arXiv:2301.04963v1 [math.RT] 12 Jan 2023

正规子群与支撑 τ-倾斜模 *†

Ryotaro KOSHIO YutaKOZAKAI

2023年1月13日

摘要

设 G 为有限群，G 为 G 的正规子群，k 为特征 $p>0$的代数闭域。本文的第一个主要结果表明，满足某些性质的支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模同时也是 kG-模的支撑 τ-倾斜模。作为第二个主要结果，我们给出支撑 τ-倾斜 kG-模满足上述性质的等价条件，并证明具有这些性质的支撑 τ-倾斜 kG-模的集合，与作为偏序集的 G-不变支撑 τ-倾斜 kG-模集合同构。作为应用，我们证明当 G 在 $\tilde{G}$ 中的指数为 p-次幂时，

G-不变支撑 τ-倾斜 kG-模的集合与支撑 τ-倾斜 kG-模的集合同构。进一步作为应用，我们给出不可分解 τ-刚性 $k\tilde{G}$-模的顶点的一个性质。最后，我们给出上述结果的分块版本。

1 引言

自 2014 年 T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten 引入 τ-倾斜理论以来，[1], 该理论持续快速发展。该理论的核心主题是研究支撑 τ-倾斜模，许多研究者都对此进行了研究。事实上，有限维代数上的支撑 τ-倾斜模与许多表示论中重要的对象一一对应，包括两项 silting 复形 [1], 、函子有限挠类 [1], 、左有限半砖 [3], 、两项简单心集合 [3, 15], 等。特别是，该理论有望助力解决 Brou´e 阿贝尔缺陷群猜想，因为该理论有助于对有限群的群代数或分块代数上的两项倾斜复形进行分类。尽管出于这些原因，与有限群模表示论相关的 τ-倾斜理论研究十分重要，但此类研究并不多。因此，作者开展了结合上述两种理论的研究 [16, 17, 18]。这些研究均表明，在适当的假设下，从 kG-模到 kG-模的诱导函子给出偏序集同态，将 kG 上的支撑 τ-倾斜模映到 kG 上的支撑倾斜模，其中 G 是有限群 G的正规子群，k 是特征为 $p>0$的代数闭域。自然地，我们对以下问题感兴趣。

问题 1.1. 从 kG-模到 kG-模的限制函子，何时会将映射从 the support τ-tilting modules over kG 映射到 kG上的那些模?

关于这个问题，在 [5], S. Breaz、A. Marcus 和 G. C. Modoi 于商群 G/G 为 p-素群（即素数 p 不整除因子群 G/G的阶）的情形下给出了肯定答案。因此，我们考虑 G/G 不一定是 p-素群的情形，并针对该问题得到了以下肯定答案。

定理 1.2（定理 3.4 和推论 3.5）。设 G 为有限群，G 为 G 的正规子群，M 为一个 相对 G- 投射支撑 τ-τ- 倾斜 kG- 模，且（M，P）为相应的支撑 τ-τ-倾斜对。若 满足 $\mathrm{Ind}_G^G\mathrm{Res}_G^G\tilde{M}\in\mathrm{add}\ \tilde{M}$，则 $\mathrm{Res}_G^G\tilde{M}$为支撑 τ-τ-倾斜 kG-模，且（$\mathrm{Res}_G^G\tilde{M}$，$\mathrm{Res}_G^G\tilde{P}$）为相应的支撑 τ-τ-倾斜对。此外，对于相对 G-投射的支撑 τ-τ-倾斜 kG-模 $\tilde{M}_1$和 $\tilde{M}_2$，若它们满足 $\mathrm{Ind}_G^G\mathrm{Res}_G^G\tilde{M}_i\in\mathrm{add}\ \tilde{M}_i$（$i=1$取 2 时），若 $\tilde{M}_1\geq\tilde{M}_2$属于 s$\tau$-tilt $k\tilde{G}$，则 $\mathrm{Res}_G^G\tilde{M}_1\geq\mathrm{Res}_G^G\tilde{M}_2$属于 s$\tau$-tilt kG。

*Mathematics Subject Classification (2020年). 20C20, 16G10.

†Keywords. 支撑 τ-倾斜模、有限群的块、诱导函子、限制函子

设 M 为一个 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-τ-倾斜 kG-模。第一作者证明了 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 是一个支撑 τ-τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模 [16, 定理 3。2]。我们关注由诱导函子 Ind G-不变支撑 τ-τ-倾斜 kG-模所成集合在映射 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 下的像是什么。因此，我们给出了定理 1.2的假设的等价条件，最后在下述定理中阐明了由 Ind 诱导的映射 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 的像是什么。

定理 1.3 (定理 3.8 和推论 3.9)。设 M 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模。则下列条件等价：

(1) $\tilde{M} =_{\mathrm{add}}$ 诱导 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$ 自某个 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 kG-模 M。(2) 诱导 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 限制 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{M} \in$ 加性闭包 $\tilde{M}$ 且 $\tilde{M}$ 相对 G-投射。(3) $S \otimes_k M \in$ 加性闭包 M 对每个简单 $k(G/G)$-模 S 均成立。

此外，记 $(\mathrm{s}\tau\text{-倾斜 } kG)^{\tilde{G}}$ 为由 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 kG-模组成的 sτ-倾斜 kG 的子集，记 $(\mathrm{s}\tau\text{-倾斜 } kG)^{\star}$ 为由满足上述等价条件的支撑 τ-倾斜 kG-模组成的 sτ-倾斜 kG 的子集，则诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 诱导出一个偏序集同构

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt } kG)^{\tilde{G}} &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{s}\tau\text{-tilt } k\tilde{G})^{\star}\\ M &\longmapsto \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M.\end{aligned}$$

长期以来，许多研究者对群代数上不可分解模的顶点进行了研究，例如，参见[6, 7, 8, 11, 14, 22]。另一方面，τ-刚性模是有限维代数上的重要模类，关于这类模已有大量研究。它们具有良好的性质，是表示论中的重要研究对象，例如，参见 [1, 4, 9, 10, 13]。因此，我们关注的问题之一是刻画群代数上不可分解的 τ-刚性模的顶点。作为定理1.3的进一步应用，我们刻画不可分解的τ-刚性模的顶点。

定理 1.4 （见定理3.14）。设 G 是一个有限群。那么，任意不可分解的 τ-刚性 kG-模的一个顶点包含在 p的西罗 G -子群中，当且仅当 G 有一个正规子群，其 p-指数为 G的真子群。

一个自然的问题是：对于群代数，我们是否也能得到定理的分块版本？我们尤其关心如何给出定理 1.2 和 1.3的分块版本。作为结果，我们得到了这些定理的分块版本。设 G 是有限群 G 的正规子群，B 是 kG的一个块。我们用 $I_{\tilde{G}}(B)$ 表示：$= \left\{ \tilde{g} \in \tilde{G} \,\middle|\, \tilde{g} B \tilde{g}^{-1} = B \right\}$ 在 B 中的惯性群 $\tilde{G}$。

定理 1.5 (见定理5.6)。设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG的一个块，B是 kG 的一个块，覆盖 B， β 是 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 中满足以下条件的块

$$\sum_{x \in [\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x 1_{\beta} x^{-1} = 1_{\tilde{B}}$$

以及 $\tilde{M}$一个支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模。若满足 $\beta\mathrm{Ind}^{I_G(B)}{}_G\,\mathrm{Res}^{I_G(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$并且 $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$是相对 G-投射的，那么我们有 $\mathrm{Res}^{I_G(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$是一个支撑 τ-倾斜 B-模。此外，若 (M, P) 是 B对应于 M的一个支撑 τ-倾斜对，则该对

$$(\mathrm{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \beta \mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)} \tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)} \beta \mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)} \tilde{P})$$

是 B对应于 $\mathrm{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$的一个支撑 τ-倾斜对。

定理 1.6 (参见定理 5.7 和推论 5.8)。设 G 是有限群 G的一个正规子群， B是 kG 的一个块， B 是覆盖 kG 的 B的一个块， β 是满足 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 的

$$\sum_{x \in [\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x 1_{\beta} x^{-1} = 1_{\tilde{B}}$$

和 M 一个支撑 τ-倾斜 B-模。则以下条件等价：

(1) 对某个 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的支撑 τ-倾斜 B-模 M，有 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$。(2) $\beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \mathrm{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G \beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}}(B)\, \tilde{M} \in \mathrm{add}\, \beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}}(B)\, \tilde{M}$，且 $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}}(B)\, \tilde{M}$是相对 G-投射的。

(3) 对每个单 $k(I_{\tilde{G}}(B)/G)$-模 S，有 $\beta(S \otimes_k \beta\mathrm{Res}^{G}_{I_{\tilde{G}}}(B)\, \tilde{M}) \in \mathrm{add}\, \beta\mathrm{Res}^{G}_{I_{\tilde{G}}}(B)$。

此外，记 (sτ-tilt $B)^{I_{\tilde{G}}(B)}$为由 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的支撑 τ-倾斜 B-模组成的 sτ-tilt B 子集，记 (sτ-tilt $B)^{\star\star\star}$为由满足上述等价条件的支撑 τ-倾斜 B-模组成的 sτ-tilt B 子集，则函子 $\tilde{B}$诱导$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 诱导出一个偏序集同构

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, B)^{I_{\tilde{G}}(B)} &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, \tilde{B})^{\star\star\star}\\ M &\longmapsto \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M.\end{aligned}$$

我们特别关注 G 在 G 中的指数是 p-次幂的情形。事实上，在某些假设下，预计块 B 上的 kG 倾斜复形能够给出覆盖 B 的 kG 唯一块 B （例如，参见 [12, 19, 25]）。关于这一点，作者在 [18]中证明了以下结果。

