arXiv:2301.04975v1 [math.OA] 12 Jan 2023

量子齐性空间的等变覆盖空间

MAO HOSHINO

Abstract. 我们建立了紧量子群等变的 C*代数有限扩张的基础理论。特别地，我们专注于量子齐性空间的情形，并给出一个关于等变对应的 Tannaka-Krein 型结果。作为其应用，我们证明每个 Jones 值都可以作为等变条件期望的指标出现。在本文的后半部分，我们在一些情形下给出一个不可约性定理：对于满足有限性条件的一般紧量子群，以及对于 G_q 单连通紧李群的 Drinfeld-Jimbo 变形 G。作为应用，我们给出$\widehat{\ }$有限指标离散 G_q量子子群的完整分类。

1. Introduction

C*-张量范畴的概念在算子代数理论的近期发展中发挥了重要作用。它最初出现在子因子理论中，作为子因子分类的工具：事实上，每个因子包含都会给出一个作为不变量的 C*-张量范畴，并且在可核情形下该不变量是完整的（[Po94, 备注 7.2.1]）。此外，我们还可以利用它来理解 V. F. Jones 关于子因子指标取值范围的著名工作（[Jo83, 定理 4.3.1]）。

C*-张量范畴也出现在紧量子群理论中，作为其表示范畴。此外，C*-张量范畴上的模范畴这一概念也很有用。借助这一概念，经典的 Tannaka-Krein 对偶不仅推广到了紧量子群本身，也推广到了其在 C*-代数上的作用（[DY13, 定理 6.4]）。De Commer 和 Yamashita 利用这一对偶定理，在 $SU_q(2)$ 的量子齐性空间与具体的组合数据之间建立了一一对应关系（[DY15，定理 2.4]）。

本文旨在将这些 C*-张量范畴方法联系起来，并研究带有紧量子群作用的 C*-代数之间的包含。本文将其称为等变有限量子覆盖空间，因为在 C*-代数为交换的情形下，它可视为通常意义上的有限覆盖空间。我们还将其最小指标称为覆盖度。与非等变情形一样，等变有限量子覆盖空间可理解为某个适当 C*-张量范畴中的 Q-系统，即等变对应范畴中的 Q-系统。关于这一范畴的下述定理是本文的基础，它推广了 De Commer 和 Yamashita 的观察（[DY13，定理 7.1]）。

2020年数学主题分类。主要分类号 46L67，次要分类号 46L08、17B37。关键词和短语：算子代数、量子群、张量范畴。

定理 1（定理 3.14）。对于紧量子群 $\mathbb{G}$ 的量子齐性空间 A 和 B，我们有如下 C*-范畴之间的典范等价：

$$\mathbb{G}\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{A,B} \cong [\mathbb{G}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{A}, \mathbb{G}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{B}]^{\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}}.$$

这一结果的首个应用是以下存在性定理。

定理 2（定理 3.15）。对于任意 $d \in \{4\cos^2(\pi/n) \mid n \geq 3\} \cup [4, \infty)$，存在一个紧量子群 $\mathbb{G}$ 以及一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间 $A \subset B$，其覆盖度为 d。

在第 4 节中，我们着重研究由 $\mathbb{G}$ 的最大 Kac 量子子群 $\mathbb{K}$ 诱导的 $\mathbb{G}$-作用。我们不直接处理这些作用，而是研究 $\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模范畴及其之间的模函子。这使我们能够将不变性定理转化为 $\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模函子与 $\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$-模函子的比较定理。随后，我们发展了一个关于具有模迹的模范畴的一般理论，并由此得到关于紧量子群作用的以下定理。

定理 3（定理 4.29、定理 4.31、定理4.33）。设 A 是 $\mathbb{K}$ 的一个量子$\widetilde{\ }$齐性空间，A 是其诱导的 $\mathbb{G}$-C*代数。

(i) 若 A 有迹态且 $\operatorname{Irr}\ \mathbb{K}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{A}$ 有限，则诱导函子给出 C*-张量范畴的等价：$\mathbb{K}\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{A} \cong \mathbb{G}\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{\widetilde{A}}$。此外，它们都具有刚性。(ii) 若 A 由 $\mathbb{K}$ 的余交换量子子群的量子齐性空间诱导而来，则诱导函子给出群同构 $\widetilde{\operatorname{Pic}}_{\mathbb{K}}(A) \cong \widetilde{\operatorname{Pic}}_{\mathbb{G}}(A)$和 $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}}(A) \cong \operatorname{Aut}_{\mathbb{G}}(A)$。

陈述 (i) 将此前的研究 [CKS, So05] 关于量子 Bohr 紧化的结果包含为一个特例。

在第 5 节中，我们讨论 Drinfeld-Jimbo 变形。借助 $C(G_q)$和 $C(T\backslash G_q)$成熟的表示论，我们证明以下定理。

定理 4（推论 5.5）。设 A, B 是 $T\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$的量子齐性空间，且 A, B 是其诱导的 G_q-C*代数。那么，诱导函子给出 C* 范畴的等价：$T\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{A,\ B} \cong G_q\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{\widetilde{A},\ \widetilde{B}}$

$\widetilde{\ }$定理 5（推论 5.6）。设 A 是一个包含$C(T\backslash G_q)$ 且具有迹态的量子齐性空间。那么它具有 $\operatorname{Ind}_{T}^{G_q} A$ 的形式，其中 A 是 T 的一个量子齐性空间。

在本文最后，我们利用第 4 节中的结果，对 G_q 的有限指标离散量子子群给出完整的$\widehat{\ }$分类结果。

定理 6（定理 5.11）。令 P（分别为 Q）为 G 的权格（分别为根格）。$\widehat{\ }$的有限指标离散量子子群与 P/Q 的子群之间存在一个典范的一一对应。

2. Preliminaries

本文中，符号 – $\otimes$– 表示 C* 代数的空间张量积、 $\mathbb{C}$-向量空间的代数张量积，以及希尔伯特 C*模的外张量积。

对于希尔伯特空间 $\mathcal{H}$，其内积 $\langle –, – \rangle$ 关于第二个变量是 $\mathbb{C}$-线性的。元素 $\xi \in \mathcal{H}$ 被视为从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathcal{H}$的算子。若 $\mathcal{H}$ 是有限维的，则 $B(\mathcal{H})$ 上的未归一化迹记为 Tr。

2.1. 紧量子群及其对偶。

本小节简要回顾紧量子群。详细讨论请参见 [NT13] 。

紧量子群是由含幺 C*代数 A 和 $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ 组成的一对 $*$-同态 $\Delta\colon A \longrightarrow A \otimes A$，满足以下条件：

- the coassociativity $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$,
- the cancellation property $\overline{(A \otimes \mathbb{C})\Delta(A)} = \overline{(\mathbb{C} \otimes A)\Delta(A)} = A \otimes A$.

在这种情况下， A 记为 $C(\mathbb{G})$。 $\mathbb{G}$ 上的 Haar 态是 $C(\mathbb{G})$上的一个态 h ，满足双不变性（$h \otimes \mathrm{id}$）$\Delta(x) = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta(x) = h(x)1_{\mathbb{G}}$。这样的态总是存在且唯一。若 h 是忠实的，则称 $\mathbb{G}$ 为约化的。除非另有说明，我们只考虑约化紧量子群。

$\mathbb{G}$ 的酉表示是一个二元组 $\pi = (\mathcal{H}_\pi, U_\pi)$，由希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\pi$和酉元 $U_\pi \in M(\mathcal{K}(\mathcal{H}_\pi) \otimes C(\mathbb{G}))$组成，并满足 $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(U_\pi) = U_{\pi,\ 12}U_{\pi,\ 13}$。 $\mathbb{G}$ 的酉表示范畴记为 $\mathrm{Rep}\,\mathbb{G}$，其有限维对象构成的全子范畴记为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$。

设 π 是 $\mathbb{G}$ 的有限维酉表示，且 ξ, η 是 $\mathcal{H}_\pi$中的元素。则$(\xi^* \otimes 1)U_\pi(\eta \otimes 1)$ 定义了 $C(\mathbb{G})$中的一个元素，称为 π的矩阵系数。所有有限维酉表示的矩阵系数所构成的集合称为 $\mathbb{G}$的代数核，记为 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$。利用$C(\mathbb{G})$的乘积和余乘法，可以将 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$赋予 Hopf $*$-代数结构。其余单位和对合分别记为 ε 和 S。一般而言，对于任意 $x \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$，$S$ 满足 $S(S(x)^*)^* = x$ ，但不满足 $S^2 = \mathrm{id}$。当这一性质成立时，称$\mathbb{G}$ 为 Kac 型。

设 $\mathbb{H}$ 是另一个紧量子群。从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{G}$ 的同态是一个 Hopf $*$-代数同态，它将 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 映到 $\mathcal{O}(\mathbb{H})$。需要注意的是，φ 不一定定义在 $C(\mathbb{G})$ 上。另一方面，我们仍可将 $(\varphi \otimes \mathrm{id})\Delta$ 定义为一个 $*$-同态，它将 $C(\mathbb{G})$ 映到 $C(\mathbb{H}) \otimes C(\mathbb{G})$。更一般地，我们有如下引理，它是 Fell 吸收原理$\widehat{\ }$ 关于 $\mathbb{G}$ 的量子类比：

引理 2.1. 设 A 是一个 C*-代数，且 $\varphi\colon \mathcal{O}(\mathbb{G}) \longrightarrow A$ 是一个 $*$-同态。那么 $(\varphi \otimes \mathrm{id})\Delta$ 可延拓为一个 $*$-同态，它将 $C(\mathbb{G})$ 映到 $A \otimes C(\mathbb{G})$。

证明. 设 $(\pi, L^2(\mathbb{G}))$ 是 $C(\mathbb{G})$ 关于 $\mathbb{G}$ 的 Haar 态的 GNS表示。由于 $\mathbb{G}$ 是约化的，这个表示是忠实的。

只需证明希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的情形 $A = B(\mathcal{H})$。设 V 是 $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{G})$ 上满足以下条件的算子

$$V(\xi \otimes \Lambda(x)) = (\varphi \otimes \pi)(\Delta(x))(\xi \otimes \Lambda(1)).$$

那么 V 是酉的，并满足 $V(1\otimes\pi(x))V^*=(\varphi\otimes\pi)(\Delta(x))$。由 π 的忠实性即可得出结论。□

如果给定一个由其有限维酉表示的矩阵系数生成的 Hopf $*$-代数 $\mathcal{A}$，我们便可以构造一个紧量子群，使其代数核与 $\mathcal{A}$重合。这一事实使我们能够构造最大 Kac 量子子群。

定义 2.2. $\mathbb{G}$ 的最大 Kac 量子子群是与一个 Hopf $*$-代数相对应的紧量子群，该代数由 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 除以由 $S^2(x)-x$ 对所有 $x\in\mathcal{O}(\mathbb{G})$生成的双边理想所得。

注 2.3. 实际上，$\mathbb{K}$ 属于 Kac 型，并具有以下泛性质：设 $\mathbb{H}$ 是一个 Kac 型紧量子群。那么，任何从 $\mathbb{H}$ 到 $\mathbb{G}$ 的同态都可经由 $\mathbb{K}$分解。这是因为任意 Hopf 代数的同态

$*$-代数都会保持对合。

注 2.4. 设 $\mathbb{G}_u$ 是 $\mathbb{G}$ 的泛形式，$\mathbb{K}$ 是其典范 Kac 子群，由 [So05，附录] 引入。那么存在一个典范的 $*$-同态$\widetilde{q}$：$\mathcal{O}(\mathbb{G})\longrightarrow\mathcal{O}(\mathbb{K})$。此映射满足 $\widetilde{q}\circ S^2=\widetilde{q}$，因此 $\widetilde{q}$可经由 $\mathcal{O}(\mathbb{K})$分解。另一方面，$\mathbb{G}_u$ 的泛性质意味着，典范映射q：$\mathcal{O}(\mathbb{G})\longrightarrow\mathcal{O}(\mathbb{K})$可扩展为从 $C_u(\mathbb{G})$到 $C_r(\mathbb{K})$的 $*$-同态。由于$\widetilde{\ }$，$\mathbb{K}$ 的 Haar 态在 $C_r(\mathbb{K})$ 上是忠实的，因此根据其 $\widetilde{\ }$ 构造，此映射可经由 $C(\mathbb{K})$ 分解。这意味着 q 可经由 $\mathcal{O}(\mathbb{K})$分解，并给出一个同构$\widetilde{\ }$，它将 $\mathcal{O}(\mathbb{K})$映至 $\mathcal{O}(\mathbb{K})$。

