成的有限集合，并赋予其离散拓扑。于是，由 $\mathcal{A}$ 中的字母构成的词 u 是字母的有限连接，即对于某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $u = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$。我们用$|u| = n$ 表示词 u的长度；对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $\mathcal{A}^m$ 表示由 $\mathcal{A}$中的字母构成的所有长度为 m 的词的集合。

我们设定 $\mathcal{A}^+ = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{A}^m$，并令

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(a_{i_n})_{n\in\mathbb{Z}} : a_{i_n} \in \mathcal{A} \text{ for all } n \in \mathbb{Z}\}$$

表示元素取自 $\mathcal{A}$的所有双无限序列构成的集合，并赋予 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$积拓扑。我们还在 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 上定义如下度量。给定点$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$和 $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，令 $N(x, y) = \sup\{n \in \mathbb{Z} : x_j = y_j$对所有 $|j| \le n\}$均成立，并令 $d(x, y) = e^{-2N(x,y)-1}$。空间 X在该度量生成的拓扑下是紧致的。

我们经常将序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 记作 $\cdots x_{-1}x_0x_1\cdots$，有限序列也采用相应的记法。若 i 和 $j \in \mathbb{Z}$ 满足 $i \le j$，且$x = \cdots x_{-1}x_0x_1 \cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，则令 $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \cdots x_j$。若 $v \in \mathcal{A}^+$ 和 $1 \le i \le j \le |v|$，我们也使用相同的记法。对于 u 和 $v \in \mathcal{A}^+$（或 $v \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$），若 u 是 v的子词，即存在 i 和 $j \in \mathbb{Z}$，使得 $i \le j$，从而有 $u = v_{[i,j]}$，则记作 $u \triangleleft v$。对于 u和 $v \in \mathcal{A}^+$，令 $|v|_u$ 表示 u作为子词在 v中（允许重叠）出现的次数。若 $u = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$和 $v = a_{j_1} \cdots a_{j_m} \in \mathcal{A}^+$，其中某个 n和$m \in \mathbb{N}$，则将 u 与 v 的连接记作 uv。词$u \in \mathcal{A}^+$ 的阿贝尔化是向量 $\Phi(u) \in \mathbb{N}_0^{\#\mathcal{A}}$，定义为：对于所有 $a \in \mathcal{A}$，$\Phi(u)_a = |u|_a$。

2.2. 动力学、熵与维数。我们赋予空间 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 由左移映射 S诱导的可逆动力学：$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$。全文中，我们研究一个子移位 $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，它是紧致且移位不变的，即 $S^{-1}(X) = X$。于是，μ表示一个遍历且 S-不变的博雷尔概率测度，其支撑集包含于 X中。

$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 上的度量结构使我们能够定义 X的博雷尔子集的豪斯多夫维数。据此，我们将 μ 的豪斯多夫维数定义为以下量

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu = \inf\{\dim_{\mathrm{H}} E : \mu(E) > 0\}$$

其中，下确界取遍所有的博雷尔集 E。此处，我们采用由底层度量继承而来的豪斯多夫维数；不过，对于非紧集，使用 Bowen 对拓扑熵的推广 [Bow74]也同样合适。我们还定义 下局部维数，即 μ 在 x 处的下局部维数，定义为

$$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu\big(B(x,r)\big)}{\log r}$$

我们类似地定义上局部维数 $\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu,\ x)$，将上极限代替下极限即可；当极限相等时，我们将这个共同值称为局部维数 ，并记为 $\dim_{\mathrm{loc}}(\mu,\ x)$。

局部维数与豪斯多夫维数密切相关：例如， [Fal97命题 10 中给出的同一证明1]蕴含

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu = \sup\{s : \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) \geq s \text{ for } \mu\text{-a.e. } x\}. \tag{2.1}$$

现在固定一个划分 ξ，使得对于 $\xi_k = \bigvee_{i=-k}^{k} S^{-i}(\xi)$， $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 生成 X 上的博雷尔σ-代数。回顾一下， μ 关于 S 的熵 定义为

$$h_\mu(X) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{A\in\xi_k} -\mu(A)\log\big(\mu(A)\big).$$

根据经典的柯尔莫哥洛夫–西奈定理，该量不依赖于划分的选择。

现在给定 $x \in X$，令 $\xi_k(x)$ 表示划分 ξ_k 中包含 x 的唯一元素。于是，香农–麦克米伦–布雷曼定理指出， μ 的熵几乎处处等于 μ 的 信息率，也就是说，对 μ-几乎所有的 $x \in X$，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-\log \mu\big(\xi_k(x)\big)}{2k+1} = h_\mu(X).$$

关于该主题的证明及更多背景介绍，请参阅 [Kel98，定理 3.2。7]

现在假设 $\xi = \{E_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ 是 X 的划分，其中 $E_a = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X : x_0 = a\}$。在本文余下部分中， ξ 始终表示这个划分。于是给定 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X$，

$$\xi_k(x) = \{y \in X : x_j = y_j \text{ for all } |j| \leq k\} = B(x, e^{-(2k+1)})$$

因此

$$\dim_{\mathrm{loc}}(\mu, x) = \lim_{k\to\infty} \frac{-\log \mu\big(\xi_k(x)\big)}{2k+1}$$

其中，只要其中一个极限存在，另一个极限也存在。由于右侧的极限 μ 几乎必然 $h_\mu(X)$，由式（2.1）可得 维数$_{\mathrm{H}}\,\mu = h_\mu(X)$。

最后， X 的拓扑熵由下式给出

$$h_{\mathrm{top}}(X) = \lim_{k\to\infty} \frac{-\log \#\{E \in \xi_k : E \cap X \neq \varnothing\}}{2k+1}.$$

当然， $h_{\mathrm{top}}(X)$ = 是 X的盒计数维数$_{\mathrm{B}}\,X$。

2.3. L^q**-谱与光滑性**。给定 $q \in \mathbb{R}$，我们定义

$$\overline{S}_{\mu,r}(q) = \sup_{\{x_i\}_i \in \mathcal{P}(r)} \sum_i \mu\big(B(x_i,r)\big)^q$$

其中， $\mathcal{P}(r)$ 是 X 的离散 $2r$-分离子集的集合，也就是说， $\mathcal{P}(r) = \{\{x_i\}_i : x_i \in X,\ d(x_i,\ x_j) \geq 2r$，其中 $i \neq j\}$。接着，我们将 μ 的 L^q-谱定义为函数

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{q\to 0} \frac{\log \overline{S}_{\mu,r}(q)}{\log r}.$$

为方便起见，我们还将上变体 $\tau_\mu(q)$ 定义为用上极限代替下极限。根据赫尔德不等式可知，$\tau_\mu(q)$ 是关于 q 的凹增函数（注意，这一点对 $\tau_\mu(q)$ 不一定成立）。

–

当然，前面的定义更一般地适用于任意度量空间，但在我们的具体情形中，我们可以将 L^q-谱改写为更熟悉的、关于柱集的求和形式。回忆一下， ξ 表示将 X_ϑ 划分为对应于 $\mathcal{A}$中字母的 0 阶柱集。于是定义

$$S_{\mu,n}(q) = \sum_{E\in\xi_k} \mu(E)^q.$$

由于划分 ξ_k 中的不同元素彼此 $e^{-(2k+1)}$-分离，

$$S_{\mu,n}(q) = \overline{S}_{\mu,e^{-(2n+1)}}(q).$$

由此立即可得

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{n\to\infty} \frac{-\log S_{\mu,n}(q)}{2n+1}$$

对于 $\tau_\mu(q)$，也有类似的结果。特别地，假设 μ 的支撑集为 X，则 $\tau_\mu(0) = h_{\mathrm{top}}(X)$。

最后，利用平移不变性，我们可以用 X 上的一个语言 来刻画子移位 X。给定 $n \in \mathbb{N}$，我们令

$$\mathcal{L}^n(X) = \{w \in \mathcal{A}^n : w \triangleleft x \text{ for some } x \in X\}.$$

给定 $w \in \mathcal{L}^n(X)$，我们令 $[w] = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X : \ x_i = w_i$ 对所有 $1 \le i \le n\}$。当然，利用平移不变性，$\mathcal{L}^{2n+1}(X)$ 与 X_n 之间存在一个保测双射，因此再次可得

$$\tau_\mu(q) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \sum_{u\in\mathcal{L}^n(X)} \mu([u])^q.$$

在本文中，我们将主要使用这一刻画。

我们首先列出测度 L^q的 -谱的一些基本性质 μ。这里，(a) 直接由赫尔德不等式推出，(b) 是标准结论（例如参见[Shm19，引理 1。4]），而 (c) 已在 [FLR02，定理 1 中证明。4]。

引理 2.1。 设 μ 是 X上的移位不变测度。

(a) L^q-谱 $\tau_\mu(q)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续、递增且凹。

(b) 设 $\alpha_{\min} = \lim_{q\to\infty} \tau_\mu(q)/q$ 以及 $\alpha_{\max} = \lim_{q\to-\infty} \tau_\mu(q)/q$。则对于每个 $s < \alpha_{\min} \le \alpha_{\max} < t$，所有充分大的 n 以及 $u \in \mathcal{L}^n$, $e^{-tn} \le \mu([u]) \le e^{-sn}$。特别地，局部维数满足

$$\alpha_{\min} \le \inf_{x\in X} \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) \le \sup_{x\in X} \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) \le \alpha_{\max}.$$

(c) τ_μ 在 $q = 1$ 处的左导数和右导数给出了 μ的豪斯多夫维数的界，即 $\tau_\mu^+(1) \le$ 维数$_{\mathrm{H}}\,\mu \le \tau_\mu^-(1)$。

事实上，(a) 揭示了为什么 L^q谱能体现光滑性： L^q谱不是提供几乎处处成立的局部维数信息，而是包含一致的局部维数信息。

最后，我们证明一个关于 L^q谱的简单结果，后文将会用到。

引理 2.2。 设 $\zeta > 1$ 任意，则

$$\tau_\mu(q) = \frac{1}{\zeta}\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\left(\sum_{u\in\mathcal{L}^{\lfloor\zeta n\rfloor}(X)} \mu([u])^q\right) \tag{2.2}$$

and

$$\overline{\tau}_\mu(q) = \frac{1}{\zeta}\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\left(\sum_{u\in\mathcal{L}^{\lfloor\zeta n\rfloor}(X)} \mu([u])^q\right). \tag{2.3}$$

证明。 当然，始终有

$$\tau_\mu(q) \le \frac{1}{\zeta}\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\left(\sum_{u\in\mathcal{L}^{\lfloor\zeta n\rfloor}(X)} \mu([u])^q\right)$$

$$\overline{\tau}_\mu(q) \geq \frac{1}{\zeta} \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \left(\sum_{u\in\mathcal{L}^{\lfloor \zeta n\rfloor}(X)} \mu([u])^q \right).$$

首先，令 $q<0$，并令 $n\in\mathbb{N}$ 为任意值。令 k_n 为满足 $\lfloor \zeta k_n\rfloor \geq n$ 的最小值。注意，存在某个 $M\in\mathbb{N}$（与 n 无关），使得 $\lfloor \zeta k_n\rfloor \leq n+M$：由此可得 $\lim_{n\to\infty} n/k_n = \zeta$。那么，若 $v\in\mathcal{L}^{\lfloor \zeta k_n\rfloor}(X)$ 任意，则对于某个 $u\in\mathcal{L}^n(X)$ 和 $\mu([v])$，有 $[v]\subset[u]$ $^q \geq \mu([u])^q$。因此

$$S_{\lfloor \zeta k_n\rfloor,\mu}(q) \geq S_{n,\mu}(q).$$

这给出（2.2），对于 $q<0$ 因为 $\lim n/k_n = \zeta$。

类似地，对于 $q\geq 0$，由于至多有 $(\#\mathcal{A})^M$ 个词 $v\in\mathcal{L}^{\lfloor \zeta k_n\rfloor}(X)$ 满足 $[v]\subset[u]$，由抽屉原理可知，对于每个 $u\in\mathcal{L}^n(X)$，存在某个 $v(u)\in\mathcal{L}^{\lfloor \zeta k_n\rfloor}(X)$，使得 $\mu([v(u)])^q \geq (\#\mathcal{A})^{-qM}\mu([u])^q$。因此

$$S_{\lfloor \zeta k_n\rfloor,\mu}(q) \geq (\#\mathcal{A})^{-qM} S_{n,\mu}(q).$$

这给出（2.2），对于 $q\geq 0$。

（2.3）的论证类似，只需选取 k_n 最大，使得 $\lfloor \zeta k_n\rfloor \leq n$。 □

2.4. 多重分形谱与多重分形形式。 测度的 L^q-谱与（精细）多重分形谱相关。设 μ 是子移位 X 上的移位不变测度。我们回顾一下，μ 在 $x\in X$ 处的局部维数定义为

$$\dim_{\mathrm{loc}}(\mu,x) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+1}\log \mu([x_{[-n,n]}])$$

当极限存在时。给定 $\alpha\in\mathbb{R}$，设

$$F_\mu(\alpha) = \{x\in X : \dim_{\mathrm{loc}}(\mu,x) = \alpha\}.$$

接着，我们定义 μ 的多重分形谱为

$$f_\mu(\alpha) = \dim_{\mathrm{H}} F_\mu(\alpha)$$

采用约定 $\dim_{\mathrm{H}}\varnothing = -\infty$。

L^q-谱与多重分形谱之间的关系由以下结果给出。设 $g\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 是一个凹函数。对于 $x\in\mathbb{R}$，记 $g^+(x)$（分别为 $g^-(x)$）表示 g 在 x 处的右（分别为左）导数。由凹性可知，这些极限必然存在。记 g 在 x 处的次微分为 $\partial g(x) = [g^+(x)\ g^-(x)]$。接着回顾一下，$g$ 的凹共轭定义为

$$g^*(\alpha) = \inf_{q\in\mathbb{R}}\{q\alpha - g(q)\}.$$

注意，g^* 始终是凹函数，因为它是仿射函数族的下确界。关于凹函数理论的更多细节，请参阅[Roc70]。

现在，我们称 μ 满足多重分形形式，当 $f_\mu = \tau_\mu^*$时。一般而言，多重分形形式未必成立，但众所周知， L^q-谱的凹共轭是多重分形谱的上界。为方便读者，我们提供一个简短且自成一体的证明，其主要思路遵循 [LN99，定理 4。1]。