定理1.7（[18, 定理1.2]）。设 G 是有限群 G 的正规子群，且其在 G 中的指数为 p-次幂； B 是 kG的一个块， B 是覆盖 B的 kG 的唯一块。假设以下两个条件成立:

(1) 任意不可分解的 B-模都是 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的。

(2) 基本支撑 τ-倾斜 B-模的同构类集合是有限集。

于是，诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 在偏序集之间诱导出一个同构：从 sτ-tilt B 到 sτ-tilt $\tilde{B}$。

此定理可应用于块 B 具有循环缺陷群的情形，但这两个条件限制了它的适用范围。例如，当 $p = 2$, G 是 4 次交错群 A_4 且 G 是 4 次对称群 S_4 时，此定理无法应用，因为非平凡的简单 kA_4-模并非 S_4-不变。事实上，sτ-tilt kA_4 与 sτ-tilt kS_4不同构，因为简单 kA_4-模的同构类数为三，而 kS_4 的同构类数为二。然而，我们想知道诱导函子是否能在这两个对象的特殊子集之间建立某种良好关系。最后，作为定理 1.6 的一个应用，我们得到了以下定理，它可应用于 kA_4 和 kS_4的情形。以下定理是定理1.7的一个重要推广，并使我们能够解释 [16, 例 3.9] 中出现的现象（见例 3.11）。

定理 1.8（见定理5.9）。设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG 的一个块，且 $\tilde{B}$ 是覆盖 B的 $k\tilde{G}$ 的一个块。若商群 $I_{\tilde{G}}(B)/G$ 是一个 p-群，则函子 诱导$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 在偏序集 (sτ-倾斜 $B)^{I_{\tilde{G}}(B)}$ 与 sτ-倾斜 $\tilde{B}$之间诱导一个同构，其中 (sτ-倾斜 $B)^{I_{\tilde{G}}(B)}$ 是由 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变支撑 τ-倾斜 B-模组成的 sτ-倾斜 B的子集。

本文中，我们固定以下记号:

设 k 是特征为 $p > 0$的代数闭域。代数是指 k-代数。对于有限维代数 Λ， Λ-模是指有限维左 Λ-模。对于一个 Λ-模 M，我们将 M的 Auslander-Reiten 平移记为 τM。当 Λ是对称代数时， τM同构于 $\Omega^2 M$。我们将由M的有限个副本的有限直和的所有直和项构成的范畴记为 add M。对于 Λ-模 M和 N，若 add M =add N，则记作 $M =_{\mathrm{add}} N$。这一关系是等价关系。我们将等价关系 $=_{\mathrm{add}}$下支撑 τ-倾斜 Λ-模的等价类集合记为 sτ-倾斜 Λ。

设 G 是一个有限群， H 是 G 的一个子群。我们将从 kG-模到 kH-模的限制函子记为 Res_H^G，将从 kH-模到 kG-模的诱导函子 $kG \otimes_{kH} -$ 记为 Ind_H^G。我们将平凡的 kG-模记为 k_G。

设 G 为有限群， G 为 G的正规子群。我们用 $[G/G]$表示 G 在 G 中的一组陪集代表元。对于一个 kG-模M 和 $\tilde{g} \in G$，我们定义一个 kG-模 $\tilde{g}M$，其作为集合由符号 $\tilde{g}m$ 组成，其中 $m \in M$；其 kG-模结构定义为：对于 m、 $m' \in M$、 $g \in G$和 $\lambda \in k$，有 $\tilde{g}m + \tilde{g}m' := \tilde{g}(m + m')$ $g(\tilde{g}m) := \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}g\tilde{g}m)$以及 $\lambda(\tilde{g}m) = \tilde{g}(\lambda m)$。对于一个 kG-模 M，如果对于任意 $\tilde{g} \in G$， M都与 $\tilde{g}M$ 同构，则称 M 为 G- 不变的。

2 预备知识

本节给出一些模表示论中的基本事实，这些事实有助于证明我们的结果。

命题 2.1 (参见 [2, 引理 8.5，引理 8.6])。设 G 是一个有限群，K 是 G的子群，H 是 K的子群。对于任意 kG-模 U 和 kH-模 V，下列结论成立：

(1) $\mathrm{Res}_H^G U \cong \mathrm{Res}_H^K \mathrm{Res}_K^G U$。(2) 诱导$_H^G V \cong$诱导$_K^G$诱导$_H^K V$。(3) 诱导$_H^G(V \otimes_k \mathrm{Res}_H^G U) \cong$(诱导$_H^G V) \otimes_k U$。(4) $\mathrm{Hom}_{kG}(U,$ 诱导$_H^G V) \cong \mathrm{Hom}_{kH}(\mathrm{Res}_H^G U, V)$。(5) $\mathrm{Hom}_{kG}($诱导$_H^G V, U) \cong \mathrm{Hom}_{kH}(V, \mathrm{Res}_H^G U)$。(6) 函子 Res_H^G 和诱导$_H^G$ 将自由模（投射模）映射为自由模（分别映射为投射模）。

在有限群的模表示论中，Mackey 分解公式广为人知且重要。我们回顾正规子群的 Mackey 分解公式。

命题 2.2（参见 [2, 引理 8.7]）。设 G 是有限群 G 的正规子群，且 M 是一个kG-模。则以下作为 kG-模的同构成立：

$$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M \cong \bigoplus_{x \in [\tilde{G}/G]} xM.$$

以下称为 Eckmann-Shapiro 引理。

引理 2.3（参见 [21, 命题 2.20.7]）。设 H 是有限群 G的有限子群，M 是一个 kH-模，N 是一个 kG-模。那么对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在一个 k-向量空间的同构：

$$\mathrm{Ext}_{kH}^n(M, \mathrm{Res}_H^G N) \cong \mathrm{Ext}_{kG}^n(\mathrm{Ind}_H^G M, N)$$

下面的引理是对 [16, 引理 3.1] 的细化，该引理要求 kG-模具有 G-不变性。

引理 2.4。设 G 是 G 的正规子群，且 M 是一个 kG-模。则有以下结论：

（1）$\mathrm{Ind}_G^G(\Omega M) \cong \Omega(\mathrm{Ind}_G^G M)$。（2）$\mathrm{Ind}_G^G(\tau M) \cong \tau(\mathrm{Ind}_G^G M)$。

证明。只需证明结论（1）成立，因为 $\tau \cong \Omega^2$ 对于对称代数成立。存在一个射影 kG-模 Q 使得 $\mathrm{Ind}_G^G(\Omega M) \cong \Omega(\mathrm{Ind}_G^G M) \oplus Q$ 且 $\mathrm{Ind}_G^G P(M) \cong P(\mathrm{Ind}_G^G M) \oplus Q$。因此，我们有

$$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\Omega M) \cong \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\Omega(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M) \oplus \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} Q,$$

且左边同构于 $\bigoplus_{x \in [\tilde{G}/G]} x\Omega M$，根据命题 2.2。然而，每个 $x\Omega M$ 都没有投射直和项，而限制模 $\mathrm{Res}_G^G Q$ 是一个投射 kG-模，根据命题2.1 (6)，这意味着 $Q = 0$。因此，我们得出 $\mathrm{Ind}_G^G(\Omega M) \cong \Omega(\mathrm{Ind}_G^G M)$。

□

引理 2.5. 设 G 是有限群 $\tilde{G}$ 的正规子群，且 $\tilde{M}$ 是一个 $k\tilde{G}$-模。那么 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是一个 G-不变的 kG-模。

证明. 任取 $\tilde{g} \in G$。我们考虑映射

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} &\longrightarrow \tilde{g}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \\ m &\longmapsto \tilde{g}m. \end{aligned}$$

显然，这个映射是线性且双射的。我们只需证明该映射是 kG-同态，但对于任意 $g \in G$ 和 $m \in \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$，有

$$f(gm) = \tilde{g}gm = \tilde{g}g\tilde{g}^{-1}\tilde{g}m = g \cdot \tilde{g}m = g \cdot f(m).$$

□

3 主要定理

本节给出第1 节陈述的定理及其证明。在本节中， G 表示有限群，而 G 是 $\tilde{G}$的正规子群。

首先，我们考察刚性模和 τ-刚性模的限制模。设 Λ是有限维代数。回顾一下，若 Λ-模 M满足 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,M) = 0$（分别满足 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\tau M) = 0$），则称其为刚性模（分别称为 τ-刚性模）。值得注意的是，由 Auslander-Reiten 对偶 $\mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) \cong D\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y,\tau X)$， τ-刚性模是刚性模。

引理3.1. 设 $\tilde{M}$ 是一个 $k\tilde{G}$-模，且满足 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$。则有以下结论：

(1) 若 $\tilde{M}$ 是刚性的 $k\tilde{G}$-模，则限制模 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是刚性的 kG-模。(2) 若 $\tilde{M}$是 τ-刚性的 $k\tilde{G}$-模，则限制模 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$是 τ-刚性的 kG-模

证明。 (1)设 M 是刚性的 kG-模。由引理 2.3，可得

$$\mathrm{Ext}^1_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \cong \mathrm{Ext}^1_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}).$$

根据 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$ 这一假设以及 $\tilde{M}$的刚性，可知右端为0。因此，$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是刚性的 kG-模。

(2) 设 $\tilde{M}$ 是 τ-刚性的 $k\tilde{G}$-模。于是可得

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \tau\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\tau\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \tau\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}),$$

其中最后一个同构来自引理 2.4。根据 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$ 和 $\tilde{M}$的 τ-刚性，我们有 $\mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \tau\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) = 0$，这意味着 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是一个 τ-刚性kG-模。 □

对于有限群 H 及其子群 K，我们回顾一下：如果 M 是 $\mathrm{Ind}_K^H\mathrm{Res}_K^H M$的直和项，则 kH-模 M 是相对 K-投射的。

