arXiv:2301.04964v2 [math.RT] 2 Jan 2024

有限一般线性群表示的伽马因子

DAVID SOUDRY 和 ELAD ZELINGHER

Abstract. 我们使用 Langlands–Shahidi 方法，为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)$ 的一对不可约泛型表示定义 Shahidi 伽马因子。我们证明 Shahidi 伽马因子具有乘法性，并说明它与 Jacquet– Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子有关。作为应用，我们基于 Shahidi 伽马因子的绝对值证明一个逆定理，并改进 Nien 的逆定理。作为另一项应用，我们给出 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ 的不可约泛型表示的贝塞尔函数在特殊取值处的显式公式。

1. Introduction

在 p-进群的表示论中，研究不可约表示的一种方法是为这些表示附加局部因子。这些局部因子是复变量的复值函数，编码了相关表示的各种性质。这些局部因子通常源自表示与自守表示相关的 L函数的全局积分。研究这些局部因子对于理解全局情形至关重要。在许多情形下，这种研究已取得成功，其中包括 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika [8] 和 Shahidi [20, 21]的开创性工作。

设 $\mathbb{F}$ 是一个基数为 q的有限域。局部因子的局部理论通常都有一个有限域上的类似理论。它使人们能够为所讨论的群的 $\mathbb{F}$-点版本的不可约表示附加“局部常数”。一个著名的例子是 [18] 一书，Piatetski–Shapiro 在书中发展了有限域上 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$ 张量积表示的伽马因子理论。我们还提及 [19, 16, 26, 13,14] 等作品作为例子。这些局部常数通常编码了与相应局部因子类似的性质。此外，这些局部常数理论往往使人们能够为相应的局部问题构造“玩具模型”。例如，在 Nien 证明了有限域上 Jacquet猜想的类似命题 [16], 不久后，Chai 证明了 p-进群情形下的该猜想 [2], ；在证明中，他使用了与 Nien 所用工具类似的工具。

在她的硕士论文 [19], 中，Roditty-Gershon 定义了 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika [8] 伽马因子的有限域类比。这个伽马因子表示分别附属于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 上两个不可约泛型表示 π 和 σ 的张量积表示，记作 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$。后来，Rongqing Ye 证明，$\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 通过零级超尖点表示 [25] 与其局部域对应物相关。利用这一关系和局部朗兰兹对应，Rongqing Ye 与第二作者得以将 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 表示为高斯和 [27] 的乘积。

目前文献中关于有限域上与张量积相关的伽马因子理论，从某种意义上说尚不完整。首先，伽马因子 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 目前并未对所有不可约泛型表示 π 和 σ定义。它仅在 $n \geq m$时有定义，并且假设 π 是尖点表示（若还要求 $n = m$, σ 也是尖点表示，则亦然）。可以稍微调整证明，使其

适用于所有不可约泛型表示 π 和 σ，使得 π 和 $\sigma^\vee$ 具有不相交的尖点支撑，但这还不足以定义所有配对 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ π 和 σ上的 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi$。可以尝试根据涉及 π 和 σ 的贝塞尔函数的表达式，直接定义 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi$（参见第 2.2.1小节，了解贝塞尔函数的定义），但这会引出第二个问题。第二个问题是，当前理论缺少伽马因子的乘法性。若采用上述方法，直接扩展定义 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi)$，则伽马因子是否具有乘法性并不明确。要将其应用于 [28] 中的情形，就必须解决这两个难题。

Langlands–Shahidi 方法提供了另一种解决这两个问题的途径。本文采用这一方法，定义有限域上的 Shahidi 伽马因子版本。下面简要介绍其构造。设 π 和 σ 分别是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 GL_m ($\mathbb{F}$上的惠特克型表示。在小节 3.1 中，我们考虑一个交织算子 $U_{\sigma,\pi}$: $\sigma\circ\pi\to\pi\circ\sigma$，其中 $\circ$ 表示抛物诱导。在小节 3.2 中，给定惠特克向量 $v_{\pi,\psi}\in\pi$ 和 $v_{\sigma,\psi}\in\sigma$，我们定义惠特克向量 $v_{\pi,\sigma,\psi}\in\pi\circ\sigma$和$v_{\sigma,\pi,\psi}\in\sigma\circ\pi$。由惠特克向量的唯一性可知，存在一个常数$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\in\mathbb{C}$，使得

$$U_{\sigma,\pi}v_{\sigma,\pi,\psi}=\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\cdot v_{\pi,\sigma,\psi}.$$

我们称 $\Gamma(\pi\times\sigma,\ \psi)$ 为与 相关联的 Shahidi 伽马因子 π 和 σ。这是 Shahidi 局部系数的一种有限域类比 [20]。

我们证明了 $\Gamma(\pi\times\sigma,\ \psi)$ 的若干性质，其中最重要的是它具有乘法性（定理 3.9）。

定理 1.1. 设 π、σ_1 和 σ_2 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$、$\mathrm{GL}_{m_1}$ 和 $\mathrm{GL}_{m_2}(\mathbb{F})$ 的惠特克型表示。那么 $(\mathbb{F})$

$$\Gamma(\pi\times(\sigma_1\circ\sigma_2),\psi)=\Gamma(\pi\times\sigma_1,\psi)\cdot\Gamma(\pi\times\sigma_2,\psi).$$

当两个表示均不可约时，我们还将 $\Gamma(\pi\times\sigma,\ \psi)$ 表示为与 π和 σ相关联的贝塞尔函数。当 $n\geq m$ 时，我们证明，除去一些简单因子，$\Gamma(\pi\times\sigma,\ \psi)$ 可由上文讨论的 $\gamma(\pi\times\sigma^\vee,\ \psi)$ 的朴素扩张给出（定理 3.14）。我们由此推导出 Shahidi 伽马因子与 Jacquet–Piatetski-Shapiro– Shalika 伽马因子之间的关系（推论 3.15）。

定理 1.2. 设 π 和 σ 分别是 GL_n ($\mathbb{F}$) 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。假设 π 是尖点的，且 $n\geq m$。若 $n=m$，则假设 σ 也是尖点的。于是

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)=q^{\frac{m(2n-m-1)}{2}}\omega_\sigma(-1)\,\gamma(\pi\times\sigma^\vee,\psi).$$

这两个伽马因子之间的关系，使我们能够对 Shahidi 伽马因子的绝对值给出一种表示论解释。我们证明，在某种意义上，Shahidi 伽马因子的绝对值可以很好地替代与张量积表示相关的局部 L-因子的极点阶数。我们强调，与 Jacquet–Piatetski-Shapiro– Shalika 伽马因子的关系对这些结果至关重要。下述定理可视为 [8, 第 8 节1] 的一个类比。

定理 1.3. 设 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示，σ 是 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示。则

$$\left|q^{\frac{-nm}{2}}\cdot\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\right|=q^{-\frac{d_\pi(\sigma)m}{2}},$$

其中 $d_\pi(\sigma)$ 是 σ 在 π 的尖点支撑中出现的次数 .

这使我们能够基于归一化 Shahidi 伽马因子的绝对值推导出一个逆定理。在局部情形下，Gan 及其合作者在许多著作中给出了类似的定理（参见 [6, 引理 12。3], [5, 引理 A。6] 以及 [1, 引理 A。6]），但我们的证明是在“群侧”而非“伽罗瓦侧”进行的。

定理 1.4. 设 π_1 和 π_2 分别是 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F})$ 的两个不可约泛型表示。假设对每个 m 以及 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的每个不可约尖点表示 σ，都有

$$\left|q^{-\frac{n_1 m}{2}} \cdot \Gamma(\pi_1 \times \sigma, \psi)\right| = \left|q^{-\frac{n_2 m}{2}} \cdot \Gamma(\pi_2 \times \sigma, \psi)\right|.$$

那么 $n_1 = n_2$ 和 $\pi_1 \cong \pi_2$。

结合 Nien 的逆定理 [16]，我们的结果使我们能够推导出一个在较弱假设下成立的逆定理。这与 [9, 第 2 小节4] 类似。

定理 1.5. 设 π_1 和 π_2 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的具有相同中心特征的不可约泛型表示。假设对于任意 $1 \le m \le \frac{n}{2}$ 以及 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的任意不可约尖点表示 σ，我们都有

$$\Gamma(\pi_1 \times \sigma, \psi) = \Gamma(\pi_2 \times \sigma, \psi).$$

那么 $\pi_1 \cong \pi_2$。

作为我们结果的另一项应用，我们为不可约泛型表示的贝塞尔函数的特殊值找到了显式公式 π。第一个公式（定理 4.10）将 $\mathcal{J}_{\pi,\ \psi}\left(\begin{smallmatrix} & I_{n-1} \\ c & \end{smallmatrix}\right)$ 表示为奇异克洛斯特曼和 [10, Page 152]。该公式已由 Curtis–Shinoda 的工作在文献中得到证明 [4], ，但我们的证明基于 Shahidi 伽马因子的多重性，而不是 Deligne–Lusztig 理论。我们得到的第二个公式（定理 4.14）将 $\mathcal{J}_{\pi,\ \psi}\left(\begin{smallmatrix} & I_{n-2} & \\ c & & -c' \end{smallmatrix}\right)$ 表示为形如 $\mathcal{J}_{\pi,\ \psi}\left(\begin{smallmatrix} & I_{n-1} \\ c & \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\mathcal{J}_{\pi,\ \psi}\left(\begin{smallmatrix} & I_{n-1} \\ c' & \end{smallmatrix}\right)$的值的扭卷积。Chang 曾针对 $n = 3$[3] 给出过这样的公式，随后 Shinoda–Tulunay 将其推广到 [22] 的情形 $n = 4$。Chang 的方法基于 Gelfand–Graev 代数，而我们的方法则基于我们为 Shahidi 伽马因子找到的公式。

Th本文基于第一作者 1979 年的一份未发表的笔记 [24] .

2. Preliminaries

2.1. 抛物诱导。给定一列正整数 $n_1, \ldots, n_r$，我们用 $P_{n_1,\ldots,n_r}$ 表示与分拆 $(n_1, \ldots, n_r)$ 相对应的一般线性群 $\mathrm{GL}_{n_1+\cdots+n_r}(\mathbb{F})$ 的抛物子群。也就是说，

$$P_{n_1,\ldots,n_r} = D_{n_1,\ldots,n_r} \ltimes N_{n_1,\ldots,n_r},$$

其中

$$D_{n_1,\ldots,n_r} = \left\{\mathrm{diag}\left(g_1, \ldots, g_r\right) \mid \forall 1 \le j \le r, g_j \in \mathrm{GL}_{n_j}\left(\mathbb{F}\right)\right\},$$

$$N_{n_1,\ldots,n_r} = \left\{ \begin{pmatrix} I_{n_1} & * & * & * \\ & I_{n_2} & * & * \\ & & \ddots & * \\ & & & I_{n_r} \end{pmatrix} \right\}.$$

给定一般线性群 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}),\dots,\mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{F})$ 的表示 $\pi_1,\dots,\pi_r$，分别记 $\pi_1\overline{\otimes}\dots\overline{\otimes}\pi_r$ 为 $\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_r$ 到 $P_{n_1,\dots,n_r}$ 的膨胀。也就是说，$\pi_1\overline{\otimes}\dots\overline{\otimes}\pi_r$ 是 $P_{n_1,\dots,n_r}$ 的一个表示，作用在 $\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_r$ 空间上，其在纯张量上的作用由下式给出

$$(\pi_1\overline{\otimes}\dots\overline{\otimes}\pi_r)(du)\,v_1\otimes\cdots\otimes v_r=\pi_1(g_1)\,v_1\otimes\cdots\otimes\pi_r(g_r)\,v_r,$$

其中 $d=\mathrm{diag}(g_1,\dots,g_r)\in D_{n_1,\dots,n_r}$ 和 $u\in N_{n_1,\dots,n_r}$，且对每个 $1\le j\le r$, $v_j\in\pi_j$。

抛物诱导 $\pi_1\circ\dots\circ\pi_r$ 定义为一般线性群 $\mathrm{GL}_{n_1+\cdots+n_r}(\mathbb{F})$ 的如下表示：

$$\pi_1\circ\dots\circ\pi_r=\mathrm{Ind}_{P_{n_1,\dots,n_r}}^{\mathrm{GL}_{n_1+\cdots+n_r}(\mathbb{F})}\pi_1\overline{\otimes}\dots\overline{\otimes}\pi_r.$$

若表示 π 满足：对于一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的每个分拆 $(n_1,\dots,n_r)\neq(n)$，其中 n，不存在 $0\neq v\in\pi$ 使得 v 在 $N_{n_1,\dots,n_r}$ 下不变；也就是说，若 $v\in\pi$ 满足对于每个 $u\in N_{n_1,\dots,n_r}$，都有 $\pi(u)\,v=v$，则 $v=0$，则称表示 π 为尖点表示。若 π 不可约，则 π 是尖点表示，当且仅当它不是某个 $\pi_1,\dots,\pi_r$（如上所述）对应的 $\pi_1\circ\dots\circ\pi_r$ 的子表示，其中$r>1$。

根据 [7, 定理 2.4], ，如果 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约表示，那么存在$n_1,\dots,n_r>0$，满足 $n_1+\cdots+n_r=n$，以及 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}),\dots,\mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示 $\pi_1,\dots,\pi_r$，使得 π同构于抛物诱导 $\pi_1\circ\dots\circ\pi_r$的一个子表示。这样的 $\pi_1,\dots,\pi_r$在置换意义下唯一。我们将 π的尖点支撑定义为多重集 $\{\pi_1,\dots,\pi_r\}$。

2.2. 泛型表示。设 $\psi\colon\mathbb{F}\to\mathbb{C}^*$ 是一个非平凡加法特征。令$Z_n\le\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为上三角幺幺子群。我们按公式定义一个特征 $\psi\colon Z_n\to\mathbb{C}^*$

$$\psi\begin{pmatrix}1&a_1&*&\dots&*\\&1&a_2&\dots&*\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&1&a_{n-1}\\&&&&1\end{pmatrix}=\psi\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_k\right).$$