例 2.5. 设 G 是半单紧李群，且 $q\in(-1,1)$。那么存在一个紧量子群 G_q，称为 G 的 Drinfeld-Jimbo q-变形，精确定义见 [NT13，定义 2.4.5。] G_q 的表示论与 G 的表示论十分相似，这意味着它们具有相同的不可约表示等价类和相同的融合规则。但实际上，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,G_q$ 与 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,G$ 作为 C*-张量范畴并不等价。

已证明，G_q 的最大 Kac 量子子群与 G 的极大环面 T 相同（[To07，引理 4.10。]）。

我们以离散量子群的概念结束本小节。其定义由紧量子群的 Pontrjagin 对偶给出，因此，当 Γ 是 $\mathbb{G}$ 的 Pontrjagin 对偶时，离散量子群 Γ 的约化 C*-代数就是 $C(\mathbb{G})$。在这种情况下，Γ 记作 $\mathbb{G}$。

关于闭量子子群的概念，参见 [DKSS]。存在几种不同的方法，但在离散情形下，它们都等价（[DKSS，定理 6.2]）。因此，我们可以采用以下定义：$\mathbb{G}$ 的闭量子子群$\widehat{\ }$是离散量子群 $\mathbb{H}$与保余乘法的含幺嵌入 $C(\mathbb{H})\subset C(\mathbb{G})$ 构成的一对。在这种情况下，$\mathbb{H}$的酉表示给出 $\mathbb{G}$ 的酉表示，且二者具有相同的交织空间。结合 Woronowicz 的 Tannaka-Krein 对偶（[NT13，定理 2.3.2]），我们得到 $\mathbb{G}$ 的离散量子子群与 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$的 C*-张量满子范畴之间的一一对应。

2.2. 紧量子群作用。关于详细讨论和参考文献，参见 [DC16]。设 $\mathbb{G}$为一个紧量子群。一个（约化的） $\mathbb{G}$-C*-代数，或 C*-代数上的 $\mathbb{G}$作用，是由 C*-代数 A 及忠实 $*$-同态 $\alpha\colon A \longrightarrow A \otimes C(\mathbb{G})$，满足以下条件：

- $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\alpha = (\alpha \otimes \mathrm{id})\alpha$,
- $\overline{\operatorname{span}}\,(\mathbb{C} \otimes C(\mathbb{G}))\alpha(A) = A \otimes C(\mathbb{G})$.

其不动点子代数 $\{x \in A \mid \alpha(x) = x \otimes 1\}$ 记作 $A^{\mathbb{G}}$ 或 A^{α}。我们还将 A 的代数核定义为 $\mathcal{A} = \{x \in A \mid \alpha(x) \in A \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})\}$。于是，Hopf $*$-代数 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$在 $\mathcal{A}$ 上有一个右余作用，该作用是将 α 限制到 $\mathcal{A}$所得。

我们称 $\mathbb{G}$-C*-代数 A 为 $\mathbb{G}$ 的量子齐性空间，如果它是含幺的且满足 $A^{\mathbb{G}} = \mathbb{C}1_A$。

例 2.6。C*-代数 $C(\mathbb{G})$具有一个由 Δ定义的典范 $\mathbb{G}$-作用。此外， $C(\mathbb{G})$的每个 $\mathbb{G}$-不变 C*-子代数也具有一个 $\mathbb{G}$-作用，而且实际上是 $\mathbb{G}$的量子齐性空间。我们称其为 $\mathbb{G}$的右余理想。

例 2.7. 设 $\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{G}$ 的一个紧量子子群，且 $q\colon \mathcal{O}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{H})$ 是典范映射。由引理 2.1，$(q \otimes \mathrm{id})\Delta$ 可延拓为定义在 $C(\mathbb{G})$ 上的 $*$-同态 $\ell_{\mathbb{H}}$。由于 $\ell_{\mathbb{H}}$ 相对于 $C(\mathbb{G})$ 上的典范$\mathbb{G}$-作用是 $\mathbb{G}$- 等变的，因此我们有一个右余理想 $C(\mathbb{H}\backslash\mathbb{G}) = \{x \in C(\mathbb{G}) \mid \ell_{\mathbb{H}}(x) = 1 \otimes x\}$。

更一般地，对于一个 $\mathbb{H}$-C*-代数， B 的诱导 $\mathbb{G}$-C*-代数定义为以下一对对象：

- $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}} A = \{x \in A \otimes C(\mathbb{G}) \mid (\alpha \otimes \mathrm{id})(x) = (\mathrm{id} \otimes \ell_{\mathbb{H}})(x)\}$,
- $\widetilde{\alpha} = \mathrm{id} \otimes \Delta$ 的限制。

例如，平凡 $\mathbb{H}$-C*-代数 $\mathbb{C}$ 的诱导 $\mathbb{G}$-C*-代数与 $C(\mathbb{H}\backslash\mathbb{G})$ 同构。

若 A 和 B 是 $\mathbb{G}$-C*-代数，其代数核分别为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，则当 $(\varphi \otimes \mathrm{id})\alpha = \beta\varphi$ 成立时，称线性映射 $\varphi\colon \mathcal{A} \longrightarrow B$ 是 $\mathbb{G}$-等变的。类似地，当 $\psi \otimes \mathrm{id}\colon A \otimes C(\mathbb{G}) \longrightarrow B \otimes C(\mathbb{G})$ 有定义时，也可定义 $\psi\colon A \longrightarrow B$ 的等变性。

以下对引理 2.1 的推广有助于得到一个 $\mathbb{G}$-等变的完全正映射。若 $\mathcal{A}$是 $*$-代数，且 B 是 C*-代数，则当对任意 $X \in \mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$，$(\varphi \otimes \mathrm{id})(X^*X)$ 在 $B \otimes M_n(\mathbb{C})$ 中为正时，称线性映射$\varphi\colon \mathcal{A} \longrightarrow B$ 是完全正的。

命题 2.8. 设 A 和 B 是 $\mathbb{G}$-C*-代数，其代数核分别为 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$。若 $\varphi\colon \mathcal{A} \longrightarrow B$ 是 $\mathbb{G}$-等变且完全正的，则它可延拓为一个从 A 到 B 的 $\mathbb{G}$-等变完全正映射。

关于此命题的证明，见 A.1 小节。

接下来我们讨论 $\mathbb{G}$-C*-代数上的模这一概念。

定义 2.9. 设 A 是一个 $\mathbb{G}$-C*-代数。$\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模是一个有序对 (E, α_E)，由希尔伯特 A-模 E 和线性映射 $\alpha_E\colon E \longrightarrow E \otimes C(\mathbb{G})$ 构成，并满足以下条件：

- $\alpha(\langle \xi, \eta \rangle_A) = \langle \alpha_E(\xi), \alpha_E(\eta) \rangle_{A \otimes C(\mathbb{G})}$ for any $\xi, \eta \in E$,
- $\overline{\operatorname{span}}\,\alpha_E(E)(\mathbb{C} \otimes C(\mathbb{G})) = E \otimes C(\mathbb{G})$.

这里， $E \otimes C(\mathbb{G})$ 表示希尔伯特 A-模 E 与希尔伯特 $C(\mathbb{G})$-模 $C(\mathbb{G})$ 的外张量积。

如果 A 是量子齐性空间且 E 是有限生成的，那么 E 必定是投射的（[DC16，定理 6.21.]）。

$\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模的范畴记作 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A$，其有限生成对象构成的全子范畴记作 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$。我们用符号 $\mathcal{L}_A(-,-)$表示可伴随的右 A-模映射空间，也用$\mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(-,-)$表示 $\mathbb{G}$-等变映射空间。

对于 $E \in \mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$，紧 A-模映射代数上有一个 $\mathbb{G}$-作用 $\widetilde{\alpha}\colon\ \mathbb{G} \curvearrowright \mathcal{K}_A(E)$。此外，我们可以将此作用扩张为一个 $*$-同态$\widetilde{\alpha}\colon\ \mathcal{L}_A(E) \longrightarrow \mathcal{L}_{A\otimes C(\mathbb{G})}(E \otimes C(\mathbb{G}))$，并且满足$(\widetilde{\alpha} \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha} = (\mathrm{id} \otimes\Delta)\widetilde{\alpha}$。对于任意 $T \in \mathcal{L}_A(E)$，算子 $\widetilde{\alpha}(T)$是 $E \otimes C(\mathbb{G})$ 上唯一满足$\widetilde{\alpha}(T)\alpha_E(\xi) = \alpha_E(T\xi)$的算子。

我们还可以如下定义等变 Hilbert C*-模的代数核和诱导：

- $\mathcal{E} = \{\xi \in E \mid \alpha_E(\xi) \in E \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})\}$,
- $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}} F = \{x \in F \otimes C(\mathbb{G}) \mid (\alpha_F \otimes \mathrm{id})(x) = (\mathrm{id} \otimes \ell_{\mathbb{H}})(x)\}$.

容易看出， $\mathcal{E}$ 具有右 $\mathcal{A}$-作用以及 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 的右余作用。

2.3. C*-张量范畴及其模范畴。详细介绍请参见 [NT13]。C*-范畴是一个 $\mathbb{C}$-线性范畴，每个 Hom 空间上都带有范数，并配有一个反线性对合 $*\colon\ \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,X)$，满足 C*-恒等式： $\|T^*T\| = \|T\|^2$。本文还假设 C*-范畴对于取直和和子对象封闭。

设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为 C*-范畴。函子 $F\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ 称为 C*-函子，若其保持伴随算子，即对于任意态射 T，有 $F(T^*) = F(T)^*$。对于 C*-函子之间的自然变换，我们可以通过对每个分量取伴随算子来定义其伴随。我们用符号 $[\mathcal{C},\mathcal{D}]_{\mathrm{b}}$ 表示从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的 C*-函子及有界自然变换所构成的范畴。这里，自然变换的有界性定义为其各分量一致范数有界。显然， $[\mathcal{C},\mathcal{D}]_{\mathrm{b}}$ 也具有 C*-范畴的结构。

严格 C*-多张量范畴是一个三元组 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1})$，由 C*-范畴 $\mathcal{C}$、C*-双函子 $-\otimes-\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$以及一个称为单位对象的对象 $\mathbf{1}$ 构成，并满足$U\otimes(V\otimes W) = (U\otimes V)\otimes W$以及 $\mathbf{1}\otimes U = U = U\otimes\mathbf{1}$，对任意对象 $U,V,W \in \mathcal{C}$均成立。若 $\mathcal{C}(\mathbf{1},\mathbf{1}) = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathbf{1}}$ 成立，则称 $\mathcal{C}$ 为严格 C*-张量范畴。设 X 是 $\mathcal{C}$的一个对象。若存在一个四元组 $(X,\overline{X},R,\overline{R})$，其中 $\overline{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象，且 $R \in \mathcal{C}(\mathbf{1},\overline{X}\otimes X)$ 和 $\overline{R} \in \mathcal{C}(\mathbf{1},X\otimes\overline{X})$ 满足共轭方程，则称 X 具有刚性。

$$(\mathrm{id}_X \otimes R^*)(\overline{R} \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X, \quad (\mathrm{id}_{\overline{X}} \otimes \overline{R}^*)(R \otimes \mathrm{id}_{\overline{X}}) = \mathrm{id}_{\overline{X}}.$$

这个四元组称为共轭方程的解。 $\mathcal{C}$ 中由 $\mathcal{C}$ 的所有刚性对象构成的全子范畴记为 $\mathcal{C}^{\mathrm{f}}$；当 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\mathrm{f}}$时，称 $\mathcal{C}$ 为刚性范畴，也就是说， $\mathcal{C}$ 的所有对象都是刚性的。在这样的 C*-张量范畴中，每个 Hom 空间都是有限维的（参见 NT13，命题 2.2.8]）。

设 X 是严格刚性 C*-张量范畴 $\mathcal{C}$中的一个刚性对象。那么，我们可以使共轭方程的一个解的值$\|R\|\|\overline{R}\|$ 达到最小。这个最小值