命题 2.3。 设 μ 是子移位 X 上的一个移位不变测度。那么，对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有 $f_\mu(\alpha) \le \tau^*(\alpha)$。

证明。 回忆一下， ξ_n 表示 X 的划分，该划分由与长度为 $2n+1$ 的词相对应的柱集组成，每个柱集的直径恰为 $e^{-(2n+1)}$。对于 $\alpha \in \mathbb{R}$、$n \in \mathbb{N}$ 和 $\epsilon > 0$，令

$$\mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha) = \left\{ I \in \xi_n : e^{-(2n+1)(\alpha+\epsilon)} \le \mu(I) \le e^{-(2n+1)(\alpha-\epsilon)} \right\}.$$

换言之，$\mathcal{M}_{n,\,\epsilon}(\alpha)$ 是 $F_\mu(\alpha)$ 在第 n 层的 ϵ-近似。我们的策略是利用 μ 的 L^q-谱来控制集合 $\mathcal{M}_{n,\,\epsilon}(\alpha)$ 的大小，然后用这些集合为 $F_\mu(\alpha)$ 构造一个良好的覆盖。令 $q \in \partial\tau^*(\alpha)$：我们在 $q \ge 0$ 的情况下证明这一点； $q < 0$ 的情况类似。

首先，

$$S_{2n+1,\mu}(q) = \sum_{I \in \xi_n} \mu(I)^q \ge \sum_{u \in \mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha)} \mu(I)^q \ge e^{-(2n+1)(\alpha+\epsilon)q} \#\mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha). \tag{2.4}$$

由引理 2.2，因 $\tau_\mu(q) = \liminf_{n\to\infty} (\log S_{2n+1,\mu}(q))/(-2n-1)$，存在某个 $N_\epsilon \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge N_\epsilon$, $S_{2n+1,\mu}(q) \le e^{-(2n+1)(\tau_\mu(q)-\epsilon)}$。结合 (2.4)，

$$\#\mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha) \le e^{-(2n+1)(\tau(q)-\epsilon)} \cdot e^{(2n+1)(\alpha+\epsilon)q} = e^{(2n+1)(\tau^*(\alpha)+(q+1)\epsilon)} \tag{2.5}$$

对所有 $n \ge N_\epsilon$，其中我们用到了 $q \in \partial\tau^*(\alpha)$ 这一事实。

现在，对每个 $x \in F_\mu(\alpha)$，我们都可以找到某个 $n_x \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \ge n_x$, $\mu(\xi_n(x)) \ge e^{-(2n+1)(\alpha+\epsilon)}$。特别地，

$$\mathcal{G}_\epsilon := \bigcup_{n=N_\epsilon}^{\infty} \mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha)$$

是 $F_\mu(\alpha)$ 的维塔利覆盖。

现在假设 $\{I_j\}_{j=1}^\infty$ 是 $\mathcal{G}_\epsilon$ 的任意不相交子集：那么由 $s = \tau^*(\alpha) + 2\epsilon(1+q)$，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} I_j)^s &\le \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} \sum_{I \in \mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha)} (\operatorname{diam} I)^s \le \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} e^{-(2n+1)s} \#\mathcal{M}_{n,\epsilon}(\alpha) \\
&\le \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} e^{-(2n+1)s} e^{(2n+1)(\tau^*(\alpha)+(q+1)\epsilon)} \\
&= \sum_{n=N_\epsilon}^{\infty} (e^{-(1+q)\epsilon})^{2n+1} < \infty
\end{aligned}$$

根据（2.5）。因此，由豪斯多夫测度的维塔利覆盖定理（[Fal85，定理 1。10] 在移位情形下也成立，证明相同），存在一个覆盖$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$对于 F_μ（α）使得

$$\mathcal{H}^s(F_\mu(\alpha)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} E_i)^s < \infty$$

因此 $\dim_{\mathrm{H}} F_\mu(\alpha) \leq \tau^*(\alpha) + 2\epsilon(1+q)$。但 $\epsilon > 0$ 是任意的，故所需结论得证。□

2.5. 随机替换。 现在我们介绍主要研究对象：随机替换及其相关的频率测度。类似于 [GMR+23；Goh20], 我们根据确定其对字母作用所需的数据来定义随机替换, 然后将其扩展为作用于词的随机映射。

定义 2.4。 设 $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_d\}$ 为一个有限字母表。随机替换$\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 是一个集值替换 $\vartheta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{F}(\mathcal{A}^+)$，连同一组非退化概率向量 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_i)_{i=1}^d$，其中

$$\boldsymbol{p}_i = (p_{i,1}, \ldots, p_{i,r_i}) \qquad \text{with} \qquad r_i = \#\vartheta(a_i);\ \boldsymbol{p}_i \in (0,1]^{r_i};\ \sum_{j=1}^{r_i} p_{i,j} = 1.$$

使得

$$\vartheta_{\boldsymbol{P}}\colon a_i \mapsto \begin{cases} s^{(i,1)} & \text{with probability } p_{i,1}, \\ \vdots & \vdots \\ s^{(i,r_i)} & \text{with probability } p_{i,r_i}, \end{cases}$$

对每个 $1 \leq i \leq d$，其中 $\vartheta(a_i) = \{s^{(i,j)}\}_{1 \leq j \leq r_i}$。

我们将每个 $s^{(i,j)}$ 称为 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a_i)$ 的实现。若对所有 $i \in \{1, \ldots, d\}$ 都有 $r_i = 1$，则称其为确定性。

例 2.5（随机斐波那契）。 令 $\mathcal{A} = \{a, b\}$，并令 $p \in (0,1)$。随机斐波那契替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 是如下给出的随机替换：

$$\vartheta_{\boldsymbol{P}}\colon \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} ab & \text{with probability } p, \\ ba & \text{with probability } 1-p, \end{cases} \\ b \mapsto a \end{cases}$$

其定义数据为 $r_a = 2, r_b = 1, s^{(a,1)} = ab, s^{(a,2)} = ba, s^{(b,1)} = a, \boldsymbol{P} = \{\boldsymbol{p}_a = (p, 1-p)\ \boldsymbol{p}_b = (1)\}$，相应的集值替换为 $\vartheta\colon a \mapsto \{ab, ba\}, b \mapsto \{a\}$。

下面我们将说明，随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 如何确定一个以 $\mathcal{A}^+ \times \mathcal{A}^+$ 为指标的（可数状态）马尔可夫矩阵 Q。我们将元素 $Q_{u,v}$解释为在随机替换下将一个词 u 映射为一个词 v 的概率。形式上，对于所有 $j \in \{1, \ldots, r_i\}$ 和 $Q_{a_i,v} = 0$，若 $v \notin \vartheta(a_i)$，则有 $Q_{a_i, s^{(i,j)}} = p_{i,j}$。我们将 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 的作用扩展到有限词，即将每个字母 *independently* 映射为其某个实现

。更确切地说，给定 $n \in \mathbb{N}$、 $u = a_{i_1} \cdots a_{i_n} \in \mathcal{A}^n$ 和 $v \in \mathcal{A}^+$，且满足$|v| \geq n$，我们令

$$\mathcal{D}_n(v) = \{(v^{(1)}, \ldots, v^{(n)}) \in (\mathcal{A}^+)^n : v^{(1)} \cdots v^{(n)} = v\}$$

表示将 v 分解为 n 个单词的所有方式组成的集合，并令

$$Q_{u,v} = \sum_{(v^{(1)},\ldots,v^{(n)}) \in \mathcal{D}_n(v)} \prod_{j=1}^{n} Q_{a_{i_j}, v^{(j)}}.$$

换言之， $\vartheta_{\boldsymbol{P}}(u)$以概率$Q_{u,\ v}$发生。

对于 $u \in \mathcal{A}^+$，令$(\vartheta^n_{\boldsymbol{P}}(u))_{n\in\mathbb{N}}$ 为某个概率空间$(\Omega_u,\ \mathcal{F}_u,\ \mathbb{P}_u)$上的平稳马尔可夫链，其马尔可夫矩阵由 Q给出；也就是说，

$$\mathbb{P}_u[\vartheta^{n+1}_{\boldsymbol{P}}(u) = w \mid \vartheta^n_{\boldsymbol{P}}(u) = v] = \mathbb{P}_v[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w] = Q_{v,w}$$

对于所有 v 和 $w \in \mathcal{A}^+$，以及 $n \in \mathbb{N}$。特别地，

$$\mathbb{P}_u[\vartheta^n_{\boldsymbol{P}}(u) = v] = (Q^n)_{u,v}$$

对于所有 u 和 $v \in \mathcal{A}^+$，以及 $n \in \mathbb{N}$。若初始词已明确，我们常将 $\mathbb{P}$ 记作 $\mathbb{P}_u$ 。在这种情况下，我们也将关于 $\mathbb{P}$的期望记作 $\mathbb{E}$ 。如前所述，若$(Q^n)_{u,\ v} > 0$ ，则称 v 为 $\vartheta^n_{\boldsymbol{P}}(u)$的一个实现，并令

$$\vartheta^n(u) = \{v \in \mathcal{A}^+ : (Q^n)_{u,v} > 0\}$$

为 $\vartheta^n_{\boldsymbol{P}}(u)$ 的所有实现构成的集合。反过来，我们可以将 $\vartheta^n_{\boldsymbol{P}}(u)$ 视为带有额外概率向量结构的集合$\vartheta^n(u)$。如果 $u = a \in \mathcal{A}$是一个字母，我们称词 $v \in \vartheta^k(a)$为层级k 膨胀词，或精确膨胀词。

对于给定的随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$，可以与之关联一个子移位。首先，如果存在一个 $a_i \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，使得u 作为子词出现在 $\vartheta^k(a_i)$ 中的某个词里，我们就称词 $u \in \mathcal{A}^+$ 为$(\vartheta$-$)$合法的。我们将 ϑ 的语言定义为$\mathcal{L}_\vartheta = \{u \in \mathcal{A}^+ :\ u$是 ϑ-合法的$\}$，并且对于 $w \in \mathcal{A}^+ \cup \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$，令 $\mathcal{L}(w) = \{u \in \mathcal{A}^+ :\ u \triangleleft w\}$表示 w的语言。

定义 2.6. 随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} =(\vartheta,\ \boldsymbol{P})$ 的随机替换子移位是系统 $(X_\vartheta,\ S)$，其中 $X_\vartheta = \{w \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} :$ $\mathcal{L}(w) \subseteq \mathcal{L}_\vartheta\}$，而 S 表示（左）移位映射，定义为 $S(w)_i = w_{i+1}$，对每个 $w \in X_\vartheta$ 均成立。

在非常温和的假设下，空间 X_ϑ 非空 [GS20]。例如，当生成该空间的随机替换是本原的（我们在 §2.6 中给出定义）时，这一结论成立。我们赋予 X_ϑ 从 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 继承的子空间拓扑。由于 X_ϑ 是根据一种语言定义的，它是 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ 中一个紧致且 S-不变的子空间。因此， X_ϑ 是一个子移位。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们分别用 $\mathcal{L}^n_\vartheta = \mathcal{L}_\vartheta \cap \mathcal{A}^n$ 和 $\mathcal{L}^n(w) = \mathcal{L}(w) \cap \mathcal{A}^n$ 表示 $\mathcal{L}_\vartheta$ 和 $\mathcal{L}(w)$ 中由长度为 n 的词组成的子集。集值函数 ϑ 自然地扩展到 X_ϑ；对于$w = \cdots w_{-1}w_0w_1 \cdots \in X_\vartheta$，我们令 $\vartheta(w)$ 表示由形如 $v = \cdots v_{-2}v_{-1}.v_0v_1 \cdots$ 的序列组成的（无限）集合，其中对所有 $j \in \mathbb{Z}$，均有 $v_j \in \vartheta(w_j)$。容易验证，$\vartheta(X_\vartheta) \subset X_\vartheta$。

记号 X_ϑ 体现了这样一个事实：随机替换子移位不依赖于（非退化）概率 $\boldsymbol{P}$ 的选择。事实上，$\vartheta_{\boldsymbol{P}}$的许多结构性质也具有这一特点。在这些情况下，有时会将 ϑ 而非 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$称为随机替换，参见例如 [Goh20；GRS19；Rus20；RS18]。另一方面，在某些应用中，需要在概率空间上附加结构。事实上，存在一个类似于 Galton–Watson过程的底层分枝过程，它使我们能够构造更精细的随机变量，详情参见 [GS20]。我们所考察的测度论性质通常取决于概率的选择；不过，我们使用的一些辅助结果仅取决于集值替换 ϑ。为避免混淆，对于不依赖于概率选择的结果，我们将用集值替换 ϑ来陈述，并在记号中省略对 $\boldsymbol{P}$的依赖。

2.6. 本原随机替换。研究替换（包括确定性替换和随机替换）时，一个标准假设是本原性。给定字母表为 $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_d\}$、基数为 $d \in \mathbb{N}$ 的随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$，我们将 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 的替换矩阵 $M = M_{\vartheta_{\boldsymbol{P}}} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 定义为

$$M_{i,j} = \mathbb{E}[|\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a_j)|_{a_i}] = \sum_{k=1}^{r_j} p_{j,k}|s^{(j,k)}|_{a_i}.$$

由于 M 的所有元素均为非负数，因此它有一个模最大的实特征值 λ。注意，$\lambda \geq 1$，且当且仅当 M 为列随机矩阵时，$\lambda = 1$，因此该随机替换不会扩张。为避免这种退化情形，我们假设 $\lambda > 1$。若矩阵 M 是本原的（也就是说，存在一个 $k \in \mathbb{N}$，使得 M^k 的所有元素均为正），则 Perron–Frobenius定理表明，λ 是一个单特征值，并且对应的（右）特征向量 $\boldsymbol{R} = (R_1, \dots, R_d)$ 可选为所有元素均严格为正。我们将此特征向量归一化，使得 $\|\boldsymbol{R}\|_1 = 1$。我们将 λ 称为该随机替换的*Perron–Frobenius*特征值 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$，其对应的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征向量为 $\boldsymbol{R}$。

定义 2.7. 我们称 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$为本原，如果 $M = M_{\vartheta_{\boldsymbol{P}}}$是本原的，且其 Perron–Frobenius特征值满足 $\lambda > 1$。

我们强调，对于随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$，是否为本原与概率 $\boldsymbol{P}$（非退化）的选择无关。从这个意义上说，本原性是 ϑ 的性质，而非 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$的性质。