引理 3.2. 设 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的 $k\tilde{G}$-模。则 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\Omega\,\tilde{M}) \cong \Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})$。特别地，有 $\tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \cong \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\tau\tilde{M})$。

证明。存在一个投射的 kG-模 P，使得 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\Omega\,\tilde{M}) \cong \Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \oplus P$。因此，我们只需证明 $P = 0$。当 M 是一个投射的 kG-模时，结论显然成立。

我们可以假设 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的（例如参见[2, 命题2.2]）。由于 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的，ΩM 是 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\Omega\,\tilde{M}$的一个直和项。另一方面，由同构 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\Omega\,\tilde{M} \cong \Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \oplus P$，我们有

$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\Omega\ \tilde{M} \cong \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) \oplus \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}P$。这里，由于根据命题$^{\tilde{G}}_{G}P$是投射 $k\tilde{G}$-模（命题-2.1 (6) 和 ΩM 由于 的自内射性而没有投射直和项 kG，我们有 ΩM 是 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}))$ 的一个直和项。因此，$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\Omega\ \tilde{M})$ 是

$$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}\Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})$$

根据命题 2.2，这意味着 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\Omega\ \tilde{M})$ 没有投射直和项，因为根据 $\tilde{g}\Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})$的自内射性，每个 kG都没有投射直和项。因此，我们得出 $P = 0$ 以及 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\Omega\ \tilde{M}) \cong \Omega(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})$。

后一个断言源于这样一个事实：$\tau \cong \Omega^2$ ，以及 $\Omega\ \tilde{M}$ 的相对 G-投射性。 □

以下内容对于定理3.4的证明至关重要。

命题 3.3 ([1, 推论 2。13]). 设 Λ 为一个有限维代数。对于一个 τ-刚性对 (M, P)，以下条件等价： Λ

(1) (M, P) 是 Λ 的支撑 τ-倾斜对。

(2) 若 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau X) = 0$、$\mathrm{Hom}_\Lambda(X, \tau M) = 0$且 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, X) = 0$，则 $X \in \mathrm{add}\ M$。

定理 3.4. 设 $\tilde{M}$是一个 support τ-tilting $k\tilde{G}$-模。若 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$ 成立，且 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的，则有 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$是一个 support τ-tilting kG-模。此外，若 $(\tilde{M}, \tilde{P})$ 是 $k\tilde{G}$对应于 $\tilde{M}$的 support τ-tilting 对，则 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 kG 对应于 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$的 support τ-tilting 对。

证明. 设 (M, P) 是与 support τ-tilting kG-模M对应的 kG的 support τ-tilting 对。

首先，我们证明 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 τ-刚性对。 kG由于 $k\tilde{G}$-模 $\tilde{M}$是一个 support τ-倾斜模，因此它是一个 τ-刚性模。因此，根据引理 3.1，有 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$是一个 τ-刚性 $k\tilde{G}$-模。另一方面，根据命题2.1 可得

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{P}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}).$$

现在，根据假设 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$，我们有 $\mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) = 0$，因为 $(\tilde{M}, \tilde{P})$ 是 $k\tilde{G}$ 的 support τ-tilting pair。因此，我们得出 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 kG 的 τ-rigid pair。

接下来，我们证明 τ-rigid pair $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 kG 的 support τ-tilting pair。我们证明，在以下假设下$X \in \mathrm{add}\ \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$

$$\mathrm{Hom}_{kG}(X, \tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) = \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \tau X) = \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, X) = 0,$$

这意味着，数对 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是一个支撑 τ-倾斜对，适用于 kG，由命题 3.3可知。在这些假设下，我们有如下结论：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X, \tau\tilde{M}) &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(X, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\tau\tilde{M})) && \text{(Proposition 2.1)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{kG}(X, \tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) && \text{(Lemma 3.2)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \tau(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X)) &\cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\tau X)) && \text{(Lemma 2.4)}\\
&\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \tau X) && \text{(Proposition 2.1)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{P}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} X) &\cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{P}, X) \qquad \text{(命题 2.1)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

根据这三个同构以及 (M, P) 是一个支撑 τ-倾斜对，适用于 kG这一事实，应用命题 3.3，可得 $\mathrm{Ind}_G^G X \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$。此外，根据命 X 题 $_G^G$，$_G^G X$ 是 Res_Ind 的直和项。因此，我们有 $X \in \mathrm{add}\,\mathrm{Res}_G^G \tilde{M}$。 □

推论 3.5. 设 M_1 和 M_2 是相对 G-投射的支撑 τ-倾斜 kG-模，并满足诱导$_G^G$限制$_G^G \tilde{M}_i \in$加法闭包 $\tilde{M}_i$对 $i = 1, 2$ 成立。那么 $\tilde{M}_1 \geq \tilde{M}_2$属于 s$\tau$-倾斜 $k\tilde{G}$ 意味着 $\mathrm{Res}_G^G \tilde{M}_1 \geq \mathrm{Res}_G^G \tilde{M}_2$属于 s$\tau$-倾斜 kG。

证明。 该结论可由定理 3.4 以及函子 Res 的正合性$_G^G$立即得到。 □

我们考察定理 3.4 的假设的等价条件。首先，我们给出以下引理，它们不仅适用于刚性 kG-模，也适用于支撑 τ-倾斜 kG-模。

引理 3.6. 设 M 是一个刚性 kG-模，L 是一个 kG-模。若对 L的任意合成因子 S $S \otimes_k M \in$ 加法闭包 M 对成立，则以下作为 kG-模的同构成立：

$$L \otimes_k \tilde{M} \cong \bigoplus_S S \otimes_k \tilde{M},$$

其中 S 遍历 L的所有合成因子。

证明。设 L 是任意的 kG-模， M 是满足以下条件的刚性 kG-模：

$$S \otimes_k \tilde{M} \in \mathrm{add}\,\tilde{M} \text{ for any composition factor of } S \text{ of } L. \tag{3.1}$$

我们对 L的合成长度 $\ell(L)$ 使用归纳法。若 $\ell(L) = 1$，则无需证明。因此，我们假设 $\ell(L) \geq 2$，并假设对任意满足 $\ell(L') < \ell(L)$ 的 kG-模 L'，命题均成立。设T 是 L的一个单子模。我们得到正合列

$$0 \longrightarrow T \otimes_k \tilde{M} \longrightarrow L \otimes_k \tilde{M} \longrightarrow L/T \otimes_k \tilde{M} \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

将正合函子 $- \otimes_k M$ 作用于正合列后得到

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow L \longrightarrow L/T \longrightarrow 0.$$

由 M的刚性、假设（3.1）以及本归纳法的假设，正合列（3.2）分裂，因此我们得到

$$L \otimes_k \tilde{M} \cong T \otimes_k \tilde{M} \oplus L/T \otimes_k \tilde{M} \cong T \otimes_k \tilde{M} \oplus \bigoplus_{S'} S' \otimes_k \tilde{M} \cong \bigoplus_S S \otimes_k \tilde{M},$$

其中 S' 和 S 分别遍历 L/T 和 L的所有合成因子。 □

引理 3.7. 设 M 是一个刚性 kG-模。那么以下条件等价：

(1) $\mathrm{Ind}_G^G \mathrm{Res}_G^G \tilde{M} \in$add $\tilde{M}$ 和 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的。

(2) 对每个简单的 $k(G/G)$-模 S，都有 $S \otimes_k M \in$ add M。

证明。 由命题2.1，可得

$$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{M} \cong \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(k_G \otimes_k \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{M}) \cong (\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} k_G) \otimes_k \tilde{M} \cong k(\tilde{G}/G) \otimes_k \tilde{M}.$$

(1) $\Rightarrow$ (2)。根据假设，我们有 诱导$^G_{\tilde{G}}$限制$^{\tilde{G}}_G\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{M}$。因此，由命题 2.1 可得

$$\begin{aligned} S \otimes_k \tilde{M} &=_{\mathrm{add}} S \otimes_k \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \\ &\cong \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}S \otimes_k \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \\ &\cong \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(k_G^{\oplus \dim_k S} \otimes_k \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \\ &=_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \\ &=_{\mathrm{add}} \tilde{M}, \end{aligned}$$

对任意简单 $k(G/G)$-模 S，这意味着 $S \otimes_k M \in \mathrm{add}\ M$。(2) $\Rightarrow$ (1)。由引理3.6，可得

$$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \cong k(\tilde{G}/G) \otimes_k \tilde{M} \cong \bigoplus_S S \otimes_k \tilde{M},$$

其中 S 遍历 kG-模 $k(G/G)$ 的所有合成因子。因此，该假设意味着 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$。此外，由于平凡的 $k\tilde{G}$-模 $k_{\tilde{G}}$ 是 $k(\tilde{G}/G)$ 的一个合成因子，我们可知，模 $\tilde{M}$ 是 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 的一个直和项，也就是说，$\tilde{M}$ 是一个相对于 G- kG的投射模。

□

我们给出定理 3.4 中假设的等价条件。

定理 3.8。 设 M 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模。则以下条件等价:

(1) $\tilde{M} =_{\mathrm{add}}$对某个 $\tilde{G}$-不变的支撑 τ-倾斜 kG-模 M，有$^G_{\tilde{G}}M$诱导。

(2) $^G_{\tilde{G}}$诱导$^{\tilde{G}}_G\tilde{M} \in$限制 $\tilde{M}$ 直和项 $\tilde{M}$，且 G是相对 G-投射的。(3) 对每个简单 $k(G/G)$-模 S，有 $S \otimes_k M \in$ 直和项 M。