称为 X的范畴维数，记作 $d(X)$。当 $\|R\|^2 = \|\overline{R}\|^2 = d(X)$时，称解 $(X,\overline{X}, R,\overline{R})$ 为标准解。这里我们指出，对于固定的 X ，任意两个标准解彼此酉等价；这意味着，给定一个标准解 $(X,\overline{X},R,\overline{R})$ 和任意酉 $u \in \mathcal{C}(\overline{X},\overline{X}')$，通过考察 $(X,\overline{X}', (u\otimes \mathrm{id})R, (\mathrm{id}\otimes u)\overline{R})$，即可得到所有标准解。由此，我们可以利用标准解定义范畴迹 Tr_X：$\mathcal{C}(X,X) \longrightarrow \mathbb{C}$，其公式为 $\mathrm{Tr}_X(T)\,\mathrm{id}_1 = R^*(\mathrm{id}\otimes T)R$。该定义与标准解的选择无关，并且等于 $\overline{R}^*(T\otimes \mathrm{id})\overline{R}$。类似地，我们还可以定义偏迹 $\mathrm{Tr}_X\otimes\mathrm{id}: \mathcal{C}(X\otimes Y, X\otimes Z) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,Z)$ 和 $\mathrm{id}\otimes\mathrm{Tr}_X$：$\mathcal{C}(Y\otimes X, Z\otimes X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y,Z)$。范畴迹实际上具有以下迹性质：对于任意态射 $S,T\in\mathcal{C}(X,Y)$，我们有 $\mathrm{Tr}_X(S^*T) = \mathrm{Tr}_Y(TS^*)$。

设 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ 是严格 C*-多张量范畴。从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的 C*-张量函子是一对 (Θ,θ)，由 C*-函子 Θ: $\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$和酉自然变换$\theta$: $\Theta(-)\otimes\Theta(-) \longrightarrow \Theta(-\otimes -)$构成，并满足以下条件

- $\Theta(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$,
- 以下图表对 $U,V,W\in\mathcal{C}$交换：

$$\begin{array}{ccc} \Theta(U)\otimes\Theta(V)\otimes\Theta(W) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\theta_{V,W}} & \Theta(U)\otimes\Theta(V\otimes W) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{U,V}\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{U,V\otimes W}} \\ \Theta(U\otimes V)\otimes\Theta(W) & \xrightarrow[\theta_{U\otimes V,W}]{} & \Theta(U\otimes V\otimes W). \end{array}$$

如果 (Θ',θ') 也是从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的 C*-张量函子，那么自然变换η: $F\longrightarrow G$ 称为幺半群的，如果它满足$\theta'_{U,V}\circ(\eta_U\otimes\eta_V) = \eta_{U\otimes V}\circ\theta_{U,V}$对 $U,V\in\mathcal{C}$成立。

定义 2.10 ([DY13, 定义 2.14.])。设 $\mathcal{C}$ 是一个严格刚性 C*-张量范畴。一个 $\mathcal{C}$-模范畴是三元组 $(\mathcal{M},\otimes,a)$，由 C*-范畴 $\mathcal{M}$、C*-双函子 $-\otimes-: \mathcal{C}\times\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$ 以及酉自然变换 a: $-\otimes(-\otimes-) \longrightarrow (-\otimes-)\otimes-$构成，并满足以下条件。

- $\mathbf{1}\otimes X = X$ 对于任意 $X\in\mathcal{M}$,
- 对于任意 U、V、$W\in\mathcal{C}$ 和 $X\in\mathcal{M}$，下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} U\otimes(V\otimes(W\otimes X)) & \xrightarrow{a_{U,V,W\otimes X}} & (U\otimes V)\otimes(W\otimes X) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes a_{V,W,X}} & & \downarrow{\scriptstyle a_{U\otimes V,W,X}} \\ U\otimes((V\otimes W)\otimes X) & \xrightarrow[a_{U,V\otimes W,X}]{} & (U\otimes V\otimes W)\otimes X. \end{array}$$

我们指出，在固定的 C*-范畴 $\mathcal{M}$ 上赋予 a $\mathcal{C}$-模结构，会产生一个从 $\mathcal{C}$ 到 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 的 C*-张量函子，反之亦然。若对于任意 X、$Y\in\mathcal{M}$，$\mathcal{M}(X,Y)$ 都是有限维的，则称 $\mathcal{M}$ 为半单。本文假设所有 $\mathcal{C}$-模范畴都是半单的。若对于任意 X、$Y\in\mathcal{M}$，都存在 $U\in\mathcal{C}$，以及一个从 X 到 $U\otimes Y$的等距映射，则称 $\mathcal{C}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 为连通的。

例 2.11. 设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群。那么它的表示范畴 $\mathrm{Rep}\,\mathbb{G}$ 是一个 C*-张量范畴，而 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 是一个刚性 C*-张量范畴。

取一个由 $\mathbb{G}$ 作用的量子齐性空间 A。那么 $\mathbb{G}$- $\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}_A$ 具有 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模范畴的结构：对于 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 和 $E \in \mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}_A$，$\mathcal{H}_\pi \otimes E$ 可以构成一个带有 $\mathbb{G}$-作用 $v\otimes\xi \longmapsto U_{\pi,\ 13}(v\otimes\alpha_E(\xi))$ 的 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模。这个 $\mathrm{Rep}^{\mathbb{G}}$-模范畴是连通且半单的（[DY13，命题 3.11]）。

若 $\mathcal{N}$ 是另一个 $\mathcal{C}$-模范畴，则从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{C}$-模函子是由一个 C*-函子 $F\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 和一个酉自然变换 $f\colon F(-\otimes -) \xrightarrow{\ \sim\ } \otimes F(-)$ 组成的一对，并且对任意 U、$V \in \mathcal{C}$ 和 $X \in \mathcal{M}$，下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} F(U\otimes(V\otimes X)) & \xrightarrow{f_{U,V\otimes X}} & U\otimes F(V\otimes X) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f_{V,X}} & U\otimes(V\otimes F(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle F(a_{U,V,X})} & & & & \downarrow{\scriptstyle a_{U,V,F(X)}} \\ F((U\otimes V)\otimes X) & & \xrightarrow[f_{U\otimes V,X}]{} & & (U\otimes V)\otimes F(X). \end{array}$$

从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{C}$-模函子范畴记作 $[\mathcal{M},\mathcal{N}]^{\mathcal{C}}_{\mathrm{b}}$。这里，从 (F, f) 到 (G, g) 的态射由一个有界自然变换 $\eta\colon F \longrightarrow G$ 给出，使得对任意 $U \in \mathcal{C}$ 和 $X \in \mathcal{M}$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} F(U\otimes X) & \xrightarrow{f_{U,X}} & U\otimes F(X) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{U\otimes X}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\eta_X} \\ G(U\otimes X) & \xrightarrow[g_{U,X}]{} & U\otimes G(X). \end{array}$$

如果我们将 $\mathcal{M}$ 上的 $\mathcal{C}$-模结构视为 C*-张量函子 $(\Phi, \varphi)\colon \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$，那么 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]^{\mathcal{C}}_{\mathrm{b}}$ 可以看作某种类似 Drinfeld 中心的对象。事实上，若给定一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{C}$-模函子 (F, f)，则 f 定义了一个从 $F\circ\Phi(-)$ 到 $\Phi(-)\circ F$ 的酉自然变换 c，满足编织方程 $c_{U\otimes V} = (\varphi_{U,V}\otimes \mathrm{id}_F)(\mathrm{id}\otimes c_V)(c_U\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\varphi_{U,V}{}^*)$。反过来也成立；此时，$\mathcal{C}$-模函子的态射可以视为酉半编织的态射。

2.4. 条件期望的指标。本小节汇集条件期望指标的定义与相关事实，该指标由 [Wa90] 引入。

设 B 是一个含幺 C*代数，A 是 B 的一个含幺 C*子代数，并有一个条件期望 $E\colon B \longrightarrow A$。若 E 存在一个拟基，即满足下述条件的有限族 $(u_i)_{i=1}^n \subset A$，则称 E 具有有限指标。

$$a = \sum_{i=1}^{n} u_i E(u_i^* a)$$

对任意 $a \in A$。在这种情况下，我们可以通过公式 $\mathrm{Index}\, E = \sum_{i=1}^n u_i u_i^*$ 定义 E 的指标。这与拟基的选择无关，并且 Index E 是 $Z(A)^\times$ 的一个元素。另一方面，我们还有一种基于 Pimsner-Popa 不等式 [PP86, Proposition 2.1.] 的较经典的指标概念。以下数值称为 E ([Po95, Definition 1.1.1]) 的概率指标：

$$\mathrm{Index}^p\, E = \min\{c > 0 \mid cE - \mathrm{id}_A \text{ is positive.}\}.$$

我们还通过将正性替换为完全正性，定义 E 的标量指标：

$$\mathrm{Index}^s\, E = \min\{c > 0 \mid cE - \mathrm{id}_A \text{ is completely positive.}\}.$$

显然，我们有 $\mathrm{Index}^p\, E \leq \mathrm{Index}^s\, E \leq \infty$。此外，以下命题成立。

命题 2.12（[FK00，定理 1.]）。设 $E\colon B \longrightarrow A$ 是一个条件期望。那么，E 的概率指标有限，当且仅当 E 的标量指标有限。

我们用符号 B_E 表示一个希尔伯特 A-模，它由 A 关于一个 B-值内积 $\langle x, y\rangle_B = E(x^*y)$ 完备化得到。对于专家而言，[Wa90，命题 2.1.5.] 的以下推广或许是众所周知的（参见 [BDH，定理 3.5.]）。证明见 A.2 小节。

命题 2.13。设 $E\colon B \longrightarrow A$ 是一个条件期望。那么，E 具有有限指标，当且仅当它满足以下两个条件：

(i) 指标$^p\, E < \infty$。(ii) 希尔伯特 A-模 B_E 可分解为有限生成投射希尔伯特 A-模的直和。

在这种情况下，我们有指标$^s\, E =$ ||指标 E||。

3. Equivariant finite quantum covering spaces

3.1. 定义与刻画。设 $\mathbb{G}$为一个紧量子群。若 $A \subset B$ 是 $\mathbb{G}$-C*代数的一个包含，则当 E 是一个 $\mathbb{G}$-等变条件期望时，我们称 $E\colon B \longrightarrow A$ 为一个 $\mathbb{G}$-期望。

定义 3.1. 设 $A \subset B$ 为含幺 $\mathbb{G}$-C*代数的一个含幺包含。若 $A \subset B$ 存在一个具有有限指标的 $\mathbb{G}$-期望 $E\colon B \longrightarrow A$，则称 $A \subset B$ 是 A 上的有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。

本文仅讨论量子齐性空间上的有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。在这种情况下，我们可以用概率指标的有限性替代指标的有限性。

令 A 为 $\mathbb{G}$的一个量子齐性空间。

定理 3.2. 设 $A \subset B$ 是含幺 $\mathbb{G}$-C*-代数之间的含幺包含，并带有一个$\mathbb{G}$-期望 E。那么以下条件等价：

(i) E 的指标有限。(ii) E 的概率指标有限。

此外，在这些条件下，可以在 B的代数核 $\mathcal{B}$ 中取 E 的一个拟基。

证明. 首先应注意，借助 $\mathbb{G}$ 在 B上的作用，可以将 B_E 构造成一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特A-模。随后，根据 DC16，定理 6.21，B_E 分解为有限生成投射希尔伯特 A-模的直和。因此，(i)与(ii)的等价性由命题 2.13 得出。

接下来证明最后一个结论。由于 B_E 是一个有限生成的 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模，因此它具有不可约分解。于是我们可以取一个有限

维酉表示 π，其对应于 $\mathbb{G}$，以及一个嵌入 $V\colon B_E \longrightarrow \mathcal{H}_\pi \otimes A$，它将 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模嵌入 [DC16，定理 6.23.]。于是 V 及其伴随算子 V^* 保持各自的代数核，因此我们可以在 $\mathcal{B}$ 中得到一个拟基 $(V^*(e_i \otimes 1))_{i=1}^n$，其中 $(e_i)_{i=1}^n$ 是 $\mathcal{H}_\pi$的标准正交基。□

推论 3.3. 设 $A \subset B$ 是一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。那么，对于 $A \subset B$ 的任意中间含幺 $\mathbb{G}$-C*-子代数 C，$A \subset C$ 也是一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。

证明. 固定一个具有有限指标的 $\mathbb{G}$-期望 $E\colon B \longrightarrow A$。利用定理 3.2 的条件 (ii)，我们可以轻易验证 E 在 C 上的限制具有有限性。□

若 $\mathbb{G}$ 是 Kac 型，我们可以通过平均化过程去除条件期望的等变性。设 A、B 为 $\mathbb{G}$-C*代数，$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$ 分别为它们的代数核。若给定一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\varphi\colon \mathcal{B} \longrightarrow A$，那么其等变化是一个 $\mathbb{C}$- 线性映射 $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{B} \longrightarrow A$，定义如下：

$$\widetilde{\varphi}(x) = (\mathrm{id} \otimes h)(\alpha(\varphi(x_{(0)}))(1 \otimes S(x_{(1)}))).$$

h 和 S 分别表示 $\mathbb{G}$ 的 Haar 态和对合。利用 h 的强双不变性（[KV00，命题 5.24，推论 5.35]），可知 $\widetilde{\varphi}$ 是一个从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{A}$的 $\mathbb{G}$-等变映射。