设 π b e 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的有限维表示。若 π，则称其为一般的：

$$\mathrm{Hom}_{Z_n}(\mathrm{Res}_{Z_n}\pi,\psi)\neq0.$$

此条件与 ψ 的选择无关。参见第 3.2.1 节。我们称 $\mathrm{Hom}_{Z_n}(\mathrm{Res}_{Z_n}\pi,\psi)$ 中的非零元素为 ψ-惠特克泛函。当且仅当存在 $0\neq v\in\pi$，使得对于每个 $u\in Z_n$，$\pi(u)\,v=\psi(u)\,v$，表示 π 才是一般的。我们称这样的向量为关于 ψ 的惠特克向量，或称 ψ-惠特克向量。由 π 的 ψ-惠特克向量张成的子空间的维数为 $\dim\mathrm{Hom}_{Z_n}(\mathrm{Res}_{Z_n}\pi,\psi)$。

定义 2.1. 若 π 是一般的，且由其 ψ-惠特克向量张成的子空间是一维的，则称 π 为 Whittaker 型。

根据 Gelfand 和 Graev 的一个著名结果，如果 π 是一般的且不可约的，那么它是 Whittaker 型 [7, 定理 0。5], [23, 推论 5。6]。众所周知，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示是一般的 [23, 引理 5。2]。下面的结果也是众所周知的 [23,定理 5。5]。

定理 2.2. 设 $\pi_1,\dots,\pi_r$ 分别是 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}),\dots,\mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{F})$ 的惠特克型表示。那么抛物诱导 $\pi_1\circ\dots\circ\pi_r$ 是惠特克型表示。

2.2.1. 惠特克模型与贝塞尔函数。设 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。由于 π 是惠特克型，弗罗贝尼乌斯互反律表明

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\left(\pi, \mathrm{Ind}_{Z_n}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\psi\right) = 1.$$

我们将 $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ 记为 $\mathrm{Ind}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}_{Z_n}\psi$ 中唯一与 π 同构的子空间。这是 π 关于 ψ 的惠特克模型。

回忆一下，对于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约表示 π，其对偶表示$\pi^\vee$ 与 π^ι 同构，其中 π^ι 是作用在 π 空间上的表示，其作用方式为 $\pi^\iota(g) = \pi(g^\iota)$，其中对于 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，

$$g^\iota = {}^t\left(g^{-1}\right).$$

（这是因为对于 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，$\pi$ 和 $\pi^\vee$ 的迹特征满足 $\mathrm{tr}\pi^\vee(g) = \mathrm{tr}\pi(g^{-1})$，并且 g^{-1} 与 ${}^t(g^{-1})$ 共轭。）

利用同构 $\pi^\vee \cong \pi^\iota$，我们得到向量空间 $\mathcal{W}(\pi,\psi) \to \mathcal{W}(\pi^\vee,\psi^{-1})$ 之间的同构，定义为 $W \mapsto \tilde{W}$，其中

$$\tilde{W}(g) = W(w_n g^\iota),$$

并且 $w_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 是最长韦伊元

$$w_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

在通过惠特克模型 $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ 实现 π 的情况下，由 ψ-惠特克向量张成的 π 的一维子空间被实现为 $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ 的一维子空间，该子空间由满足以下条件的函数 $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$ 构成：对每个 $u \in Z_n$ 及每个 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，均有 $W(gu) = \psi(u)W(g)$。根据 [7, Proposition 4.5], ，该一维子空间中存在唯一的元素 W，使得 $W(I_n) = 1$。我们称 W 为相对于 ψ 的 π 的归一化贝塞尔函数，并将其记为$\mathcal{J}_{\pi,\psi}$。总之，贝塞尔函数$\mathcal{J}_{\pi,\psi}$ 是 $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ 中满足以下条件的唯一元素：

(1) $\mathcal{J}_{\pi,\psi}(I_n) = 1$。(2) $\mathcal{J}_{\pi,\psi}(gu) = \psi(u)\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g)$，对每个 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 及 $u \in Z_n$ 均成立。

贝塞尔函数具有以下恒等式，分别将其与复共轭及其对偶表示联系起来 [16, 命题 2.15和 3.5]。

命题 2.3. 对于任意不可约泛型表示 π $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，以及任意 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，我们有以下恒等式：

(1) $\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g^{-1}) = \overline{\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g)}$.
(2) $\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g^{-1}) = \mathcal{J}_{\pi^\vee,\psi^{-1}}(g)$.

注 2.4. 设 $v_{\pi,\psi}$ 是一个非零的 ψ-惠特克向量。若我们在 π 上选取一个在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 作用下不变的内积 $(\cdot,\cdot)_\pi$，则映射 $\ell_{\pi,\psi}$: $\pi \to \mathbb{C}$ 定义了一个惠特克泛函，其定义为 $v_\pi \mapsto (v_\pi, v_{\pi,\psi})_\pi$。利用弗罗贝尼乌斯互反律，$\pi$ 的惠特克模型可描述为 $\mathcal{W}(\pi,\psi) = \{W_{v_\pi} \mid v_\pi \in \pi\}$；其中，对 $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $v_\pi \in \pi$，我们定义 $W_{v_\pi}(g) = (\pi(g)v_\pi, v_{\pi,\psi})_\pi$。贝塞尔函数定义为

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g) = \frac{(\pi(g)v_{\pi,\psi}, v_{\pi,\psi})_\pi}{(v_{\pi,\psi}, v_{\pi,\psi})_\pi}.$$

上述贝塞尔函数的所有性质现在都可直接由 $(\cdot,\cdot)_\pi$ 是一个内积，且 $v_{\pi,\psi}$ 是一个 ψ-惠特克向量这一事实得出。此外，由 ψ-惠特克向量张成的一维子空间上的投影算子 $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}v_{\pi,\psi}}$ 可用两种方式描述。第一种方式是利用内积，此时对于 $v_\pi \in \pi$，

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{C}v_{\pi,\psi}}(v_\pi) = \frac{(v_\pi, v_{\pi,\psi})_\pi}{(v_{\pi,\psi}, v_{\pi,\psi})_\pi} v_{\pi,\psi}.$$

第二种方法是取平均，在这种情况下

$$\mathrm{pr}_{\mathbb{C}v_{\pi,\psi}}(v_\pi) = \frac{1}{|Z_n|} \sum_{u \in Z_n} \psi^{-1}(u)\, \pi(u)\, v_\pi.$$

通过将 $v_{\pi,\psi}$ 补成 π 的一个正交基，并利用由 ψ-惠特克向量张成的子空间是一维的这一事实，我们得到

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{pr}_{\mathbb{C}v_{\pi,\psi}} \circ \pi(g)\right) = \mathcal{J}_{\pi,\psi}(g).$$

这是 [7,命题 4。5]。

2.3. Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子。设 π 和 σ 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。对于大多数 π 和 σ，可以定义一个与 π 和 σ 相关的常数，称为 π 和 σ的 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子。它也称为 π 和 σ的 Rankin–Selberg 伽马因子。这是 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika [8] 针对p-进群给出的定义在有限域上的类似版本。Piatetski-Shapiro 的讲座在 1976年对此作了解释，第一作者 [24]于 1979 的一篇未发表的笔记中对其进行了研究。$n > m$ 的情形也在第一作者指导下的 Roddity-Gershon 的硕士论文中得到了研究。

2.3.1. $n > m$的情形。在她的硕士论文中，[19], Edva Roditty-Gershon 在假设π 是尖点且 $n > m$的条件下，定义了 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$。Roditty-Gershon 的论文尚未发表，但 Nien 在[16]中介绍了她的主要结果。下面我们简要回顾这些结果。

第一个结果是定义 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子的函数方程。设 $n > m$，且 π 是尖点的。对于任意 $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$和$W' \in \mathcal{W}(\sigma,\psi^{-1})$，以及任意 $0 \le j \le n-m-1$，定义

$$Z_j(W, W'; \psi) = \sum_{h \in Z_m \backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})} \sum_{x \in M_{(n-m-j-1)\times m}(\mathbb{F})} W\begin{pmatrix} h & & \\ x & I_{n-m-j-1} & \\ & & I_{j+1} \end{pmatrix} W'(h).$$

现在我们可以陈述这个函数方程了。

定理 2.5（[16, 定理 2.10]）。存在一个非零常数 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi) \in \mathbb{C}$，使得对于每个 $0 \le j \le n-m-1$、每个 $W \in \mathcal{W}(\pi,\psi)$以及每个 $W' \in \mathcal{W}(\sigma,\psi^{-1})$，都有

$$q^{mj}\gamma(\pi \times \sigma, \psi) Z_j(W, W'; \psi) = Z_{n-m-j-1}\left(\pi^\vee\begin{pmatrix} I_m & \\ & w_{n-m} \end{pmatrix}\tilde{W}, \tilde{W}'; \psi^{-1}\right),$$

其中，$w_{n-m} \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{F})$ 是最长韦伊元。

第二个结果用 π 和 σ的贝塞尔函数表示伽马因子 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$。

命题 命题 2.6 ([16,命题 2.16])。 在上述假设下，我们有 e

$$\gamma(\pi\times\sigma,\psi)=\sum_{h\in Z_m\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix}h & \\ & I_{n-m}\end{pmatrix}\mathcal{J}_{\sigma,\psi^{-1}}(h).$$

由命题 2.6 和命题 2.3 可知

$$\overline{\gamma(\pi\times\sigma,\psi)}=\gamma(\pi^\vee\times\sigma^\vee,\psi^{-1}).$$

此外，将定理 2.5 应用两次，我们得到以下关于 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 的绝对值的推论。

推论 2.7。我们有

$$\gamma(\pi\times\sigma,\psi)\gamma(\pi^\vee\times\sigma^\vee,\psi^{-1})=q^{-m(n-m-1)},$$

因此

$$|\gamma(\pi\times\sigma,\psi)|=q^{-\frac{m(n-m-1)}{2}}.$$

2.3.2. 情形 $n=m$。 情形 $n=m$ 曾在 Piatetski-Shapiro 的讲座中讨论过，并在 Rongqing Ye 的著作中作了简要说明 [25]。

设 $\mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 为函数 $\phi\colon \mathbb{F}^n\to\mathbb{C}$ 的空间。对于函数 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，我们用公式定义其傅里叶变换 $\mathcal{F}_\psi\phi\colon \mathbb{F}^n\to\mathbb{C}$

$$\mathcal{F}_\psi\phi(y)=\sum_{x\in\mathbb{F}^n}\phi(x)\psi(\langle x,y\rangle),$$

其中，若 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}^n$ 且 $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{F}^n$，则 $\langle x,y\rangle$ 是标准配对

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i.$$

设 π 和 σ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示。对于任意 $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$、$W'\in\mathcal{W}(\sigma,\psi^{-1})$ 以及任意 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，我们定义

$$Z(W,W',\phi;\psi)=\sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}W(g)W'(g)\phi(e_ng),$$

其中 $e_n=(0,\ldots,0,1)\in\mathbb{F}^n$。现在我们可以引入定义 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 的函数方程。

定理 2.8（[25, 定理 2.3]）。存在一个非零常数 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi)$，使得对于任意的 $W\in\mathcal{W}(\pi,\psi)$、$W'\in\mathcal{W}(\sigma,\psi^{-1})$，以及满足 $\phi(0)=0$ 的任意 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，我们有

$$Z(\tilde{W},\tilde{W}',\mathcal{F}_\psi\phi;\psi^{-1})=\gamma(\pi\times\sigma,\psi)Z(W,W',\phi;\psi).$$

与 $n>m$ 的情形类似，我们可以用 π 和 σ的贝塞尔函数表示 $\gamma(\pi\times\sigma,\psi)$。

命题 2.9（[25,公式 (4.4)]）。设 π 和 σ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示。则

$$\gamma(\pi\times\sigma,\psi)=\sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g)\mathcal{J}_{\sigma,\psi^{-1}}(g)\psi\left(\left\langle e_ng^{-1},e_1\right\rangle\right),$$

其中 $e_1=(1,0,\ldots,0)\in\mathbb{F}^n$。

由命题2.9 和命题2.3 可得

$$\gamma(\pi^\vee \times \sigma^\vee, \psi^{-1}) = \overline{\gamma(\pi \times \sigma, \psi)}.$$

现在我们来讨论 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 的绝对值。为此，我们首先说明，在大多数情况下，如何将定理 2.8 中的函数方程扩展到 $\mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 中的所有函数。首先注意，对于 $0 \in \mathbb{F}^n$ 的示性函数，我们记作δ_0，有 $Z(W, W', \delta_0; \psi) = 0$。我们还注意到，如果 π 与 $\sigma^\vee$ 不同构，那么$Z(W, W', 1; \psi) = 0$，其中 1 表示常值函数。这是因为

$$Z(W, W', 1; \psi) = \sum_{g \in Z_n \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} W(g) W'(g)$$

定义了一个 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$-不变配对 $\mathcal{W}(\pi, \psi) \otimes \mathcal{W}(\sigma, \psi^{-1}) \to \mathbb{C}$，但这种非平凡配对仅在 π 与 $\sigma^\vee$ 同构时才存在。这两点观察意味着函数方程可以作如下扩展，特别是在 π 与 $\sigma^\vee$ 不同构的情形下。

命题 2.10. 假设 $\pi \ncong \sigma^\vee$。那么对于任意 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$，我们有

$$Z(\tilde{W}, \tilde{W}', \mathcal{F}_\psi \phi; \psi^{-1}) = \gamma(\pi \times \sigma, \psi) Z(W, W', \phi; \psi).$$

证明. 设 $\phi = \phi_0 + \phi_1$，其中 $\phi_0 = \phi - \phi(0)$ 且 $\phi_1 = \phi(0)$。于是 $\phi_0(0) = 0$ 和 $\mathcal{F}_\psi \phi_1 = q^n \phi(0) \delta_0$。由于 Z关于 ϕ是线性的，根据上述讨论可得

$$Z(W, W', \phi; \psi) = Z(W, W', \phi_0; \psi)$$

并且

$$Z(\tilde{W}, \tilde{W}', \mathcal{F}_\psi \phi; \psi^{-1}) = Z(\tilde{W}, \tilde{W}', \mathcal{F}_\psi \phi_0; \psi^{-1}).$$

该结论现在可由定理 2.8得出。 □

因此，w e 得到以下关于 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 的绝对值的推论 .