证明。 (1) $\Rightarrow$(2)。假设 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}}$诱导$^G_{\tilde{G}}M$对某个 $\tilde{G}$-不变的支撑 τ-倾斜 kG-模 M。那么显然 M 是相对 G-投射的 kG-模（见 [2, 3.9.1]），并且根据命题2.2，我们有

$$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \cong \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M) \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \in \mathrm{add}\,\tilde{M}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设诱导$^G_{\tilde{G}}$限制$^{\tilde{G}}_G\tilde{M} \in$ 直和项 $\tilde{M}$，且 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的。令 $M :=$ 限制$^{\tilde{G}}_G\tilde{M}$。于是由引理 2.5 和定理 3.4，M 是一个 G-不变的支撑 τ-倾斜 kG-模。我们证明 诱导$^G_{\tilde{G}}M =_{\mathrm{add}} \tilde{M}$，即 add(诱导$^G_{\tilde{G}}M$) $=$add $\tilde{M}$。根据假设诱导$^G_{\tilde{G}}$限制$^{\tilde{G}}_G\tilde{M} \in$直和项 $\tilde{M}$，我们有add(诱导$^G_{\tilde{G}}M$) $\subset$add $\tilde{M}$。另一方面，由于 $\tilde{M}$是相对 G-投射的，$\tilde{M}$是诱导$^G_{\tilde{G}}$限制$^{\tilde{G}}_G\tilde{M} =$ 诱导$^G_{\tilde{G}}M$的一个直和项。因此，我们有 add $\tilde{M} \subset$add(诱导$^G_{\tilde{G}}M$)。

(2) $\Leftrightarrow$ (3)。由于支撑 τ-倾斜 kG-模是刚性的 kG-模，因此由引理 3.7可得该等价关系。

□

推论 3.9。 设 (sτ-倾斜 $kG)^{\tilde{G}}$为 sτ-倾斜 kG中由 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 kG-模组成的子集，而 (sτ-倾斜 $kG)^\star$为 sτ-倾斜 kG中由满足定理 3.8等价条件的支撑 τ-倾斜 kG-模组成的子集。那么诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 诱导出一个偏序集同构

$$\begin{aligned} (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, kG)^{\tilde{G}} &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G})^\star \\ M &\longmapsto \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M. \end{aligned} \tag{3.3}$$

特别地，诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 诱导出偏序集单态射

$$\begin{aligned} (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, kG)^{\tilde{G}} &\longrightarrow \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G} \\ M &\longmapsto \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M. \end{aligned} \tag{3.4}$$

证明。由 [16, 定理 3。2], 映射 (3.4) 定义良好。此外，由于函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$的正合性，若 $N \leq M$属于 sτ-tilt kG，则 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} N \leq \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$属于 s$\tau$-tilt $k\tilde{G}$ 对任意支撑 τ-倾斜 kG-模N 及 M。因此，映射 (3.4) 是偏序集同态。

我们证明映射 (3.4) 限制后得到双射 (3.3)。根据 (sτ-倾斜 kG)* 的定义及上述论证，映射 (3.3) 定义良好，且是偏序集同态。对于任意满足 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \tilde{M}$ 的相对 G-投射-支撑 τ-倾斜 $k\tilde{G}$-模 $\tilde{M}$，由定理 3.8，可取一个满足 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M =_{\mathrm{add}} \tilde{M}$ 的 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 kG-模 M。因此，该映射是满射。再假设两个 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 kG-模 M和 N满足 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M =_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} N$。那么我们有

$$\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M \cong \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M =_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} N \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}N$$

根据命题 2.2，这意味着 $M =_{\mathrm{add}} N$ 根据 G<style id='12'}-不变性， M 和 N。因此，该映射是单射。这就完成了第一个断言的证明。

后一个断言立即由以下事实得到：映射（3.4）是偏序集同构（3.3）与包含映射（sτ-tilt kG）* sτ-tilt kG.的复合。 $\hookrightarrow$ □

作为定理3.8的一个应用，我们考虑 G/G 是一个 p-群的情形。

定理 3.10. 设 G 为一个有限群，G 为 G 的正规子群，且 p的指数为 G的幂。则诱导函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$在（s$\tau$-tilt kG）$^{\tilde{G}}$与 sτ-tilt $k\tilde{G}$之间诱导出一个偏序集同构，其中（sτ-tilt kG）$^{\tilde{G}}$是由 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 kG-模组成的 sτ-tilt kG的子集。

证明。根据推论 3.9，映射（3.3）是一个偏序集同构。我们只需证明（sτ-tilt kG）$^\star =$ sτ-tilt kG。显然，（sτ-tilt kG）$^\star \subset$sτ-tilt kG。为证明反向包含，任取一个支撑 τ-倾斜 kG-模 M。由于 G/G是一个 p-群，唯一的简单 $k(G/G)$-模是平凡的 $k(G/G)$-模。因此，在我们的情形下，定理 3.8 的条件（3）得到满足，因为 $k_{\tilde{G}/G}\otimes_k M$同构于 M。所以，我们得到 sτ-tilt $kG \subset$（sτ-tilt kG）*。 □

下面的例子可见于 [16]。

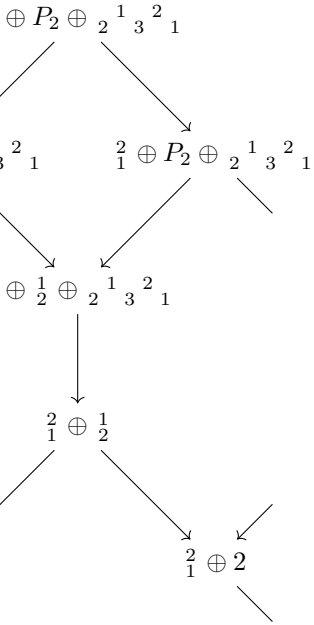
例 3.11。设 k 是特征为 $p = 2$的代数闭域。考虑如下情形：其中 G 是交错群 A_4，其次数为 4；而 G 是对称群 S_4，其次数为 4。代数kA_4 和 kS_4 分别是与图 1(a) 和图 1(b)中的布劳尔图相关联的布劳尔图代数：



(a) kA_4的布劳尔图　　(b) kS_4的布劳尔图

图 1：布劳尔图

Now 我们绘制偏序集 sτ-tilt kA_4 的哈斯图 $\mathcal{H}$(sτ-tilt kA_4) 如下 s:


$\oplus P_2 \oplus {}_2{}^1{}_3{}^2{}_1$
${}^2_1 \oplus P_2 \oplus {}_2{}^1{}_3{}^2{}_1$
$\oplus {}^1_2 \oplus {}_2{}^1{}_3{}^2{}_1$
${}^2_1 \oplus {}^1_2$
${}^2_1 \oplus 2$

图中封闭的支撑 τ-倾斜模2中的都是在 τ作用下的不变支撑 S_4-倾斜模。接下来，我们绘制偏序集 s $\mathcal{H}$(sτ-tilt kS_4) 的哈斯图τ-tilt kS_4 如下：

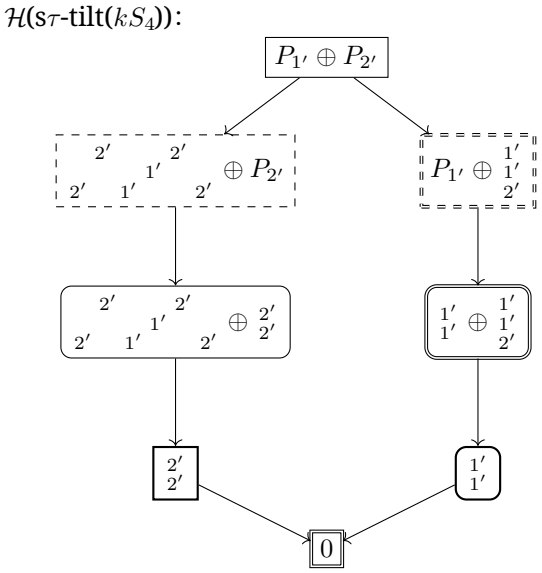


图 3：sτ-tilt kS_4 的哈斯图

函子 诱导$^{S_4}_{A_4}$ 将图 $S_4$2 中每个不变支撑 τ-倾斜 kA_4-模映射到图3中对应的模，且对应于同一个方块。

注 3.12. 设 (Ind $^{\tilde{G}}_{G}$)$^{-1}$(sτ-tilt $k\tilde{G}$) := $\{M \in$ sτ-tilt $kG \mid$ Ind $^{\tilde{G}}_{G}M \in$ sτ-tilt $k\tilde{G}\}$。那么 (sτ-tilt kG) $^{\tilde{G}}$包含于 (Ind$^{G}_{\tilde{G}}$)$^{-1}$(sτ-tilt $k\tilde{G}$) 中，这是由定理 3.2] 得出的。另一方面，二者通常并不相同。此外，尽管偏序集同态

$$\begin{aligned}(\text{s}\tau\text{-tilt}\, kG)^{\tilde{G}} &\longrightarrow \text{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G}\\ M &\longmapsto \text{Ind}^{\tilde{G}}_{G}M\end{aligned}$$

根据推论3.9，是单态射，而

$$\begin{aligned}(\text{Ind}^{\tilde{G}}_{G})^{-1}(\text{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G}) &\longrightarrow \text{s}\tau\text{-tilt}\, k\tilde{G}\\ M &\longmapsto \text{Ind}^{\tilde{G}}_{G}M\end{aligned}$$