引理 3.4. 设 $\varphi\colon B \longrightarrow A$ 是一个完全正映射。若 $\mathbb{G}$ 是 Kac 型，则 φ 的等变化可扩张为一个从 B 到 A的 $\mathbb{G}$-等变完全正映射。

证明. 由于 $\mathbb{G}$ 是 Kac 型，我们有

$$\widetilde{\varphi}(y^*x) = (\mathrm{id} \otimes h)((1 \otimes S(y_{(1)})^*)\alpha(\varphi(y_{(0)}^* x_{(0)}))(1 \otimes S(x_{(1)}))).$$

这个等式蕴含 $\widetilde{\varphi}$的完全正性，因此我们可以应用命题 2.8。□

命题 3.5. 假设 $\mathbb{G}$ 是 Kac 型。对于具有 $A^\alpha = \mathbb{C}1_A$的含幺 $\mathbb{G}$-C*代数之间的含幺包含 $A \subset B$，以下条件等价：

(i) 包含 $A \subset B$ 是一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。(ii) 存在一个期望 $E\colon B \longrightarrow A$，其指标为^p $E < \infty$。

证明。设 E 是从 B 到 A 的条件期望。首先，我们需要证明 E 的等变化 E 仍然是条件期望。由于根据前一个命题，$E^{\sim}$ 是酉完全正映射，因此只需证明 E 是 $\mathcal{B}$ 上的 $\mathcal{A}$-双模映射。取 $a \in \mathcal{A}$ 和 $x \in \mathcal{B}$。于是有

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}(xa) &= (\mathrm{id} \otimes h)(\alpha(E(x_{(0)}a_{(0)}))(1 \otimes S(x_{(1)}a_{(1)}))) \\
&= (\mathrm{id} \otimes h)(\alpha(E(x_{(0)}))\alpha(a_{(0)})(1 \otimes S(a_{(1)}))(1 \otimes S(x_{(1)}))) \\
&= (\mathrm{id} \otimes h)(\alpha(E(x_{(0)}))(a \otimes S(x_{(1)}))) \\
&= \widetilde{E}(x)a.
\end{aligned}$$

$\sim$ $\sim$等式 $E(ax) = aE(x)$ 可由如下方式得到：

$$\widetilde{E}(ax) = \widetilde{E}(x^*a^*)^* = (\widetilde{E}(x)^*a^*)^* = a\widetilde{E}(x).$$

现在， E 的概率指标有限，因此由命题 2.12 可知， E 的标量指标 c 也有限。于是， $cE - \mathrm{id}_B$ 的等变化是一个完全正映射 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$，并且与 $cE - \mathrm{id}_B$ 一致。这意味着 E 具有有限的标量指标，因此 $A \subset B$ 是一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。□

3.2. 覆盖度。接下来我们考虑一个与覆盖空间覆盖度类似的概念。

定义 3.6. 设 $A \subset B$ 是一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。那么 $A \subset B$ 的覆盖度是所有从 B 到 A 的 $\mathbb{G}$-期望的标量指标的下确界。

注 3.7. 如果 $\mathbb{G}$ 是 Kac 型，那么覆盖度与该包含的所有条件期望的标量指标的下确界一致。这一事实可由命题 3.5 的证明得出。

要计算给定有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间的覆盖度，将其视为某个适当 C*-张量范畴中刚性对象的维数会很有用。

设 A 和 B 是 $\mathbb{G}$ 的量子齐性空间。一个 $\mathbb{G}$-等变的 (A, B)-对应由一对对象组成： $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 B-模 E ，以及从 A 到 $\mathcal{L}_B(E)$ 的单位 $\mathbb{G}$-等变 $*$-同态。 $\mathbb{G}$-等变 (A, B)-对应的范畴记为 $\mathbb{G}\text{-Corr}_{A,\ B}$，其由右有限生成对应组成的全子范畴记为 $\mathbb{G}\text{-Corr}^{\mathrm{rf}}_{A,\ B}$。当 $A = B$ 时，我们也使用符号 $\mathbb{G}\text{-Corr}_A$ 和 $\mathbb{G}\text{-Corr}^{\mathrm{f}}_A$。

设 $A \subset B$ 是具有 $A^\alpha = \mathbb{C}1_A$ 的单位元 $\mathbb{G}$-C*代数的一个包含。若给定一个具有有限指标的 $\mathbb{G}$-期望 $E\colon B \longrightarrow A$ ，则可得到一个关于 A 的 $\mathbb{G}$-对应 B_E ，其左作用由左乘法给出。此外， B_E 可在 $\mathbb{G}\text{-Corr}^{\mathrm{f}}_A$ 中构成一个 C*-Frobenius 代数（[BKLR，第 3.1] 节），其映射如下：

- $m\colon B_E \otimes_A B_E \longrightarrow B_E$，由 m 的乘法诱导，
- $\iota\colon A \longrightarrow B_E$，由包含 $A \subset B$ 诱导。

利用 E 的拟基 $(v_i)_{i=1}^n$ ， $m^*\colon B_E \longrightarrow B_E \otimes_A B_E$ 可按如下方式计算：

$$m^*(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes v_i^* x$$

因此我们有 $mm^*(1_B) = \mathrm{Index}\, E$ ，且 $\iota^* m m^* \iota(a) = E(\mathrm{Index}\ E)a$。由于对任意 $b \in B$， $\iota^*(b) = E(b)$，我们还得到

$$d(B_E) \leq \|\iota^* m m^* \iota\| = E(\mathrm{Index}\, E) \leq \|\mathrm{Index}\, E\|,$$

这里，左侧是 B_E 作为 $\mathbb{G}$- $\mathrm{Corr}^{\mathrm{f}}_A$ 中一个对象的维数。此外，如果 (B_E, m, ι) 是一个 Q-系统，这些不等式实际上会变成等式。反过来， $\mathbb{G}\text{-Corr}^{\mathrm{f}}_A$ 中任意一个 C*-Frobenius 代数都会给出一对有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间 $A \subset B$ 和 $\mathbb{G}$-期望 $E\colon B \longrightarrow A$ ，且具有有限指标。因此，由于任何 Frobenius C*- 代数都同构于一个 Q-系统（如 [NY18，定理 2 所示），我们可以得到以下命题。9]

命题 3.8. 设 A 是 $\mathbb{G}$的量子齐性空间。

(i) 有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间 A 与 $\mathbb{G}$- $\mathrm{Corr}_A^{\mathrm{f}}$中的 Q-系统之间存在一一对应关系。(ii) 设 $A \subset B$ 是有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。其覆盖度 d等于相应 Q-系统的维数。此外，存在一个 $\mathbb{G}$-期望 $E\colon B \longrightarrow A$，其指标为 $E = d1_B$。

例 3.9. 当 $A = \mathbb{C}$ 是平凡的 $\mathbb{G}$-C*-代数时， $\mathbb{G}$- $\mathrm{Corr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{f}}$ 不过就是 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$。因此，有限量子 $\mathbb{G}$-空间在 $\mathbb{C}$ 上的覆盖度与其作为酉表示的量子维数相同。特别地，若考虑 $B(\mathcal{H}_\pi)$ 上的伴随作用，则 $\mathbb{C} \subset B(\mathcal{H}_\pi)$ 的覆盖度为 $(\dim_q \pi)^2$

作为命题 3.8 的应用，我们证明有限量子 $\mathbb{G}$-空间在 $C(\mathbb{G})$ 上的覆盖度必为正整数。

令 $\mathrm{Rep}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 表示 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 的含幺 $*$-表示所构成的范畴。利用 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 上的余乘法，我们可以将 $\mathrm{Rep}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 构造成一个 C*-张量范畴。对于任意 $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$，我们可以如下构造一个 $\mathbb{G}$-等变对应 E_π，其定义在 $C(\mathbb{G})$ 上：

- 作为希尔伯特 $C(\mathbb{G})$-模， $E_\pi = \mathcal{H}_\pi \otimes C(\mathbb{G})$。
- $\mathbb{G}$ 的左作用由恒等映射 $\otimes\Delta$给出。
- $C(\mathbb{G})$的左作用由$(\pi \otimes \lambda)\Delta$给出，其中 λ 是 $C(\mathbb{G})$在 $C(\mathbb{G})$上的左乘法。

根据引理 2.1，$(\pi \otimes \lambda)\Delta$ 可以定义在 $C(\mathbb{G})$上。

以下命题是 [AV16，命题 2.2]的量子类比。

命题 3.10。函子$(\pi, \mathcal{H}_\pi) \longmapsto E_\pi$ 给出了从 $\mathrm{Rep}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$到 $\mathbb{G}$- $\mathrm{Corr}^{C(\mathbb{G})}$的 C*-张量范畴等价。

在证明这一点之前，我们先准备下面这个引理。

引理 3.11. 设 E 为一个 $\mathbb{G}$等变希尔伯特 $C(\mathbb{G})$-模。下列公式在 E的代数核 $\mathcal{E}$ 上定义了一个半内积：

$$\langle \xi, \eta \rangle = \varepsilon(\langle \xi, \eta \rangle_{C(\mathbb{G})})$$

证明. 唯一非平凡的部分是证明对每个 $\xi \in \mathcal{E}$， $\langle \xi, \xi \rangle$ 的正性。将 E 替换为由 ξ 和η生成的 $\mathbb{G}$等变希尔伯特 $C(\mathbb{G})$子模后，我们可以假设 E 是有限生成的。

如果另有一个 $F \in \mathbb{G}\text{-模}_{C(\mathbb{G})}^{\mathrm{f}}$，以及一个等距映射 $V \in \mathcal{L}_{C(\mathbb{G})}^{\mathbb{G}}(E, F)$，则有

$$\langle V\xi, V\eta \rangle = \varepsilon(\langle V\xi, V\eta \rangle_{C(\mathbb{G})}) = \varepsilon(\langle \xi, \eta \rangle_{C(\mathbb{G})}) = \langle \xi, \eta \rangle .$$

由于 $\mathbb{G}$- $\mathrm{Mod}_{C(\mathbb{G})}^{\mathrm{f}}$ 作为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模范畴是连通的，上述等式意味着只需对任意 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 证明关于 $\mathcal{H}_\pi \otimes C(\mathbb{G})$ 的命题。但这显而易见，因为我们有

$$\langle v \otimes x, u \otimes y \rangle = \langle v, u \rangle\, \varepsilon(x^* y).$$

□

命题 3.10 的证明。首先，我们将陈述中的函子构造成 C*-张量函子。这可以通过指定以下酉算子来完成：

$$(\mathcal{H}_\pi \otimes C(\mathbb{G})) \otimes_{C(\mathbb{G})} (\mathcal{H}_\rho \otimes C(\mathbb{G})) \xrightarrow{U_{\pi,\rho}} (\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{H}_\rho) \otimes C(\mathbb{G}).$$

$$(\xi \otimes x) \otimes (\eta \otimes y) \longmapsto (\xi \otimes \rho(x_{(1)})\eta) \otimes x_{(2)}y.$$

不难看出，该酉算子满足 C*-张量函子定义中的条件。

为证明该函子给出了等价，我们构造一个拟逆函子。设 E 是 $C(\mathbb{G})$ 上的一个 $\mathbb{G}$-等变对应。令 $\mathcal{H}_E$ 为 E的代数核 $\mathcal{E}$ 关于前一个引理中的内积的完备化。于是，每个元素 $x \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 都从左侧作用在 $\mathcal{H}_E$ 上，因为 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 是 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$-值酉矩阵的矩阵系数的线性张成。现在我们有 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 的一个 $*$-表示 $(\pi_E, \mathcal{H}_\pi)$。

为完成证明，我们将验证这些函子互为拟逆。对于 $(\pi, \mathcal{H}_\pi) \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathcal{O}(\mathbb{G})$，$E_\pi$ 的代数核恰为 $\mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})$。因此，我们有一个从 $\mathcal{H}_{E_\pi}$ 到 $\mathcal{H}_\pi$ 的酉算子，由 $\xi \otimes x \longmapsto \varepsilon(x)\xi$给出；它是 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 表示的一个交织算子。另一方面，对于任意 $E \in \mathbb{G}\text{-}\ \mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{G})}$，我们有一个从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{H}_E \otimes C(\mathbb{G})$的映射，如下所示：

$$\xi \in \mathcal{E} \longmapsto \xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)} \in \mathcal{H}_E \otimes C(\mathbb{G}).$$