由于 $M^k_{\vartheta_{\boldsymbol{P}}} = M_{\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}}$，$\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}$的 Perron–Frobenius特征值为 λ^k。

2.7. 相容随机替换。研究随机替换时的另一个标准假设是相容性，它确保精确膨胀词具有定义良好的阿贝尔化。特别是，相容随机替换的矩阵与概率的选择无关，因此字母频率是均匀的，且不依赖于实现。正如引言中所述，均匀字母频率的存在是证明主要结果的基础。

定义 2.8。 若随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta,\ \boldsymbol{P})$ 满足：对于所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $u,\ v \in \vartheta(a)$，均有 $\Phi(u) = \Phi(v)$，则称其为相容的 。

相容性与概率的选择无关，并且随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 相容，当且仅当对所有 $u \in \mathcal{A}^+$，都有 $|s|_a = |t|_a$ 对所有 s 及 $t \in \vartheta(u)$，且 $a \in \mathcal{A}$。我们用 $|\vartheta(u)|_a$ 表示这个共同值，并用 $|\vartheta(u)|$ 表示 $\vartheta(u)$ 中词的共同长度。为方便起见，我们记作 $|\vartheta| = \max_{a\in\mathcal{A}}|\vartheta(a)|$。对于同时本原且相容的随机替换，其（一致）字母频率由替换矩阵的右Perron–Frobenius特征向量编码；根据相容性，该特征向量与概率的选择无关。特别地，我们有以下结果（确定性情形的证明见 [Que87]；根据相容性，该结论在随机情形下同样成立）。

引理 2.9（字母频率界）。如果 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是本原且相容的随机替换，那么对所有 $\varepsilon > 0$，存在整数 N，使得每个长度至少为 N 的词 v 都满足

$$|v|(R_a - \varepsilon) < |v|_a < |v|(R_a + \varepsilon)$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$。

在例 2.5 中定义的随机斐波那契替换是相容的，因为$\Phi(ab) = \Phi(ba) = (1,1)$。它也是本原的，因为其替换矩阵的平方为正。对于任意概率选择，右Perron–Frobenius特征向量为(τ^{-1}, τ^{-2})，其中 τ表示黄金比例。从字母频率的角度来看，这意味着在所有足够长的合法词中，大约有τ^{-1}比例的字母是 a，而 τ^{-2}比例的字母是 b。

以下引理 2.9的推论对定理 A的证明很有用 .

引理 2.10。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 为本原且相容的随机替换，并设 $q \geq 1$。对于所有 $\varepsilon > 0$，存在一个 $M \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $m \geq M$ 和 $v \in \mathcal{L}_\vartheta^m$，

$$\prod_{a\in\mathcal{A}} \left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right)^{m(R_a+\varepsilon)} \leq \sum_{w\in\vartheta(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w]^q \leq \prod_{a\in\mathcal{A}} \left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right)^{m(R_a-\varepsilon)} .$$

对于 $q \leq 1$，反向不等式同样成立。

证明。 由于 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 相容，膨胀瓦片的切分点定义良好，因此将总和按膨胀瓦片拆分可得

$$\sum_{w\in\vartheta(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w]^q = \sum_{w^1\in\vartheta(v_1)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v_1) = w]^q \sum_{w^2\in\vartheta(v_2)} \cdots \sum_{w^m\in\vartheta(v_m)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v_m) = w^m]^q$$

$$= \prod_{a\in\mathcal{A}} \left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right)^{|v|_a} .$$

然后对 引理 2.9 应用于 $|v|_a$ 进行界定，即可得到结果。注意，对所有$a \in \mathcal{A}$，若满足 $\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \leq 1$，则有；若满足 $\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \geq 1$，则有$q \leq 1$。 □

2.8. 频率测度。 对于给定的本原随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$，我们所关联的主要对象是频率测度 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。此测度量化了某个给定词在随机替换中的相对出现频率。现在我们精确定义此测度。

首先，我们将词 $v \in \mathcal{L}_\vartheta$ 的期望频率定义为

$$\operatorname{freq}(v) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}[|\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a)|_v]}{\mathbb{E}[|\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a)|]},$$

其中，由本原性可知，此极限与 $a \in \mathcal{A}$ 的选取无关。事实上，我们有更强的性质：当膨胀词的长度趋于无穷时，词频几乎必然存在，并且对所有 $v \in \mathcal{L}_\vartheta$，其值均为 $\operatorname{freq}(v)$（更多细节见 [GS20]）。回顾一下，$\xi(X_\vartheta)$ 是 X_ϑ 上指定原点的柱集代数，我们定义 $\mu_{\boldsymbol{P}}\colon \xi(X_\vartheta) \cup \{\varnothing\} \to [0,1]$，使得 $\mu_{\boldsymbol{P}}(\varnothing) = 0$，$\mu_{\boldsymbol{P}}(X_\vartheta) = 1$，且 $\mu_{\boldsymbol{P}}([v]_m) = \operatorname{freq}(v)$，其中 $v \in \mathcal{L}_\vartheta$ 和 $m \in \{1-|v|, 2-|v|, \dots, 0\}$。此集函数可扩张为唯一的测度（参见 [GS20、命题 5.3 和定理 5.9]）

命题 2.11 ([GS20]). 集函数 $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 是一个总质量为一的内容，并且可唯一延拓为定义在 X_ϑ上的移位不变遍历博雷尔概率测度。

我们将 $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 在命题 2.11 中定义的频率测度称为与随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$相对应的频率测度。请注意，频率测度取决于替换的概率。因此，对于非确定性的本原随机替换所对应的子移位，存在不可数多个支撑于该子移位上的频率测度 [GS20]。相比之下，本原确定性替换的子移位恰有一个频率测度，即唯一遍历测度 [Que87]。

与本原且相容的随机替换相对应的频率测度满足以下重整化引理。该引理通过随机替换的生成概率，将合法词的柱集的测度与较短词的柱集测度联系起来。该结果最早发表于 [GS20]，并且是 [GMR+23]中主要结果证明的核心。

引理 2.12（重整化）。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是一个本原且相容的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。设 $n \in \mathbb{N}$，并设 k 是一个整数，使得每个 $v \in \mathcal{L}^k_\vartheta$ 都满足 $|\vartheta(v)| \geq n + |\vartheta(v_1)|$。那么对于每个 $u \in \mathcal{L}^n_\vartheta$,

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) = \frac{1}{\lambda} \sum_{v\in\mathcal{L}^k_\vartheta} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+m-1]} = u].$$

引理 2.12 在 定理 A的证明中发挥着重要作用，因为它将 $\sum_{u\in\mathcal{L}^n_\vartheta} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])$ 中的和通过生成概率与较小词上的和联系起来。这样一来，我们便能够得到 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}$ 与 φ_k 之间的关系。在附加假设下，可以对 引理 2.12 进行简化改写（例如，参见用于 定理 D中的引理 2.18）。

2.9. 分离条件与可识别性。 本节将介绍一些额外的常见假设，这些假设要么（1）对膨胀词施加某种分离条件，要么（2）对膨胀及其概率施加某种一致性。在这些条件下，我们可以得到L^q-谱的闭式公式。

定义 2.13. 若随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta,\ \boldsymbol{P})$ 满足不相交集条件，则

$$u \text{ and } v \in \vartheta(a) \text{ with } u \neq v \implies \vartheta^k(u) \cap \vartheta^k(v) = \varnothing$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。若满足相同集条件，则

$$u \text{ and } v \in \vartheta(a) \implies \vartheta^k(u) = \vartheta^k(v)$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，若对所有 $a \in \mathcal{A}$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $v \in \vartheta^k(a)$，$\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 满足相同的生成概率，则

$$\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(u_1) = v] = \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(u_2) = v]$$

对所有 u_1 和 $u_2 \in \vartheta(a)$ 均成立。

不相交集条件的一个推论是，对于每个 $a \in \mathcal{A}$、$k \in \mathbb{N}$ 和 $w \in \vartheta^k(a)$，都存在唯一的 $v \in \vartheta^{k-1}(a)$，使得 $w \in \vartheta(v)$。换言之，每个精确膨胀词都可以唯一地去替换为另一个精确膨胀词。以下定义将这种从膨胀词唯一去替换的思想扩展到子移位中的所有元素。

定义 2.14. 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 是一个本原且相容的随机替换。若对每个 $x \in X_\vartheta$，都存在唯一的 $y = \cdots y_{-1}y_0y_1 \cdots \in X_\vartheta$ 和唯一的整数 $k \in \{0, \ldots, |\vartheta(y_0)| - 1\}$，使得 $S^{-k}(x) \in \vartheta(y)$，则称 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 可识别。

以下结论可由可识别性的定义直接推出（证明见 [GMR+23，引理 4.5]）。

引理 2.15. 若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是本原、相容且可识别的随机替换，则 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 满足不相交集条件。

与不相交集条件不同，可识别性在取幂时保持不变（见 [GMR+23，引理 4.6]）。

引理 2.16. 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是一个本原且相容的随机替换，并且 $m \in \mathbb{N}$。若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 可识别，则 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}^m$ 也可识别。

可识别性的另一种刻画如下：局部版本。直观而言，局部可识别性意味着，只需对一个序列应用有限窗口，就足以确定该窗口中间的膨胀词的位置和类型。以下结果见 [GMR+23，引理 4。4]（另见 [FRS22+，命题 5。7]）。

引理 2.17。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$ 是一个本原且相容的随机替换。若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$可识别，则存在最小的自然数 $\kappa(\vartheta)$，称为 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 的可识别半径，满足以下性质：若 $x \in \vartheta([a])$ 对某个 $a \in \mathcal{A}$ 成立，且 $x_{[-\kappa(\vartheta),\kappa(\vartheta)]} = y_{[-\kappa(\vartheta),\kappa(\vartheta)]}$ 对某个 $y \in X_\vartheta$成立，则 $y \in \vartheta([a])$。

根据这一可识别性的局部刻画，对于每个长度大于可识别半径两倍的合法词 u，都存在一个膨胀词 w，它作为子词出现在 u 中，并且可唯一分解为精确膨胀词。我们将最大的此类 w 称为 u 的可识别核心。

局部可识别性使我们能够为可识别随机替换得到 引理 2.12 的一个更强版本。这一结果是证明在可识别性条件下，L^q-谱与其膨胀词对应版本重合的关键，适用于 $q < 0$，由此即可得出定理 D的结论。

引理 2.18。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta、 \boldsymbol{P})$ 是一个本原且相容的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$，并且 $u \in \mathcal{L}_\vartheta$。若 $v \in \mathcal{L}_\vartheta$ 和 $w \in \vartheta(v)$ 包含 u 作为子词，则

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \geq \frac{1}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w].$$

此外，若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$是可识别的，$|u| > 2\kappa(\vartheta)$ 且 w' 是 u 的可识别核心，其中$v' \in \mathcal{L}_\vartheta$ 是满足 $w' \in \vartheta(v')$的唯一合法词，则

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \leq \frac{\kappa(\vartheta)}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v'])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v') = w'].$$

证明。如果 u是 $w \in \vartheta(v)$的子词，那么 $\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \geq \mu_{\boldsymbol{P}}([w])$。因此，应用引理 2.12 于 $\mu_{\boldsymbol{P}}([w])$，

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \geq \frac{1}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w].$$

现在，假设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$是可识别的，$|u| > 2\kappa(\vartheta)$，且 $w' \in \vartheta(v')$是 u的可识别核心。设 k 是一个整数，使得每个 $t \in \mathcal{L}_\vartheta^k$ 都满足 $|\vartheta(t)| \geq k + |\vartheta(v_1)|$。由于可识别核心之前至多有 $\kappa(\vartheta)$个 u 字母，若 $t \in \mathcal{L}_\vartheta^k$ 是一个词，且对某个 $j \in \{1, \dots, |\vartheta(t_1)|\}$有 $u \in \vartheta(t)_{[j,j+|u|-1]}$，那么对某个 $i \in \{1, \dots, \kappa(\vartheta)\}$有 $t_i \cdots t_{i+|v|-1} = v'$。此外，由于 w' 分解为精确膨胀词的方式唯一，对于每个 $t \in \mathcal{L}_\vartheta^k$，至多存在一个 $j \in \{1, \dots, \vartheta(t_1)\}$使得 $u \in \vartheta(t)_{[j,j+|u|-1]}$。因此，由引理 2.12 可得

$$\begin{aligned}
\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{t\in\mathcal{L}^k}\mu_{\boldsymbol{P}}([t])\sum_{j=1}^{|\vartheta(t_1)|}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(t)_{[j,j+|u|-1]} = u] \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{\kappa(\vartheta)}\sum_{\substack{t\in\mathcal{L}_\vartheta^k \\ t_i\cdots t_{i+|v|-1}=v'}}\mu_{\boldsymbol{P}}([t])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v') = w'] \\
&= \frac{\kappa(\vartheta)}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v'])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v') = w'],
\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

3. 频率测度的 L^q-谱

本节证明关于频率测度 L^q-谱的主要结果。在这里，我们将 L^q-谱与某个“符号” L^q-谱联系起来，并将其称为膨胀词 L^q-谱。直观而言，膨胀词 L^q-谱是 L^q-谱的自然猜测，因为它没有考虑合法词在膨胀词中可能出现的位置并非唯一这一情况。我们在§3.1中引入这一概念，并陈述和证明了它的一些关键性质。特别地，在命题 3.1中，我们证明了在不相交集条件或相同集条件且生成概率相同的情况下，膨胀词 L^q-谱有一个简单的闭式公式。在命题 3.2中，我们确立了一些基本的单调性结果。

接下来，在 §3.2 和 §3.3 中，我们根据膨胀词 L^q-谱建立 L^q-谱的一般界，从而得到 定理 A （证明见 §3.4）。我们还证明，在满足可识别性的条件下，该界在 §3.5 中是锐利的。这证明了 定理 D 的第一部分。然而，该界一般未必成立：我们在 例 5.2 中讨论一个反例。最后，在 §3.6 中，我们证明 L^q-谱在 $q = 1$ 处可微，并展示如何从关于 L^q-谱的结果中恢复测度熵和拓扑熵的已知结论。

3.1. 膨胀词 L^q-谱。 给定一个本原随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}} = (\vartheta, \boldsymbol{P})$，我们可以根据其生成概率定义一个类似于 L^q-谱的量，方式与 [GMR+23] 中引入的熵的膨胀词类比相似。在许多情况下，这一概念与和 L^q 相关的频率测度的 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$-谱一致。对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 和 $q \in \mathbb{R}$，定义

$$\varphi_k(q) = -\sum_{a \in \mathcal{A}} R_a \log \left(\sum_{s \in \vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k(a) = s]^q \right),$$