一般而言不是单态射。

例如，对于 $p = 2$，4 次交错群 A_4 和 4 次对称群 S_4，kA_4-模 $M := 1 \oplus \frac{1}{2}$ 是一个支撑 τ-倾斜 kA_4-模，其中 1 表示平凡 kA_4-模，2 表示非平凡 kA_4-模。此外，对于 $\sigma \in S_4 \setminus A_4$，有 $\sigma M \cong 1 \oplus \frac{1}{3}$，其中 3 表示与 2 不同构的非平凡单 kA_4-模。因此，我们有 $M \notin$ (sτ-tilt kA_4)^{S_4}。然而，Ind$^{S_4}_{A_4}M \cong \frac{1'}{1'} \oplus \frac{1'}{\frac{1'}{2'}}$ 是一个支撑 τ-倾斜 kS_4-模，其中 $1'$ 表示平凡 kS_4-模，$2'$ 表示维数 2 的单 kS_4-模。这意味着 $M \in$(Ind$^{S_4}_{A_4}$)$^{-1}$(sτ-tilt kS_4)。此外，对于 $N := 1 \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} \in$(s$\tau$-tilt kA_4)^{S_4}，有 Ind $^{S_4}_{A_4}N \cong \frac{1'}{1'} \oplus \frac{1'}{\frac{1'}{2'}} \oplus \frac{1'}{\frac{1'}{2'}} =_{\text{add}} \frac{1'}{1'} \oplus \frac{1'}{\frac{1'}{2'}} (=_{\text{add}} \text{Ind}^{S_4}_{A_4}M)$。因此，映射

$$\begin{aligned}(\text{Ind}^{S_4}_{A_4})^{-1}(\text{s}\tau\text{-tilt}\, kS_4) &\longrightarrow \text{s}\tau\text{-tilt}\, kS_4\\ M &\longmapsto \text{Ind}^{S_4}_{A_4}M\end{aligned}$$

不是单态射。

在本节末尾，我们讨论不可分解 τ-刚性 kG-模的顶点的一个特征。

引理 3.13. 设 G 是一个有限群。那么，平凡的 kG-模 $k_{\tilde{G}}$ 是 τ-刚性的，当且仅当 G 没有指数为 p的正规子群。

证明。 根据 [20, 第 I 章，推论 10。13], 存在一个 G 指数为 p 的正规子群，当且仅当 $\mathrm{Ext}^1_{k\tilde{G}}(k_{\tilde{G}}, k_{\tilde{G}}) \neq 0$。此外，根据平凡 $k\tilde{G}$- 模的单性及 Auslander-Reiten 对偶，我们有

$$\mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(k_{\tilde{G}}, \tau k_{\tilde{G}}) \cong \overline{\mathrm{Hom}}_{k\tilde{G}}(k_{\tilde{G}}, \tau k_{\tilde{G}}) \cong D\,\mathrm{Ext}^1_{k\tilde{G}}(k_{\tilde{G}}, k_{\tilde{G}}).$$

因此，我们得到了所需结果。 □

定理 3.14. 设 G 是一个有限群。那么，任意不可分解的 τ-刚性 kG-模都有一个顶点恰好包含于 G 的某个 Sylow p-子群中，当且仅当 G 有一个指数为 p的幂的真正规子群。

证明。 假设 G 没有指数为 p的幂的真正规子群。那么根据引理 3.13，平凡的 kG-模（其顶点是 p的一个 Sylow G-子群）是一个 τ-刚性模。反过来，假设 G 有一个指数为 p的幂的正规子群。在这种情况下，存在一个正规子群 G，其为 G 的指数为 p。令 X 为任意一个 τ-刚性 kG-模。根据定理 2.10], ， X 是一个支撑 τ-倾斜 kG-模 M 的直和项，也就是说， X 相对 G投射。此外，存在一个 $\tilde{G}$-不变的支撑 τ-倾斜 kG-模 M，使得 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$，根据定理 3.10。因此， $\tilde{X}$ 是 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}} M$的一个直和项。因此， $\tilde{X}$ 的一个顶点包含于 的一个 Sylow p-子群中，且G 真包含于其中。 □

4 块版本主要结果的预备知识

我们回顾群代数的块的定义。令 G 为一个有限群。群代数 kG 有唯一分解

$$kG = B_0 \times \cdots \times B_l$$

分解为不可分解代数的直积。我们称每个不可分解的直积因子 B_i 为 kG 的一个块，并将上述分解称为分块分解。注意，任意块B_i 都是 kG的一个双边理想。

对于任意不可分解的 kG-模 U，存在唯一的 kG 的块 B_i，使得 $U = B_i U$ 且对于所有 $j \neq i$都有$B_j U = 0$。于是我们称 U 属于块 B_i，或简称 U 是一个 B_i-模。我们用 $B_0(kG)$表示 kG的主分块，其中包含平凡的 kG-模 k_G。

设 G 是有限群的一个正规子群 $\tilde{G}$，B 是 kG的一个块，并且 $\tilde{B}$ 是 k的一个块 $\tilde{G}$。我们称 B覆盖 $\tilde{B}$（或称 B 被 $\tilde{B}$覆盖），当且仅当 $1_B 1_{\tilde{B}} \neq 0$，其中 1_B和 $1_{\tilde{B}}$分别表示 B 和 $\tilde{B}$的单位元。

命题 4.1 （参见[2, 定理 15.1，引理 15.3]）。使用上述记号，以下条件等价:

(1) 块 B 覆盖 $\tilde{B}$。(2) 存在非零的 $\tilde{B}$-模 $\tilde{U}$，使得 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{U}$ 有一个非零直和项属于 B。(3) 对任意非零的 $\tilde{B}$-模 $\tilde{U}$，$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{U}$ 都有一个非零直和项属于 B。(4) 对任意非零的 $\tilde{B}$-模 $\tilde{U}$ 及其 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{U}$的任一不可分解直和项 V，存在 $\tilde{g} \in \tilde{G}$，使得 V 属于块 $\tilde{g} B \tilde{g}^{-1}$。(5) 块 B 是作为 (kG, kG)-双模的 B 的一个直和项。(6) 块 B 是作为 (kG, kG)-双模的 $kGBG$ 的一个直和项。

我们用 $I_{\tilde{G}}(B)$ 表示 B 在 G中的惯性群，即

$$I_{\tilde{G}}(B) := \left\{ \tilde{g} \in \tilde{G} \;\middle|\; \tilde{g} B \tilde{g}^{-1} = B \right\}.$$

备注4.2. 对于 kG 的一个块 B 和 kG的一个块 B，块 B 仅覆盖 B 当且仅当$I_{\tilde{G}}(B) = \tilde{G}$，由 [2, 定理 15.1 (1)]可知。由于 $\mathrm{Res}_G^G k_{\tilde{G}} \cong k_G$，根据命题 4.1 (1)、(3) 的等价性，$kG$ 的主分块 $B_0(kG)$ 是被 kG 的主分块 $B_0(kG)$ 覆盖的唯一 kG 块。因此，我们有 $I_{\tilde{G}}(B_0(kG)) = G$。

命题 4.3. 设 G 是有限群 G的正规子群，B 是 kG 的一个块，且 U 是一个不可分解的 B-模。则有以下结论：

(1) 对于覆盖块 B的 $k\tilde{G}$ 的一个块 $\tilde{B}$，模 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U$ 有一个与 U同构的直和项。特别地，$\tilde{B}$上的 $\tilde{B}$-模 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U$ 非零。

(2) $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U$ 的任一不可分解直和项 $\tilde{V}$ 都属于覆盖 B的 $k\tilde{G}$ 的某个块。

证明。设 U 是一个不可分解的 B-模。根据命题4.1 (1)、(5)的等价性，块B有一个直和项 B作为一个 (kG, kG)-双模。因此，存在一个 (kG, kG)-双模 B' 使得 $B \cong B \oplus B'$ 作为一个 (kG, kG)-双模。因此，我们有

$$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U \cong \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{B}(k\tilde{G}\otimes_{kG}U) \cong \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{B}\otimes_{kG}U \cong (B\oplus B')\otimes_{kG}U \cong U\oplus(B'\otimes_{kG}U),$$

这证明了(1)。

设 $\tilde{V}$ 是 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U$ 的一个不可分解直和项，且属于 $\tilde{A}$ 的一个块 $k\tilde{G}$。由于限制模 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{V}$是 kG-模 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U$的一个直和项，根据命题2.2 以及命题 4.1 (1)、(2)、(4)中的等价关系可知，块 $\tilde{A}$覆盖 B。因此，我们得到 (2)。 □

以下是 [23, 推论 5.56] （或 [24, 推论 9.96]）的推广。

命题 4.4。设 G 是有限群 G 的一个正规子群，B 是 kG的一个块。若存在一个不可分解的 B-模 X，使得 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$ 是一个不可分解的 $k\tilde{G}$-模，则存在唯一一个覆盖 B的 kG 的块。

证明。设 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 是覆盖 B的 $k\tilde{G}$ 块。根据命题 4.3 (1)，模 $\tilde{A}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$ 和 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$ 是不可分解的 $k\tilde{G}$-模 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$ 的非零直和项。因此，由 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$的不可分解性可得 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X \cong \tilde{A}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X \cong \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$。由于非零的 $k\tilde{G}$-模$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$ 属于块 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$，因此可得 $\tilde{A} = \tilde{B}$。 □

推论 4.5 (参见 [23, 推论 5.5。6] 或 [24, 推论 9.9。6])。若 G/G 是一个 p-群，则存在唯一一个 kG 覆盖 B的块。

证明。 这立即由命题 4.4 和 Green 不可分解定理得出（例如，参见 [2, 11, 23]）。 □

命题 4.6（参见 [21, 定理 6.8.3] 或 [23, 定理 5.5.10，定理 5.5.12]）。设 G 是有限群 G 的正规子群，且 B 是 kG的一个块。则有以下结论：

(1) 对于 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 中覆盖 B的任意块 β，存在 kG 的一个块 B，使得

$$\sum_{x\in[\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x1_\beta x^{-1} = 1_{\tilde{B}},$$

于是 B 覆盖 B。此外，将 β 对应到 B 的对应关系在 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 中覆盖 B 的块与 kG 中覆盖 B的块之间诱导出一个双射。