此映射是一个 $\mathbb{G}$-等变等距映射，并与左 $C(\mathbb{G})$-作用相交织。要证明它是右 $C(\mathbb{G})$-模映射，需注意以下几点：对于任意 $x \in \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 和 $\xi \in \mathcal{E}$，有

$$\|\varepsilon(x)\xi - \xi x\|^2_{\mathcal{H}_E} = \varepsilon(\langle \varepsilon(x)\xi - \xi x, \varepsilon(x)\xi - \xi x\rangle_{C(\mathbb{G})}) = 0.$$

因此，我们有 $\xi x = \varepsilon(x)\xi$ 属于 $\mathcal{H}_E$，且

$$(\xi x)_{(0)} \otimes (\xi x)_{(1)} = \varepsilon(x_{(0)})\xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)}x_{(1)} = \xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)}x.$$

这说明上述映射是从 E 到 $\mathcal{H}_E \otimes C(G)$的 $\mathbb{G}$-等变对应的嵌入。因此，对于任意$\xi \in \mathcal{E}$ 和 $x \in C(\mathbb{G})$，该映射的像都包含 $\underline{\xi_{(0)} \otimes \xi_{(1)}x}$。结合 $\mathrm{span}\, \alpha_E(E)(\mathbb{C} \otimes C(\mathbb{G})) = E \otimes C(\mathbb{G})$，可知该映射是酉的。至此，证明完毕。□

注 3.12. 我们还有一个等价 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathcal{O}(\mathbb{G}) \cong \mathbb{G}\text{-}\ \mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{G})}$。

我们回顾 So ltan [So05]提出的量子 Bohr 紧化。对于$\widehat{\ }$量子群 $\mathbb{G}$的对偶离散量子群 $\mathbb{G}$，其量子 Bohr 紧化$\mathfrak{b}\mathbb{G}$ 是 Kac 型（[So05，定理 4.5]）。此外，$\mathcal{O}(\mathbb{G})$的每个有限维 $*$-表示都会导出$\mathfrak{b}\widehat{\mathbb{G}}$ 的一个有限维酉表示（参见 [CKS，定理 2.3]）。这些事实表明，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 是刚性的，且遗忘函子 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathcal{O}(\mathbb{G}) \longmapsto$ 希尔伯特空间范畴$^{\mathrm{f}}$ 是保维的。现在，由命题 3.10 可得所需结论。

推论 3.13. 对于在 $C(\mathbb{G})$ 上的有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间，其覆盖度必为正整数。

3.3. 模范畴描述。我们回顾一下关于量子齐性空间的 Tannaka-Krein 型结果 [DY13, 定理 6.4], [Ne14, 定理 3.3]。这使我们能够通过模范畴的语言来理解有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间。

令 M 为一个右有限生成的 $\mathbb{G}$-等变 (A, B)-对应。则我们有一个从 $\mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 到 $\mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}_B^{\mathrm{f}}$ 的 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模函子，其定义如下：

- 作为一个 C*-函子，它通过与 A 上的 E 取内部张量积来定义；也就是说，该函子将 E 送到 $E\otimes_A M$。这里，$E\otimes_A M$ 通过 $\xi\otimes m\longmapsto \alpha_E(\xi)_{13}\beta_M(m)_{23}$ 被视为一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 B-模。由于 E 和 M 是有限生成的，这个希尔伯特 B-模也是有限生成的。
  $\mathcal{H}_\pi\otimes E\otimes_A M$ 到 $\mathcal{H}_\pi\otimes(E\otimes_A M)$ 的酉映射由 $(v\otimes\xi)\otimes m\longmapsto v\otimes(\xi\otimes m)$ 给出。

这个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模函子记作 $-\otimes_A M$。

以下是本小节的主要定理，它是 [DY13,Theorem 7.1] 的推广。

定理 3.14. 设 A 和 B 是 $\mathbb{G}$的量子齐性空间。那么，C*函子 $M\longmapsto -\otimes_A M$ 给出如下 C* 范畴之间的等价：

$$\mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{A,B}\cong[\mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}_A,\mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}_B]_{\mathrm{b}}^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}}$$

我们希望在上述定理的证明中使用 [DY13, Theorem 7.1] 中的论证。

首先，我们固定一组完备代表元 $\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}$，它们代表 $\mathbb{G}$的所有不可约酉表示的等价类。对于任意 $\pi\in\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}$, $\overline{\pi}$ 表示 $\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}$ 中与 π的共轭表示酉等价的元素，该元素唯一确定。

设 E 是一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模，$\mathcal{E}$ 是其代数核。对于每个 $\pi\in\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}$, $\mathcal{E}_\pi$ 表示空间 $\mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(\mathcal{H}_\pi\otimes A, E)\otimes\mathcal{H}_{\pi^\circ}$。于是，我们可以通过 $T\otimes\xi\longmapsto T(\xi\otimes 1)$ 将$\mathcal{E}_\pi$ 视为 $\mathcal{E}$ 的子空间，并得到谱分解 $\mathcal{E}=\bigoplus_\pi\mathcal{E}_\pi$。将 A 视为一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模后，该分解也可应用于 $\mathcal{A}$。

现在我们可以如下给出右 $\mathcal{A}$-作用、取值于 $\mathcal{A}$ 的内积以及 $\mathbb{G}$-作用于 $\mathcal{E}$ 的定义：对于 $T\otimes\xi\in\mathcal{E}_\pi$、$S\otimes\eta\in\mathcal{E}_\rho$ 和 $s\otimes v\in\mathcal{A}_\rho$，有

$$\begin{aligned}(T\otimes\xi)(s\otimes v)&=\sum_{\sigma\in\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}}\sum_{V\in(\sigma,\pi\rho)}T(\mathrm{id}_\pi\otimes s)(V\otimes\mathrm{id}_A)\otimes V^*(\xi\otimes v),\\ \langle T\otimes\xi,S\otimes\eta\rangle_{\mathcal{A}}&=\sum_{\sigma\in\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}}\sum_{V\in(\sigma,\overline{\pi}\rho)}(R_\pi^*\otimes\mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_{\overline{\pi}}\otimes T^*S)(V\otimes\mathrm{id}_A)\\ &\qquad\qquad\otimes(\xi^*\otimes V^*)(\overline{R}_\pi(1)\otimes\eta),\\ \alpha_E(T\otimes\xi)&=T\otimes U_\pi(\xi\otimes 1).\end{aligned}$$

这里使用以下记号：

- The quadruple $(\pi,\overline{\pi},R_\pi,\overline{R}_\pi)$ denotes a standard solution in $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$.

- 符号 $\sum_{V\in(\sigma,\pi\rho)}$ 表示对 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}}(\sigma,\pi\otimes\rho)$ 的一个固定标准正交基中的所有元素求和，该空间配有内积$\langle V,W\rangle = V^*W$。

这些公式不依赖于标准解和正交归一基的选取。在这些记号下，我们还有$\mathcal{A}$的对合的如下表示：

$$(s\otimes v)^* = (R_\pi^*\otimes \mathrm{id})(\mathrm{id}_{\overline{\pi}}\otimes s^*)\otimes(v^*\otimes \mathrm{id})\overline{R_\pi}(1).$$

现在，我们完成了定理 3.14 证明所需的准备工作。

定理 3.14 的证明。首先，我们构造一个从 $[\mathbb{G}\text{- }\mathbf{Mod}_A^{\mathrm{f}},\mathbb{G}\text{- }\mathbf{Mod}_B^{\mathrm{f}}]^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}_{\mathrm{b}}}$到 $\mathbb{G}\text{- }\mathbf{Corr}_{A,\ B}^{\mathrm{rf}}$ 的函子。设 (F,f) 是一个从 $\mathbb{G}\text{- }\mathbf{Mod}_A^{\mathrm{f}}$到 $\mathbb{G}\text{- }\mathbf{Mod}_B^{\mathrm{f}}$的 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模函子。于是，我们可以如下定义 $\mathcal{A}$在 $F(A)$ 上的左作用：对于 $s\otimes v\in\mathcal{A}_\pi$和$\eta\in F(A)$， $s\otimes v$的左乘定义为

$$(s\otimes v)\eta = F(s)f_{\pi,A}^*(v\otimes\eta).$$

经过一些直接计算可知，这定义了一个可伴随的 B-模映射。此外，我们还可得以下关系：

$$\langle\eta,(s\otimes v)\eta'\rangle_B = \langle(s\otimes v)^*\eta,\eta'\rangle_B,$$
$$\beta_{F(A)}((s\otimes v)\eta) = \alpha(s\otimes v)\beta_{F(A)}(\eta).$$

因此，命题 2.8 表明，这个左 $\mathcal{A}$-作用可扩张为 $F(A)$ 上的左 A-作用，并且与 $\mathbb{G}$-作用相容。现在， $F(A)$ 带有 $\mathbb{G}$-等变 (A,B)-对应的结构。此外，若给定另一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模函子 (G,g) 以及一个态射 $\theta\colon(F,f)\longrightarrow(G,g)$，其分量 $\theta_A\colon F(A)\longrightarrow G(A)$ 是 $\mathbb{G}$-等变 (A,B)-对应的态射。这些构造给出了我们所需的函子。

我们将证明这些函子互为拟逆，从而完成证明。固定一个右有限生成的 $\mathbb{G}$-等变 (A,B)-对应M。那么， $A\otimes_A M$可通过 $x\otimes\xi\longmapsto x\xi$ 同构于 M，作为一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 B-模映射。因此，只需证明它与左 A-作用相容。对于 $s\otimes v\in\mathcal{A}_\pi$和 $a\otimes\xi\in A\otimes_A M$，上述作用计算如下：

$$(s\otimes v)(a\otimes\xi) = (s\otimes\mathrm{id}_M)((v\otimes a)\otimes\xi) = s(v\otimes a)\otimes\xi.$$

由于 $s\otimes v$对应于 $s(v\otimes 1)\in\mathcal{A}$，这个等式表明了我们所要求的相容性。

接下来，我们取一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模函子 (F,f)。对于任意有限生成的 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模 E，我们有一个从 $\mathcal{E}\otimes F(A)$ 到 $F(E)$ 的映射，它将 $(T\otimes v)\otimes\xi$ 映射为 $F(T)f_{\pi,\ A}^*(v\otimes\xi)$。于是我们有

$$\begin{aligned}&\left\langle F(T)f_{\pi,A}^*(v\otimes\xi),F(S)f_{\rho,A}^*(w\otimes\eta)\right\rangle_B\\&=\left\langle v\otimes\xi,f_{\pi,A}F(T^*S)f_{\rho,A}^*(w\otimes\eta)\right\rangle_B\\&=\left\langle v\otimes\xi,(\mathrm{id}_\pi\otimes(R_\pi^*\otimes\mathrm{id}_{F(A)})(\mathrm{id}_{\overline{\pi}}\otimes f_{\pi,A}F(T^*S)f_{\rho,A}^*))(\overline{R}_\pi\otimes\mathrm{id}_\rho\otimes\mathrm{id}_{F(A)})(w\otimes\eta)\right\rangle_B\end{aligned}$$

利用 $(R_\pi^* \otimes \mathrm{id}_{F(A)}) f_{\pi\otimes\overline{\pi},\ A} = F(R_\pi^* \otimes \mathrm{id}_A)$ 和 $f_{\pi\otimes\overline{\pi},\ A} = (\mathrm{id}_{\overline{\pi}} \otimes f_{\pi,\ A}) f_{\overline{\pi},\ \pi\otimes A}$，我们也有

$$(R_\pi^* \otimes \mathrm{id}_{F(A)})(\mathrm{id}_{\overline{\pi}} \otimes f_{\pi,A} F(T^*S) f_{\rho,A}^*) = F((R_\pi^* \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_{\overline{\pi}} \otimes T^*S)) f_{\overline{\pi}\otimes\rho,A}^*.$$

因此，该映射诱导出一个从 $E \otimes_A F(A)$ 到 $F(E)$ 的等距映射。容易看出，这个等距映射是一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 B-模映射。为了证明其酉性，应注意到 F 保持值域投影，即对于任意的 $T \in \mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(\mathcal{H}_\pi \otimes A, E)$，若其值域投影为 $p \in \mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(E)$，则 $F(T)\colon F(\mathcal{H}_\pi \otimes A) \longrightarrow F(E)$ 的值域投影为 $F(p)$。这一事实意味着，$F(E)$ 包含于所有 $T \in \bigcup_{\pi\in\text{不可约表示}\,\mathbb{G}} \mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(\mathcal{H}_\pi \otimes A, E)$ 对应的 $F(T)$ 值域之和空间中。因此，从 $E \otimes_A F(A)$ 到 $F(E)$ 的映射是酉的。至此，证明完成。□