其中，$\boldsymbol{R} = (R_a)_{a \in \mathcal{A}}$ 是与 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$对应的替换矩阵的右Perron–Frobenius特征向量。我们将膨胀词 L^q谱 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$定义为

$$T_{\vartheta, \boldsymbol{P}}(q) = \liminf_{k \to \infty} \frac{\varphi_k(q)}{\lambda^k}.$$

回顾一下，λ 是与随机替换相关联的替换矩阵的谱半径。类似地，我们将上变体 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}$定义为用上极限代替下极限。

我们首先陈述 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q)$ 的一些关键性质，这些性质可由定义直接推出。首先，若随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$相容，且满足不相交集条件或相同集条件，并具有相同的生成概率，则定义 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q)$ 的极限对所有 $q \in \mathbb{R}$ 均存在，且可用闭式表达式给出。对于 $q \geq 0$，根据定理 A，这些性质可传递到 L^q-谱上。

命题 3.1。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是本原且相容的随机替换，且 $q \in \mathbb{R}$。若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 满足不相交集条件，则定义 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q)$ 的极限存在，且

$$T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) = \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q).$$

若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$满足相同集条件且具有相同的生成概率，则定义 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q)$ 的极限存在，并且

$$T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) = \frac{1}{\lambda}\varphi_1(q).$$

证明。 固定 $q \in \mathbb{R}$。由 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$的马尔可夫性质可知，对所有 $a \in \mathcal{A}$、 $k \in \mathbb{N}$ 和 $v \in \vartheta^k(a)$,

$$\mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = v] = \sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]\,\mathbb{P}[\vartheta^{k-1}_{\boldsymbol{P}}(s) = v]. \tag{3.1}$$

首先，假设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$满足不相交集条件。那么，对于每个 $v \in \vartheta^k(a)$，都存在唯一的 $s(v) \in \vartheta(a)$，使得 $v \in \vartheta^{k-1}(s(v))$。因此，对所有满足$s \neq s(v)$的 $s \in \vartheta(a)$，我们有$\mathbb{P}[\vartheta^{k-1}_{\boldsymbol{P}}(s) = v] = 0$，由此根据 (3.1) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = v]^q &= \sum_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s(v)]^q\,\mathbb{P}[\vartheta^{k-1}_{\boldsymbol{P}}(s(v)) = v]^q \\
&= \sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \sum_{u\in\vartheta^{k-1}(s)} \mathbb{P}[\vartheta^{k-1}_{\boldsymbol{P}}(s) = u]^q \\
&= \left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q\right) \prod_{b\in\mathcal{A}} \left(\sum_{u\in\vartheta^{k-1}(b)} \mathbb{P}[\vartheta^{k-1}_{\boldsymbol{P}}(b) = u]^q\right)^{|\vartheta(a)|_b}
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们利用相容性将第二个求和拆分为膨胀瓦片。因此

$$\begin{aligned}
\varphi_k(q) = &-\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{b\in\mathcal{A}} |\vartheta(a)|_b \log\left(\sum_{u\in\vartheta^{k-1}(b)} \mathbb{P}[\vartheta^{k-1}_{\boldsymbol{P}}(b) = u]^q\right) \\
&-\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q\right) \\
&= \lambda\varphi_{k-1}(q) + \varphi_1(q),
\end{aligned}$$

注意到 $\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a|\vartheta(a)|_b = \lambda R_b$。 由此归纳可得

$$\frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda^j}\varphi_1(q) \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q),$$

因此，定义 $T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)$ 的极限存在，且等于 $(\lambda - 1)^{-1}\varphi_1(q)$。

接下来，假设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 满足相同集条件，且具有相同的生成概率。那么 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(s^1) = u] = \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(s^2) = u]$ 对所有 $s^1, s^2 \in \vartheta(a)$ 成立。因此，由（3.1）可得

$$\sum_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k(a) = v]^q = \sum_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(s) = v]^q$$

对于任意选择的 $s \in \vartheta(a)$。由相容性以及作用的独立性，

$$\sum_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k(a) = v]^q = \prod_{b\in\mathcal{A}} \left(\sum_{u\in\vartheta^{k-1}(b)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(b) = u]^q \right)^{|\vartheta(a)|_b},$$

因此

$$\varphi_k(q) = \sum_{b\in\mathcal{A}} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a |\vartheta(a)|_b \log \left(\sum_{v\in\vartheta^{k-1}(b)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(b) = v]^q \right) = \lambda\varphi_{k-1}(q),$$

注意到 $\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a|\vartheta(a)|_b = R_b$。由归纳法可知，对于所有 $k \in \mathbb{N}$，$\varphi_k(q)/\lambda^k = \varphi_1(q)/\lambda$，因此我们得出结论：$T_{\vartheta,\,\boldsymbol{P}}(q)$存在且等于 $\lambda^{-1}\varphi_1(q)$。□

命题 3.2。 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 为本原且相容的随机替换。对于所有$q > 1$ 和 $q < 0$，序列$(\lambda^{-k}\varphi_k(q))_k$ 单调不减；对于所有 $0 < q < 1$，该序列单调不增。

证明。 这在很大程度上是詹森不等式的推论。注意，在区间$(0, 1]$, 上，函数 $x \mapsto x^q$ 在 $q > 1$ 或 $q < 0$时为凸函数，在$0 < q < 1$时为凹函数。我们先证明 $q > 1$ 或 $q < 0$时的情形。对于所有满足 $k \geq 2$ 且 $v \in \vartheta^k(a)$的 $a \in \mathcal{A}$、 $k \in \mathbb{N}$，由 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$的马尔可夫性质可知

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in\vartheta^k} \mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}^k(a) = v]^q &= \sum_{v\in\vartheta^k(a)} \left(\sum_{s\in\vartheta(a):\, v\in\vartheta^{k-1}(s)} \mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}(a) = s]\mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}^{k-1}(s) = v] \right)^q \\
&\leq \sum_{v\in\vartheta^k(a)} \left(\frac{\sum_{s\in\vartheta(a):\, v\in\vartheta^{k-1}(s)} \mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}(a) = s]\mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}^{k-1}(s) = v]^q}{\sum_{s\in\vartheta(a):\, v\in\vartheta^{k-1}(s)} \mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}(a) = s]} \right) \\
&\leq \prod_{b\in\mathcal{A}} \left(\sum_{w\in\vartheta^{k-1}(b)} \mathbb{P}[\vartheta_{\mathbf{P}}^{k-1}(b) = w]^q \right)^{|\vartheta(a)|_b}.
\end{aligned}$$

在第二行中，我们应用詹森不等式；在第三行中，我们利用相容性，将每个概率 $\mathbb{P}[\vartheta^{k-1}{}_{\mathbf{P}}(s) = w]$ 分解为膨胀图块。由此可得

$$\frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q) \geq -\frac{1}{\lambda^k} \sum_{b\in\mathcal{A}} R_b \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a |\vartheta(a)|_b \log \left(\sum_{w\in\vartheta^{k-1}(b)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k-1}(b) = w]^q \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k-1}}\varphi_{k-1}(q),$$

注意到 $\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a|\vartheta(a)|_b = \lambda$。

$0 < q < 1$情形的证明类似，由于 $x \mapsto x^q$ 是凹函数，詹森不等式给出相反的不等式。□

一般而言，类似的单调性结论并不适用于$(\lambda^k - 1)^{-1}\varphi_k(q)$界，即使 $q \geq 0$。一个反例是具有非均匀概率的随机倍周期替换（例 5.7）。

3.2. L^q-谱与非负 q。 证明定理 A 的大部分工作在于证明（1.1）、（1.2）和（1.3）中的界。只需证明 $k = 1$情形下的界，因为随后通过考虑随机替换的更高幂，即可得到其他 $k \in \mathbb{N}$ 情形下的界。我们首先证明 $q > 1$情形下的上界。

本节中，我们始终假设随机替换是本原且相容的。

命题3.3。 对于所有 $q > 1$,

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \leq \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q).$$

证明。 固定 $q > 1$。设 $\varepsilon > 0$，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $m(n)$ 为由下式定义的整数

$$m(n) = \left\lceil \frac{n}{\lambda - \varepsilon} \right\rceil.$$

那么，整数 n 和 $m(n)$ 满足引理 2.12的条件，因此可得

$$\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q = \sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u] \right)^q.$$

由于 $q > 1$，函数 $x \mapsto x^q$ 在区间 $[0, 1]$，上是超可加的，因此

$$\begin{aligned}\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q &\geq \sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u] \right)^q \\ &\geq \frac{1}{\lambda^q} \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u]^q.\end{aligned}$$

现在，我们用一个膨胀词的生成概率来界定此表达式右侧的概率。若 $w(u) \in \vartheta(v)$ 在位置 u 处包含一个子词

j，那么 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]}=u]\geq\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)=w(u)]$。因此，

$$\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]}=u]^q\geq\sum_{w\in\vartheta(v)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)=w]^q$$

对所有 $j\in\{1,\dots,|\vartheta(v_1)|\}$。

由于 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 相容，根据 引理 2.10 存在一个 $N\in\mathbb{N}$ 使得对所有$n\geq N$ 以及所有 $v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}$

$$\sum_{w\in\vartheta(v)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)=w]^q\geq\prod_{a\in\mathcal{A}}\left(\sum_{s\in\vartheta(a)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q\right)^{m(n)(R_a+\varepsilon)}.$$

因此，

$$\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n}\mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q\geq\frac{1}{\lambda^q}\prod_{a\in\mathcal{A}}\left(\sum_{s\in\vartheta(a)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q\right)^{m(n)(R_a+\varepsilon)}\sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q.$$

取对数，整理并除以 n，得

$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}\log\left(\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n}\mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q\right)\leq&-\frac{1}{n}\log\left(\sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q\right)+\frac{1}{n}\log\lambda^q\\&-\frac{m(n)}{n}\sum_{a\in\mathcal{A}}(R_a+\varepsilon)\log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q\right).\end{aligned}$$

注意到 $m(n)/n\to(\lambda-\varepsilon)^{-1}$ 因为 $n\to\infty$，由 引理 2.2 可得

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)\leq\frac{1}{\lambda-\varepsilon}\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)+\frac{1}{\lambda-\varepsilon}\sum_{a\in\mathcal{A}}\log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q\right)+c\varepsilon$$

其中 $c:=(\#\mathcal{A})\max_{a\in\mathcal{A}}\log(\sum_{s\in\vartheta(a)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q)$。但 $\varepsilon>0$ 是任意的；令 $\varepsilon\to0$ 并重新整理，得到

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)\leq\frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q),$$

至此，证明完成。 □

现在我们证明相应的下界。

命题 3.4. 对于所有 $q>1$,

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)\geq\frac{1}{\lambda}\varphi_1(q).$$

证明. 设 $\varepsilon > 0$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $m(n)$ 为由下式定义的整数

$$m(n) = \left\lceil \frac{n}{\lambda - \varepsilon} \right\rceil.$$

由于 $q > 1$，函数 $x \mapsto x^q$ 在区间 $[0,1]$上是凸函数。因此，由 引理 2.12 和两次詹森不等式的应用可得

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q &= \sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u] \right)^q \\
&\leq \sum_{v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u] \right)^q \\
&\leq \frac{|\vartheta|^{q-1}}{\lambda^q} \sum_{v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{j=1}^{|\vartheta(v_1)|} \sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u]^q.
\end{aligned}$$

我们用包含在 u 中的一个足够大的膨胀词的生成概率，给这个表达式右侧的概率作上界。由相容性可知，存在一个整数 $k(n)$，使得对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}$，都有 $j + n \leq |\vartheta(v_{[1,m(n)-k(n)]})|$，其中 $\lim k(n)/n = 0$。特别地，对于每个 $v \in \mathcal{L}_\vartheta^n$，$\vartheta(v_{[2,m(n)-k(n)]})$ 的一个实现都作为膨胀词包含在 u 中，因此

$$\sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u]^q \leq \sum_{w \in \vartheta(v_2 \cdots v_{m(n)-k(n)})} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v_2 \cdots v_{m(n)-k(n)}) = w]^q.$$

现在，我们对所有 $v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}$ 一致地给这个量作上界。由引理 2.10 以及上述结果，存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n \geq N$

$$\sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q \leq \frac{|\vartheta|^{q-1}}{\lambda^q} \prod_{a \in \mathcal{A}} \left(\sum_{s \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right)^{(m(n)-k(n)-1)(R_a - \varepsilon)}.$$

取对数、重新整理并除以 n，得到

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{n} \log \left(\sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q \right) &\geq \frac{m(n) - k(n) - 1}{n} \sum_{a \in \mathcal{A}} (R_a - \varepsilon) \log \left(\sum_{s \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right) \\
&\quad - \frac{\log(|\vartheta|^{q-1}/\lambda^q)}{n} \\
&\xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{\lambda - \varepsilon} \sum_{a \in \mathcal{A}} (R_a - \varepsilon) \log \left(\sum_{s \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right),
\end{aligned}$$

但 $\varepsilon > 0$ 是任意的，因此

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \geq \frac{1}{\lambda} \varphi_1(q),$$

这就完成了证明。 □

现在给出 $q \in (0,1)$ 情形下的界。此处不提供证明，因为论证与命题3.3和命题 3.4 的证明相似，只是由于 是凹函数而非凸函数，且是次可加而非超可加的，因此不等号方向相反。 $x \mapsto x^q$

命题 3.5. 若 $q \in (0,1)$，则

$$\frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q) \le \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \frac{1}{\lambda}\varphi_1(q).$$

3.3. **L^q-谱的负 q：下界。** 对于 $q<0$，存在本原且相容的随机替换，使得 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 与 $T_{\vartheta,\,\boldsymbol{P}}(q)$ 并不相同（例如参见例 5.2）。然而，我们仍可得到 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \ge T_{\vartheta,\,\boldsymbol{P}}(q)$ 对所有 $q<0$均成立。为证明这一点，只需证明式（1.3）中的界成立。同样，我们只需证明 $k=1$对应的界，其余界可通过考察该随机替换的幂得出。

命题 3.6。 如果 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是本原且相容的随机替换，那么对所有 $q<0$,

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \ge \frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q).$$