(2) 若 B 在 β 下对应（(1)中的双射），则诱导函子

$$\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\colon kI_{\tilde{G}}(B)\text{-mod} \longrightarrow k\tilde{G}\text{-mod}$$

限制为 Morita 等价

$$\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\colon \beta\text{-mod} \longrightarrow \tilde{B}\text{-mod}$$

其逆函子由下式给出

$$\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\colon \tilde{B}\text{-mod} \longrightarrow \beta\text{-mod}\,.$$

命题 4.7。设 G 是有限群 G 的正规子群，B 是 kG 的一个块，U 是一个 B-模，β 是 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 的一个块，覆盖 B，且 B 是 kG 的一个块，覆盖 B，使得

$$\sum_{x\in[\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x1_\beta x^{-1} = 1_{\tilde{B}}.$$

则 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U \cong \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U$。

证明。设 $B_1 = B$, ..., B_e 为 kG 覆盖 B 的所有块。由命题 4.6，我们可以取 $\beta_1 = \beta$, ..., β_e 为 $kI_{\tilde{G}}(B)$ 的块，使得诱导函子 $\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{G}$ 限制后构成 Morita 等价

$$\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\colon \beta_i\text{-mod} \longrightarrow \tilde{B}_i\text{-mod}$$

对任意 $i = 1$, ..., e。由命题 4.3 (2)，我们得到如下同构：

$$\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U \cong \beta_1\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U \oplus \cdots \oplus \beta_e\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U.$$

此外，根据命题 2.1 (2)，我们有

$$\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U \cong \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U \cong \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta_1\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta_e\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U.$$

由于 $k\tilde{G}$-模 $\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta_i\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U$ 对任意 $i = 1, \ldots, e$ 都属于块 $\tilde{B}_i$，因此我们得到

$$\tilde{B}_i\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}U \cong \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta_i\mathrm{Ind}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}U.$$

因此，证明完成。 □

5 主要结果的块版本

本节给出第 3 节中定理的块版本。设 Λ 是有限维代数。对于 Λ-模 M 和 N，若 $M \le_{\mathrm{add}} N$，则记为 $\mathrm{add}\ M \subset \mathrm{add}\ N$。显然，这一关系具有自反性和传递性。此外，若 $M \le_{\mathrm{add}} N$ 和 $N \le_{\mathrm{add}} M$，则 $M =_{\mathrm{add}} N$ 对任意 Λ-模 M 和 N 成立。下面是定理 3.4 的块版本的一个特例。

定理 5.1. 设 G 是有限群 G 的正规子群，B 是 kG 的一个块，满足 $I_{\tilde{G}}(B) = G$，$\tilde{B}$ 是覆盖 B 的 $k\tilde{G}$ 的一个块，且 $\tilde{M}$ 是一个支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模。若 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$ 成立，且 $\tilde{M}$ 是相对于 G 的投射模，则有 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是一个支撑 τ-倾斜 B-模。此外，若 $(\tilde{M}, \tilde{P})$ 是 $\tilde{B}$ 关于 $\tilde{M}$ 对应的支撑 τ-倾斜对，则 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 B 关于 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 对应的支撑 τ-倾斜对。

证明。设 (M, P) 是对应于 B 的支撑 τ-倾斜对，且对应于支撑 τ-倾斜 B-模 M。我们的假设 $I_{\tilde{G}}(B) = G$ 意味着，根据备注4.2，B 是被 B 覆盖的 kG 的唯一块。因此，根据命题 4.1（4），限制模 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 和 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}$ 是 B-模。

首先，我们证明 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是 B-模。由于 $\tilde{B}$-模 $\tilde{M}$ 是一个支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模，因此它是一个 τ-刚性 $\tilde{B}$-模。由此，根据引理 3.1，可知 $\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 是一个 τ-刚性 B-模。另一方面，根据命题2.1 (4)，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) &\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{P}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{B}}(\tilde{P}, \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}).\end{aligned}$$

现在，根据假设 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\tilde{B}}(\tilde{P}, \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) = 0$，因为 $(\tilde{M}, \tilde{P})$ 是 $\tilde{B}$ 的一个支撑 τ-倾斜对。因此，我们得出 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 B 的一个τ-刚性对。

接下来，我们证明 τ-刚性对 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 B 的支撑 τ-倾斜对。我们证明在以下假设下，$X \in \mathrm{add}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$

$$\mathrm{Hom}_B(X, \tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \tau X) = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, X) = 0,$$

这意味着该对 $(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$、$\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P})$ 是 B 的支撑 τ-倾斜对，根据命题3.3，在这些假设下，我们有以下结论：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\tilde{B}}(\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X, \tau\tilde{M}) &\cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X, \tau\tilde{M}) && (\tau M \text{ 是一个 } B\text{-模}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{kG}(X, \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}(\tau\tilde{M})) && (\text{Proposition 2.1 (5)}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{kG}(X, \tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) && (\text{Lemma 3.2}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(X, \tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})) && (X \text{ 和 } \tau(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}) \text{ 是 } B\text{-模}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\tilde{B}}(\tilde{M}, \tau(\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X)) &\cong \mathrm{Hom}_{\tilde{B}}(\tilde{M}, \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\tau X)) && (\text{Lemma 2.4}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{M}, \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\tau X)) && (M \text{ 是该 } B\text{-模}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \tau X) && (\text{命题2.1 (4)}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}, \tau X) && (\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \text{ 且 } \tau X \text{ 是 } B\text{-模}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\tilde{B}}(P, B\text{诱导}_G^{\tilde{G}}X) &\cong \mathrm{Hom}_{k\tilde{G}}(\tilde{P}, \text{诱导}_G^{\tilde{G}}X) && (P \text{ 是一个 } B\text{-模}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{kG}(\text{限制}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, X) && (\text{命题2.1 (4)}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P}, X) && (\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{P} \text{ 和 } X \text{ 是 } B\text{-模}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

根据这三个同构以及 (M, P) 是一个支撑 τ-倾斜对 B，应用命题 3.3，可得 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}X \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$。此外，由于块 $\tilde{B}$ 覆盖 B，因此 B-模 X 是 Res 的直和项$_G^{\tilde{G}}\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}X$，根据命题 4.3 (1)。因此，可得 $X \in \mathrm{add}\,\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$。

□

我们考察定理 5.1 的假设的等价条件。首先，我们给出一些引理，这些引理不仅适用于刚性 B-模，也适用于支撑 τ-倾斜 B-模。下面的引理是引理 3.6 的块版本，有助于证明定理 5.4。

引理 5.2。设 G 是一个有限群，B 是 kG的一个块，M 是一个刚性 B-模，L 是一个 kG-模。若对 L的任意合成因子 S，均有 $B(S \otimes_k M) \in \mathrm{add}\ M$，则以下作为 B-模的同构成立：

$$\tilde{B}(L \otimes_k \tilde{M}) \cong \bigoplus_S \tilde{B}(S \otimes_k \tilde{M}),$$

其中，S 遍历 L的所有合成因子。

证明。引理 3.6 的类似证明 L 在这种情形下同样适用。设 kG是任意一个 M -模，并设 是一个 B刚性-模，满足

$$\tilde{B}(S \otimes_k \tilde{M}) \in \mathrm{add}\,\tilde{M} \text{ for any composition factors } S \text{ of } L. \tag{5.1}$$

我们对 L 的合成长度 $\ell(L)$ 使用归纳法。若 $\ell(L)=1$，则无需证明。因此，我们假设 $\ell(L)\geq 2$，并假设对任意满足 $\ell(L')<\ell(L)$ 的 kG-模 L'，结论均成立。设T 是 L 的一个单子模。我们得到正合列

$$0\longrightarrow \tilde{B}(T\otimes_k \tilde{M})\longrightarrow \tilde{B}(L\otimes_k \tilde{M})\longrightarrow \tilde{B}((L/T)\otimes_k \tilde{M})\longrightarrow 0 \tag{5.2}$$

通过将正合函子 $B(-\otimes_k M)$ 应用于正合列

$$0\longrightarrow T\longrightarrow L\longrightarrow L/T\longrightarrow 0.$$

由 M 的刚性、假设（5.1）以及归纳假设，列（5.2）分裂，因此我们得到

$$\tilde{B}(L\otimes_k \tilde{M})\cong \tilde{B}(T\otimes_k \tilde{M})\oplus \tilde{B}((L/T)\otimes_k \tilde{M})\cong \tilde{B}(T\otimes_k \tilde{M})\oplus\bigoplus_{S'}\tilde{B}(S'\otimes_k \tilde{M})\cong\bigoplus_{S}\tilde{B}(S\otimes_k \tilde{M}),$$

其中，S' 和 S 分别遍历 L/T 和 L的所有合成因子。 □

引理 5.3. 设 G 是有限群 G的正规子群，B 是 kG 的一个块，且 M 是一个刚性 B-模。那么以下条件等价：

(1) $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}\in\mathsf{add}\ \tilde{M}$ 和 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的。

(2) 对每个简单 $k(G/G)$-模 S，$\tilde{B}(S\otimes_k M)\in\mathsf{add}\ M$。

证明。 由命题2.1，我们有

$$\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}\cong \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(k_G\otimes_k \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\cong \tilde{B}((\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}k_G)\otimes_k \tilde{M})\cong \tilde{B}(k(\tilde{G}/G)\otimes_k \tilde{M}).$$

(1) $\Rightarrow$ (2)。根据假设，我们有 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M}=_{\mathrm{add}}\tilde{M}$。因此，由命题 2.1 可得

$$\begin{aligned}\tilde{B}(S\otimes_k \tilde{M})&=_{\mathrm{add}}\tilde{B}(S\otimes_k \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\\&\leq_{\mathrm{add}}\tilde{B}(S\otimes_k \mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\\&\cong \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}S\otimes_k \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\\&\cong \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}(k_G^{\oplus \dim_k S}\otimes_k \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M})\\&=_{\mathrm{add}}\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}\\&=_{\mathrm{add}}\tilde{M},\end{aligned}$$