作为该定理的一个应用，我们可以看到，每个 Jones 值都可作为某个 $\mathbb{G}$ 的有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间的覆盖度。

定理 3.15。有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间的覆盖度属于 $\{4\cos^2(\pi/n) \mid n \geq 3\} \cup [4, \infty)$。反过来，对于该集合中的任意元素 d，都存在一个紧量子群 $\mathbb{G}$ 以及一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间 $A \subset B$，其覆盖度为 d。

在下面的证明中，我们使用给定 C*-张量范畴 $\mathcal{C}$ 的幺半反范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$（参见 [EGNO，定义 2.1.5]）。作为一个 C*-范畴，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$。但它的张量积 $- \otimes -\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 由 $(X, Y) \longmapsto Y \otimes X$ 给出。

证明。该陈述的前半部分可由 Q-系统的一般理论推出：取一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间 $A \subset B$，并设其覆盖度为 d。于是我们有一个 $\mathbb{G}$-$\mathrm{Corr}_A^{\mathrm{f}}$ 中的 Q-系统 X，对应于 $A \subset B$，且满足 $d(X) = d$（命题 3.8）。令 $\mathcal{C}$ 为由 X 生成的 C*-张量范畴。于是可找到一个有限因子 N 以及一个全忠实嵌入 $i\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Bimod}_N^{\mathrm{f}}$，依据 [Ya03，定理 3.9]。由于 $\mathrm{Bimod}_N^{\mathrm{f}}$ 中的 Q-系统对应于冯·诺依曼代数 $[$的有限扩张（1], Lo94，定理 6. $N \subset M$），我们有一个有限扩张 d，其最小指标为 $i(X(= d))X(= d)$。现在，根据关于指标取值的 Jones 的结果（[Jo83，定理 4.3.1]），即可得到我们的断言。

为证明第二部分，取陈述中集合里的任意 d。若 $d \geq 4$，则存在一个 $q \in (0,1)$，使得 $SU_q(2)$ 的基本表示 $\pi_{1/2}$ 满足 $\dim_q \pi_{1/2} = \sqrt{d}$。于是，例 3.9 给出一个有限量子 $SU_q(2)$-覆盖空间，其覆盖度为 d。

现在考虑 $d < 4$ 的情形。此时，我们可以取一个融合范畴 $\mathcal{C}$ 及其对象 X，使得 $d(X) = \sqrt{d}$（例如，令 $\mathcal{C}$ 为 NT13 第 2.5] 节中的 Temperley–Lieb–Jones 范畴 $[$）。不妨假设 $\mathcal{C}$ 由 X 生成，并将其替换为其满子范畴，从而使其共轭对象由此生成。

取一个 $q \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ 和一个 C*-张量函子 $\Phi\colon \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2) \longrightarrow \mathcal{C}$ with $\Phi(\pi_{1/2}) = X \oplus \overline{X}$。根据 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)$ 的泛性质，保证这些对象存在（[NT13，定理 2.5.3]）。于是，$\mathcal{C}$ 可以通过 $\pi \otimes Y = \Phi(\pi) \otimes Y$ for $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)$ and $Y \in \mathcal{C}$ 视为一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)$- 模范畴。此外，我们的假设意味着它是连通的。因此，我们可以利用对偶定理 [DY13，定理 6.4]，找到一个 $SU_q(2)$ 的量子齐性空间 A

它满足 $\mathcal{C} \cong SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 与 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)$-模范畴等价。另一方面，利用 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$上的右乘法，我们得到一个从 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到 $[SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}, SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}]_b^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)}$ 的 C*-张量函子。由于从融合范畴出发的任意 C*-张量函子都保持维数，这意味着我们在 $[SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}, SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}]_b^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)}$ 中有一个维数为$\sqrt{d}$的对象 Y。因此，我们有一个 Q-系统 $\overline{Y} \otimes Y \in [SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}, SU_q(2)\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}]_b^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, SU_q(2)}$，并且根据命题 3.8，我们有一个有限量子 $SU_q(2)$-覆盖空间，其覆盖度为 d。□

4. Induction from actions of the maximal Kac quantum subgroup

4.1. 诱导作用的模范畴解释。设 $\mathbb{G}$ 为一个紧量子群，$\mathbb{H}$ 为其量子子群。对于一个 $\mathbb{H}$-C*代数$\sim A$，我们用符号 A表示其诱导的 $\mathbb{G}$-C*代数。

任取 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathbb{G}$ 和 $E \in \mathbb{H}\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}$。那么，酉算子$U_\pi^{-1}$, 13 在$\mathcal{H}_\pi \otimes E \otimes C(\mathbb{G})$上的限制，是从 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}(\mathcal{H}_{\pi|_{\mathbb{H}}} \otimes E)$到$\mathcal{H}_\pi \otimes \mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}} E$的酉算子。若我们通过限制函子 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathbb{G} \longrightarrow \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathbb{H}$将 $\mathbb{H}\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 视为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathbb{G}$-模范畴，则这些酉算子的集合使诱导函子 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}\colon \mathbb{H}\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}} \longrightarrow \mathbb{G}\text{- Mod}_{\widetilde{A}}^{\mathrm{f}}$ 成为一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathbb{G}$-模函子。以下定理实质上已在 [Va05, 定理 7.3.]中证明。

定理 4.1。函子 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$ 给出 $\mathbb{H}\text{- Mod}_A \cong \mathbb{G}\text{- Mod}_{\widetilde{A}}$ 之间作为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, \mathbb{G}$-模范畴的等价。该等价还给出 $\mathbb{H}\text{- Mod}_A^{\mathrm{f}} \cong \mathbb{G}\text{- Mod}_{\widetilde{A}}^{\mathrm{f}}$之间的等价。

我们不采用 Vaes 对 Green 印迹定理的推广，而是给出 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$的一个拟逆。

...A的代数 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 的明确表述：

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{x \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}) \mid (\alpha \otimes \mathrm{id})(x) = (\mathrm{id} \otimes \ell_{\mathbb{H}})(x)\}.$$

这里，q 是从 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$到 $\mathcal{O}(\mathbb{H})$的典范满射。

引理 4.2. 设 E 是一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模，$\mathcal{E}$ 是其代数核心。那么下式在 $\mathcal{E}$上定义了一个取值于 A的半内积：

$$\langle \xi, \eta \rangle_A = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\langle \xi, \eta \rangle_{\widetilde{A}})$$

证明。用由 ξ和 η生成的 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-子模替换 E 后，不妨设 E 由可数个元素生成。根据等变 Kasparov 稳定化定理（[Ve02, 定理´eor`eme 3.2]），可找到 $\mathbb{G}$ 的一个酉表示 π，使得存在一个等距映射 $V \in \mathcal{L}_{\widetilde{A}}^{\mathbb{G}}(E, \mathcal{H}_\pi \otimes A)$。因此，只需证明 $\mathcal{H}_\pi \otimes A$的情形。在这种情况下，我们有 $\mathcal{E} = \mathcal{H}_\pi \otimes \mathcal{A}$并且

$$\langle v \otimes x, w \otimes y \rangle_A = \langle v, w \rangle (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(x)^*(\mathrm{id} \otimes y).$$

对于 v、$w \in \mathcal{H}_\pi$和 x、$y \in \mathcal{A}$。现在，结论由此得出。□

~ ~设 E_0 是一个希尔伯特 A-模，它由 E 关于~ ~的这个 A值半内积完备化得到。那么映射 $(\mathrm{id}\otimes q)\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}\colon \mathcal{E}\longrightarrow \mathcal{E}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{H})$~ ~在 E_0上诱导一个 $\mathbb{H}$作用，使 E 成为一个 $\mathbb{H}$等变希尔伯特 A-模。

引理 4.3. 设 E 是一个 $\mathbb{H}$-等变希尔伯特 A-模。则下述定义在 $E\otimes\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 上的映射 P_E 满射到 $\widetilde{\mathcal{E}}$，即 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}E$ 的代数核：

$$P_E(\xi\otimes x)=(\mathrm{id}\otimes h_{\mathbb{H}})((\mathrm{id}\otimes S)\alpha_E(\xi)(1\otimes q((x_{(1)}))))\otimes x_{(2)}.$$

这里 $h_{\mathbb{H}}$ 是 $\mathbb{H}$的 Haar 态。

证明。由于我们有

$$\widetilde{\mathcal{E}}=\{\xi\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{G})\mid(\alpha_E\otimes\mathrm{id})(\xi)=(\mathrm{id}\otimes\ell_{\mathbb{H}})(\xi)\},$$

~很容易看出， P_E 在 E上相同。剩下的部分是证明~$P_E(E\otimes\mathcal{O}(\mathbb{G}))\subset E$。任取 $\xi\in E$ 和 $x\in\mathcal{O}(\mathbb{G})$。于是我们有如下结果：

$$\begin{aligned}(\alpha_E\otimes\mathrm{id})(P_E(\xi\otimes x))&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes h_{\mathbb{H}})((\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes S)\Delta)(\alpha_E(\xi))(1\otimes 1\otimes q(x_{(1)})))\otimes x_{(2)}\\&=(\mathrm{id}\otimes h_{\mathbb{H}}\otimes S^{-1})((\mathrm{id}\otimes\Delta\circ S)(\alpha_E(\xi))(1\otimes q(x_{(1)})\otimes 1))\otimes x_{(2)}\\(\mathrm{id}\otimes\ell_{\mathbb{H}})(P_E(\xi\otimes x))&=(\mathrm{id}\otimes h_{\mathbb{H}}\otimes\mathrm{id})(((\mathrm{id}\otimes S)(\alpha_E(\xi))\otimes 1)(1\otimes\Delta(q(x_1))))\otimes x_{(2)}.\end{aligned}$$

因此，由 $h_{\mathbb{H}}$的强双不变性可得该结论。 □

注 4.4. 若 $\mathbb{H}$ 为 Kac 型，则 P_E 可延拓为一个从$E\otimes C(\mathbb{G})$到 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}\mathbb{G}$的 $\mathbb{G}$-等变完全正映射。由命题 2.8 可得此结论，方法是使用角技巧来 $E\subset\mathcal{K}_A(A\oplus E)$ 和 $\widetilde{\mathcal{E}}\subset\mathcal{K}_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}\oplus\widetilde{E})\cong\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}\mathcal{K}_A(A\oplus E)$。

定理 4.1 的证明。我们有两个函子：第一个是 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$，第二个是 $\mathrm{Ev}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{H}}$： $\mathbb{G}$-模$_{\widetilde{A}}\longrightarrow\mathbb{H}$-模$_A$，由 $\widetilde{E}\longmapsto\widetilde{E}_0$给出。剩下要证明的是这两个函子互为拟逆。

任取~~$E\in$~~ ~~$\mathbb{H}$~~模$_A$，对此我们有~ ~我们有一个线性映射 $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)|_{\widetilde{\mathcal{E}}}$：

$$\langle(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\xi),(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\eta)\rangle_A=\langle\xi,\eta\rangle_A.$$

因此，此映射诱导出一个等距映射 $V_E\in\mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}((\mathrm{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}E)_0,E)$。为证明 V_E的满射性，我们使用前一个引理中的 P_E。对任意 $\xi\in E$ 和 $x\in\mathcal{O}(\mathbb{G})$，我们有

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\circ P_E(\xi\otimes x)=(\mathrm{id}\otimes h_{\mathbb{H}})((\mathrm{id}\otimes S)(\alpha_E(\xi))(1\otimes q(x))).$$

由于 $\mathrm{span}\ \alpha_E(E)(\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{H}))=E\otimes\mathcal{O}(\mathbb{H})$，上述等式蕴含 V_E的满射性。

接下来取~~$V_0\widetilde{E}\otimes\mathcal{O}(\mathbb{G})$~~模线性映射~~unitary~~，对此我们有~ ~定义了一个从

$$\langle\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}(\xi),\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}(\eta)\rangle_{\widetilde{A}}=\langle\xi,\eta\rangle_{\widetilde{A}}.$$