推论 2.11. 设 π 和 σ 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示，满足$\pi \ncong \sigma^\vee$。则

$$\gamma(\pi \times \sigma, \psi) \gamma(\pi^\vee \times \sigma^\vee, \psi^{-1}) = q^n,$$

因此

$$|\gamma(\pi \times \sigma, \psi)| = q^{\frac{n}{2}}.$$

证明。 由两次应用命题 2.10 以及傅里叶变换满足

$$\mathcal{F}_{\psi^{-1}} \mathcal{F}_\psi \phi = q^n \phi,$$

对任意 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^n)$ 均成立，
可得。 □

接下来只需处理 $\pi \cong \sigma^\vee$ 的情形。在此情形下，伽马因子 $\gamma(\pi \times \pi^\vee, \psi)$ 可显式计算，结果为 -1，见附录 A。

我们在下述命题中总结所有情形。

命题 2.12. 设 π 和 σ 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示。

- 若 $\pi \ncong \sigma^\vee$，则 $|\gamma(\pi \times \sigma, \psi)| = q^{\frac{n}{2}}$。
- 如果 $\pi \cong \sigma^\vee$ 那么 $|\gamma(\pi \times \sigma, \psi)| = 1$。

3. Shahidi gamma factors (local coefficients)

本节中，我们使用 Langlands–Shahidi 方法，为有限一般线性群的两个惠特克型表示定义一个伽马因子。这是 Shahidi 局部系数的有限域类比，后者使用交织算子。第 3.1-3.3 节中的论述是 Shahidi 关于局部域上局部系数的工作的有限域类比[20]。与第 2.3节讨论的 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子不同，Shahidi 伽马因子可以统一地为一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的所有不可约泛型表示定义，而不论 $n > m$，也不论这些表示是否为尖点表示。我们证明了 Shahidi 伽马因子的若干性质，其中最重要的是乘法性，它说明了该伽马因子在抛物诱导下的行为。本节最后，我们用与这些表示相关联的贝塞尔函数来表示 Shahidi 伽马因子，并展示它与 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子的关系。

3.1. 交织算子。设 n 和 m 为正整数，π 和 σ 分别为 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的表示。我们定义一个线性映射 $\sigma\otimes\pi\to\pi\otimes\sigma$，通过分量交换作用于纯张量：

$$\mathrm{sw}_{\sigma,\pi}\left(v_\sigma\otimes v_\pi\right)=v_\pi\otimes v_\sigma.$$

对于函数 $f\colon \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{F})\to\sigma\otimes\pi$，我们将函数$\tilde{f}(g)=\mathrm{sw}_{\sigma,\pi}(f(g))$ 记作 $f\colon \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{F})\to\pi\otimes\sigma$。

我们考虑以下交织算子 $T_{\sigma,\pi}$：$\sigma\circ\pi\to\pi\circ\sigma$，其定义适用于 $f\in\sigma\circ\pi$ 和 $g\in\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{F})$，公式如下：

$$T_{\sigma,\pi}f(g)=\sum_{p\in P_{n,m}}(\pi\overline{\otimes}\sigma)\left(p^{-1}\right)\tilde{f}\left(\hat{w}_{n,m}pg\right),$$

其中 $\hat{w}_{n,m}$ 是以下 Weyl 元素

$$\hat{w}_{n,m}=\begin{pmatrix}&I_m\\I_n&\end{pmatrix}.$$

利用分解 $P_{n,m}=D_{n,m}\ltimes N_{n,m}$，我们可以将每个 $p\in P_{n,m}$ 唯一地写成$p=du$，其中 $u\in N_{n,m}$ 且 $d=\mathrm{diag}(g_1,g_2)\in D_{n,m}$，其中 $g_1\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $g_2\in\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$。由恒等式可得

$$\mathrm{diag}\left(g_2,g_1\right)\hat{w}_{n,m}=\hat{w}_{n,m}\,\mathrm{diag}\left(g_1,g_2\right),$$

以及 f 的左 $D_{m,n}$-等变性可得

$$T_{\sigma,\pi}f(g)=|D_{n,m}|\cdot U_{\sigma,\pi}f(g),$$

其中

$$U_{\sigma,\pi}f(g)=\sum_{u\in N_{n,m}}\tilde{f}\left(\hat{w}_{n,m}ug\right).$$

By c构造中，我们有 $T_{\sigma,\pi}$ 和$U_{\sigma,\pi}$ 是该空间的非零元素

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{F})}\left(\sigma\circ\pi,\pi\circ\sigma\right).$$

3.2. Shahidi 伽马因子。 现在假设 π 和 σ 分别是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的 Whittaker 型表示。根据定理 2.2，抛物诱导表示 $\sigma\circ\pi$ 和 $\pi\circ\sigma$ 也属于 Whittaker 型。设 $v_{\sigma,\psi}\in\sigma$和 $v_{\pi,\psi}\in\pi$ 分别为 σ 和 π的非零 ψ-惠特克向量。我们可以通过公式定义 $\sigma\circ\pi$ 的非零 ψ-惠特克向量 $f_{v_{\sigma,\psi},v_{\pi,\psi}}$

$$f_{v_{\sigma,\psi},v_{\pi,\psi}}(g)=\begin{cases}\psi(u)\left(\sigma\overline{\otimes}\pi\right)(p)\,v_{\sigma,\psi}\otimes v_{\pi,\psi} & g=p\hat{w}_{n,m}u,\ p\in P_{m,n},u\in Z_{n+m},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

类似地，我们可以定义 $f_{v_{\pi,\psi},v_{\sigma,\psi}}\in\pi\circ\sigma$。

由于 $U_{\sigma,\pi}$ 是一个交织算子，因此 $U_{\sigma,\pi}f_{v_{\sigma,\psi},v_{\pi,\psi}}$ 是 ψ的惠特克向量。由于 $f_{v_{\pi,\psi},v_{\sigma,\psi}}$ 在相差一个标量的意义下是 $\pi\circ\sigma$ 唯一的非零 ψ-惠特克向量，我们必有

$$U_{\sigma,\pi}f_{v_{\sigma,\psi},v_{\pi,\psi}}=\gamma\cdot f_{v_{\pi,\psi},v_{\sigma,\psi}},$$

其中 $\gamma\in\mathbb{C}$。容易验证，这个数 γ 不依赖于ψ-惠特克向量 $v_{\sigma,\psi}$ 和$v_{\pi,\psi}$的选取。

为简化记号，我们记 $v_{\sigma,\pi,\psi}=f_{v_{\sigma,\psi},v_{\pi,\psi}}$，其中记号中省略了 $v_{\sigma,\psi}$ 和 $v_{\pi,\psi}$。类似地，我们记 $v_{\pi,\sigma,\psi}=f_{v_{\pi,\psi},v_{\sigma,\psi}}$。

定义 3.1. 关于 ψ 的 π 和 σ 的 Shahidi 伽马因子，是满足以下条件的唯一数 $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\in\mathbb{C}$:

$$U_{\sigma,\pi}v_{\sigma,\pi,\psi}=\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\cdot v_{\pi,\sigma,\psi}.$$

注 3.2. 如果 $\pi\circ\sigma$ 不可约，那么 $\sigma\circ\pi$ 也是不可约的，并且由于 $U_{\sigma,\pi}$ 是一个非零交织算子，因此它是一个同构，且 $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 必须非零。然而，在一般情况下，目前尚不明显 $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 非零。我们将在后文证明这一点。

注 3.3. 如注 2.4所述，我们可以在 π、π上分别选取不变内积（·、·）$_\pi$。于是，在 π 和 σ上分别有一个自然的内积（·、·）$_{\sigma\otimes\pi}$，它通过以下公式在 $\sigma\otimes\pi$上定义了一个内积： $\sigma\circ\pi$ 公式

$$(f_1,f_2)_{\sigma\circ\pi}=\sum_{g\in P_{m,n}\backslash\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{F})}\left(f_1(g),f_2(g)\right)_{\sigma\otimes\pi}.$$

利用这个内积，惠特克泛函 $\ell_{\sigma\circ\pi,\psi}(f)=(f,v_{\sigma,\pi,\psi})_{\sigma\circ\pi}$与惠特克泛函 $\ell_{\sigma,\psi}(v_\sigma)=(v_\sigma,v_{\sigma,\psi})_\sigma$ 和 $\ell_{\pi,\psi}(v_\pi)=(v_\pi,v_{\pi,\psi})_\pi$ 之间由以下公式联系

$$\ell_{\sigma\circ\pi,\psi}(f)=\sum_{u\in N_{n,m}}\ell_{\sigma,\psi}\otimes\ell_{\pi,\psi}\left(f\left(\hat{w}_{n,m}u\right)\right)\psi^{-1}(u).$$

类似地，交换 π 和 σ的角色，可得惠特克泛函 $\ell_{\pi\circ\sigma,\psi}$ 由一个类似的公式给出。根据内积的定义，以及 $\pi\circ\sigma$ 中的元素在 $N_{n,m}$作用下左不变这一事实，我们看到，$U_{\pi,\sigma}$ 是 $U_{\sigma,\pi}$关于我们所选内积的伴随。利用 $v_{\sigma,\pi,\psi}$ 与 $v_{\pi,\sigma,\psi}$之间的关系，可得以下关系

$$\ell_{\sigma\circ\pi,\psi}\circ U_{\pi,\sigma}=\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\cdot\ell_{\pi\circ\sigma,\psi}.$$

这就是文献中通常定义 Shahidi 伽马因子的方式。

3.2.1. 对 ψ 的依赖。对于任意 $a \in \mathbb{F}^*$，令 ψ_a: $\mathbb{F} \to \mathbb{C}^*$ be 加法特征 er

$$\psi_a(x) = \psi(ax).$$

众所周知，$\mathbb{F}$ 上的所有非平凡加法特征都具有 ψ_a 的形式，其中$a \in \mathbb{F}^*$。本节给出 $\Gamma(\pi \times \sigma, \psi)$与 $\Gamma(\pi \times \sigma, \psi_a)$之间的关系。

设 $a \in \mathbb{F}^*$。假设 τ 是 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$的一个泛型表示，且具有一个非零的 ψ-惠特克向量$v_{\tau,\psi}$。令

$$d_k = \mathrm{diag}\left(1, a, a^2, \ldots, a^{k-1}\right).$$

那么，$\tau(d_k)\, v_{\tau,\psi}$是 τ的一个非零 ψ_a-惠特克向量。映射 $v \mapsto \tau(d_k)\, v$是一个线性同构，它将由 τ 的 ψ-惠特克向量张成的子空间映到由 τ的 ψ_a-惠特克向量张成的子空间。特别地，若$v_{\tau,\psi}$ 是 τ的唯一（相差一个数乘） ψ-惠特克向量，则 $\tau(d_k)\, v_{\tau,\psi}$是 τ的唯一（相差一个数乘） ψ_a-惠特克向量。

设 π 和 σ 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的惠特克型表示。设 $v_{\pi,\psi} \in \pi$ 和 $v_{\sigma,\psi} \in \sigma$ 是非零的 ψ-惠特克向量。假设 π 和 σ 具有中心特征，分别记为 ω_π 和 ω_σ。令

$$v_{\sigma,\pi,\psi_a} = f_{\sigma(d_m)v_{\sigma,\psi},\pi(d_n)v_{\pi,\psi}}.$$

类似地，我们定义 v_{π,σ,ψ_a}。

我们首先用 $v_{\sigma,\pi,\psi}$ 表示 v_{σ,π,ψ_a}。稍后我们将利用这一关系，证明伽马因子 $\Gamma(\pi \times \sigma, \psi_a)$ 与 $\Gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 之间的关系。

命题 3.4。我们有

$$v_{\sigma,\pi,\psi_a} = \omega_\sigma(a)^{-n}\, \rho(d_{n+m})\, v_{\sigma,\pi,\psi},$$

其中 $\rho(d_{n+m})$ 表示由 d_{n+m} 给出的右平移。

证明。令 $f = \omega_\sigma(a)^{-n}\, \rho(d_{n+m})\, v_{\sigma,\pi,\psi} \in \sigma \circ \pi$。由上述讨论可知，$f$ 是 $\sigma \circ \pi$ 的一个 ψ_a-惠特克向量。

我们有

$$f(\hat{w}_{n,m}) = \omega_\sigma(a)^{-n}\, v_{\sigma,\pi,\psi}(\hat{w}_{n,m} d_{n+m}).$$

令 $d_{n+m} = \mathrm{diag}(d_n, a^n d_m)$，则有 $\hat{w}_{n,m} d_{n+m} = \mathrm{diag}(a^n d_m, d_n)\, \hat{w}_{n,m}$，因此

$$f(\hat{w}_{n,m}) = (\sigma(d_m) \otimes \pi(d_n))\, v_{\sigma,\pi,\psi}(\hat{w}_{n,m}) = \sigma(d_m)\, v_{\sigma,\psi} \otimes \pi(d_n)\, v_{\pi,\psi}.$$

这表明 $f = v_{\sigma,\pi,\psi_a}$，因为它们都是 $\sigma \circ \pi$ 中的 ψ_a-惠特克向量，并且在点 $\hat{w}_{n,m}$ 处取值相同。□

定理 3.5。我们有

$$\Gamma(\pi \times \sigma, \psi_a) = \omega_\pi(a)^m \cdot \omega_\sigma(a)^{-n} \cdot \Gamma(\pi \times \sigma, \psi).$$

证明。根据定义，我们有

$$\Gamma(\pi \times \sigma, \psi_a) v_{\pi,\sigma,\psi_a} = U_{\sigma,\pi} v_{\sigma,\pi,\psi_a}.$$

根据命题 3.4,

$$\Gamma(\pi \times \sigma, \psi_a) \omega_\pi(a)^{-m}\, \rho(d_{n+m})\, v_{\pi,\sigma,\psi} = \omega_\sigma(a)^{-n}\, U_{\sigma,\pi} \rho(d_{n+m})\, v_{\sigma,\pi,\psi}.$$

因此，我们得到

$$\Gamma(\pi \times \sigma, \psi_a) \omega_\sigma(a)^n\, \omega_\pi(a)^{-m}\, v_{\pi,\sigma,\psi} = U_{\sigma,\pi} v_{\sigma,\pi,\psi},$$

这意味着

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi_a)\omega_\sigma(a)^n\omega_\pi(a)^{-m}=\Gamma(\pi\times\sigma,\psi),$$