证明。 令 $\varepsilon>0$ 足够小，并对足够大的 n，令 $m(n)$ 表示由下式定义的整数

$$m(n) = \left\lceil \frac{n}{\lambda-\varepsilon} \right\rceil.$$

为避免除以零，我们将引理 2.12 改写为一种不对等于零的元素求和的形式。这里，我们用 $u \blacktriangleleft \vartheta(v)$ 表示存在 $\vartheta(v)$ 的一个实现 w，使得 u 作为子词出现在 w 中。对于每个 $v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}$ 和 $u \in \mathcal{L}_\vartheta^n$，令 $\mathcal{J}(v,u) = \{j \in \{1,\dots,|\vartheta(v_1)|\} : \ u \in \vartheta(v)_{[j,j+n-1]}\}$。如果 $j \notin \mathcal{J}(u,v)$，那么 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u] = 0$；而如果 u 不作为子词出现在 $\vartheta(v)$ 的任何实现中，那么 $\mathcal{J}(u,v) = \varnothing$。因此，我们可以将引理 2.12 改写为

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)} \\ u \blacktriangleleft \vartheta(v)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{j \in \mathcal{J}(v,u)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u].$$

因此，根据函数 $x \mapsto x^q$ 在定义域 $(0,1]$, 上的次可加性

$$\sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q = \sum_{u \in \mathcal{L}_\vartheta^n} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{\substack{v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)} \\ u \blacktriangleleft \vartheta(v)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \sum_{j \in \mathcal{J}(v,u)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u] \right)^q$$

$$\leq \frac{1}{\lambda^q} \sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \sum_{\substack{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)} \\ u\blacktriangleleft\vartheta(v)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \sum_{j\in\mathcal{J}(v,u)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u]^q$$

$$= \frac{1}{\lambda^q} \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \sum_{\substack{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n \\ u\blacktriangleleft\vartheta(v)}} \sum_{j\in\mathcal{J}(v,u)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u]^q.$$

对于每个 $j \in \mathcal{J}(v,\ u)$，令 $w_j(u) \in \vartheta(v)$ 为一个满足 $w_j(u)_{[j,j+n-1]} = u$ 的词。注意，至多有 $K := 2|\vartheta|(\#\mathcal{A})^{|\vartheta|}$ 个不同的 $u \in \mathcal{L}_\vartheta^n$ 满足 $w_j(u)_{[j,j+n-1]} = u$。因此，

$$\sum_{\substack{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n \\ u\blacktriangleleft\vartheta(v)}} \sum_{j\in\mathcal{J}(v,u)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j,j+n-1]} = u]^q \leq \sum_{\substack{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n \\ u\blacktriangleleft\vartheta(v)}} \sum_{j\in\mathcal{J}(v,u)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w_j(u)]^q$$

$$\leq K \sum_{w\in\vartheta(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w]^q$$

由此可得

$$\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q \leq \lambda^{-q} K \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \sum_{w\in\vartheta(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w]^q.$$

T因此，根据 引理 2.10，对于所有 $\varepsilon > 0$，存在一个整数 N，使得对于所有 $n \geq N$

$$\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q \leq \lambda^{-q} K \prod_{a\in\mathcal{A}} \left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right)^{m(n)(R_a+\varepsilon)} \left(\sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \right).$$

取对数、整理并除以 n，得到

$$-\frac{1}{n}\log\left(\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q\right) \geq -\frac{1}{n}\log\left(\sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q\right) + \frac{1}{n}\log(\lambda^{-q}K)$$

$$- \frac{m(n)}{n} \sum_{a\in\mathcal{A}} (R_a+\varepsilon) \log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right).$$

注意到 $m(n)/n \to (\lambda-\varepsilon)^{-1}$ 当 $n \to \infty$ 时，根据 引理 2.2 可得

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \geq \frac{1}{\lambda-\varepsilon}\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) + \frac{1}{\lambda-\varepsilon} \sum_{a\in\mathcal{A}} \log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right) + c\varepsilon$$

其中 $c := (\#\mathcal{A}) \max_{a\in\mathcal{A}} \log(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q)$。令 $\varepsilon \to 0$ 并整理，得到

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \geq \frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q),$$

由此完成证明。 □

3.4. L^q **一般界的证明。** 利用前两节证明的界，我们现在可以完成定理 A的证明。

证明（定理 *A*）。 由于对于每个 $k \in \mathbb{N}$，随机替换 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k$产生的频率测度与 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 相同，应用 命题3.3、命题 3.4和命题 3.5 于 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k$，

$$\frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q) \le \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q)$$

对所有 $q > 1$和

$$\frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q) \le \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \frac{1}{\lambda^k}\varphi_k(q)$$

对 $0 < q < 1$。令 $k \to \infty$，得到

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = \overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) = \overline{T}_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)$$

对所有 $q \in (0,1) \cup (1,\infty)$，因此定义 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 和 $T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)$ 的极限均存在且相等。由连续性可知，对 $q = 0$ 和 $q = 1$ 也同样成立。根据命题 3.2，界 $\lambda^{-k}\varphi_k(q)$ 的单调性成立。最后，对于 $q < 0$，对每个 $k \in \mathbb{N}$，将命题 3.6 应用于 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k$，可得

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \ge \frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q).$$

取极限即完成证明。 □

3.5. L^q**负** q **谱的可识别性。** 虽然上界对 $q < 0$一般并不成立，但对于可识别随机替换，我们可以利用引理 2.18得到这一结论。回顾一下，该引理是利用可识别性对引理 2.12 的改进。

命题 3.7. 若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是本原、相容且可识别的随机替换，则对所有 $q < 0$,

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q).$$

证明。 设 $\varepsilon > 0$ 足够小，并且对每个足够大的 $n \in \mathbb{N}$，令 $m(n)$ 为由下式定义的整数

$$m(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lambda - \varepsilon} \right\rfloor.$$

对于每个 $u \in \mathcal{L}_\vartheta^{n+2\kappa(\vartheta)}$，令 $w(u)$ 表示 u的可识别核心。此外，令 $v(u)$表示满足以下条件的唯一合法词： $w(u) \in \vartheta(v(u))$。于是，由引理 2.18，

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \le \frac{\kappa(\vartheta)}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v(u)])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v(u)) = w(u)]. \tag{3.2}$$

对于所有 $u \in \mathcal{L}_\vartheta^{n+2\kappa(\vartheta)}$，可识别核心 $w(u)$ 的长度至少为 n，因此根据相容性，存在一个整数 N，使得若 $n \geq N$，则对所有 $u \in \mathcal{L}_\vartheta^{n+2\kappa(\vartheta)}$，都有 $|v(u)| \geq m(n)$。特别地，对于每个 u，存在一个 $v \in \mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}$，使得$\mu_{\boldsymbol{P}}([v(u)]) \leq \mu_{\boldsymbol{P}}([v])$；并且存在一个 $w \in \vartheta(v)$，使得 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v(u)) = w(u)] \leq \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w]$。因此，由 (3.2) 和引理 2.10 可得

$$\begin{aligned}\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^{n+2\kappa(\vartheta)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q &\geq \frac{1}{\lambda^q} \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q \sum_{w\in\vartheta(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = w]^q \\ &\geq \frac{1}{\lambda^q} \prod_{a\in\mathcal{A}} \left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q \right)^{m(R_a-\varepsilon)} \sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q,\end{aligned}$$

注意到，由于 $q < 0$，函数 $x \mapsto x^q$ 在 $(0, 1]$ 上递减。取对数、整理并除以 n，得到

$$\begin{aligned}-\frac{1}{n}\log\left(\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n} \mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q\right) \leq\ & -\frac{1}{n}\log\left(\sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m(n)}} \mu_{\boldsymbol{P}}([v])^q\right) + \frac{1}{n}\log\lambda^q \\ & - \frac{m(n)}{n}\sum_{a\in\mathcal{A}} (R_a - \varepsilon)\log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q\right).\end{aligned}$$

注意到 $m(n)/n \to (\lambda - \varepsilon)^{-1}$ 当 $n \to \infty$时，由引理 2.2可得

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \leq \frac{1}{\lambda-\varepsilon}\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) + \frac{1}{\lambda-\varepsilon}\sum_{a\in\mathcal{A}} \log\left(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q\right) + c\varepsilon$$

其中 $c := (\#\mathcal{A}) \max_{a\in\mathcal{A}} \log(\sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]^q)$。令 $\varepsilon \to 0$ 并整理，得到

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \leq \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q),$$

至此，证明完成。 □

3.6. 从 L^q-谱恢复熵。由于 L^q-谱同时编码拓扑熵和测度论熵，定理 A提供了另一种证明途径，可证明这两个量与 [GMR+23中引入的膨胀词类比相一致；Goh20] 则针对本原且相容的随机替换。

为简化记号，令

$$\rho_k = -\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{s\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k(a) = s]\log(\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^k(a) = s]).$$

证明（推论 C）。我们首先证明拓扑熵的情形。由定理 A可知，定义 $T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(0)$ 的极限存在；特别地，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda^k}\sum_{a\in\mathcal{A}}R_a\log(\#\vartheta^m(a))$$

存在。由于 $h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta)=-\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(0)=-T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(0)$，我们得出

$$h_{\mathrm{top}}(X_\vartheta)=-\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\lambda^k}\sum_{a\in\mathcal{A}}R_a\log(\#\vartheta^m(a))$$

正如所述。

现在我们来考察测度论熵。首先作如下初等观察：若 f 和 g 是凹函数，且满足 $f(1)=g(1)$，并且对所有 $x\geq 1$都有$f(x)\leq g(x)$，那么 $f^+(1)\leq g^+(1)$。事实上，对所有 $\epsilon>0$,

$$\frac{f(1+\epsilon)-f(1)}{\epsilon}\leq\frac{g(1+\epsilon)-g(1)}{\epsilon},$$

然后令 ϵ 趋于 0 并取极限（由凹性可知该极限总是存在），即可得到所需的不等式。

回顾一下，$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}$ 和 $\lambda^{-k}\varphi_k$ 是凹函数，且满足 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(1)=\varphi_k(1)=0$ 对所有 $k\in\mathbb{N}$均成立。此外，φ_k 对所有 $k\in\mathbb{N}$ 均可微，且满足 $\varphi_k'(1)=\rho_k$，并由命题 3.2 和定理 A可知，$\left(\lambda^{-k}\varphi_k\right)_{j=1}^{\infty}$ 单调地从下方收敛至$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}$。特别地，$\rho_k/\lambda^k$ 是一个单调递增且以上界 $\tau^+_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(1)$为界的序列，因此该极限确实存在。于是

$$\tau^+_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(1)=\lim_{k\to\infty}\frac{\rho_k}{\lambda^k}$$

sinc对所有 $q\in(0,\infty)$，根据前面的观察，e $\varphi_k(q)/(\lambda^k-1)\geq\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$.

对于 $\tau^-_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(1)$的结果，可用相同的论证得出，但改用单调性以及 $q\in(0,1)$的相应界。因此 $\tau'_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(1)=\lim_{k\to\infty}\rho_k/\lambda^k$，所需结果由引理 2.1(c) 得出。□

4. 可识别性与多重分形形式

本节将证明 定理 D中所述的多重分形形式。我们的证明基于一个约束变分原理，该原理通过考察一个频率测度相对于另一个频率测度的典型局部维数 $\mu_{\boldsymbol{P}}$ $\mu_{\boldsymbol{Q}}$而得到。我们的策略是在引理 *4.3*中证明相对字母频率几乎处处存在：这一结果结合可识别性，得到命题 4.5。随后，将这一维数结果与 L^q谱公式结合，即可得到多重分形形式；该公式已在命题 3.7中证明——证明见§4.2。

4.1. 非典型局部维数。 为证明给定频率测度 $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 的多重分形形式，我们证明对于每个 $\alpha\in[\alpha_{\min},\alpha_{\max}]$，存在

另一个频率测度 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$，使得 $\dim_{\mathrm{H}} \mu_{\boldsymbol{Q}} \geq \tau^*_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha)$ 和 $\dim_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}},\ x) = \alpha$ 对于 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$-几乎处处的 $x \in X_\vartheta$ 成立。给定一个本原集值替换 ϑ、允许的概率 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$、$m \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \mathcal{A}$，定义量 $H^{m,\ \boldsymbol{P}^{\ a},\ \boldsymbol{Q}}(\vartheta)$ 为

$$H^{m,a}_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta) = \sum_{v \in \vartheta^m(a)} -\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(a) = v].$$

此外，令 $\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)$ 表示向量 $(H^{m,\boldsymbol{P}^{\ a},\boldsymbol{Q}}(\vartheta))_{a\in\mathcal{A}}$。我们先证明量 $\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)$ 的一些性质，并将在命题 Proposition 4.5 的证明中用到这些性质。

引理 4.1。 若 ϑ 是本原且相容的集值替换，$\boldsymbol{P}$和 $\boldsymbol{Q}$ 是许可概率，则对所有 $m \in \mathbb{N}$、$a \in \mathcal{A}$ 和 $s \in \vartheta(a)$，

$$\sum_{v \in \vartheta^m(s)} \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(s) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(s) = v] = \sum_{b\in\mathcal{A}} |\vartheta(a)|_b \, H^{m,b}_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta).$$

证明。 由于 ϑ 相容，我们可以将每个 $v \in \vartheta^m(s)$ 分解为膨胀词 $v = v^1 \cdots v^{|\vartheta(a)|}$。根据 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$（分别为 $\vartheta_{\boldsymbol{Q}}$）的马尔可夫性质，

$$\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(s) = v] = \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(s_1) = v^1] \cdots \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(s_{|\vartheta(a)|}) = v^{|\vartheta(a)|}].$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{v \in \vartheta^m(s)} \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(s) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(s) = v] = \\ &= \sum_{b\in\mathcal{A}} |\vartheta(a)|_b \sum_{w \in \vartheta^m(b)} \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(b) = w] \log \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(b) = w] \\ &= \sum_{b\in\mathcal{A}} |\vartheta(a)|_b \, H^{m,b}_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta),\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

引理 4.2。 如果 ϑ 是满足不相交集条件的本原且相容的集值替换，具有右 *Perron–Frobenius*特征向量 $\boldsymbol{R}$，并且 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是许可概率，那么

$$\frac{1}{\lambda^m} \boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta) \cdot \boldsymbol{R} \to \frac{1}{\lambda - 1} \boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta) \cdot \boldsymbol{R}$$