此外，我们还有

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}(\xi),\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}(\eta x)\rangle_{\widetilde{A}}&=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\widetilde{\alpha}(\langle\xi,\eta\rangle_{\widetilde{A}}x))\\&=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\widetilde{\alpha}(\langle\xi,\eta\rangle_{\widetilde{A}}))x=\langle\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}(\xi),\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}(\eta)x\rangle_{\widetilde{A}}.\end{aligned}$$

因此， $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{E}}$诱导出一个等距映射 $U_{\widetilde{E}} \in \mathcal{L}^{\mathbb{G}}_{\widetilde{A}}(\widetilde{E}, \widetilde{E}_0 \otimes C(\mathbb{G}))$。容易看出， $U_{\widetilde{E}}$的像包含于 $\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}\widetilde{E}_0$。为证明 $U_{\widetilde{E}}(\widetilde{E}) = \mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}\widetilde{E}_0$，我们可以通过考虑 $B = A$ 和 $M = A$ 的情形来应用引理 4.6。□

注 4.5. 函子 $\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}$: $\mathbb{G}$- $\mathrm{Mod}_{\widetilde{A}} \longrightarrow \mathbb{H}$- Mod_A 也具有 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模函子结构，即酉算子集 $v \otimes \xi \in (\mathcal{H}_\pi \otimes \widetilde{E})_0 \longmapsto_{\sim} v \otimes \xi \in \mathcal{H}_{\pi|_{\mathbb{H}}} \otimes E_0$。

~ ~现在设 A, B 是 $\mathbb{H}$-C*代数，且 A, B 是它们诱导的 $\mathbb{G}$-C*代数。那么我们还有一个诱导函子 $\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}$: $\mathbb{H}$- $\mathrm{Corr}_{(A,B)} \longrightarrow \mathbb{G}$- $\mathrm{Corr}_{\widetilde{A},\ \widetilde{B}}$。

~引理 4.6. 设 $E \in \mathbb{G}$- $\mathrm{Mod}_{\widetilde{A}}$ 和 $M \in \mathbb{H}$- $\mathrm{Corr}_{A,\ B}$。那么我们有以下酉等价

$$\widetilde{E} \otimes_{\widetilde{A}} \mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}} M \cong \mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}(\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}\widetilde{E} \otimes_A M),$$

由 $\xi \otimes \eta \otimes x \longmapsto \widetilde{\alpha}_{\widetilde{E},\ 13}(\xi)(1 \otimes \eta \otimes x)$ 诱导。

证明。唯一非平凡的部分是陈述中映射的满射性。令 $\widetilde{E}$、$\mathcal{M}$ 和 $(\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}\widetilde{E} \otimes_A M)_{\mathrm{alg}}$ 分别为 $\widetilde{E}$、M 和 $\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}\widetilde{E} \otimes_A M$ 的代数核。考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes P_M} & & \downarrow \\
 & & (\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}\widetilde{E} \otimes_A M)_{\mathrm{alg}} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle P_{\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}\widetilde{E} \otimes_A M}} \\
\widetilde{E} \otimes_{\widetilde{A}} \mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}} M & \longrightarrow & \mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}(\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}\widetilde{E} \otimes_A M).
\end{array}$$

这里，顶部的态射定义为 $\xi \otimes \eta \otimes x \longmapsto \widetilde{\alpha}_{\widetilde{E},13}(\xi)(1 \otimes \eta \otimes x)$，底部的态射则如陈述所述。由此可见，该图表是交换的，且顶部和右侧的态射具有稠密值域。利用这些观察，我们可以得出底部态射是满射的。□

注 4.7。应注意，所有 $\widetilde{E}$ 上酉等价的集合会产生一个从 $- \otimes_{\widetilde{A}} \mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}} M$ 到 $\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}(\mathrm{Ev}^{\mathbb{H}}_{\mathbb{G}}(-) \otimes_A M)$ 的 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模函子的酉等价

令 C 为另一个 $\mathbb{H}$-C*-代数。对于 $M \in \mathbb{H}$- $\mathrm{Corr}_{A,\ B}$ 和 $N \in \mathbb{H}$- $\mathrm{Corr}_{B,\ C}$，我们有一个酉等价 $\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}(M \otimes_B N) \cong (\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}} M) \otimes_{\widetilde{B}} (\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}} N)$，即 $(\xi \otimes \eta) \otimes x \longmapsto (\xi \otimes 1) \otimes (\eta \otimes x)$ 的限制。此外，这些酉算子构成的集合使 $\mathrm{Ind}^{\mathbb{G}}_{\mathbb{H}}$: $\mathbb{H}$- $\mathrm{Corr}_A \longrightarrow \mathbb{G}$- $\mathrm{Corr}_{\widetilde{A}}$ 成为一个 C*-张量函子。

~ ~定理 4.8。设 A, B 为 $\mathbb{H}$ 的量子齐性空间， A, B 为它们在 $\mathbb{G}$上的诱导量子齐性空间。那么，下列 C*-函子的图表在典范酉自然变换意义下交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{H}\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{A,B} & \xrightarrow{\cong} & [\mathbb{H}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{A}, \mathbb{H}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{B}]^{\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \operatorname{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}} & & \Big\downarrow \\
 & & [\mathbb{H}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{A}, \mathbb{H}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{B}]^{\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}} \\
 & & \cong \Big\downarrow {\scriptstyle \operatorname{Ind}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}} \circ - \circ \operatorname{Ev}_{\mathbb{G}}^{\mathbb{H}}} \\
\mathbb{G}\text{-}\operatorname{Corr}^{\mathrm{rf}}_{\widetilde{A},\widetilde{B}} & \xrightarrow{\cong} & [\mathbb{G}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{\widetilde{A}}, \mathbb{G}\text{-}\operatorname{Mod}^{\mathrm{f}}_{\widetilde{B}}]^{\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}}.
\end{array}$$

此外，若 $A = B$，则典范酉自然变换是幺半群的。

证明。典范酉自然变换由引理 4.6 中所述的一族酉算子给出。由此，结论可通过直接计算验证。□

4.2. 带迹模范畴及其 Plancherel 权。定理 4.8 使我们能够通过比较 $\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模函子和 $\operatorname{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H}$-模函子，证明一个印象型结果。本小节旨在为一般的带迹模范畴建立此类比较的一般理论。

首先，我们引入模范畴上的迹这一概念；对于纯代数情形，这一概念已见于 [Sc13，定义 3.7] 。

设 $\mathcal{C}$ 为刚性严格 C*-张量范畴， $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{C}$-模范畴。 $X \in \mathcal{M}$ 的自同态代数记为 $\mathcal{M}(X)$。对于 $U \in \mathcal{C}$ 和 $X \in \mathcal{M}$，我们可以如下定义偏迹 $\operatorname{Tr}_U \otimes \mathrm{id}\colon \mathcal{M}(U \otimes X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$：

$$(\operatorname{Tr}_U \otimes \mathrm{id})(T) = (R_U^* \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_{\overline{U}} \otimes X)(R_U \otimes \mathrm{id}_X)$$

这里 $(U, \overline{U}, R_U, \overline{R_U})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个标准解。

定义 4.9. 设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{C}$-模范畴。 $\mathcal{M}$ 上的一个 $\mathcal{C}$-模迹是一个族 $\{\operatorname{Tr}_X\colon \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathbb{C}\}_{X \in \mathcal{M}}$ 的正线性映射，满足以下条件：

(i) 对任意 $f, g \in \mathcal{M}(X, Y)$， $\operatorname{Tr}_X(g^* f) = \operatorname{Tr}_Y(f g^*)$。

(ii) $\operatorname{Tr}_{U \otimes X} = \operatorname{Tr}_X \circ (\operatorname{Tr}_U \otimes \mathrm{id})$。

我们将一个 $\mathcal{C}$-模范畴及其上的 $\mathcal{C}$-模迹组成的对称为迹的 $\mathcal{C}$-模范畴。在此情形下，我们将 $X \in \mathcal{M}$ 的维数定义为 $d(X) = \operatorname{Tr}_X(\mathrm{id}_X)$。

由 (ii) 可得，对于 $U \in \mathcal{C}$ 和 $X \in \mathcal{M}$，有 $d(U \otimes X) = d(U) d(X)$。

注记 4.10. 如果 $\mathcal{M}$ 是不可分解的，则在数乘意义下， $\mathcal{M}$ 上至多存在一个 $\mathcal{C}$-模迹。这可以通过利用与左 $\mathcal{C}$-作用的相容性看出。

例 4.11. 若按通常方式将 $\mathcal{C}$ 视为 $\mathcal{C}$-模范畴，则范畴迹族定义了一个 $\mathcal{C}$-模迹。此外，若给定另一个刚性严格 C*-张量范畴 $\mathcal{D}$ 以及保维 C*-张量函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ，则可通过 $U \otimes X = F(U) \otimes X$ 和范畴迹族，将 $\mathcal{D}$ 视为一个迹的 $\mathcal{C}$-模范畴。

例 4.12. 设 A 是 $\mathcal{C}$中的一个 Q-系统。则 $\mathcal{C}$ 中右A-模的范畴 Mod -A 具有一个 $\mathcal{C}$-模迹。

例 4.13. 若 $\mathcal{C}$ 是融合范畴，则每个 $\mathcal{C}$-模范畴都有一个 $\mathcal{C}$-模迹。这是因为每个不可分解的 $\mathcal{C}$-模范畴都是某个刚性 C*-2-范畴的角，且 $\mathcal{C}$ 位于其对角线上。

设 $\mathcal{M}$ 是一个迹的 $\mathcal{C}$-模范畴。取 $\mathcal{M}$ 的所有不可约对象的等价类代表元组成的集合，记为 $\operatorname{Irr}\mathcal{M}$。

对于 $F \in [\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$，从 F 到 F 的有界自然变换代数记为 $\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(F)$。于是，$\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(\mathrm{id}_{\mathcal{M}})$ 通过映射 $a \longmapsto (a_i)_{i\in\operatorname{Irr}\mathcal{M}}$ 同构于 $\ell^\infty(\operatorname{Irr}\mathcal{M})$。利用 $\mathcal{M}$ 中对象的维数，我们可以在 $\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(\mathrm{id}_{\mathcal{M}})$ 上定义一个权 $\omega_{\mathcal{M}}$，如下所示：

$$\omega_{\mathcal{M}}(a) = \sum_{i\in\operatorname{Irr}\mathcal{M}} d(i)^2 a_i.$$

我们称 $\omega_{\mathcal{M}}$ 为 $\mathcal{M}$ 的 Plancherel 权。当且仅当 $\operatorname{Irr}\mathcal{M}$ 是有限集时，这定义了一个线性泛函。

回顾一下，我们有一个由 $\mathcal{C}$ 对 $\mathcal{M}$ 的左作用诱导的 C*-张量函子 $\Phi\colon \mathcal{C} \longrightarrow [\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$。具体而言，$\Phi(U)$ 是一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$ 的 C*-函子，它将 $X \in \mathcal{M}$ 映到 $U \otimes X \in \mathcal{M}$。我们用符号 $\varphi_{U,\,V}$ 表示从 $\Phi(U) \otimes \Phi(V)$ 到 $\Phi(U \otimes V)$ 的酉算子。我们可以证明 $\omega_{\mathcal{M}}$ 具有以下优良性质。

命题 4.14。设 $\mathcal{M}$ 是一个迹的 $\mathcal{C}$-模范畴，且 $\omega_{\mathcal{M}}$ 是 Plancherel 权。那么，对于任意 $U \in \mathcal{C}$ 以及正自然变换 η，有以下等式：$\Phi(U) \longrightarrow \Phi(U)$：

$$\omega_{\mathcal{M}}(\Phi(R_U)^*\varphi_{\overline{U},U}(\mathrm{id}\otimes\eta)\varphi^*_{\overline{U},U}\Phi(R_U)) = \omega_{\mathcal{M}}(\Phi(\overline{R_U})^*\varphi_{U,\overline{U}}(\eta\otimes\mathrm{id})\varphi^*_{U,\overline{U}}\Phi(\overline{R_U})).$$

为了证明这个命题，将 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 替换为 [DY13，记号 A.3.1] 中引入的列有限双分次希尔伯特空间范畴会更方便。

设 $I = \operatorname{Irr}\mathcal{M}$。于是，$I \times I$-分次希尔伯特空间的范畴 $\mathrm{Hilb}_{I\times I}$ 具有规范的 C*-多张量范畴结构。具体而言，对于 $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{ij})_{ij}$ 和 $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{ij})_{ij}$，它们的张量积 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 是一个 $I \times I$-分次希尔伯特空间，其 (i,j)-分量为

$$\bigoplus_{k\in I} \mathcal{H}_{ik} \otimes \mathcal{K}_{kj}.$$

若对每个 $j \in I$，都只有有限多个 $i \in I$ 满足 $\mathcal{H}_{ij} \neq 0$，则称 $I \times I$-分次希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 为列有限。若 $\mathcal{H}$ 满足以下条件，则也称其为一致有限：

$$\sup_{i\in I}\sum_{j\in I}\dim\mathcal{H}_{ij} < \infty, \quad \sup_{j\in I}\sum_{i\in I}\dim\mathcal{H}_{ij} < \infty.$$