如所要求。 □

3.2.2. $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 与 $\Gamma(\sigma^\vee\times\pi^\vee,\psi^{-1})$ 之间的关系。本小节中，我们分析 $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 与 $\Gamma(\sigma^\vee\times\pi^\vee,\psi)$ 之间的关系。

回顾一下，对于一般线性群 $\tau\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ 的有限维表示，我们有 $\tau^\vee\cong\tau^\iota$。参见第 2.2.1 节。若 $v_{\tau,\psi}$ 是 τ 的非零 ψ-惠特克向量，则 $\tau(w_k)v_{\tau,\psi}$ 是 τ^ι 的非零 ψ^{-1}-惠特克向量。

我们有

$$\pi^\iota\circ\sigma^\iota\cong(\sigma\circ\pi)^\iota$$

由同构 $S_{\sigma,\pi}$: $(\sigma\circ\pi)^\iota\cong\pi^\iota\circ\sigma^\iota$ 将 $f\in(\sigma\circ\pi)^\iota$ 映射为函数

$$(S_{\sigma,\pi}f)(g)=\tilde{f}(\hat{w}_{n,m}g^\iota).$$

Let

$$v_{\pi^\iota,\sigma^\iota,\psi^{-1}}=f_{\pi(w_n)v_{\pi,\psi},\sigma(w_m)v_{\sigma,\psi}}\in\pi^\iota\circ\sigma^\iota.$$

那么 $v_{\pi^\iota,\ \sigma^\iota,\ \psi^{-1}}$ 是 $\pi^\iota\circ\sigma^\iota$的一个非零 ψ^{-1}-惠特克向量。另一方面，根据上面的讨论，$(\sigma\circ\pi)^\iota$ 的一个非零 ψ^{-1}-惠特克向量为 $\rho(w_{m+n})v_{\sigma,\ \pi,\ \psi}$，其中 $\rho(w_{m+n})$表示由 w_{m+n}给出的右平移。因此 $S_{\sigma,\ \pi}\rho(w_{m+n})v_{\sigma,\ \pi,\ \psi}$是 $\pi^\iota\circ\sigma^\iota$的另一个非零 ψ^{-1}-惠特克向量。

命题 3.6。我们有

$$v_{\pi^\iota,\sigma^\iota,\psi^{-1}}=S_{\sigma,\pi}\rho(w_{m+n})v_{\sigma,\pi,\psi}. \tag{1}$$

证明。我们有

$$S_{\sigma,\pi}\rho(w_{m+n})v_{\sigma,\pi,\psi}(\hat{w}_{m,n})=\mathrm{sw}_{\sigma,\pi}v_{\sigma,\pi,\psi}(w_{m+n})=\pi(w_n)v_{\pi,\psi}\otimes\sigma(w_m)v_{\sigma,\psi},$$

其中最后一步用到了这一事实：$\mathrm{diag}(w_m,w_n)\hat{}w_{n,\ m}=w_{n+m}$.

由于 $S_{\sigma,\ \pi}\rho(w_{m+n})v_{\sigma,\ \pi,\ \psi}$和 $v_{\pi^\iota,\ \sigma^\iota,\ \psi^{-1}}$都是 Whittaker 型 $\pi^\iota\circ\sigma^\iota$表示的 ψ^{-1}-惠特克向量，且它们在点 $\hat{}w_{m,\ n}$处相等，因此二者相等。□

类似地，令

$$v_{\sigma^\iota,\pi^\iota,\psi^{-1}}=f_{\sigma(w_m)v_{\sigma,\psi},\pi(w_n)v_{\pi,\psi}}\in\sigma^\iota\circ\pi^\iota.$$

利用命题 3.6 并交换表示 π 与 σ 的角色，我们得到

$$v_{\sigma^\iota,\pi^\iota,\psi^{-1}}=S_{\pi,\sigma}\rho(w_{m+n})v_{\pi,\sigma,\psi}. \tag{2}$$

定理 3.7。设 π 和 σ 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的惠特克型表示。那么

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)=\Gamma(\sigma^\vee\times\pi^\vee,\psi^{-1}).$$

证明。根据定义，

$$U_{\pi^\iota,\sigma^\iota}v_{\pi^\iota,\sigma^\iota,\psi^{-1}}=\Gamma(\sigma^\iota\times\pi^\iota,\psi^{-1})\cdot v_{\sigma^\iota,\pi^\iota,\psi^{-1}}. \tag{3}$$

将 (1) 和 (2) 代入 (3)，得到

$$U_{\pi^\iota,\sigma^\iota}S_{\sigma,\pi}\rho(w_{m+n})v_{\sigma,\pi,\psi}=\Gamma(\sigma^\iota\times\pi^\iota,\psi^{-1})\cdot S_{\pi,\sigma}\rho(w_{m+n})v_{\pi,\sigma,\psi}.$$

简单计算可得

$$U_{\pi^\iota,\sigma^\iota}\circ S_{\sigma,\pi}=S_{\pi,\sigma}\circ U_{\sigma,\pi}.$$

因此，我们得到

$$S_{\pi,\sigma}\rho\left(w_{m+n}\right)U_{\sigma,\pi}v_{\sigma,\pi,\psi}=\Gamma(\sigma^{\iota}\times\pi^{\iota},\psi^{-1})\cdot S_{\pi,\sigma}\rho\left(w_{m+n}\right)v_{\pi,\sigma,\psi},$$

这意味着

$$U_{\sigma,\pi}v_{\sigma,\pi,\psi}=\Gamma(\sigma^{\iota}\times\pi^{\iota},\psi^{-1})\cdot v_{\pi,\sigma,\psi}.$$

因此，我们必有

$$\Gamma(\sigma^{\iota}\times\pi^{\iota},\psi^{-1})=\Gamma(\pi\times\sigma,\psi),$$

而定理中的结论由此得出，因为 $\sigma^{\iota}\cong\sigma^{\vee}$ 和 $\pi^{\iota}\cong\pi^{\vee}$。 □

结合定理 3.7 与定理 3.5，我们得到以下推论。

推论 3.8。设 π 和 σ 分别是 GL$_n$ (𝔽) 和 GL$_m$(𝔽) 的惠特克型表示。假设 π 和 σ 都具有中心特征，分别记为 ω_{π} 和ω_{σ}。则

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)=\Gamma(\sigma^{\vee}\times\pi^{\vee},\psi)\cdot\omega_{\pi}\left(-1\right)^{m}\omega_{\sigma}\left(-1\right)^{n}.$$

3.3. 伽马因子的乘法性。在本小节中，我们证明 $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 具有乘法性。

设 π 是 $_n$(𝔽) 的惠特克型表示。设 $m=m_1+m_2$，并设 σ_1和 σ_2 分别是 $_{m_1}$(𝔽) 和 $_{m_2}$(𝔽 的惠特克型表示。由定理 2.2 可知，抛物诱导 $\sigma_1\circ\sigma_2$ 也是惠特克型表示。因此，伽马因子 $\Gamma(\pi\times(\sigma_1\circ\sigma_2)\ \psi)$ 定义良好。我们将证明以下定理。

定理 3.9。

$$\Gamma(\pi\times(\sigma_1\circ\sigma_2),\psi)=\Gamma(\pi_1\times\sigma_1,\psi)\cdot\Gamma(\pi_2\times\sigma_2,\psi).$$

The 本定理的证明将占据本小节剩余部分。 .

注 3.10。 设 $\sigma\subset\sigma_1\circ\sigma_2$是 $\sigma_1\circ\sigma_2$的唯一不可约泛子表示。我们有， ψ-惠特克向量与 σ 的 ψ-惠特克向量相同， $\sigma_1\circ\sigma_2$。因此，定理 3.9蕴含

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)=\Gamma(\pi\times\sigma_1,\psi)\cdot\Gamma(\pi\times\sigma_2,\psi).$$

在证明定理之前，我们提及另外两个可由该定理立即推出的乘法性质。

第一条性质是，伽马因子在第一变量上也具有乘法性。这可由定理 3.9 结合定理 3.7推出。

推论 3.11. 设 π_1 和 π_2 分别是 GL$_{n_1}$(𝔽) 和 GL$_{n_2}$ (𝔽) 的惠特克型表示，且 σ 是 GL$_m$(𝔽) 的惠特克型表示。那么

$$\Gamma((\pi_1\circ\pi_2)\times\sigma,\psi)=\Gamma(\pi_1\times\sigma,\psi)\cdot\Gamma(\pi_2\times\sigma,\psi).$$

第二个推论使我们能够将两个抛物诱导表示的伽马因子表示为抛物诱导各分量的伽马因子的乘积。这是反复运用两个变量上的乘法性得到的。

推论 3.12. 设 $\pi_1,\ldots,\pi_r$ 和 $\sigma_1,\ldots,\sigma_t$ 分别是 GL$_{n_1}$ (𝔽) . . . , GL$_{n_r}$ (𝔽) 和 GL$_{m_1}$ (𝔽) . . . , GL$_{m_t}$ (𝔽) 的不可约泛型表示。则

(1) 我们有

$$\Gamma((\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_r) \times (\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_t), \psi) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} \Gamma(\pi_i \times \sigma_j, \psi).$$

(2) 若 π 是 $\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_r$ 的唯一不可约泛表示子表示，且 σ 是 $\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_t$ 的唯一不可约泛表示子表示，则

$$\Gamma(\pi \times \sigma, \psi) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{t} \Gamma(\pi_i \times \sigma_j, \psi).$$

I在接下来的几个小节中，我们为定理的证明做准备 3。 9.

3.3.1. 抛物诱导的传递性。设 τ_1、 τ_2 和 τ_3 分别是 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F})$、$\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_{n_3}(\mathbb{F})$ 的有限维表示。

我们以显然的方式将 $(\tau_1 \circ \tau_2) \otimes \tau_3$ 中的元素实现为 $\mathrm{GL}_{n_1+n_2}(\mathbb{F}) \to \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3$ 上的函数。类似地，我们以显然的方式将 $\tau_1 \otimes (\tau_2 \circ \tau_3)$ 中的元素实现为 $\mathrm{GL}_{n_2+n_3} \to \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3$ 上的函数。

考虑 空间 $(\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3$。我们将把该空间的元素视为函数 ns

$$f \colon \mathrm{GL}_{n_1+n_2+n_3}(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(\mathbb{F}) \to \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3,$$

其中 $f(g;h)$ 表示先在 $g \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2+n_3}(\mathbb{F})$ 处对 f 求值，再在 $h \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(\mathbb{F})$ 处对所得函数求值。类似地，我们将把 $\tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3)$ 的元素视为函数

$$f \colon \mathrm{GL}_{n_1+n_2+n_3}(\mathbb{F}) \times \mathrm{GL}_{n_2+n_3}(\mathbb{F}) \to \tau_1 \otimes \tau_2 \otimes \tau_3.$$

我们有一个表示同构

$$L_{\tau_1,\tau_2;\tau_3} \colon (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3 \to \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3,$$

它将函数 $f \in (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3$ 映射为

$$L_{\tau_1,\tau_2;\tau_3} f(g) = f(g; I_{n_1+n_2}),$$

其中 $g \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2+n_3}(\mathbb{F})$。

类似地，我们有一个表示同构

$$L_{\tau_1;\tau_2,\tau_3} \colon \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3) \to \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3,$$

它将函数 $f \in \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3)$ 映射为

$$L_{\tau_1;\tau_2,\tau_3} f(g) = f(g; I_{n_2+n_3}),$$

其中再次有 $g \in \mathrm{GL}_{n_1+n_2+n_3}(\mathbb{F})$。

现在假设 τ_1、 τ_2 和 τ_3 分别具有非零的 ψ-惠特克向量 $v_{\tau_1,\psi}$、 $v_{\tau_2,\psi}$ 和 $v_{\tau_3,\psi}$，并假设这些惠特克向量在数乘意义下唯一。与前文一样，我们记以下非零的 ψ-惠特克向量为 $v_{\tau_1,\tau_2,\psi} = f_{v_{\tau_1,\psi}, v_{\tau_2,\psi}} \in \tau_1 \circ \tau_2$ 和 $v_{\tau_2,\tau_3,\psi} = f_{v_{\tau_2,\psi}, v_{\tau_3,\psi}} \in \tau_2 \circ \tau_3$。我们还定义以下非零的 ψ-惠特克向量 $v_{\tau_1,\tau_2\circ\tau_3,\psi} = f_{v_{\tau_1,\psi}, v_{\tau_2,\tau_3,\psi}} \in \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_3)$ 和 $v_{\tau_1\circ\tau_2,\tau_3,\psi} = f_{v_{\tau_1,\tau_2,\psi}, v_{\tau_3,\psi}} \in (\tau_1 \circ \tau_2) \circ \tau_3$。最后，我们定义

$$v_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\psi} = L_{\tau_1;\tau_2,\tau_3} v_{\tau_1,\tau_2\circ\tau_3,\psi} = L_{\tau_1,\tau_2;\tau_3} v_{\tau_1\circ\tau_2,\tau_3,\psi} \in \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3.$$

那么 $v_{\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \psi}$ 是 $\tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3$ 中支撑在双陪集 $P_{n_1,\ n_2,\ n_3}\hat{w}_{n_3,\ n_2,\ n_1}Z_{n_1+n_2+n_3}$ 上的 ψ-惠特克向量，其中 $v_{\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \psi}(w_{n_3}\hat{},\ n_2,\ n_1) = v_{\tau_1,\ \psi} \otimes v_{\tau_2,\ \psi} \otimes v_{\tau_3,\ \psi}$，其中

$$\hat{w}_{n_3,n_2,n_1} = \begin{pmatrix} & & I_{n_1} \\ & I_{n_2} & \\ I_{n_3} & & \end{pmatrix}.$$

3.3.2. 交织算子。我们回到本小节开头所用的记号。设 π 是复数域 $\mathbb{F}$ 上一般线性群 GL_n 的惠特克型表示。设 $m = m_1 + m_2$，并设 σ_1 和 σ_2 分别是复数域 $\mathbb{F}$ 上一般线性群 GL_{m_1} 和复数域 $\mathbb{F}$ 上一般线性群 GL_{m_2} 的惠特克型表示。