对于任意简单 $k(G/G)$-模 S，这意味着 $B(S\otimes_k M)\in$加上 M。(2) $\Rightarrow$ (1)。由引理 5.2，我们有

$$\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M}\cong \tilde{B}(k(\tilde{G}/G)\otimes_k \tilde{M})\cong\bigoplus_{S}\tilde{B}(S\otimes_k \tilde{M}),$$

其中 S 遍历 kG-模 $k(G/G)$ 的所有合成因子。因此，该假设意味着 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M}\in$加上 $\tilde{M}$。此外，由于平凡 $k\tilde{G}$-模 $k_{\tilde{G}}$作为 $k(\tilde{G}/G)$ 的合成因子出现，我们有 $\tilde{B}$-模 $\tilde{M}$是 $\tilde{B}$ 诱导 $_G^{\tilde{G}}$ 限制 $_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$ 的一个直和项，即 $\tilde{M}$ 是一个相对于 G 的 kG- 投射 kG- 模。

□

我们给出定理5.1的假设所对应的等价条件。

定理 5.4. 设 G 是有限群的一个正规子群，B 是 kG 的一个块，满足 $I_{\tilde{G}}(B)=G$ 且 B 是覆盖 B的 kG 的一个块。设 M 是一个支撑 τ-倾斜 B-模。那么以下条件等价：

(1) $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{B}$由某个 $\tilde{G}$-不变的支撑 τ-倾斜 B-模 M诱导得到。

(2) $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \tilde{M}$，且 $\tilde{M}$ 相对 G-投射。

(3) 对每个简单的 $k(G/G)$-模 S，均有 $B(S \otimes_k M) \in \mathrm{add}\ M$。

证明。 (1) $\Rightarrow$ (2)。假设 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M$对某个 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 B-模 M。那么显然， M 是相对 G-投射 B-模，并且我们得到

$$\begin{aligned}
\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} &=_{\mathrm{add}} \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \\
&\leq_{\mathrm{add}} \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \\
&\cong \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\Big(\bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M\Big) \\
&\cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \\
&=_{\mathrm{add}} \tilde{M}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in$ 加法闭包 $\tilde{M}$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。假设 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in$ 加法闭包 $\tilde{M}$，且 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的。令 $M :=$ 限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M}$。那么根据引理 2.5、命题 4.1 (4)、备注4.2和定理 5.1， M 是一个 G-不变支撑 τ-倾斜 B-模。我们证明 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M =_{\mathrm{add}} \tilde{M}$，即加法闭包($\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M$) $=$加法闭包 $\tilde{M}$。根据假设 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M = \tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in$加法闭包 $\tilde{M}$，可知加法闭包($\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M$) $\subset$加法闭包 $\tilde{M}$。另一方面，由于 $\tilde{M}$ 是相对 G-投射的， $\tilde{M}$ 是诱导$_G^{\tilde{G}}$限制$_G^{\tilde{G}}\tilde{M} =$ 诱导$_G^{\tilde{G}}M$的一个直和项。此外，由于 $\tilde{M}$ 属于 $\tilde{B}$， $\tilde{M}$ 是 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M$的一个直和项。因此，我们有加法闭包 $\tilde{M} \subset$ 加法闭包($\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M$)。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 由于 support τ-tilting $\tilde{B}$-模是刚性的 $\tilde{B}$-模，等价性由引理 5.3得出。

□

推论 5.5. 设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG 的一个块，满足 $I_{\tilde{G}}(B) = G$，且 $\tilde{B}$是覆盖 B的 $k\tilde{G}$的一个块。我们用 (sτ-tilt B) $^{\tilde{G}}$ 表示由 $\tilde{G}$-不变的 support τ-tilting B-模组成的 sτ-tilt B的子集，并用 (sτ-tilt B)**表示由满足定理 5.4 等价条件的 support τ-tilting $\tilde{B}$-模组成的 sτ-tilt B的子集。于是函子 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$ 导出一个偏序集同构

$$\begin{aligned}
(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\ B)^{\tilde{G}} &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\ \tilde{B})^{\star\star} \\
M &\longmapsto \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

特别地，函子 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$ 导出一个偏序集单态射

$$\begin{aligned}
(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\ B)^{\tilde{G}} &\longrightarrow \mathrm{s}\tau\text{-tilt}\ \tilde{B} \\
M &\longmapsto \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

证明。 由 [16, 定理 3。3], 映射 (5.4) 定义良好。此外，由函子 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}$的正合性可知，若 $N \leq M$属于 sτ-倾斜模 B，则 $\tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}N \leq \tilde{B}$诱导$_G^{\tilde{G}}M$属于 s$\tau$-倾斜模 $\tilde{B}$。因此，映射 (5.4) 是偏序集同态。

还需证明映射 (5.4) 限制后给出偏序集同构 (5.3)。根据 (sτ-tilt B)** 的定义及上述论证，映射 (5.3) 定义良好，且是偏序集同态。此外，对于任意相对 G-投射支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模 $\tilde{M}$，若满足 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{M} \in \tilde{M}$，根据定理 5.4，可取一个 $\tilde{G}$-不变支撑 τ-倾斜 B-模 M，使其满足 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M =_{\mathrm{add}} \tilde{M}$。因此，映射 (5.3) 是满射。此外，设两个 G-不变支撑 τ-倾斜 B-模 M 和 N 满足 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M =_{\mathrm{add}} \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}N$。我们有

$$M \leq_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \leq_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^{\tilde{G}}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}M \cong \bigoplus_{\tilde{g}\in[\tilde{G}/G]} \tilde{g}M =_{\mathrm{add}} M$$

根据命题 4.3 (1)、命题 2.2 以及 G-不变性 M，因此我们有 $M =_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^G \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^G M$，类似地 $N =_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^G \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^G N$。因此可得 $M =_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^G \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^G M =_{\mathrm{add}} \mathrm{Res}_G^G \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^G N =_{\mathrm{add}} N$，这说明映射 (5.3) 是单射。至此，第一个断言得证。

后一断言可直接由以下事实得出：映射 (5.4) 是以下映射的复合：偏序集同构 (5.3) 与包含映射 ($s\tau$-倾斜 B)** $s\tau$-倾斜 B. $\hookrightarrow$ □

以下是定理 3.4 的块版本。

定理 5.6。 设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG的一个块， B 是覆盖 B的 kG的一个块， β 是 $kI_{\tilde{G}}(B)$的块，满足

$$\sum_{x\in[\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x1_\beta x^{-1} = 1_{\tilde{B}}$$

且 $\tilde{M}$是一个支撑 τ-倾斜 $\tilde{B}$-模。若有 $\beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G\,\mathrm{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$，且 $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$是相对 G-投射的，则有 $\mathrm{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$是一个支撑 τ-倾斜 B-模。此外，若 (M,P) 是 B的一个支撑 τ-倾斜对，对应于 M，则该对

$$(\mathrm{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}, \mathrm{Res}_G^{I_{\tilde{G}}(B)}\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{P})$$

是与 B 对应于 $\mathrm{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$ 的一个支撑 τ-倾斜对。

证明。由于函子

$$\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\colon \tilde{B}\text{-mod} \longrightarrow \beta\text{-mod}$$

是一个 Morita 由命题 4.6 得到等价，模 $\beta\mathrm{Res}^G_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$ 是一个支撑 τ-倾斜 β-模，且 d

$$(\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}, \beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{P})$$

是一个对应的支撑 τ-倾斜对。 β因此，由定理 5.1 立即可得该推论。

□

下面给出定理 3.8 的块版本。

定理 5.7. 设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG的一个块， B 是覆盖 B的 kG的一个块， β 是 $kI_{\tilde{G}}(B)$的块，满足

$$\sum_{x\in[\tilde{G}/I_{\tilde{G}}(B)]} x1_\beta x^{-1} = 1_{\tilde{B}}$$

且 M 是一个支撑 τ-倾斜 B-模。则下列条件等价：

(1) 对某个 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的支撑 τ-倾斜 B-模 M，有 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{B}\mathrm{Ind}_G^G M$。(2) $\beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ $\mathrm{Res}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M} \in \mathrm{add}\ \beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$，并且 $\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$是相对 G-投射的。 (3) 对每个简单的 $k(I_{\tilde{G}}(B)/G)$-模 S，有 $(S\otimes_k \beta\mathrm{Res}^G_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}) \in \mathrm{add}\ \beta\mathrm{Res}^G_{I_{\tilde{G}}(B)}$。

证明。我们指出，模 $\beta\mathrm{Res}^G_{I_{\tilde{G}}(B)}\tilde{M}$是一个支持 τ-倾斜 β-模，因为函子

$$\beta\mathrm{Res}^{\tilde{G}}_{I_{\tilde{G}}(B)}\colon \tilde{B}\text{-mod} \longrightarrow \beta\text{-mod} \tag{5.5}$$

根据命题4.6，这是一个 Morita 等价。

(1) $\Rightarrow$ (2)。假设 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{B}$诱导$_G^G M$对于某个 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变的支撑 τ-倾斜 B-模 M。根据[16, 定理 3.3], 该模 β诱导$^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ M是一个支撑 τ-倾斜 β-模。由于该函子

$$\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}} \colon \beta\text{-mod} \longrightarrow \tilde{B}\text{-mod} \tag{5.6}$$