则为 $m \to \infty$。

证明。 由于 ϑ 满足不相交集条件，对于所有 $m \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \mathcal{A}$，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{m+1}_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta) \cdot \boldsymbol{R} &= \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{v \in \vartheta^{m+1}(a)} \mathbb{P}[\vartheta^{m+1}_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta^{m+1}_{\boldsymbol{P}}(a) = v] \\ &= \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{s \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a) = s] \log \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = s]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a)=s] \sum_{v\in\vartheta^m(s)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}^m(s)=v]\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^m(s)=v]\\
&=\boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}+\sum_{b\in\mathcal{A}} H^{m,b}_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\sum_{a\in\mathcal{A}}|\vartheta(a)|_b R_a\\
&=\boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}+\lambda\sum_{b\in\mathcal{A}} R_b H^{m,b}_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\\
&=\boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}+\lambda\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}.
\end{aligned}
$$

在第二个等式中，我们使用了 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 和 $\vartheta_{\boldsymbol{Q}}$的马尔可夫性质、对数法则，以及 $\sum_{v\in\vartheta^m(s)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}^m(s)=v]=1$ 对所有 $s\in\vartheta(a)$ 均成立；在第三个等式中，我们应用了 引理 4.1 ；在第四个等式中，我们利用了 $M_\vartheta\boldsymbol{R}=\lambda\boldsymbol{R}$。对上述过程进行归纳应用，

$$
\frac{1}{\lambda^m}\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\lambda^j}\boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{1}{\lambda-1}\boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R},
$$

由此完成证明。 □

可识别随机替换的子移位中的任意双无限序列 x，都可以写成精确膨胀词的双无限拼接 $(w^{n,\,a_n})$，其中 $w^{n,\,a_n}$ 是由字母 a_n 生成的膨胀词。给定一个可识别的集合值替换 ϑ、$a\in\mathcal{A}$ 和 $w\in\vartheta(a)$，我们定义 $(a,\ w)$ 在 $x\in X_\vartheta$ 中的膨胀词频率为

$$
\begin{aligned}
f_x(a,w)&=\lim_{n\to\infty} f_x^n(a,w)\\
f_x^n(a,w)&=\frac{1}{2n+1}\#\{m\colon a_m=a, w^{m,a_m}=w, w^{m,a_m}\text{ in }x_{[-n,n]}\},
\end{aligned}
$$

假设极限存在。对于给定的频率测度 $\mu_{\boldsymbol{P}}$，一个 $\mu_{\boldsymbol{P}}$-典型词的膨胀词频率由生成概率决定。更具体地说，有如下结论。

引理 4.3. 设 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}=(\vartheta,\boldsymbol{P})$ 是一个本原、相容且可识别的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$。对于 $\mu_{\boldsymbol{P}}$-几乎处处的 $x\in X_\vartheta$，膨胀词频率存在，且由下式给出

$$
f_x(a,w)=\frac{1}{\lambda}R_a\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=w],
$$

对所有 $a\in\mathcal{A}$ 和 $w\in\vartheta(a)$ 均成立。

证明。 令 $A_{a,w}$ 为满足上述结论不 成立的点集。我们证明 $A_{a,w}$ 是一个零测集。取其补集，再对所有 a,w 取交集，便得到具有所需性质的全测度集。给定 $\varepsilon>0$，令$E(n,\varepsilon)$为满足以下条件的 $x\in X_\vartheta$ 所成的集合：

$$
\left|f_x^n(a,w)-\frac{1}{\lambda}R_a\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=w]\right|>\varepsilon.
$$

根据 Borel–Cantelli 引理，只需证明

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\boldsymbol{P}}(E(n,\varepsilon)) < \infty$$

对所有 $\varepsilon > 0$为了得出 $A_{a,\ w}$ 是一个零测集。为此，我们证明$\mu_{\boldsymbol{P}}(E(n,\ \varepsilon))$ 随 n呈指数衰减。给定 u 且满足 $|u| = 2n+1 > 2\kappa(\vartheta)$，令 u^R表示 u的可识别核心，其长度至少为 $|u|-2\kappa(\vartheta)$。 引理 2.18给出

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \le \frac{\kappa(\vartheta)}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = u^R] = \frac{\kappa(\vartheta)}{\lambda}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])\prod_{i=1}^{|v|}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v_i) = w^{i,v_i}]$$

其中，每个 w^{i,v_i} 都是 u^R中 v_i 的膨胀像。根据相容性，我们可以选取一个整数 N，使得每个长度至少为 N 的 v 都满足 $|v|(R_a - \varepsilon/3) \le |v|_a \le |v|(R_a+\varepsilon/3)$，对所有 $a \in \mathcal{A}$ 均成立。对于每个 v 和 $a \in \mathcal{A}$，令 $A_a(v)$ 表示满足以下条件的 $u' \in \vartheta(v)$ 集合：指标 $i \in \{j:\ a_j = a\}$ （其中 $w^{i,a} = w$ ）的频率与 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = w]$ 相差超过 $\varepsilon/3$。由于 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 对字母的作用彼此独立，由克拉默定理可知，总和 $\sum_{u'\in A(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = u']$ 随 $|v|_a$ 呈指数衰减（因此也随 $|v|$ 呈指数衰减）。特别地，存在一个常数 $C > 0$，与 v 的选择无关，使得

$$\sum_{u'\in A(v)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = u'] \le e^{-Cn}. \tag{4.1}$$

注意，若 u 是一个足够长的合法词，且具有 $[u] \cap E(n,\ \varepsilon) = \varnothing$，那么我们要求 $u^R \in A(v)$。事实上，若 $u' \notin A(v)$ 且 $|v| \ge N$，则 w 的相对膨胀词频率有如下上界：

$$\begin{aligned}\frac{\{j : a_j = a\}}{|v|}\frac{|v|}{|u|}\left(\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = w] + \frac{\varepsilon}{3}\right) &\le \frac{1}{\lambda}\left(R_a + \frac{\varepsilon}{3}\right)\left(\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = w] + \frac{\varepsilon}{3}\right)\\ &\le \frac{1}{\lambda}R_a\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = w] + \varepsilon\end{aligned}$$

类似地，其下界为 $R_a\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}\ (a)\ = w]/\lambda - \varepsilon$；因此，$[u^R] \cap E\ (n,\ \varepsilon)\ = \varnothing$。令 $\mathcal{V}_n$ 表示所有这样的词组成的集合：它们是长度为 n的词的可识别核心的（唯一）原像。由 引理 2.18 可得

$$\mu_{\boldsymbol{P}}(E(n,\varepsilon)) \leqslant \sum_{\substack{u\in\mathcal{L}_\vartheta^n\\ [u]\cap E(n,\varepsilon)\neq\varnothing}} \mu_{\boldsymbol{P}}([u]) \le \frac{\kappa(\vartheta)}{\lambda}\sum_{v\in\mathcal{V}_n}\mu_{\boldsymbol{P}}([v])\sum_{u'\in A(v)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v) = u'] \leqslant e^{-Cn},$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了（4.1）以及

$$\sum_{v\in\mathcal{V}_n}\mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{v\in\mathcal{L}_\vartheta^j}\mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \le n,$$

将这一项和 $\kappa(\vartheta)/\lambda$ 因子吸收到常数 C 中。由此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\boldsymbol{P}}(E(n,\varepsilon)) \le \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Cn} < \infty,$$

由此，结论可根据 Borel–Cantelli 引理得出。 □

最后，我们要求柱集测度的指数标度率满足以下界限，这基本上是定理 A的推论。特别是，这些界限给出了测度局部维数的可能取值范围。

命题 4.4。 若 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是一个本原且相容的随机替换，其对应的频率测度为 $\mu_{\boldsymbol{P}}$，则存在值 $0 < s_1 < s_2 < \infty$ 和 c_1、$c_2 > 0$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $v \in \mathcal{L}^n(X_\vartheta) = \mathcal{L}^n_\vartheta$,

$$s_1 \cdot n + c_1 \le \log \mu_{\boldsymbol{P}}([v]) \le s_2 \cdot n + c_2$$

证明。 根据 定理 A，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和 $q > 1$,

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q);$$

且对于 $q < 0$,

$$\frac{1}{\lambda^k - 1}\varphi_k(q) \le \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q),$$

此外，对于每个 k，满足

$$\beta_{k,\min} \coloneqq \lim_{q\to\infty} \frac{\varphi_k(q)}{q(\lambda^k - 1)} = -\frac{1}{\lambda^k - 1} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log \left(\min_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = v] \right)$$
$$\beta_{k,\max} \coloneqq \lim_{q\to-\infty} \frac{\varphi_k(q)}{q(\lambda^k - 1)} = -\frac{1}{\lambda^k - 1} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \log \left(\max_{v\in\vartheta^k(a)} \mathbb{P}[\vartheta^k_{\boldsymbol{P}}(a) = v] \right),$$

可知 $[\beta_{k,\min}, \beta_{k,\max}] \subset (0, \infty)$ 是一个递减的嵌套区间序列，因此 $\beta_{\min} = \lim_{k\to\infty} \beta_{k,\min}$ 且 $\beta_{\max} = \lim_{k\to\infty} \beta_{k,\max}$,

$$0 < \beta_{\min} \le \lim_{q\to\infty} \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \lim_{q\to-\infty} \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \beta_{\max} < \infty.$$

应用引理 2.1（b）即可得到所需结果。 □

F最后，我们得出关于相对局部维数的主要结论。

命题 4.5. 设 ϑ 是一个本原、相容且可识别的集合值替换， $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是许可概率， $\mu_{\boldsymbol{P}}$ 和 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$ 分别表示相应的频率测度。那么，对于 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$-几乎所有的 $x \in X_\vartheta$,

$$\dim_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) = \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{v\in\vartheta(a)} -\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(a) = v]. \tag{4.2}$$

证明。固定 $m \in \mathbb{N}$。由引理 2.16 可知，既然 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 是可识别的，那么 $\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}$ 也是可识别的。对于满足 $n > \kappa(\vartheta^m)$ 的每个 $x \in X_\vartheta$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令 $u^n_-(x)$ 表示 $x_{[-n,n]}$ 的可识别核心，并令 $u^n_+(x)$ 表示包含 $x_{[-n,n]}$ 的最短膨胀词。根据相容性，$|u^n_-(x)|/(2n+1) \to \lambda^{-m}$，且 $|u^n_+(x)|/(2n+1) \to \lambda^{-m}$，其中 $n \to \infty$。此外，令 $v^n_-(x)$ 为满足 $u^n_-(x) \in \vartheta^m(v^n_-(x))$ 的合法词，并令 $v^n_+(x)$ 为满足 $u^n_+(x) \in \vartheta^m(v^n_+(x))$ 的合法词。于是，由引理 2.18 和局部维数的定义可得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n+1}\log\mu_{\boldsymbol{P}}([u^n_-(x)]) - \frac{1}{2n+1}\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v^n_-(x)) = u^n_-(x)]\right)\\ \le \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) \le \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x)\\ \le \limsup_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n+1}\log\mu_{\boldsymbol{P}}([u^n_+(x)]) - \frac{1}{2n+1}\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v^n_+(x)) = u^n_+(x)]\right).\end{aligned}$$

根据命题 4.4，存在一个常数 $C \ge 0$，使得对所有 $x \in X_\vartheta$，

$$0 \le \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+1}\log\mu_{\boldsymbol{P}}([u^n_-(x)]) \le \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+1}\log\mu_{\boldsymbol{P}}([u^n_+(x)]) \le C.$$

因此，由上述内容可得

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+1}\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v^n_-(x)) = u^n_-(x)]\\ &\quad\le \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x) \le \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}}, x)\\ &\quad\le \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+1}\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v^n_+(x)) = u^n_+(x)] + \frac{C}{\lambda^m}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

现在我们证明，对 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$-几乎所有的 $x \in X_\vartheta$，

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v^n_-(x)) = u^n_-(x)] &= \limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v^n_+(x)) = u^n_+(x)]\\ &= \frac{1}{\lambda^m}\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R}.\end{aligned}$$

根据相容性，我们可以将生成概率分解为膨胀瓦片上的形式：

$$\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(v^n_-(x)) = u^n_-(x)] = \prod_{a\in\mathcal{A}}\prod_{w\in\vartheta^m(a)}\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(a) = w]^{N_{a,w}(x,n)},$$

其中，对每个 $a \in \mathcal{A}$ 和 $w \in \vartheta^m(a)$，$N_{a,\,w}(x,\,n)$ 表示 a在 $v^n_-(x)$中映射到 w的数量。由引理 4.3应用于 $\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}$可得，对于 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$-几乎所有的$x \in X_\vartheta$，

$$\frac{1}{2n+1}N_{a,w}(x,n) \to \frac{1}{\lambda^m}R_a\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(a) = w]$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$和 $w \in \vartheta^m(a)$。因此可得

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n+1}\log\mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(v^n_-(x)) = u^n_-(x)]$$

$$= \frac{1}{\lambda^m} \sum_{a\in\mathcal{A}} R_a \sum_{v\in\vartheta^m(a)} \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{Q}}(a)=v] \log \mathbb{P}[\vartheta^m_{\boldsymbol{P}}(a)=v]$$
$$= \frac{1}{\lambda^m} \boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot \boldsymbol{R},$$

同样的收敛性也适用于 $u^n_+(x)$，由相同的论证可知。因此，由（4.3）可得

$$\frac{1}{\lambda^m}\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R} \le \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}},x) \le \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}},x) \le \frac{1}{\lambda^m}\boldsymbol{H}^m_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R} + \frac{C}{\lambda^m}.$$

由于上述结论对所有 $m\in\mathbb{N}$均成立，令 $m\to\infty$，由引理 4.2可得维数$_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}},\ x)$ 存在，且

$$\dim_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}},x) = \frac{1}{\lambda-1}\boldsymbol{H}^1_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}}(\vartheta)\cdot\boldsymbol{R},$$

由此完成证明。 □

4.2. 多重分形形式的证明。 本节中，我们结合上一节得到的结果以及关于可识别性下 L^q-谱的结果，来证明定理 D。

证明（定理 *D*）。我们首先得到 L^q-谱的结果。由于每个可识别随机替换都满足不相交集条件，命题 3.1给出 $T_{\vartheta,\ \boldsymbol{P}}(q) = (\lambda-1)^{-1}\varphi_1(q)$ 对所有 $q\in\mathbb{R}$均成立。若 $q<0$，则由定理 A 和命题 3.7可得，

$$\frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q) = T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) \le \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) \le \frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q),$$