利用上一小节中的同构，我们得到使下列图表可交换的映射。

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \pi) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\sigma_1} \otimes U_{\sigma_2,\pi}} & \sigma_1 \circ (\pi \circ \sigma_2) \\ \downarrow{\scriptstyle L_{\sigma_1;\sigma_2,\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle L_{\sigma_1;\pi,\sigma_2}} \\ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \pi & \xrightarrow{\tilde{U}_{\sigma_2,\pi}} & \sigma_1 \circ \pi \circ \sigma_2 \end{array}, \tag{4}$$

$$\begin{array}{ccc} (\sigma_1 \circ \pi) \circ \sigma_2 & \xrightarrow{U_{\sigma_1,\pi} \otimes \mathrm{id}_{\sigma_2}} & (\pi \circ \sigma_1) \circ \sigma_2 \\ \downarrow{\scriptstyle L_{\sigma_1,\pi;\sigma_2}} & & \downarrow{\scriptstyle L_{\pi,\sigma_1;\sigma_2}} \\ \sigma_1 \circ \pi \circ \sigma_2 & \xrightarrow{\tilde{U}_{\sigma_1,\pi}} & \pi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \end{array}, \tag{5}$$

$$\begin{array}{ccc} (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \pi & \xrightarrow{U_{\sigma_1 \circ \sigma_2,\pi}} & \pi \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) \\ \downarrow{\scriptstyle L_{\sigma_1,\sigma_2;\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle L_{\pi;\sigma_1,\sigma_2}} \\ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \pi & \xrightarrow{\tilde{U}_{\sigma_1 \circ \sigma_2,\pi}} & \pi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \end{array}. \tag{6}$$

我们来解释这些图表。先解释（4）。映射 $\mathrm{id}_{\sigma_1} \otimes U_{\sigma_2,\pi}$：$\sigma_1 \otimes (\sigma_2 \circ \pi) \to \sigma_1 \otimes (\pi \circ \sigma_2)$ 是表示同态。它定义了一个同态 $\sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \pi) \to \sigma_1 \circ (\pi \circ \sigma_2)$，我们仍将其记为 $\mathrm{id}_{\sigma_1} \otimes U_{\sigma_2,\pi}$。展开˜的定义后，我们看到映射 $U_{\sigma_2,\pi}$：$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \pi \to \sigma_1 \circ \pi \circ \sigma_2$ 由以下公式给出

$$\tilde{U}_{\sigma_2,\pi}(f)(g) = \sum_{u_{n,m_2} \in N_{n,m_2}} \mathrm{sw}_{\sigma_2,\pi} f\left(\begin{pmatrix} I_{m_1} & & \\ & & I_{m_2} \\ & I_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{m_1} & \\ & u_{n,m_2} \end{pmatrix} g\right). \tag{7}$$

交换图（5）类似。展开定义可得，映射˜$U_{\sigma_1,\ \pi}$：$\sigma_1 \circ \pi \circ \sigma_2 \to \pi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ 由下式给出：

$$\tilde{U}_{\sigma_1,\pi}(f)(g) = \sum_{u_{n,m_1} \in N_{n,m_1}} \mathrm{sw}_{\sigma_1,\pi} f\left(\begin{pmatrix} & I_{m_1} & \\ I_n & & \\ & & I_{m_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n,m_1} & \\ & I_{m_2} \end{pmatrix} g\right). \tag{8}$$

最后，在 t˜图（6）中，我们有$U_{\sigma_1 \circ \sigma_2,\ \pi}$：$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \pi \to \pi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ 由下式给出：

$$\tilde{U}_{\sigma_1 \circ \sigma_2,\pi}(f)(g) = \sum_{u_{n,m} \in N_{n,m}} \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2} \\ I_n & & \end{pmatrix} u_{n,m} g\right), \tag{9}$$

˜其中，对于 $g \in$ 一般线性群$_{n+m}(\mathbb{F})$，我们指的是 $f(g) = \mathrm{sw}_{\sigma_1,\pi}\mathrm{sw}_{\sigma_2,\pi} f(g)$。

命题 3.13。我们有

$$\tilde{U}_{\sigma_1\circ\sigma_2,\pi} = \tilde{U}_{\sigma_1,\pi}\circ\tilde{U}_{\sigma_2,\pi}.$$

证明。 设 $f \in \sigma_1\circ\sigma_2\circ\pi$ 和 $g \in$ 一般线性群$_{n+m}(\mathbb{F})$。那么由 (7) 和 (8),

$$\left(\tilde{U}_{\sigma_1,\pi}\circ\tilde{U}_{\sigma_2,\pi}f\right)(g) = \sum_{X\in M_{n\times m_1}(\mathbb{F})}\sum_{Y\in M_{n\times m_2}(\mathbb{F})}\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} I_{m_1} & & \\ & & I_{m_2}\\ & I_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{m_1} & & \\ & I_n & Y\\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.\times\begin{pmatrix} & I_{m_1} & \\ I_n & & \\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & X & \\ & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}g\right).$$

简单计算可得

$$\begin{pmatrix} I_{m_1} & & \\ & & I_{m_2}\\ & I_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{m_1} & & \\ & I_n & Y\\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I_{m_1} & \\ I_n & & \\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & X & \\ & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2}\\ I_n & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & X & Y\\ & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}.$$

因此，我们得到

$$\left(\tilde{U}_{\sigma_1,\pi}\circ\tilde{U}_{\sigma_2,\pi}f\right)(g) = \sum_{X\in M_{n\times m_1}(\mathbb{F})}\sum_{Y\in M_{n\times m_2}(\mathbb{F})}\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2}\\ I_n & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & X & Y\\ & I_{m_1} & \\ & & I_{m_2}\end{pmatrix}g\right),$$

˜且最后一个求和为$U_{\sigma_1\circ\sigma_2,\ \pi}(f)(g)$ 由 (9)。 □

3.3.3. 定理 *3.9* 的证明。 设 $v_{\pi,\ \psi}$， $v_{\sigma_1,\ \psi}$ 和$v_{\sigma_2,\ \psi}$ 是非零的 ψ-惠特克向量，分别属于 π, σ_1 和 σ_2。我们沿用上一小节中的记号。现在可以证明定理 3.9。

证明。根据定义，我们有

$$(\mathrm{id}_{\sigma_1}\otimes U_{\sigma_2,\pi})(v_{\sigma_1,\sigma_2\circ\pi,\psi}) = \Gamma(\pi\times\sigma_2,\psi)v_{\sigma_1,\pi\circ\sigma_2,\psi}.$$

由于 $L_{\sigma_1;\sigma_2,\ \pi}v_{\sigma_1,\ \sigma_2\circ\pi,\ \psi} = v_{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \pi,\ \psi}$ 以及 $L_{\sigma_1;\pi,\ \sigma_2}v_{\sigma_1,\ \pi\circ\sigma_2,\ \psi} = v_{\sigma_1,\ \pi,\ \sigma_2,\ \psi}$，由交换图（4）可得

$$\tilde{U}_{\sigma_2,\pi}v_{\sigma_1,\sigma_2,\pi,\psi} = \Gamma(\pi\times\sigma_2,\psi)v_{\sigma_1,\pi,\sigma_2,\psi}.$$

类似地，我们有

$$(U_{\sigma_1,\pi}\otimes\mathrm{id}_{\sigma_2})(v_{\sigma_1\circ\pi,\sigma_2,\psi}) = \Gamma(\pi\times\sigma_1,\psi)v_{\pi\circ\sigma_1,\sigma_2,\psi},$$

并且由交换图（5）可得

$$\tilde{U}_{\sigma_1,\pi}v_{\sigma_1,\pi,\sigma_2,\psi} = \Gamma(\pi\times\sigma_1,\psi)v_{\pi,\sigma_1,\sigma_2,\psi}.$$

最后，我们有

$$U_{\sigma_1\circ\sigma_2,\pi}v_{\sigma_1\circ\sigma_2,\pi,\psi} = \Gamma(\pi\times(\sigma_1\circ\sigma_2),\psi)v_{\pi,\sigma_1\circ\sigma_2,\psi}.$$

由于 $L_{\sigma_1,\ \sigma_2;\ \pi}v_{\sigma_1\circ\sigma_2,\ \pi,\ \psi} = v_{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \pi,\ \psi}$ 和 $L_{\pi;\sigma_1,\ \sigma_2}v_{\pi,\ \sigma_1\circ\sigma_2,\ \psi} = v_{\pi,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \psi}$，由交换图（6）

$$\tilde{U}_{\sigma_1\circ\sigma_2,\pi}v_{\sigma_1,\sigma_2,\pi,\psi} = \Gamma(\pi\times(\sigma_1\circ\sigma_2),\psi)v_{\pi,\sigma_1,\sigma_2,\psi}.$$

由于 $\tilde{U}_{\sigma_1\circ\sigma_2,\,\pi} = \tilde{U}_{\sigma_1,\,\pi}\circ\tilde{U}_{\sigma_2,\,\pi}$，我们得到

$$\Gamma(\pi\times(\sigma_1\circ\sigma_2),\psi)v_{\pi,\sigma_1,\sigma_2,\psi} = \Gamma(\pi\times\sigma_1,\psi)\Gamma(\pi\times\sigma_2,\psi)v_{\pi,\sigma_1,\sigma_2,\psi},$$

定理得证。 □

3.4. 用贝塞尔函数表示。本节中，我们用两个不可约泛型表示各自的贝塞尔函数来表示它们的 Shahidi 伽马因子。

设 π 和 σ 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。假设 π 和 σ 分别由其惠特克模型 $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ 和 $\mathcal{W}(\sigma,\psi)$ 实现。我们选取 π 和 σ 的惠特克向量为各自对应的贝塞尔函数，即选取 $v_{\pi,\psi} = \mathcal{J}_{\pi,\psi}$ 和 $v_{\sigma,\psi} = \mathcal{J}_{\sigma,\psi}$。记 $\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi} = v_{\sigma,\pi,\psi} = f_{\mathcal{J}_\sigma,\psi,\mathcal{J}_\pi,\psi}$，类似地记 $\mathcal{J}_{\pi,\sigma,\psi} = v_{\pi,\sigma,\psi} = f_{\mathcal{J}_\pi,\psi,\mathcal{J}_\sigma,\psi}$。

假设 $n\geq m$。根据定义，对于任意 $g\in$ 一般线性群$_{n+m}(\mathbb{F})$，

$$\left(U_{\sigma,\pi}\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi}\right)(g) = \Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\mathcal{J}_{\pi,\sigma,\psi}(g).$$

代入 $g = \hat{w}_{m,n}$，得到

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\mathcal{J}_{\pi,\sigma,\psi}(\hat{w}_{m,n}) = \sum_{u\in N_{n,m}} \mathrm{sw}_{\sigma,\pi}\,\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi}(\hat{w}_{n,m}u\hat{w}_{m,n}),$$

因此

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\mathcal{J}_{\pi,\psi}\otimes\mathcal{J}_{\sigma,\psi} = \sum_{A\in M_{n\times m}(\mathbb{F})} \mathrm{sw}_{\sigma,\pi}\,\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi}\begin{pmatrix} I_m & \\ A & I_n\end{pmatrix}. \tag{10}$$

为了使 $\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi}\begin{pmatrix} I_m & \\ A & I_n\end{pmatrix}$ 不为零，必须有 $\begin{pmatrix} I_m & \\ A & I_n\end{pmatrix}\in P_{m,n}\hat{w}_{n,m}Z_{n+m}$，因此必定存在 $\begin{pmatrix} p_1 & x\\ & p_2\end{pmatrix}\in P_{m,n}$ 和 $\begin{pmatrix} u_1 & y\\ & u_2\end{pmatrix}\in Z_{n+m}$，其中 $u_1\in Z_n$ 和 $u_2\in Z_m$，使得

$$\begin{pmatrix} p_1 & x\\ & p_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & \\ A & I_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & I_m\\ I_n & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 & y\\ & u_2\end{pmatrix},$$

即，

$$\begin{pmatrix} p_1+xA & x\\ p_2A & p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & u_2\\ u_1 & y\end{pmatrix}.$$

因此，我们有 $p_1+xA=0$ 和 $x=\left(0_{m\times(n-m)},u_2\right)$。

为继续讨论，我们将分为两种情况： $n>m$ 的情况和$n=m$的情况。

3.4.1. $n>m$的情形。在这种情形下，我们记为 $A=\begin{pmatrix} A_1\\ A_2\end{pmatrix}$，其中 $A_1\in M_{(n-m)\times m}(\mathbb{F})$ 且$A_2\in M_{m\times m}(\mathbb{F})$，并且 $x=\left(0_{m\times(n-m)},u_2\right)$。于是 $p_1+xA=0$ 推出 $p_1+u_2A_2=0$，因此 A_2 可逆。

记

$$\begin{pmatrix} I_n & \\ A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & & \\ A_1 & I_{n-m} & \\ A_2 & & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & & -A_2^{-1} \\ A_1 & I_{n-m} & \\ A_2 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & & A_2^{-1} \\ & I_{n-m} & -A_1A_2^{-1} \\ & & I_m \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -A_2^{-1} & I_m & \\ & A_1 & I_{n-m} \\ & A_2 & \end{pmatrix} \hat{w}_{n,m} \begin{pmatrix} I_m & & A_2^{-1} \\ & I_{n-m} & -A_1A_2^{-1} \\ & & I_m \end{pmatrix}.$$

因此，我们有

$$\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi}\begin{pmatrix} I_m & \\ A & I_n \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} I_{n-m} & -A_1A_2^{-1} \\ & I_m \end{pmatrix} \sigma\left(-A_2^{-1}\right) \otimes \pi\begin{pmatrix} A_1 & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\sigma,\psi} \otimes \mathcal{J}_{\pi,\psi}. \tag{11}$$

将（11）代回（10），得到

$$\begin{aligned} &\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\mathcal{J}_{\pi,\psi}\otimes\mathcal{J}_{\sigma,\psi} \\ &= \sum_{\substack{A_1\in M_{(n-m)\times m}(\mathbb{F}) \\ A_2\in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})}} \psi\begin{pmatrix} I_{n-m} & -A_1A_2^{-1} \\ & I_m \end{pmatrix} \pi\begin{pmatrix} A_1 & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix} \otimes \sigma\left(-A_2^{-1}\right) \mathcal{J}_{\pi,\psi} \otimes \mathcal{J}_{\sigma,\psi}. \end{aligned} \tag{12}$$