是一个 Morita 等价，其逆函子为 (5.5)。我们有 $\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{G}\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{G}\tilde{M} \cong \tilde{M}$。此外，根据假设和命题 4.7，我们得到 $\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \tilde{B}\mathrm{Ind}_{G}^{\tilde{G}}M \cong \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ M。因此，我们有 $\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ M。于是，由于函子 (5.6) 也是一个 Morita 等价，我们有 $\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ M。因此，由定理 5.4 中 (1) 与 (2) 的等价性，可得结论 (2)。

(2) $\Rightarrow$ (1)。由于$_{I_{\tilde{G}}(B)}^{G}\tilde{M}$是一个支撑 τ-τ 倾斜 β-模，根据假设和定理 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变支撑τ-τ 倾斜 B-模 M，因此存在一个 $\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \beta\mathrm{Ind}^{I_{\tilde{G}}(B)}{}_G$ M，使得 5.4。因此，由命题 4.7，可得

$$\tilde{M} \cong \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\tilde{M} =_{\mathrm{add}} \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}\beta\mathrm{Ind}_{G}^{I_{\tilde{G}}(B)}M \cong \tilde{B}\mathrm{Ind}_{G}^{\tilde{G}}M.$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3)。由于支撑 τ-τ 倾斜 β-模 $\beta\mathrm{Res}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{G}\tilde{M}$是刚性 β-模，等价性由引理 5.3得出。

□

推论 5.8. 令 (sτ-tilt $B)^{I_{\tilde{G}}(B)}$ 为 sτ-tilt B 中由 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变支撑 τ-τ 倾斜 B-模构成的子集，并令 (sτ-tilt $B)^{\star\star\star}$ 为 sτ-tilt B 中由满足定理 5.7 的等价条件的支撑 τ-τ 倾斜 B-模构成的子集。则函子 $\tilde{B}$诱导$_G^G$ 一个偏序集同构

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt } B)^{I_{\tilde{G}}(B)} &\longrightarrow (\mathrm{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B})^{\star\star\star}\\ M &\longmapsto \tilde{B}\mathrm{Ind}_{G}^{\tilde{G}}M.\end{aligned} \tag{5.7}$$

特别地，函子 $\tilde{B}\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 诱导出偏序集单态射

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt } B)^{I_{\tilde{G}}(B)} &\longrightarrow \mathrm{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B}\\ M &\longmapsto \tilde{B}\mathrm{Ind}_{G}^{\tilde{G}}M.\end{aligned}$$

证明。令 (sτ-倾斜 $\beta)^{\star\star}$ 为 sτ-倾斜 β中由满足定理 τ5.4 β 中等价条件的支撑倾斜模组成的子集。由于函子

$$\mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}} \colon \beta\text{-mod} \longrightarrow \tilde{B}\text{-mod}$$

是 Morita 等价，因此我们有偏序集同构

$$\begin{aligned}\mathrm{s}\tau\text{-tilt } \beta &\longrightarrow \mathrm{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B}\\ M &\longmapsto \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}M\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt } \beta)^{\star\star} &\longrightarrow (\mathrm{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B})^{\star\star\star}\\ M &\longmapsto \mathrm{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}M.\end{aligned} \tag{5.8}$$

根据定理 5.4，我们得到偏序集同构

$$\begin{aligned}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt } B)^{I_{\tilde{G}}(B)} &\longrightarrow (\mathrm{s}\tau\text{-tilt } \beta)^{\star\star}\\ M &\longmapsto \beta\mathrm{Ind}_{G}^{I_{\tilde{G}}(B)}M.\end{aligned} \tag{5.9}$$

根据命题4.7，映射（5.7）是偏序集同构（5.9）与（5.8）的复合。因此，证明完成。

□

作为推论 5.8的一个应用，我们考虑 $I_{\tilde{G}}(B)/G$ 是一个 p-群的情形。下面的定理是对 [18, 定理 1。2] 和 [10, 定理 15]的一个重要推广。

定理 5.9。设 G 是有限群 G的正规子群， B 是 kG 的一个块，且 B 是 kG-覆盖的一个块。若商群 $I_{\tilde{G}}(B)/G$ 是一个 p-群，则函子 $\mathrm{Ind}_G^{\tilde{G}}$ 在偏序集 (sτ-tilt $B)^{I_{\tilde{G}}(B)}$与 sτ-tilt $\tilde{B}$之间诱导一个同构，其中 (sτ-tilt $B)^{I_{\tilde{G}}(B)}$是由 $I_{\tilde{G}}(B)$-不变支撑 τ-倾斜 B-模组成的 sτ-tilt B的子集。

证明。 这立即由推论 4.5、定理 5.7 (3)、推论5.8 以及如下事实得出：唯一的单 $k(I_{\tilde{G}}(B)/G$-模是平凡的 $k(I_{\tilde{G}}(B)/G)$-模。 □

参考文献

[1] T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten。 τ-倾斜理论。《Compos. Math.》，150(3)，第 415–452 页，2014年。DOI 10.1112/S0010437X13007422。[2] J. L. Alperin。《局部表示理论》，《剑桥高等数学研究》第 11 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。DOI 10.1017/CBO9780511623592。[3]S. Asai。《半砖》。《Int. Math. Res. Not. IMRN》，2020(16)，第 4993–5054 页，2018年。DOI 10.1093/imrn/rny150。[4] M. Auslander 和 S. O. Smalø。《子范畴中的几乎分裂序列》。《代数杂志》，69(2)，第 426–454 页，1981年。DOI 10.1016/0021-8693(81)90214-3。[5] S. Breaz、A. Marcus 和 G. C. Modoi。《群分次代数上的支撑 τ-倾斜模与半砖》，2022年。DOI 10.48550/ARXIV.2209.02992。[6] S. Danz 和 E. Giannelli。《以钩分拆为标记的对称群单模的顶点》。《群论杂志》，18(2)，第 313–334 页，2015年。DOI 10.1515/jgth-2014-0044。[7] S. Danz、B. K¨ ulshammer 和 R. Zimmermann。《小次数对称群单模的顶点》。《代数杂志》，320(2)，第 680–707 页，2008年。DOI 10.1016/j.jalgebra.2008.01.032。[8]S. Danz 和 J. M¨uller。《偶特征下交错群自然单模的顶点与源》。《Comm. Algebra》，39(9)，第 3187–3211 页，2011年。DOI 10.1080/00927872.2010.499117。[9] L. Demonet、O. Iyama 和 G. Jasso。《 τ-倾斜有限代数、砖与 g-向量》。《Int. Math. Res. Not. IMRN》，2019(3)，第 852–892 页，2019年。DOI 10.1093/imrn/rnx135。[10] F. Eisele、G. Janssens 和 T. Raedschelders。《刚性模的约化定理》。《Math. Z.》，290(3-4)，第 1377–1413 页，2018年。DOI 10.1007/s00209-018-2067-4。[11] J. A. Green。《有限群不可分解表示论》。《Math. Z.》，第 70 卷，第 430–445 页，1958/59年。DOI 10.1007/BF01558601。[12]M. Holloway、S. Koshitani 和 N. Kunugi。《具有指数为 p的循环子群的非阿贝尔缺陷群块》。《Arch. Math. (Basel)》，94(2)，第 101–116 页，2010年。DOI 10.1007/s00013-009-0075-7。[13] G. Jasso。《 τ-倾斜模与扭对的约化》。《Int. Math. Res. Not. IMRN》，2015(16)，第 7190–7237 页，2014年。DOI 10.1093/imrn/rnu163。[14] R. Kn¨orr。《不可约模的顶点》。《Ann. of Math. (2)》，110(3)，第 487–499 页，1979年。DOI 10.2307/1971234。[15] S. Koenig 和 D. Yang。《有限维代数的 silting 对象、简单思维集合、 t-结构与余-t-结构》。《Doc. Math.》，第 19 卷，第 403–438 页，2014年。[16] R. Koshio。《有限群块上惯性不变支撑 τ-倾斜模的诱导模》，2022年。DOI 10.48550/ARXIV.2208.14680。

[17] R. Koshio 和 Y. Kozakai。《有限群块上支撑 τ-倾斜模的诱导模与半砖的扩张模》，2021年。DOI 10.48550/ARXIV.2112.08897。[18] R. Koshio 和 Y. Kozakai。《覆盖循环块的块上的支撑 τ-倾斜模》。《代数杂志》，第 580 卷，第 84–103 页，2021年。DOI 10.1016/j.jalgebra.2021.03.021。[19] Y. Kozakai。《覆盖循环块的块上的倾斜复形》，2022年。DOI 10.48550/ARXIV.2207.12668。[20] P. Landrock。《有限群代数及其模》，《伦敦数学学会讲义丛书》第 84 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1983年。DOI 10.1017/CBO9781107325524。[21] M. Linckelmann。《有限群代数的块理论》。第二卷，《伦敦数学学会学生教材》第 92 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[22] M. Linckelmann。《关于不可分解张量积的顶点》。《群论杂志》，23(3)，第 385–391 页，2020年。DOI 10.1515/jgth-2019-0130。[23] H. Nagao 和 Y. Tsushima。《有限群表示论》。学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1989年。[24] G. Navarro。《有限群的特征标与块》，《伦敦数学学会讲义丛书》第 250 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998年。DOI 10.1017/CBO9780511526015。[25] R. Rouquier。《通过稳定等价与 Rickard 等价研究块理论》。载于《有限群模表示论》（夏洛茨维尔，弗吉尼亚州，1998年），第 101–146 页。德古意特出版社，柏林，2001年。

Ryotaro KOSHIODepartment of Mathematics,
Tokyo University of Science日本东京新宿区神乐坂1-3，邮编 162-8601，电子邮箱：1120702@ed.tus.ac.jp

Yuta KOZAKAIDepartment of Mathematics,
Tokyo University of Science日本东京新宿区神乐坂1-3，邮编 162-8601，电子邮箱：kozakai@rs.tus.ac.jp