因此我们得出 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 存在且等于 $(\lambda-1)^{-1}\varphi_1(q)$。对于 $q\ge 0$，该结果已由推论 B得出。

现在我们得到关于多重分形谱的结果。根据 命题 2.3，还需证明 $f_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha) \ge \tau^*_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha)$ 对每个 $\alpha\in\mathbb{R}$ 都成立。如上所证，对所有 $q\in\mathbb{R}$，

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = \frac{1}{\lambda-1}\varphi_1(q) = \frac{1}{\lambda-1}\sum_{a\in\mathcal{A}} R_a T_a(q)$$

其中对每个 $a\in\mathcal{A}$

$$T_a(q) = -\log \sum_{s\in\vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q.$$

首先，固定 $\alpha\in(\alpha_{\min},\alpha_{\max})$，并令 $q\in\mathbb{R}$ 满足 $\tau'_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)=\alpha$。注意到 $q\alpha-\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = \tau^*_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha)$。然后按以下规则定义 $\boldsymbol{Q}$

$$\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a)=s] = \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a)=s]^q e^{T_a(q)}$$

对所有 $a \in \mathcal{A}$和 $s \in \vartheta(a)$。然后根据 推论 C,

$$\begin{aligned}\dim_{\mathrm{H}} \mu_{\boldsymbol{Q}} &= \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{a \in \mathcal{A}} R_a \Big(- \sum_{v \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \Big) \\ &= q \cdot \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{a \in \mathcal{A}} R_a \Big(- \sum_{v \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = v] \Big) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{a \in \mathcal{A}} R_a T_a(q) \sum_{v \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \\ &= q\alpha - \tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = \tau^*_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha)\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}\tau'_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) &= \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{a \in \mathcal{A}} R_a \frac{- \sum_{v \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = v]^q \log \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = v]}{e^{-T_a(q)}} \\ &= \frac{1}{\lambda - 1} \sum_{a \in \mathcal{A}} R_a \Big(- \sum_{v \in \vartheta(a)} \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{Q}}(a) = v] \log \mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(a) = v] \Big).\end{aligned}$$

事实上，这表明 维数$_{\mathrm{loc}}(\mu_{\boldsymbol{P}},\ x) = \alpha$ 对于 $\mu_{\boldsymbol{Q}}$-几乎所有的 $x \in X_\vartheta$ 根据 命题 4.5。因此 $f_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha) \geq$ 维数$_{\mathrm{H}}\, \mu_{\boldsymbol{Q}} = \tau^*_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(\alpha)$，正如所要求的。

$\alpha = \alpha_{\min}$ （分别地，$\alpha = \alpha_{\max}$）的结果可类似地得到：取一个退化的概率向量 $\boldsymbol{Q}$，它将相同的值赋予 ϑ（a）的各个实现，其中最大（分别地，最小）概率由 $\boldsymbol{P}$ 给出，而其他情况赋值为零。相应的非退化子替换也是相容且可识别的，因此同样的论证可给出相应的界。□

5. 例子、反例和应用

5.1. 不具可识别性时负 q 的界的失效。 在下面的两个例子中，我们表明 定理 A 的结果一般不能扩展为关于 L^q-谱由膨胀词 L^q-谱给出上界，$q < 0$。在 例 5.1中，我们构造了一类定义在两个字母全移位上的频率测度，使得其 L^q-谱与膨胀词类比在$q < 0$ 情形下不同。产生这些频率测度的随机替换并不相容，但在 例 5.2中我们给出了一个相容的类比。

相比之下，在例 5.3中，我们给出了一个例子，表明关于$q < 0$ 的结果对所有 $q \in \mathbb{R}$ 都成立，前提是满足相同集条件且具有相同的产生概率。

例 5.1. 令 $p_1 < p_2 \in (0,1)$，使得 $p_1 + 3p_2 = 1$，并令 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 为如下定义的随机替换:

$$\vartheta_{\boldsymbol{P}} \colon a, b \mapsto \begin{cases} ab & \text{with probability } p_1 \\ ba & \text{with probability } p_2 \\ aa & \text{with probability } p_2 \\ bb & \text{with probability } p_2 \end{cases}$$

我们证明，对于所有充分小的 $q<0$，都有 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)>T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)$。注意，对于每个 $k\in\mathbb{N}$，词 $v^k=(ab)^{2^k}\in\vartheta^{k+1}(a)\cap\vartheta^{k+1}(b)$ 出现的概率为

$$\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k+1}(a)=v^k]=\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}^{k+1}(b)=v^k]=p_1^{2^k}.$$

显然，这是一个第 k 级膨胀词出现的最小可能概率，因此可得

$$\lim_{q\to-\infty}\frac{T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)}{q}=-\frac{1}{2}\log p_1.$$

现在，令 $u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2^{k+1}}$ 任意。我们证明 $\mu_{\boldsymbol{P}}([u])\geq p_1^{2^{k-1}}p_2^{2^{k-1}}/2$。由于$\vartheta(a)=\vartheta(b)$具有相同的生成概率，由 引理 2.12 可知，对于任意的 $w\in\mathcal{L}_\vartheta^{2^k+1}$

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u])=\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(w)_{[1,2^{k+1}]}=u]+[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(w)_{[2,2^{k+1}+1]}=u]\right).$$

如果 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(w)_{[1,2^{k+1}]}=u]\geq p_1^{2^{k-1}}p_2^{2^{k-1}}$，则结论成立；否则，$v$ 中至少一半的字母必须被映射为 ab。但要使 u 从第二个字母产生，v 中至少一半的字母必须被映射为 ba 或 bb，因此 $\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(w)_{[2,2^{k+1}+1]}=u]\geq p_1^{2^{k-1}}p_2^{2^{k-1}}$。于是，$\mu_{\boldsymbol{P}}([u])\geq p_1^{2^{k-1}}p_2^{2^{k-1}}/2$，因此特别地，

$$\min_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2^{k+1}}}\mu_{\boldsymbol{P}}([u])\geq\frac{1}{2}p_1^{2^{k-1}}p_2^{2^{k-1}}.$$

由此可得

$$\lim_{q\to-\infty}\frac{\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)}{q}\leq-\frac{1}{4}(\log p_1+\log p_2)<-\frac{1}{2}\log p_1=\lim_{q\to-\infty}\frac{T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)}{q}.$$

稍作修改这个例子，我们便能构造出一个相容随机替换，使这两个概念并不相同。

例 5.2. 令 $p_1<p_2\in(0,1)$，使得 $p_1+3p_2=1$，并令 $\vartheta_{\boldsymbol{P}}$ 为如下定义的随机替换:

$$\vartheta_{\boldsymbol{P}}\colon a,b\mapsto\begin{cases}ab\,ba & \text{with probability } p_1\\ ba\,ab & \text{with probability } p_2\\ ab\,ab & \text{with probability } p_2\\ ba\,ba & \text{with probability } p_2\end{cases}$$

通过与前一个例子类似的论证，我们得到

$$\lim_{q\to-\infty}\frac{\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)}{q}\leq-\frac{1}{8}(\log p_1+\log p_2)<-\frac{1}{4}\log p_1=\lim_{q\to-\infty}\frac{T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)}{q}.$$

例 5.2 中的随机替换满足相同集条件，且具有相同的产生概率。以下例子也满足这些条件。不过，在此处，L^q-谱与膨胀词类比对所有 $q\in\mathbb{R}$ 都可通过直接论证证明二者一致。

例 5.3。我们证明，对于随机替换

$$\vartheta_{\boldsymbol{P}}\colon a,b\mapsto\begin{cases}ab & \text{with probability } p\\ ba & \text{with probability } 1-p\end{cases}$$

对所有 $q\in\mathbb{R}$，定义 $\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)$ 的极限都存在，并且

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)=T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)=\frac{1}{\lambda}\varphi_1(q)=-\frac{1}{2}\log(p^q+(1-p)^q).$$

推论 B 给出了对所有 $q>0$ 的结果，并且对所有 $q<0$，$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)\geq T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q)=2^{-1}\varphi_1(q)$，因此只需验证对所有 $q<0$，

$$\overline{\tau}_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q)\leq T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q).$$

由于 $\vartheta(v^1)=\vartheta(v^2)$ 对所有 $v^1,\ v^2\in\mathcal{L}_\vartheta$，由 引理 2.12 可得，对所有$u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2m}$ 以及任意 $v\in\mathcal{L}_\vartheta^{m+1}$，

$$\mu_{\boldsymbol{P}}([u])=\frac{1}{2}\left(\mathbb{P}[\vartheta(v)_{[1,1+2m-1]}=u]+\mathbb{P}[\vartheta(v)_{[2,2+2m-1]}=u]\right).$$

设 $\mathcal{V}_{2m}=\{(ab)^m,\ (ba)^m\}$。若 $u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2m}\setminus\mathcal{V}_{2m}$，则 u 必须包含 bb 作为子词。这唯一确定了任意膨胀词分解中的切分点，因此存在唯一的 v 和 $j(u)\in\{1,2\}$，使得 $u\in\vartheta(v)_{[j(u),2m+j(u)-1]}$。由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2m}}\mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q&\geq\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2m}\setminus\mathcal{V}_{2m}}\left(\frac{1}{2}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v)_{[j(u),j(u)+2m-1]}=u]\right)^q\\&\geq\frac{1}{2^q}\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2m}\setminus\mathcal{V}_{2m}}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v_2\cdots v_m)=u_{[3-j(u),2-j(u)+2m]}]^q.\end{aligned}$$

现在，对于每个 $w\in\vartheta(v_2\cdots v_m)$，都存在一个 u，使得 $w=u_{[3-j(u),2-j(u)+2m]}$。因此，

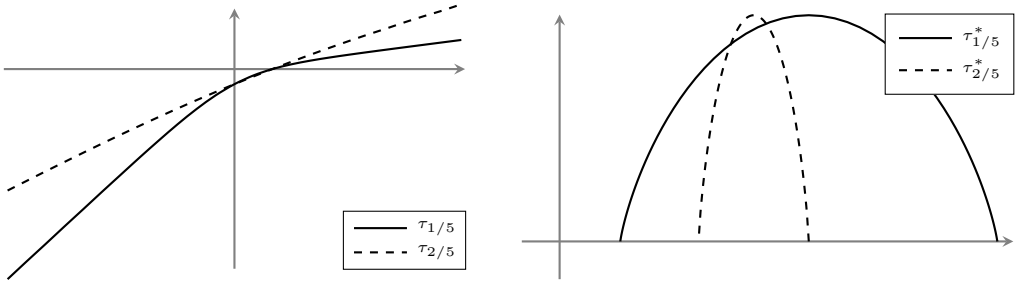
$$\sum_{u\in\mathcal{L}_\vartheta^{2m}}\mu_{\boldsymbol{P}}([u])^q\geq\frac{1}{2^q}\sum_{w\in\vartheta(v_2\cdots v_m)}\mathbb{P}[\vartheta_{\boldsymbol{P}}(v_2\cdots v_m)=w]^q$$

结论可由与主定理证明中所用类似的论证得出。

5.2. 具有可识别性的例子。我们首先给出一些随机替换的例子，对于这些替换，多重分形形式成立。

例 5.4。令 $p>0$，并令 ϑ_p 为如下定义的随机替换

$$\vartheta_p\colon\begin{cases}a\mapsto\begin{cases}abb & \text{with probability } p\\ bab & \text{with probability } 1-p\end{cases}\\ b\mapsto aa\end{cases}$$



(A) L^q-谱 (B) 多重分形谱

图1. 与 $p \in \{1/5, 2/5\}$ 对应的可识别替换的 L^q-谱和多重分形谱。

显然， ϑ_p 是相容的，其对应的本原替换矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Perron–Frobenius 特征值 $(1+\sqrt{17})/2$，以及右 Perron–Frobenius 特征向量 or

$$\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \frac{5-\sqrt{17}}{2} \right).$$

可以验证， ϑ 是可识别的，因为 aa 的每次出现都与 b 的一个像相交，而相邻字母随后确定切分点。因此根据定理 D，对于所有 $q \in \mathbb{R}$

$$\tau_{\mu_p}(q) = T_{\vartheta,\boldsymbol{P}}(q) = \frac{1}{\lambda - 1}\varphi_1(q) = -\frac{7-\sqrt{17}}{8}\log(p^q + (1-p)^q)$$

以及测度 μ_p 满足多重分形形式。渐近线的斜率为 $-(7-\sqrt{17})\log(p)/8$ 和 $-(7-\sqrt{17})\log(1-p)/8$。两种 L^q-谱和多重分形谱的图像 p 见图1。

对于 $p = 1/2$，测度 μ_p 的 L^q-谱是一条直线，而多重分形谱在 $h_{\text{top}}(X_\vartheta)$处等于 $h_{\text{top}}(X_\vartheta)$，在其他情况下则等于 $-\infty$ 。

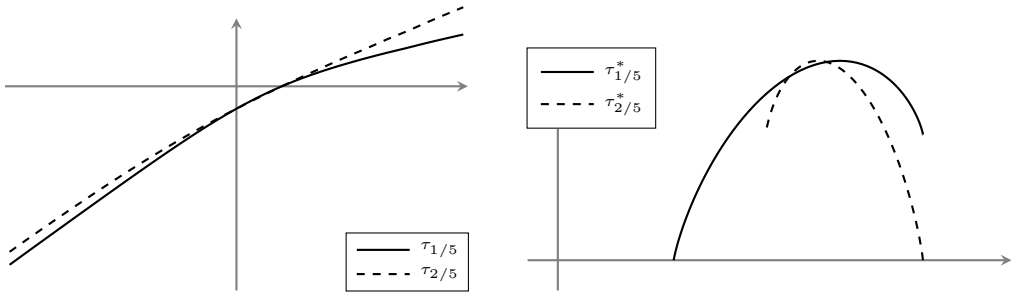
在下面的例子中，我们强调多重分形谱在端点处的值不一定为0。

例5.5。令 ϑ_p 为如下定义的随机替换

$$\vartheta_p\colon \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} abb & \text{with probability } p \\ bab & \text{with probability } p \\ bba & \text{with probability } 1-2p \end{cases} \\ b \mapsto aaa \end{cases}$$