将（12）两边在（I_n， I_m）处取值，得到

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = \sum_{\substack{A_1\in M_{(n-m)\times m}(\mathbb{F}) \\ A_2\in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})}} \psi\begin{pmatrix} I_{n-m} & -A_1A_2^{-1} \\ & I_m \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} A_1 & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\sigma,\psi}\left(-A_2^{-1}\right).$$

记

$$\begin{pmatrix} A_1 & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-m} & A_1A_2^{-1} \\ & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix},$$

我们得到

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} A_1 & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} I_{n-m} & A_1A_2^{-1} \\ & I_m \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix},$$

因此

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = \sum_{\substack{A_1\in M_{(n-m)\times m}(\mathbb{F}) \\ A_2\in \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})}} \mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-m} \\ A_2 & \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\sigma,\psi}\left(-A_2^{-1}\right).$$

被加项与 A_1无关。利用贝塞尔函数的等变性，我们得到被加项在 Z_m 对 A_2的左平移下不变。最后，利用小节2.2.1中讨论的贝塞尔函数的性质，我们得到

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = q^{\frac{m(2n-m-1)}{2}}\omega_\sigma(-1) \sum_{x\in Z_m\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})} \mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-m} \\ x & \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\sigma^\vee,\psi^{-1}}(x),$$

其中 $q^{\frac{m(2n-m-1)}{2}} = \left|M_{(n-m)\times m}(\mathbb{F})\right| \cdot |Z_m|$。

3.4.2. 情形 $n=m$。在此情形下，我们有 $-p_1=xA$，因此 A 可逆。我们记

$$\begin{pmatrix} I_n & \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1} \\ A & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1} & I_n \\ & A \end{pmatrix} \hat{w}_{n,n} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix}.$$

因此，我们有

$$\mathcal{J}_{\sigma,\pi,\psi} \begin{pmatrix} I_m & \\ A & I_n \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix} \sigma\left(-A^{-1}\right) \otimes \pi(A)\, \mathcal{J}_{\sigma,\psi} \otimes \mathcal{J}_{\pi,\psi}. \tag{13}$$

将（13）代入（10），得到

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)\mathcal{J}_{\pi,\psi}\otimes\mathcal{J}_{\sigma,\psi} = \sum_{A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \psi \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix} \pi(A) \otimes \sigma\left(-A^{-1}\right) \mathcal{J}_{\pi,\psi} \otimes \mathcal{J}_{\sigma,\psi}. \tag{14}$$

在（I_n，I_n）处计算（14）两边的值，得到

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = \sum_{A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \psi \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\pi,\psi}(A)\, \mathcal{J}_{\sigma,\psi}\left(-A^{-1}\right).$$

被加项在 Z_n 左平移下不变。利用第 2.2.1 小节中讨论的贝塞尔函数性质，得到

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_\sigma(-1) \sum_{x\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \psi \begin{pmatrix} I_n & x^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\pi,\psi}(x)\, \mathcal{J}_{\sigma^\vee,\psi^{-1}}(x).$$

3.4.3. 各情形总结。 最后，我们用各情形下的贝塞尔函数写出一对不可约泛型表示的 Shahidi 伽马因子的公式。为此，我们使用定理 3.7 以及第3.4.1和3.4.2小节中的公式。

定理 3.14。设 π 和 σ 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。

(1) 若 $n>m$，则

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = q^{\frac{m(2n-m-1)}{2}}\omega_\sigma(-1) \sum_{x\in Z_m\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{F})} \mathcal{J}_{\pi,\psi} \begin{pmatrix} x & I_{n-m} \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\sigma^\vee,\psi^{-1}}(x).$$

(2) 若 $n=m$，则

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}\omega_\sigma(-1) \sum_{x\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \psi \begin{pmatrix} I_n & x^{-1} \\ & I_n \end{pmatrix} \mathcal{J}_{\pi,\psi}(x)\, \mathcal{J}_{\sigma^\vee,\psi^{-1}}(x).$$

(3) 若 $n<m$，则

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi) = q^{\frac{n(2m-n-1)}{2}}\omega_\pi(-1) \sum_{x\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \mathcal{J}_{\pi,\psi}(x)\, \mathcal{J}_{\sigma^\vee,\psi^{-1}} \begin{pmatrix} x & I_{m-n} \end{pmatrix}.$$

定理3.14使我们能够建立第2.3 小节中定义的 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子与 Shahidi 伽马因子之间的关系。根据命题2.6 和命题2.9，我们得到以下推论。

推论 3.15. 设 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示， σ 是 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。那么有等式

$$\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)=q^{\frac{m(2n-m-1)}{2}}\omega_\sigma(-1)\,\gamma(\pi\times\sigma^\vee,\psi)$$

在以下任一情形下：

(1) $n>m$。(2) $n=m$ 且 σ 为尖点表示。

4. Applications

4.1. 伽马因子的定量解释。在本节中，我们给出 Shahidi 伽马因子绝对值的一种表示论解释。我们的结果将归一化版本的 Shahidi 伽马因子的绝对值与这些表示的尖点支撑联系起来。

对于分别属于 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示 π 和 σ，我们将归一化 Shahidi 伽马因子定义为

$$\Gamma^*(\pi\times\sigma,\psi)=q^{-\frac{nm}{2}}\Gamma(\pi\times\sigma,\psi).$$

由推论 3.12 可知，在此规范化下，伽马因子仍然具有乘法性，即有以下命题成立。

命题 4.1. 设 π_1，...，π_r 以及 σ_1，...，σ_t 分别是 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F})$ ...，$\mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_{m_1}(\mathbb{F})$ ...，$\mathrm{GL}_{m_t}(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。假设 π 是 $\pi_1\circ\ldots\circ\pi_r$ 的唯一不可约泛子表示，且 σ 是 $\sigma_1\circ\ldots\circ\sigma_t$ 的唯一不可约泛子表示。则

$$\Gamma^*(\pi\times\sigma,\psi)=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{t}\Gamma^*(\pi_i\times\sigma_j,\psi).$$

由推论 3.15 、2.7 以及命题 2.12，我们得到以下命题。该命题使我们能够表示 $\Gamma(\pi\times\sigma,\psi)$ 的绝对值的大小，其中 π和 σ是尖点表示。

命题 4.2. 设 π 和 σ 分别是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示。那么

$$|\Gamma^*(\pi\times\sigma,\psi)|=\begin{cases}q^{-\frac{n}{2}} & n=m\ and\ \pi\cong\sigma,\\ 1 & otherwise.\end{cases}$$

命题 4.2 告诉我们，归一化 Shahidi 伽马因子的大小对于尖点表示而言起着“克罗内克δ函数”的作用。它可以被视为[8, 第 8 节。1]的一个类比。结合乘法性，我们得到以下定理，它允许我们通过计算π $|\Gamma^*(\pi\times\sigma,\psi)|$ 来恢复不可约泛型表示的尖点支撑，其中任取一个不可约尖点表示 σ。

定理 4.3. 设 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的一个不可约泛型表示，且 σ 是 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的一个不可约尖点表示。那么

$$|\Gamma^*(\pi\times\sigma,\psi)|=q^{-\frac{d_\pi(\sigma)m}{2}},$$

其中 $d_\pi(\sigma)$是 σ 在 π的尖点支撑中出现的次数 .

证明。 设 π 的尖点支撑为 $\{\pi_1, \ldots, \pi_r\}$. 那么 π 是 $\pi_1 \circ \ldots \circ \pi_r$的唯一不可约泛型子表示。结论由命题 4.1和命题 4.2立即得出。 □

作为推论，我们得到以下逆定理，它使我们能够根据归一化伽马因子的绝对值，判断一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的一般表示是否同构。它类似于 [1, 引理 A。6], 但我们的证明是在“群侧”进行的，而非“伽罗瓦侧”。

定理 4.4. 设 π_1 和 π_2 分别是 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F})$ 和 $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示。假设对于每个 $m > 0$ 以及 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的每个不可约尖点表示 σ，我们都有

$$|\Gamma^*(\pi_1 \times \sigma, \psi)| = |\Gamma^*(\pi_2 \times \sigma, \psi)|.$$

那么 $n_1 = n_2$ 和 $\pi_1 \cong \pi_2$。

证明。 由定理 4.3， π_1 和 π_2 具有相同的尖点支撑。由定理 2.2，给定一个尖点支撑，存在唯一的不可约泛型表示。 □

作为另一条推论，我们说明定理 2.5 和命题 2.10 中的函数方程对 π 和 σ均不成立，只要 π 的尖点支撑与 $\sigma^\vee$的尖点支撑有非空交集。

推论 4.5。设 π 和 σ 分别是一般线性群$_n(\mathbb{F})$ 和一般线性群$_m(\mathbb{F})$的不可约泛型表示，并且 $n > m$ (分别为 $n = m$)。设 π 的尖点支撑与 $\sigma^\vee$的尖点支撑有非空交集。则定理 *2.5* (分别是定理 *2.8*) 中的函数方程对 π 和 σ不成立。

证明。若函数方程对 π 和 σ 成立，则对 $\pi^\vee$ 和 $\sigma^\vee$ 也成立。这可通过对函数方程取复共轭看出；此操作将 ψ-Whittaker 函数变为对偶表示的 ψ^{-1}-Whittaker 函数。如推论 2.7（分别为推论 2.11）中那样，我们得到 $|\gamma(\pi \times \sigma, \psi)| = q^{-\frac{m(n-m-1)}{2}}$。只要 $\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$ 有定义，它就由命题 2.6（分别为命题 2.9）中的公式给出，因此推论 3.15 中的公式成立。这意味着 $|\Gamma^*(\pi \times \sigma^\vee, \psi)| = 1$。

另一方面，由于 π 和 $\sigma^\vee$ 的尖点支撑有共同元素，我们有 $|\Gamma^*(\pi \times \sigma^\vee, \psi)| < 1$。 □

注 4.6. 在其未发表的手稿 [24], 中，第一作者证明，只要 π 的尖点支撑与 $\sigma^\vee$的尖点支撑不相交，相关的函数方程就成立。由于篇幅所限，此处不列出证明。

4.2. 逆定理的推论。 第 4.1 小节的结果使我们能够改进 Nien 关于有限一般线性群不可约泛型表示的逆定理的结果。

Nien 在 [16] 中证明了以下定理。

定理 4.7. 设 π_1 和 π_2 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$的两个不可约尖点表示，且具有相同的中心特征。假设对每个 $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$ 以及 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$的每个不可约泛型表示 σ ，都有

$$\gamma(\pi_1 \times \sigma, \psi) = \gamma(\pi_2 \times \sigma, \psi). \tag{15}$$

于是 $\pi_1 \cong \pi_2$。

利用我们的结果和定理 4.7，我们可以推导出以下逆定理，其中 π_1 和 π_2 可以是任意泛型表示（而不只是尖点表示），并且（15）只需针对尖点表示 σ 进行验证（而不必针对所有泛型表示）。这与[9, 第 2 小节4]类似。

定理 4.8. 设 π_1 和 π_2 是 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$的两个具有相同中心特征的不可约泛型表示。假设对每个 $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$，以及每个 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示 σ，都有

$$\Gamma^*(\pi_1 \times \sigma, \psi) = \Gamma^*(\pi_2 \times \sigma, \psi). \tag{16}$$

那么 $\pi_1 \cong \pi_2$。

证明. 我们的证明对 π_1的尖点支撑的基数使用归纳法。

我们首先注意到，根据命题 4.1，对于任意 $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$ 以及任意 σ 的一般线性群$_m(\mathbb{F})$，都有：

$$\Gamma^*(\pi_1 \times \sigma, \psi) = \Gamma^*(\pi_2 \times \sigma, \psi).$$

假设 π_1 是尖点表示，那么它的尖点支撑的基数为 1。若 π_2 不是尖点表示，则其尖点支撑包含一个一般线性群 $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$的不可约尖点表示 τ，其中 $k \leq \frac{n}{2}$。由于 $k < n$，根据定理 4.3，我们有 $|\Gamma^*(\pi_1 \times \sigma, \psi)| = 1$。根据定理 4.3，我们还有 $|\Gamma^*(\pi_2 \times \sigma, \psi)| < 1$，这就产生了矛盾。因此，$\pi_2$ 也是尖点表示；根据推论 3.15 和定理 4.7，π_1 与 π_2 同构。

现在假设 π_1 不是尖点表示。令 $\{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$ 为 π_1 的尖点支撑，并令$\{\tau'_1, \ldots, \tau'_{r'}\}$ 为 π_2的尖点支撑。不失一般性，我们可设 τ_1 是 $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示，其中 $n_1 \leq \frac{n}{2}$。于是由定理 4.3 可得 $|\Gamma^*(\pi_1 \times \tau_1, \psi)| < 1$。由于 $n_1 \leq \frac{n}{2}$，我们有 $\Gamma^*(\pi_1 \times \tau_1, \psi) = \Gamma^*(\pi_2 \times \tau_1, \psi)$，因此 $|\Gamma^*(\pi_2 \times \tau_1, \psi)| < 1$。由定理 4.3，这意味着 τ_1 属于 π_2的尖点支撑。不失一般性，我们可以假设 $\tau'_1 = \tau_1$。由命题 4.1，我们推得，对于任意 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示 σ，其中 $m \leq \frac{n}{2}$，

$$\prod_{j=2}^{r} \Gamma^*(\tau_j \times \sigma, \psi) = \prod_{j=2}^{r'} \Gamma^*(\tau'_j \times \sigma, \psi). \tag{17}$$

设 π'_1 是具有尖点支撑 $\{\tau_2, \ldots, \tau_r\}$ 的 $\mathrm{GL}_{n-n_1}(\mathbb{F})$ 的唯一不可约泛型表示，设 π'_2 是具有尖点支撑 $\{\tau'_2, \ldots, \tau'_{r'}\}$ 的 $\mathrm{GL}_{n-n_1}(\mathbb{F})$ 的唯一不可约泛型表示。对于 $i = 1, 2$，π_i 和 π'_i 的中心特征满足关系 $\omega_{\pi_i} = \omega_{\pi'_i} \cdot \omega_{\tau_1}$。因此，$\pi'_1$ 和 π'_2 也具有相同的中心特征。根据命题 4.1，由 (17) 可知，对于每个 $m \leq \frac{n}{2}$ 以及 $\mathrm{GL}_m(\mathbb{F})$ 的每个不可约泛型表示 σ，

$$\Gamma^*(\pi'_1 \times \sigma, \psi) = \Gamma^*(\pi'_2 \times \sigma, \psi).$$

根据归纳法 $\pi'_1 \cong \pi'_2$，因此 $\{\tau_2, \ldots, \tau_r\} = \{\tau'_2, \ldots, \tau'_{r'}\}$。所以，$\pi_1 \cong \pi_2$，正如所需。