与 例 5.4 类似， ϑ_p 是本原、相容且可识别的。因此，定理 D得出

$$\tau_{\mu_p}(q) = -\frac{3}{10}\log(2p^q + (1-2p)^q).$$



(A) L^q-谱　　(B) 多重分形谱

图 2. L^q-谱以及与 $p \in \{1/5, 2/5\}$ 的一个可识别替换相对应的多重分形谱。

渐近线的斜率为 $-3\log(p)/10$ 和 $-3\log(1-2p)/10$。对于 $p = 1/5$ 和$p = 2/5$，L^q-谱和 多重分形谱的 μ_p 绘于 图 2。这里我们特别指出，多重分形谱的端点不一定等于零。

例 5.6. 考虑定义在三字母字母表 $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ 上的随机替换：

$$\vartheta_{\mathbf{P}}: \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} bbc & \text{with probability } p_1 \\ cbb & \text{with probability } 1-p_1 \end{cases} \\ b \mapsto \begin{cases} cca & \text{with probability } p_2 \\ acc & \text{with probability } 1-p_2 \end{cases} \\ c \mapsto \begin{cases} aab & \text{with probability } p_3 \\ baa & \text{with probability } 1-p_3 \end{cases} \end{cases}$$

其中 p_1、p_2 和 p_3 属于 (0,1)。显然，这个替换是相容的；考察 2、3 或 4 个字母的重复出现次数可知，这个替换也是可识别的。此外，ϑ 是常长度替换，因此满足 [GMR+23 定理 4.8] 的假设，并且 $\#\vartheta(a) = \#\vartheta(b) = \#\vartheta(c)$。特别地，相应的子移位 X_ϑ 是内在遍历的，其唯一的最大熵测度由取 $p_1 = p_2 = p_3 = 1/2$ 给出。

由 [GMR+23 引理 4 可知，12] 最大熵测度不是相对于零势的吉布斯测度，因此该系统不满足通常的规格性质。对于这组均匀概率，L^q-谱是一条直线，经过点 (1,0)，斜率为$h_{\text{top}}(X_\vartheta) = \log(2)/2$。更一般地，对于所有 L^q-谱均可由下式给出：$q \in \mathbb{R}$ 公式

$$\tau_{\mu_{\boldsymbol{P}}}(q) = -\frac{1}{6}\left(\log\left((1-p_1)^q + p_1^q\right) + \log\left((1-p_2)^q + p_2^q\right) + \log\left((1-p_3)^q + p_3^q\right)\right)$$

并且满足多重分形形式。

例如，对于二字母字母表，可以考虑随机

替换

$$\vartheta_{\mathbf{P}}\colon \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} ababbb & \text{with probability } p_1 \\ abbabb & \text{with probability } 1-p_1 \end{cases} \\ b \mapsto \begin{cases} baabaa & \text{with probability } p_2 \\ babaaa & \text{with probability } 1-p_2 \end{cases} \end{cases}$$

对于 (0，1) 中的 p_1 和 p_2。对这个例子的分析与上文完全相同。

5.3. 不具可识别性的例子。 最后，我们考察随机替换中研究得最为广泛的两个例子：随机倍周期替换和随机斐波那契替换。

例 5.7. 给定 $p \in \in(0，1)$，令 ϑ_p 为如下定义的随机周期倍增替换

$$\vartheta_p\colon \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} ab & \text{with probability } p \\ ba & \text{with probability } 1-p \end{cases} \\ b \mapsto aa \end{cases}$$

并令 μ_p 表示相应的频率测度。替换 ϑ_p 满足不相交集条件，因此对于所有 $q \in [0,\infty)$,

$$\tau_{\mu_p}(q) = -\frac{2}{3}\log(p^q + (1-p)^q).$$

当 $q \to \infty$ 时，渐近线的斜率为 $-2\log(\max\{p, 1-p\})/3$，这给出了 μ_p 的局部维数的一个紧下界。

若 $p = 1/2$，则测度 μ_p 的 L^q谱为线性，其 $q \geq 0$ 给出如下

$$\tau_{\mu_{1/2}}(q) = \frac{2}{3}(q-1)\log 2.$$

由于该替换满足不相交集条件，但并非可识别的，我们的结果无法给出 $q < 0$ 的 L^q谱。

例 5.8. 由下式定义的随机斐波那契替换 ϑ_p

$$\vartheta_p\colon \begin{cases} a \mapsto \begin{cases} ab & \text{with probability } p \\ ba & \text{with probability } 1-p \end{cases} \\ b \mapsto a \end{cases}$$

既不满足相同集条件，也不满足不相交集条件。因此，我们无法应用 推论 B 来求得 $\tau_{\mu_p}(q)$的闭式公式。不过，我们仍可应用 定理 A 来得到一系列上下界。对于情形 $k = 1$，对所有 $0 < q < 1$，都有以下界：

$$-\frac{1}{\phi^2}\log(p^q + (1-p)^q) = \frac{1}{\phi}\varphi_1(q) \leq \tau_{\mu_p}(q) \leq \frac{1}{\phi - 1}\varphi_1(q) = -\log(p^q + (1-p)^q),$$

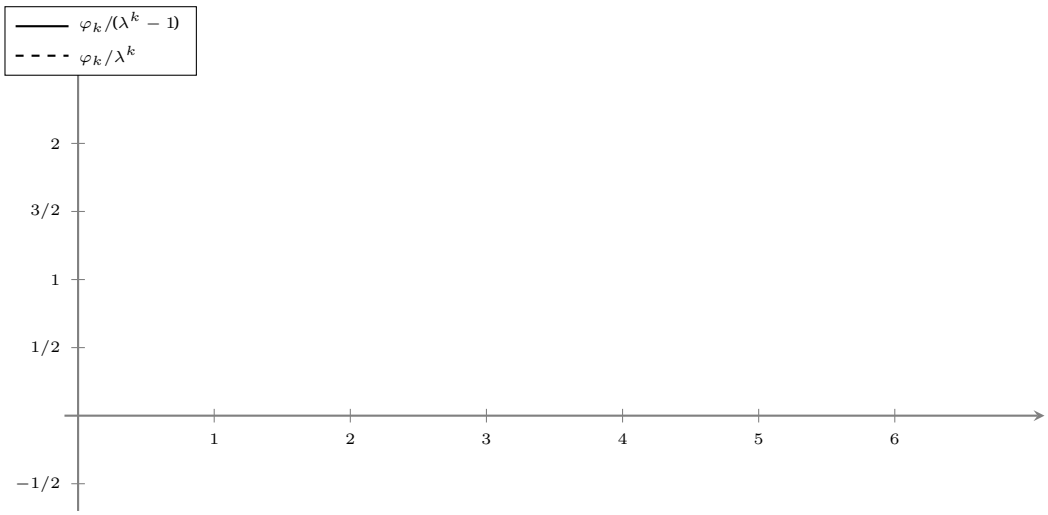


图 3. 随机斐波那契替换对应的频率测度的 L^q-谱的上下界，其中 $p = 1/2$，且 $k = 3$，5，7。颜色越深，k 的值越高。

其中 ϕ 表示黄金比例。反转不等式即可得到 $q > 1$对应的界。当然，取更大的 k 便可得到更好的界。对于 $p = 1/2$，定理 A 给出的一些界见图 3。

致谢

作者感谢 Philipp Gohlke 对本手稿初稿提出的详细意见，这些意见帮助我们从定理 D中去除了一些技术性假设。他们还感谢 Dan Rust 和 Tony Samuel 提供的宝贵意见。AM 感谢 SFB1283 和比勒费尔德大学在 2022 年夏季为一次研究访问提供支持，项目的部分工作便是在访问期间完成的。AM 获得了 EPSRC DTP 和伯明翰大学的支持。AR 获得了 EPSRC 项目 EP/V520123/1 和加拿大自然科学与工程研究委员会的支持。作者感谢 2022 年 3 月在爱丁堡 ICMS 举办的青年遍历理论会议的组织者，本项目正是在此次会议上启动的。

参考文献

[AL10] S. Akiyama 和 J.-Y. Lee。确定替换镶嵌上的准晶体结构。Philos. Mag.**91** (2010)，2709–2717。doi:10.1080/14786435.2010.513694。[AP96] M. Arbeiter 和 N. Patzschke。随机自相似多重分形。Math. Nachr.**181** (1996)，5–42。zbl:0873.28003。[BG13] M. Baake 和 U. Grimm。非周期序。第149卷。剑桥：剑桥大学出版社，2013年。zbl:1295.37001。

[BSS18] M. Baake、T. Spindeler 和 N. Strungaru。一维相容随机替换的衍射。Indag. Math. 29 (2018年)，1031–1071。zbl:1457.82054。[Bow74] R. Bowen。非紧集上的拓扑熵。Trans. Amer. Math. Soc. 184 (1974)，125–136。zbl:0274.54030。[CT21] V. Climenhaga 和 D. J. Thompson。超越Bowen规范性质。载于：《热力学形式体系》。Cham：Springer，2021年，3–82。zbl:1485.37029。[DG88] F. M. Dekking 和 G. R. Grimmet。超分枝过程与随机康托集的投影。Probab. Theory Relat. Fields 78 (1988)，335–355。zbl:0628.60091。[DM90] F. M. Dekking 和 R. W. J. Meester。论Mandelbrot渗流过程及其他随机康托集的结构。J. Stat. Phys. 58 (1990)，1109–1126。zbl:0714.60102。[DW01] F. M. Dekking 和 P. van der Wal。分形渗流与分枝元胞自动机。Probab. Theory Relat. Fields 120 (2001年)，277–308。zbl:0993.28003。[Fal85] K. J. Falconer。分形集的几何。第85卷。剑桥：剑桥大学出版社，1985年。zbl:0587.28004。[Fal97] K. Falconer。分形几何技巧。奇切斯特：John Wiley & Sons，1997年。zbl:0869.28003。[FFW01] A.-H. Fan、D.-J. Feng 和 J. Wu。回归、维数与熵。J. Lond. Math. Soc. 64 (2001年)，229–244。zbl:1011.37003。[FLR02] A.-H. Fan、K.-S. Lau 和 H. Rao。测度不同维数之间的关系。Monatsh. Math. 135 (2002)，191–201。zbl:0996.28001。[Fen05] D.-J. Feng。与Pisot数相关的受限拉德马赫函数和伯努利卷积。Adv. Math. 195 (2005)，24–101。zbl:1078.11062。[FL09] D.-J. Feng 和 K.-S. Lau。满足弱分离条件的自相似测度的多重分形形式。J. Math. Pures Appl. (9) 92 (2009)，407–428。zbl:1184.28009。[FRS22+] R. Fokkink、D. Rust 和 V. Salo。随机替换子移位的自同构群。即将发表于：Indag. Math. arXiv:2203.13545。[GL89] C. Godrèche 和 J. M. Luck。平面铺砌中的准周期性与随机性。J. Stat. Phys. 55 (1989)，1–28。zbl:0717.05025。[GMR+23] P. Gohlke、A. Mitchell、D. Rust 和 T. Samuel。随机替换子移位的测度论熵。Ann. Henri Poincaré 24 (2023年)，277–323。zbl:07645512。[Goh20] P. Gohlke。半相容随机替换的膨胀词熵。Monatsh. Math. 192 (2020年)，93–110。zbl:1441.37014。[GRS19] P. Gohlke、D. Rust 和 T. Spindeler。有限型移位与随机替换。Discrete Contin. Dyn. Syst. 39 (2019年)，5085–5103。zbl:1442.37025。

[GS20] P. Gohlke 和 T. Spindeler。随机替换的遍历频率测度。《数学研究》255（2020年），265–301。zbl:1461.37018。[HJK+86] T. C. Halsey、M. H. Jensen、L. P. Kadanoff、I. Procaccia 和 B. I. Shraiman。分形测度及其奇异性：奇异集的刻画。《物理评论A辑》33（1986年），1141–1151。zbl:1184.37028。[Kel98] G. Keller。遍历理论中的平衡态。第42卷。剑桥：剑桥大学出版社，1998年。zbl:0896.28006。[Kes01] M. Kesseböhmer。弱吉布斯测度的大偏差与多重分形谱。《非线性》14（2001年），395–409。zbl:0979.28003。[LN99] K.-S. Lau 和 S.-M. Ngai。多重分形测度与弱分离条件。Adv. Math. 141（1999年），45–96。zbl:0929.28007。[LM95] D. Lind 和 B. Marcus。符号动力系统与编码导论。剑桥：剑桥大学出版社，1995年。zbl:1106.37301。[MRS+23] E. D. Miro、D. Rust、L. Sadun 和 G. Tadeo。随机替换的拓扑混合。《以色列数学杂志》255（2023年），123–153。zbl:07720414。[Ols95] L. Olsen。多重分形形式。Adv. Math. 116（1995年），82–196。zbl:0841.28012。[PW97] Y. Pesin 和 H. Weiss。吉布斯测度的多重分形分析：研究动机、数学基础与例子。《混沌》7（1997年），89–106。zbl:0933.37020。[Pes98] Y. B. Pesin。动力系统中的维数理论。芝加哥：芝加哥大学出版社，1998年。zbl:0895.58033。[Pey81] J. Peyrière。迭代随机替换。Semin. Theor. Nombres（1981年）。zbl:0474.60070。[PW99] M. Pollicott 和 H. Weiss。连分数与 Manneville-Pomeau 变换的李雅普诺夫指数的多重分形分析及其在丢番图逼近中的应用。《数学物理通讯》207（1999年），145–171。zbl:0960.37008。[Que87] M. Queffélec。替换动力系统——谱分析。第1294卷。Springer，Cham，1987年。zbl:0642.28013。[Roc70] R. T. Rockafellar。凸分析。第28卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1970年。zbl:0193.18401。[Rus20] D. Rust。随机替换子移位中的周期点。Monatsh. Math. 193（2020年），683–704。zbl:1452.37058。[RS18] D. Rust 和 T. Spindeler。源自随机替换的动力系统。Indag. Math. 29（2018年），1131–1155。zbl:1409.37023。[Shm19] P. Shmerkin。关于 Furstenberg交集猜想、自相似测度与 L^q 卷积的范数。《数学年刊》189（2019年），319–391。zbl:1426.11079。[Var18] P. P. Varjú。伯努利卷积研究的最新进展。载于：《第七届欧洲数学大会论文集》。苏黎世：欧洲数学会，2018年，847–867。zbl:1403.28010。

Andrew Mitchell
伯明翰大学数学学院，埃德巴斯顿，*B15 2TT*，英国电子邮箱：
acm925@student.bham.ac.uk

Alex Rutar
数学研究所，圣安德鲁斯大学，圣安德鲁斯 *KY16 9SS*，苏格兰电子邮件：
alex@rutar.org