□

4.3. 贝塞尔函数的特殊值。 在本小节中，我们利用关于 Shahidi 伽马因子乘法性的结果，以及它与 Jacquet–Piatetski- Shapiro–Shalika 伽马因子的关系，为一般线性群$_n(\mathbb{F})$的不可约泛型表示的贝塞尔函数特殊值求出一个显式公式。对于两个分块，Curtis 和 Shinoda 在 [4, 引理 3。5]中给出了这样的公式。不过，他们的证明使用了

Deligne–Lusztig 理论，而我们的证明只使用一般线性群$_n(\mathbb{F})$的不可约尖点表示的 Green 特征标值，参见 [7, 第 6] 节和 [17, 第 3 节。1]。我们还给出了一个由三个分块构成的简单取值的公式。这推广了 Chang 关于一般线性群$_3(\mathbb{F})$的不可约泛型表示的公式[3]。

4.3.1. 两个块的特殊值公式。固定 $\mathbb{F}$ 的代数闭包 $\overline{\mathbb{F}}$ 。对于每个正整数 n，令 $\mathbb{F}_n$ 为 $\overline{\mathbb{F}}$ 中唯一的 n 次扩张。令 $\mathrm{N}_{\mathbb{F}_n/\mathbb{F}}\colon \mathbb{F}_n^* \to \mathbb{F}^*$ 和 $\widehat{\ }\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_n/\mathbb{F}}\colon \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}$ 分别为范数映射和迹映射。令 $\mathbb{F}_n^*$ 为由所有乘法特征 $\alpha\colon \mathbb{F}_n^* \to \mathbb{C}^*$ 构成的特征群。

已知，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示与 $\mathbb{F}_n^*$ 的大小为 n 的 $\widehat{\ }$Frobenius 轨道之间存在双射；也就是说，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的每个不可约尖点表示 π 都对应于一个形如 $\{\alpha, \alpha^q, \ldots, \alpha^{q^{n-1}}\}$、大小为 n 的集合，其中 $\alpha \in \widehat{\mathbb{F}_n^*}$。

我们首先回顾 Nien 关于计算 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子 $\gamma(\pi\times\chi,\psi)$ 的结果，其中 π 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示，而 χ 是一般线性群 $\mathrm{GL}_1(\mathbb{F})$ 的一个表示，也就是说，$\chi\colon \mathbb{F}^* \to \mathbb{C}^*$ 是一个乘法特征。Nien 的结果将 $\gamma(\pi\times\chi,\psi)$ 表示为一个高斯和。

命题 4.9（[16, 定理 1.1]）。设 π 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示，对应于 Frobenius 轨道 $\{\alpha, \alpha^q, \ldots, \alpha^{q^{n-1}}\}$，其中 $\alpha \in \widehat{\mathbb{F}_n^*}$。设 $\chi\colon \mathbb{F}^* \to \mathbb{C}^*$ 是一个乘法特征。那么

$$\gamma(\pi\times\chi,\psi) = (-1)^{n+1}\chi(-1)^{n+1}q^{-n+1}\sum_{\xi\in\mathbb{F}_n^*}\alpha^{-1}(\xi)\,\chi^{-1}(\mathrm{N}_{\mathbb{F}_n/\mathbb{F}}(\xi))\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_n/\mathbb{F}}(\xi)).$$

Nien 的证明仅使用了不可约尖点表示的 Green 特征公式，并未使用 Deligne–Lusztig 理论。

我们现在可以陈述关于贝塞尔函数特殊双块取值的结果。

定理 4.10. 设 $n>1$，且 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约泛型表示，其尖点支撑为 $\{\pi_1,\ldots,\pi_r\}$，其中对每个 $1\le j\le r$，π_j 是 $\mathrm{GL}_{n_j}(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示，对应于 Frobenius 轨道 $\{\alpha_j, \alpha_j^q, \ldots, \alpha_j^{q^{n_j-1}}\}$，其中 $\frown\alpha_j \in \mathbb{F}_{n_j}^*$ 是一个乘法特征。则对任意 $c\in\mathbb{F}^*$，

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1}\\ c & \end{pmatrix} = (-1)^{n+r}\,q^{-n+1}\sum_{\substack{\xi_1\in\mathbb{F}_{n_1}^*,\ldots,\xi_r\in\mathbb{F}_{n_r}^*\\ \prod_{j=1}^r \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{n_j}/\mathbb{F}}(\xi_j)=(-1)^{n-1}c^{-1}}}\ \prod_{j=1}^r\left(\alpha_j^{-1}(\xi_j)\,\psi\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{n_j}/\mathbb{F}}(\xi_j)\right)\right).$$

证明。 根据定理 3.14，我们有

$$\Gamma(\pi\times\chi,\psi) = q^{n-1}\sum_{x\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1}\\ x & \end{pmatrix}\chi^{-1}(-x).$$

$\widehat{\ }$乘以 $\chi(-c)$，并对所有 $\chi\in\mathbb{F}^*$ 取平均，再利用群上非平凡特征标之和为零这一事实，我们得到

$$\frac{1}{|\mathbb{F}^*|}\sum_{\chi\in\widehat{\mathbb{F}^*}}\Gamma(\pi\times\chi,\psi)\chi(-c) = q^{n-1}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1}\\ c & \end{pmatrix}. \tag{18}$$

根据推论 3.12，我们有

$$\Gamma(\pi\times\chi,\psi)=\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\pi_j\times\chi,\psi).$$

由推论 3.15 和命题4.9，可得

$$\Gamma(\pi_j\times\chi,\psi)=(-1)^{n_j+1}\,\chi(-1)^{n_j}\sum_{\xi\in\mathbb{F}_{n_j}^*}\alpha_j^{-1}(\xi)\,\chi(\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{n_j}/\mathbb{F}}(\xi))\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{n_j}/\mathbb{F}}(\xi)).$$

因此，我们得到 $\Gamma(\pi\times\chi,\psi)$ 由下式给出

$$(-1)^{n+r}\sum_{\xi_1\in\mathbb{F}_{n_1}^*,\ldots,\xi_r\in\mathbb{F}_{n_r}^*}\left(\prod_{j=1}^{r}\alpha_j^{-1}(\xi_j)\,\psi(\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{n_j}/\mathbb{F}}(\xi_j))\right)\chi\left((-1)^n\prod_{j=1}^{r}\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{n_j}/\mathbb{F}}(\xi_j)\right).\tag{19}$$

将 19 式中的表达式代入 $\Gamma(\pi\times\chi,\psi)$ 到 18 式中，并利用非平凡特征在群上的和为零这一事实，即得所需结果。□

注 4.11。（$\Gamma(\pi\times\chi,\psi)$ 在 19 式中的表达式最初由 Kondo 给出 [11]。他计算了戈德门–雅凯伽马因子的这一表达式。可以直接证明，对于两种因子都有定义的表示，戈德门–雅凯伽马因子与 Shahidi 伽马因子一致。我们的证明基于 Nien 的结果和伽马因子的乘法性，与 Kondo 给出的证明不同。另请参见 [15, 第四章第 6 节例 4]。

注 4.12。在 [28], 为求得公式，证明定理 4.10 时采用了该方法的一个广泛推广

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix}&I_{n-m}\\cI_m&\end{pmatrix}.$$

然而，[28] 依赖于 [27], 的结果，而这些结果又依赖于局部朗兰兹对应。此处给出的证明不依赖于这类结果。

4.3.2. 三个分块的特殊值公式。本小节中，我们利用已有结果证明一个贝塞尔函数特殊值的公式，该特殊值对应于一个由三个分块组成的简单取值。此结果推广了 Chang [3] 给出的公式；该公式后来被 Shinoda 和 Tulunay [22] 推广至 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{F})$。我们的证明不同于 Chang 的证明，后者基于 Gelfand–Graev 代数。

我们从以下命题开始。

命题 4.13。设 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的一个不可约泛型表示。那么对于任意$c\in\mathbb{F}^*$，以及任意 $g\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，有

$$\begin{aligned}&\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g)\,\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix}&I_{n-1}\\c&\end{pmatrix}\\&=q^{-(n-1)}\sum_{{}^t x=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{F}^{n-1}}\psi(-x_{n-1})\,\mathcal{J}_{\pi,\psi}\left(g\begin{pmatrix}I_{n-1}&x\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&I_{n-1}\\c&\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

证明。设 $m=1$ 并令 $\sigma=\chi\colon\mathbb{F}^*\to\mathbb{C}^*$ 为一个乘法特征。由（12），我们有 e

$$\Gamma(\pi\times\chi,\psi)\mathcal{J}_{\pi,\psi}=\sum_{\substack{{}^t x\in\mathbb{F}^{n-1}\\a\in\mathbb{F}^*}}\chi(-a^{-1})\,\psi\begin{pmatrix}I_{n-1}&-a^{-1}x\\&1\end{pmatrix}\pi\begin{pmatrix}x&I_{n-1}\\a&\end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}.$$

我们乘以 $\widehat{\chi}(-c)$，并对 $\chi \in \mathbb{F}^*$取平均。利用非平凡特征标在群上的和为零这一事实，并利用（18），得到

$$q^{n-1}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi} = \sum_{{}^t x=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{F}^{n-1}} \psi\left(-c^{-1}x_{n-1}\right)\pi\begin{pmatrix} x & I_{n-1} \\ c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}.$$

利用分解

$$\begin{pmatrix} x & I_{n-1} \\ c & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & c^{-1}x \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ c & \end{pmatrix},$$

并将求和变量 x 改为 $c\cdot x$，即可得到所需结果。 □

定理 4.14. 假设 $n \geq 3$。那么对于一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的任意不可约泛型表示 π 以及任意 c, $c' \in \mathbb{F}^*$，我们有

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-2} & -c' \\ c & & \end{pmatrix} = \sum_{s\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ s^{-1}c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & sc' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix}(\psi(s)-1) + \frac{\delta_{cc',1}}{q^{n-2}},$$

其中

$$\delta_{cc',1} = \begin{cases} 1 & cc'=1, \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

证明。 我们代入 $g = \begin{pmatrix} & c' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix}$ 命题 4.13 得到

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & c' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix} = q^{-(n-1)}\sum_{{}^t x=(x_1,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{F}^{n-1}}\psi(-x_{n-1})\,\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} cc' & \\ cx & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

若 $x_{n-1}=0$，则 $\begin{pmatrix} cc' & \\ cx & I_{n-1} \end{pmatrix}$ 属于米拉博利克子群。根据 [16, 引理 2。14]，可知，对于不属于上幺幂子群的米拉博利克子群元素，贝塞尔函数的值为零 Z_n。因此，我们得到，若 $x_{n-1}=0$，则 $x=0$ 并且

$$\psi(x_{n-1})\,\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} cc' & \\ cx & I_{n-1} \end{pmatrix} = \delta_{cc',1}.$$

现在假设 $x_{n-1}=t\neq 0$。记 ${}^t x' = (x_1,\dots,x_{n-2}) \in \mathbb{F}^{n-2}$。则有

$$\begin{pmatrix} cc' & \\ cx & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^{-1}c' \\ & I_{n-2} & t^{-1}x' \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & -t^{-1}c' \\ & I_{n-2} & \\ tc & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & (tc)^{-1} \\ & I_{n-2} & -t^{-1}x' \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\mathbb{F}^{n-1}$ 中有 $x_{n-1}=t$ 的 q^{n-2} 个元素，我们得到

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & c' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix} = \frac{\delta_{cc',1}}{q^{n-1}} + q^{-1}\sum_{t\in\mathbb{F}^*}\psi(-t)\,\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & & -t^{-1}c' \\ & I_{n-2} & \\ tc & & \end{pmatrix}.$$

我们按照 [3, 第 379] 页 [22, 和引理 4。2]。我们将 c 替换为 $s^{-1}c$，并将 c' 替换为 sc'，其中 $s \in \mathbb{F}^*$，得到

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ s^{-1}c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & sc' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix} = \frac{\delta_{cc',1}}{q^{n-1}} + q^{-1}\sum_{t\in\mathbb{F}^*}\psi(-st)\,\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-2} & \\ tc & & -t^{-1}c' \end{pmatrix}. \tag{20}$$

对（20）关于 $s \in \mathbb{F}^*$ 求和，得到

$$\sum_{s\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ s^{-1}c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & sc' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix} = \frac{q-1}{q^{n-1}}\delta_{cc',1} - q^{-1}\sum_{t\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-2} & \\ tc & & -t^{-1}c' \end{pmatrix}. \tag{21}$$

将（20）乘以 $\psi(s)$，并对 $s \in \mathbb{F}^*$ 求和，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ s^{-1}c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & sc' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix}\psi(s)\\ &= -\frac{\delta_{cc',1}}{q^{n-1}} + \frac{q-1}{q}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-2} & \\ c & & -c' \end{pmatrix} - q^{-1}\sum_{1\neq t\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-2} & \\ tc & & -t^{-1}c' \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{22}$$

从（22）中减去（21），得到所需结果。 □

注 4.15。 利用定理 4.10 中的公式及其证明可知，若 π 的尖点支撑不包含任何一般线性群$_1$（$\mathbb{F}$）的不可约表示，则有一个更简洁的公式：

$$\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-2} & \\ c & & -c' \end{pmatrix} = \sum_{s\in\mathbb{F}^*}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ s^{-1}c & \end{pmatrix}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\begin{pmatrix} & sc' \\ I_{n-1} & \end{pmatrix}\psi(s). \tag{23}$$

然而，如果 π 的尖点支撑包含一般线性群$_1(\mathbb{F})$ 的不可约表示，那么这个更简洁的公式就不成立。

注记 4.16。 利用定理 4.10中的表达式，我们知道 (23) 右边的表达式是一个指数和，它推广了 Friedlander–Iwaniec 特征和，见 [12, 定理 7.3、公式 (27) 和注记 7。4]。Friedlander–Iwaniec 特征和在张关于孪生素数猜想的工作中发挥了作用 [29]。

Appendix A. Computation of $\gamma(\pi \times \pi^\vee, \psi)$ when π is cuspidal

在本附录中，我们在 π 和 σ 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 和 $\pi \cong \sigma^\vee$ 的不可约尖点表示这一特殊情形下，计算 Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika 伽马因子$\gamma(\pi \times \sigma, \psi)$。我们将证明以下定理。

定理 A.1。设 π 是一般线性群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示。那么

$$\gamma(\pi \times \pi^\vee, \psi) = -1.$$

这已在 [25, 推论 4.3] 中完成。我们给出另一种证明，因为 [25] 中的证明依赖于关于 p-进群表示的结果。

为便于后续讨论，我们将证明以下一般引理。我们将证明定理 A.1 由此得出。

我们用 $P_n \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 表示米拉博利克子群。

引理 A.2. 设 G 是一个有限群，且 $H \leq G$ 是一个子群。假设 H 是形如 $H = N \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的半直积。设 $\Psi\colon H \to \mathbb{C}^*$ 是一个在 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 上平凡的特征。设 τ 是 G 的一个不可约表示，使得

(1) $\dim \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H \tau, \Psi) = 1$。 (2) $\dim \mathrm{Hom}_{N\rtimes P_n}(\mathrm{Res}_{N\rtimes P_n} \tau, \mathrm{Res}_{N\rtimes P_n} \Psi) = 1$。
(3) 存在一个泛函 $\ell \in \mathrm{Hom}_{Z_n}(\mathrm{Res}_{Z_n} \tau, \mathbb{C})$ 和一个向量 $v_0 \in \tau$，使得

$$\sum_{p\in Z_n\backslash P_n} \sum_{n\in N} \ell\left(\tau\left(np\right) v_0\right) \Psi^{-1}\left(n\right) = 1.$$

Then

$$\sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \sum_{n\in N} \ell\left(\tau\left(ng\right) v_0\right) \Psi^{-1}\left(n\right) \psi\left(\langle e_n g, e_1\rangle\right) = -1.$$

注 A.3. 若 $\mathbb{F}^* \leq H$ 属于 G 的中心，则（1）意味着 的中心特征在 $\mathbb{F}^* \leq H$ 上的限制 是平凡的。

证明。注意，我们有如下包含关系

$$\mathrm{Hom}_H\left(\mathrm{Res}_H \tau, \Psi\right) \subset \mathrm{Hom}_{N\rtimes P_n}\left(\mathrm{Res}_{N\rtimes P_n} \tau, \mathrm{Res}_{N\rtimes P_n} \Psi\right).$$

由于这两个空间都是一维的，因此它们相等。记 $v \in \tau$,

$$L\left(v\right) = \sum_{p\in Z_n\backslash P_n} \sum_{n\in N} \ell\left(\tau\left(np\right) v\right) \Psi^{-1}\left(n\right).$$

那么 $L \in \mathrm{Hom}_{N\rtimes P_n}(\mathrm{Res}_{N\rtimes P_n} \tau, \mathrm{Res}_{N\rtimes P_n} \Psi)$ 且 $L \neq 0$，因为 $L(v_0) = 1$。因此，$L \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H \tau, \Psi)$，这意味着对于任意 $v \in \tau$，以及任意$g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$，都有 $L(\tau(g)\ v) = L(v)$。

记

$$S = \sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \sum_{n\in N} \ell\left(\tau\left(ng\right) v_0\right) \Psi^{-1}\left(n\right) \psi\left(\langle e_n g, e_1\rangle\right).$$

我们有

$$S = \sum_{g\in P_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} L\left(\tau\left(g\right) v_0\right) \psi\left(\langle e_n g, e_1\rangle\right) = \sum_{g\in P_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \psi\left(\langle e_n g, e_1\rangle\right).$$

我们将此和按 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的中心分解

$$S = \sum_{g\in (\mathbb{F}^*\cdot P_n)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})} \sum_{a\in\mathbb{F}^*} \psi\left(\langle e_n ag, e_1\rangle\right).$$

我们有，对于 $t \in \mathbb{F}$,

$$\sum_{a\in\mathbb{F}^*} \psi\left(at\right) = \begin{cases} -1 & t \neq 0, \\ q-1 & t = 0. \end{cases}$$

因此，我们得到

$$S = (q-1) \sum_{\substack{g\in (\mathbb{F}^*\cdot P_n)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \\ \langle e_n g, e_1\rangle = 0}} 1 - \sum_{\substack{g\in (\mathbb{F}^*\cdot P_n)\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) \\ \langle e_n g, e_1\rangle \neq 0}} 1,$$

将其改写为

$$S=\sum_{\substack{g\in P_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\\ \langle e_ng,e_1\rangle=0}} 1-\frac{1}{|\mathbb{F}^*|}\sum_{\substack{g\in P_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\\ \langle e_ng,e_1\rangle\neq 0}} 1.$$

考虑一般线性群$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$在 $\mathbb{F}^n\setminus\{0\}$上的右作用。此作用是传递的。 e_n 的稳定子是米拉博利克子群 P_n。因此，对于 $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{F}^n\setminus\{0\}$，我们有

$$S_x=\sum_{\substack{g\in P_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\\ e_ng=x}} 1=1.$$

这意味着

$$S=\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}^n\setminus\{0\}\\ x_1=0}} S_x-\frac{1}{|\mathbb{F}^*|}\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}^n\setminus\{0\}\\ x_1\neq 0}} S_x=\left(q^{n-1}-1\right)-q^{n-1}=-1,$$

如所要求的。 □

下面我们来证明定理A.1。

证明。我们将在以下设置中使用引理A.2 。设 $G=$一般线性群$_n(\mathbb{F})\times$一般线性群$_n(\mathbb{F})$，并设$H=$一般线性群$_n(\mathbb{F})$ 对角嵌入。设 $N=\{I_n\}$ 且 $\Psi=1$。

设 π 是 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 的不可约尖点表示，则由舒尔引理，空间

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\left(\pi\otimes\pi^\vee,\mathbb{C}\right)$$

是一维的。由于 π 是尖点表示，由[7, 定理 22], ，将 π 限制到米拉博利克子群 P_n 后是不可约的。因此，由舒尔引理，空间

$$\mathrm{Hom}_{P_n}\left(\mathrm{Res}_{P_n}\pi\otimes\mathrm{Res}_{P_n}\pi^\vee,\mathbb{C}\right)$$

也是一维的。

我们取 $\tau=\mathcal{W}(\pi,\psi)\otimes\mathcal{W}(\pi^\vee,\psi^{-1})$，并令 $\ell\colon\mathcal{W}(\pi,\psi)\otimes\mathcal{W}(\pi^\vee,\psi^{-1})\to\mathbb{C}$ 为定义在纯张量上的泛函，其定义为

$$\ell\left(W\otimes W'\right)=W\left(I_n\right)\cdot W'\left(I_n\right).$$

我们有 $\ell\in\mathrm{Hom}_{Z_n}(\mathrm{Res}_{Z_n}\tau,1)$。令 $v_0=\mathcal{J}_{\pi,\psi}\otimes\mathcal{J}_{\pi^\vee,\psi^{-1}}$。

考虑

$$\sum_{p\in Z_n\backslash P_n}\sum_{n\in N}\ell\left(\tau\left(np\right)v_0\right)\Psi^{-1}\left(n\right)=\sum_{p\in Z_n\backslash P_n}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\left(p\right)\mathcal{J}_{\pi^\vee,\psi^{-1}}\left(p\right).$$

由[16, 引理 2.14], 可知，若$\mathcal{J}_{\pi,\psi}(p)\neq 0$ 对 $p\in P_n$成立，则 $p\in Z_n$。因此，

$$\sum_{p\in Z_n\backslash P_n}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\left(p\right)\mathcal{J}_{\pi^\vee,\psi^{-1}}\left(p\right)=\sum_{p\in Z_n\backslash Z_n}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\left(p\right)\mathcal{J}_{\pi^\vee,\psi^{-1}}\left(p\right)=1.$$

T因此，我们证明了引理 A.2 所要求的性质均已满足。

利用命题 2.9，可得

$$\gamma(\pi\times\pi^\vee,\psi)=\sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\mathcal{J}_{\pi,\psi}\left(g\right)\mathcal{J}_{\pi^\vee,\psi^{-1}}\left(g\right)\psi\left(\left\langle e_ng^{-1},e_1\right\rangle\right).$$

将 g 替换为 g^{-1} 并利用命题 2.3，可得

$$\gamma(\pi\times\pi^{\vee},\psi)=\sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\mathcal{J}_{\pi,\psi}(g)\,\mathcal{J}_{\pi^{\vee},\psi^{-1}}(g)\,\psi\left(\langle e_n g,e_1\rangle\right),$$

因此由引理 A.2

$$\gamma(\pi\times\pi^{\vee},\psi)=\sum_{g\in Z_n\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})}\sum_{n\in N}\ell\left(\tau\left(ng\right)v\right)\Psi^{-1}\left(n\right)\psi\left(\langle e_n g,e_1\rangle\right)=-1,$$

如所需。 □

References

[1] H. Atobe 和 W. T. Gan. 温和表示的局部 theta 对应与朗兰兹参数。《数学发明》，210(2):341–415，2017。3，21[2]J. Chai. 贝塞尔函数与 Jacquet 局部逆猜想。J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 21(6):1703–1728，2019。1[3] B. Chang. GL$_3(q)$ 的 Gelfand-Graev 特征分解。Comm. Algebra, 4(4):375–401，1976年。3，23，24，26[4] C. W. Curtis 和 K. Shinoda. 与有限约化群的 Gelfand-Graev 表示各分量相关的 ζ 函数与函数方程。载于《代数群与量子群表示论》，Adv. Stud. Pure Math. 第40卷，第121–139页。日本数学会，东京，2004年。3，22[5] W. T. Gan 和 A. Ichino. Gross-Prasad 猜想与局部 theta 对应。《数学发明》，206(3):705–799，2016年。3[6] W. T. Gan 和 G. Savin. 元辛群的表示 I：epsilon 二分性与局部朗兰兹对应。Compos. Math., 148(6):1655–1694，2012年。3[7] S. I. Gel'fand. 有限域上全线性群的表示。Math. USSR Sb., 12(13):13–39，1970年。4，5，6，23，28[8] H. Jacquet、I. I. Piatetskii-Shapiro 和 J. A. Shalika. Rankin-Selberg 卷积。Amer. J. Math., 105(2):367–464，1983年。1，2，6，20[9] D. Jiang、C. Nien 和 S. Stevens. 关于p-进一般线性群 GL$_n$ 局部逆问题的 Jacquet 猜想。J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 17(4):991–1007，2015年。3，22[10] N. M. Katz. Soto-Andrade 和的估计。J. Reine Angew. Math., 438:143–161，1993年。3[11] T. Kondo. 与有限域上一般线性群相关的高斯和。J. Math. Soc. Japan, 15:244–255，1963年。24[12] E. Kowalski. 素数间隙与算术级数中的素数：继 Y. Zhang 和 J. Maynard]之后。Ast ´erisque, (367-368):Exp. No. 1084, ix, 327–366，2015年。26[13] B. Liu 和 Q. Zhang. 有限域上经典群的伽马因子与逆定理。J. Number Theory, 234:285–332，2022年。1[14] B. Liu 和 Q. Zhang. 有限域上 G$_2$ 的一个逆定理。Math. Ann., 383(3-4):1217–1283，2022年。1[15] I. G. Macdonald. 对称函数与 Hall 多项式。牛津大学出版社，1998年。24[16] C. Nien. 有限域类比中的 Jacquet 猜想的一个证明。Amer. J. Math., 136(3):653–674，2014年。1，3，5，6，7，21，23，25，28[17] C. Nien. $n\times 1$ 局部伽马因子与高斯和。Finite Fields Appl., 46:255–270，2017年。23[18] I. Piatetski-Shapiro. 有限域 K上 $GL(2,K)$的复表示，第16卷。美国数学会，1983年。1[19] E.-A. Roditty. 有限域上一般线性群表示的伽马因子与贝塞尔函数。硕士论文，特拉维夫大学，2010年。1，6[20] F. Shahidi. GL(n)的交织算子与 Plancherel 测度的傅里叶变换。Amer. J. Math., 106(1):67–111，1984年。1，2，9[21] F. Shahidi. Langlands 朔猜想关于 Plancherel 测度的证明； p-进群的互补级数。Ann. of Math. (2), 132(2):273–330，1990年。1

[22] K. Shinoda 和 I. Tulunay. $GL_4(q)$ 的 Hecke代数表示。J. Algebra Appl., 4(6):631– 644，2005年。3，24，26[23] A. J. Silberger 和 E.-W. Zink. 有限一般线性群的广义Steinberg表示在正则椭圆集上的特征。Trans. Amer. Math. Soc., 352(7):3339–3356，2000年。4[24] D. Soudry. 有限域上成对伽马函数。1979。3，6，21[25] R. Ye. GL_n的零级表示的 Rankin-Selberg伽马因子。Forum Math., 31(2):503–516，2019年。1，7，26[26] R. Ye 和 E. Zelingher. GL_n尖点表示的外平方伽马因子：有限域类比与零级表示。Israel J. Math., 240(2):889–934，2020年。1[27] R. Ye 和 E. Zelingher. 有限一般线性群表示的 ε因子。J. Number Theory, 221:122–142，2021年。1，24[28] E. Zelingher. 有限一般线性群一般表示的贝塞尔函数取值。Adv. Math., 434:论文编号109314，47页，2023年。2，24[29] Y. Zhang. 素数间的有界间隙。Ann. of Math. (2), 179(3):1121–1174，2014年。26

School of Mathematical Sciences, Sackler Faculty of Exact Sciences,
Tel-Aviv Univer-sity, Israel 69978电子邮箱地址：soudry@tauex.tau.ac.il

Department of Mathematics, University of Michigan, 1844 East Hall,
530 Church Street,Ann Arbor, MI 48109-1043 USA电子邮箱地址：eladz@umich.edu