由列有限（分别为一致有限）的 $I \times I$-分次希尔伯特空间构成的全子范畴记为 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{cf}}_{I\times I}$（分别记为 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{f}}_{I\times I}$）。那么，$\mathrm{Hilb}_{I\times I}$ 的刚性部分恰好是 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{f}}_{I\times I}$（[DY13，引理 A.3.2]）。

现在我们比较 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$和希尔伯特空间范畴$^{\mathrm{cf}}_{I\times I}$。对于 $F \in [\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$，我们有一个列有限的 $I\times I$-分次希尔伯特空间 $\mathcal{H}_F$，其 (i,j)-分量由 $\mathcal{M}(i,F(j))$ 给出。这里，$\mathcal{M}(i,F(j))$ 通过内积 $\langle S,T\rangle = S^*T$ 被视为一个希尔伯特空间。

于是，这一构造给出了从$[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$到希尔伯特空间范畴$\mathfrak{Hilb}^{\mathrm{cf}}_{I\times I}$([DY13，定理 A.2.1，定理 A.2.2])的 C*-多张量范畴等价。此外，我们还有一个等价$[\mathcal{M},\mathcal{M}]^{\mathrm{f}}_{\mathrm{b}}\cong$希尔伯特空间范畴$\mathfrak{Hilb}^{\mathrm{f}}_{I\times I}$([DY13，命题 A.3.3])。从现在起，我们通过这一等价将这些范畴视为相同。

设$(U,\overline{U},R,\overline{R})$是$\mathcal{C}$中的一个标准解。那么$\varphi^{*}_{\overline{U},\ U}\Phi(R)$给出了从$\mathbf{1}$到$\mathcal{H}_{\Phi(\overline{U})}\otimes\mathcal{H}_{\Phi(U)}$的一个态射。根据$I\times I$-分次希尔伯特空间张量积的定义，这个态射可以表示为以下对象的直和：

$$R_{ji}\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{M}(i,\overline{U}\otimes j)\otimes\mathcal{M}(j,U\otimes i),$$

其中$i,j\in I$。类似地，$\varphi^{*}_{U,\ \overline{U}}\Phi(\overline{R})$表示为以下对象的直和：

$$\overline{R}_{ji}\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathcal{M}(j,U\otimes i)\otimes\mathcal{M}(i,\overline{U}\otimes j).$$

在下文的引理中，$U\otimes i$记作Ui。

引理 4.15。对于任意$i,j\in I$，$(\mathcal{M}(j,Ui)\ \mathcal{M}(i,\overline{U}j)\ R_{ji},\overline{R}_{ji})$是$\mathfrak{Hilb}^{\mathrm{f}}$中共轭方程的一个解。此外，若分别将$R_{ji}$和$\overline{R}_{ji}$替换为$d(i)^{1/2}d(j)^{-1/2}R_{ji}$、$d(i)^{-1/2}d(j)^{1/2}\overline{R}_{ji}$，则得到一个标准解。

证明。由于$(\Phi(U)\ \Phi(\overline{U})\ \varphi^{*}_{\overline{U},U}\Phi(R)\ \varphi_{U,\overline{U}}\Phi(\overline{R}))$是$[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$中共轭对象方程的一个解，以下映射的复合是恒等映射：

$$\begin{aligned}\bigoplus_{j,i\in I}\mathcal{M}(j,Ui)&\xrightarrow{\bigoplus_{i,k}\bigoplus_{j=l}\overline{R}_{jk}\otimes\mathrm{id}}\bigoplus_{j,i\in I}\bigoplus_{k,l\in I}\mathcal{M}(j,Uk)\otimes\mathcal{M}(k,\overline{U}l)\otimes\mathcal{M}(l,Ui)\\&\xrightarrow{\bigoplus_{j,l}\bigoplus_{i=k}\mathrm{id}\otimes R^{*}_{li}}\bigoplus_{j,i\in I}\mathcal{M}(j,Ui).\end{aligned}$$

因此，对于任意$i,j\in I$，我们有$(\mathrm{id}\otimes R^{*}_{ji})(\overline{R}_{ji}\otimes\mathrm{id})=\mathrm{id}$。同样的论证也表明另一个等式$(\mathrm{id}\otimes\overline{R}_{ji^{*}})(R_{ji}\otimes\mathrm{id})=\mathrm{id}$成立。至此，我们完成了命题前半部分的证明。

为证明后半部分，我们计算$\|R_{ji}\|$和$\|\overline{R}_{ji}\|$。首先应注意，$\mathcal{M}(i,\overline{U}j)\otimes\mathcal{M}(j,Ui)$可通过$T\otimes S\longmapsto(\mathrm{id}_{j}\otimes S)T$嵌入$\mathcal{M}(i,UUi)$中。此外，投影$p_{j}$到其像的映射如下：

$$p_{j}(X)=\sum_{V\in(j,Ui)}(\mathrm{id}\otimes VV^{*})X.$$

那么，$R_{ji}(1)$对应于p_{j}将$\varphi^{*}_{\overline{U},U}\Phi(R)$在$i\in I$处的分支映射所得的像。因此我们有

$$\begin{aligned}\|R_{ji}\|^{2}&=\sum_{V\in(j,Vi)}(R\otimes\mathrm{id}_{i})^{*}(\mathrm{id}\otimes VV^{*})(R\otimes\mathrm{id}_{i})\\&=\frac{1}{d(i)}\sum_{V\in(j,Vi)}\mathrm{Tr}_{Ui}(VV^{*})\\&=\frac{1}{d(i)}\sum_{V\in(j,Vi)}\mathrm{Tr}_{j}(V^{*}V)\\&=\frac{d(j)}{d(i)}\dim\mathcal{M}(j,Ui).\end{aligned}$$

类似地，我们也有

$$\|\overline{R}_{ji}\|^2 = \frac{d(i)}{d(j)} \dim \mathcal{M}(i, \overline{U}j) = \frac{d(i)}{d(j)} \dim \mathcal{M}(j, Ui).$$

因此，我们有 $\|R_{ji}\|\|\overline{R}_{ji}\| = (\dim \mathcal{M}(j, Ui))^2$。利用标准解的刻画，我们得出结论。□

命题 4.14 的证明。由前面的引理，我们有

$$R_{ji}(\mathrm{id} \otimes \theta) R_{ji}^* = \frac{d(j)}{d(i)} \mathrm{Tr}(\theta)$$

对于任意线性映射 $\theta: \mathcal{M}(j, Ui) \longrightarrow \mathcal{M}(j, Ui)$。

设 $\eta: \Phi(U) \longrightarrow \Phi(U)$ 是一个正自然变换。那么，对于任意 $i, j \in I$，它诱导出一个正算子 $\eta_{ji}: \mathcal{M}(j, Ui) \longrightarrow \mathcal{M}(j, Ui)$。于是我们有

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{M}}(\Phi(R_U)^* \varphi_{\overline{U},U}(\mathrm{id} \otimes \eta) \varphi_{\overline{U},U}^* \Phi(R_U)) &= \sum_{i \in I} d(i)^2 \sum_{j \in I} R_{ji}^* (\mathrm{id} \otimes \eta_{ji}) R_{ji} \\ &= \sum_{i,j \in I} d(i) d(j) \mathrm{Tr}(\eta_{ji}). \end{aligned}$$

对于陈述中等式的右边，我们也可以证明 t

$$\omega_{\mathcal{M}}(\Phi(\overline{R}_U)^* \varphi_{U,\overline{U}}(\eta \otimes \mathrm{id}) \varphi_{U,\overline{U}}^* \Phi(\overline{R}_U)) = \sum_{i,j \in I} d(i) d(j) \mathrm{Tr}(\eta_{ji}).$$

因此该结论成立。 □

根据命题 4.14，我们在$[\mathcal{M}, \mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$中引入标准解的概念。

定义 4.16. 设 $F: \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 是一个 C*-函子。若解 $(F, \overline{F}, R, \overline{R})$ 对任意正自然变换 $\eta: F \longrightarrow F$都满足以下恒等式，则称其为标准解：

$$\omega_{\mathcal{M}}(R^*(\mathrm{id} \otimes \eta) R) = \omega_{\mathcal{M}}(\overline{R}^*(\eta \otimes \mathrm{id}) \overline{R}).$$

在这种情况下，我们在 $\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(F)$ 上定义权 Tr_F，其定义为 $\eta \longmapsto \omega_{\mathcal{M}}(R^*(\mathrm{id} \otimes \eta) R)$.

命题 4.14 指出，若 $(U, \overline{U}, R, \overline{R})$ 是标准解，则 $(\Phi(U)\ \Phi(\overline{U})\varphi_{\overline{U},\ U}^*\Phi(R_U)\varphi_{U,\ \overline{U}}^*\Phi(\overline{R}_U))$ 也是标准解。

引理 4.17. 设 $F \in [\mathcal{M}, \mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 是一个刚性对象。

(i) F 存在标准解，且在酉等价意义下唯一。(ii) Tr_F 是迹的，且与标准解的选择无关。(iii) 对于标准解 $(F, \overline{F}, R, \overline{R})$，下述映射是从 $\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(F)$ 到 $\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(\overline{F})$ 的反-$*$-同构：

$$\eta \longmapsto (\mathrm{id} \otimes \overline{R}^*)(\mathrm{id} \otimes \eta \otimes \mathrm{id})(R \otimes \mathrm{id}).$$

证明。如果将 F视为 $\mathcal{H}_F \in$希尔伯特空间范畴$_{I \times I}^{\mathrm{f}}$中的一个对象，则共轭方程的一个解（$F, \overline{F}, R, \overline{R}$）可分解为一个族 $\{(\mathcal{M}(j, F(i))\ \mathcal{M}(i, \overline{F}(j))\ R_{ji}, \overline{R}_{ji})\}$

希尔伯特空间范畴[f]中的解。于是，对于任意正自然变换 $\eta\colon F \longrightarrow F$:，有如下结论

$$\omega_{\mathcal{M}}(R^*(\mathrm{id}\otimes\eta)R) = \sum_{i,j\in I} d(i)^2 R^*_{ji}(\mathrm{id}\otimes\eta_{ji})R_{ji},$$
$$\omega_{\mathcal{M}}(\overline{R}^*(\eta\otimes\mathrm{id})\overline{R}) = \sum_{i,j\in I} d(j)^2 \overline{R}^*_{ji}(\eta_{ji}\otimes\mathrm{id})\overline{R}_{ji},$$

其中， η_{ji} 是 $\mathcal{M}(j, F(i))$ 上相应的正算子。

因此，对于每个 $i, j \in I$，$(F, \overline{F}, R, \overline{R})$ 是标准的，当且仅当下列四元组是标准解:

$$\left(\mathcal{M}(j, F(i)), \mathcal{M}(i, \overline{F}(j)), d(j)^{1/2}d(i)^{-1/2}R_{ji}, d(j)^{-1/2}d(i)^{1/2}\overline{R}_{ji}\right).$$

现在，所有结论都可由这一刻画推出。 □

现在我们回到最关注的问题：比较模函子。设 $\mathcal{D}$ 是另一个刚性严格 C*-张量范畴，且 $(\Theta, \theta)\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个 C*-张量函子。

定义 4.18。(Θ, θ) 的模自然变换 a_Θ 是一个从 Θ 到 Θ 的自然变换，由下式给出:

$$a_{\Theta,U} = (\mathrm{id}\otimes \mathrm{Tr}_{\Theta(\overline{U})})(\theta^*_{U,\overline{U}}\Theta(\overline{r}_U\overline{r}^*_U)\theta_{U,\overline{U}}).$$

这里的 $(U, \overline{U}, r_U, \overline{r}_U)$ 是 $\mathcal{D}$ 中的标准解。

由于所有标准解都彼此酉等价，$a_{\Theta,\ U}$ 不依赖于 $(U, \overline{U}, r_U, \overline{r}_U)$ 的选择。

我们在以下引理中汇总 a_Θ 的一些基本性质。

引理 4.19。模自然变换 a_Θ 是幺半群的且可逆的。其逆如下:

$$a^{-1}_{\Theta,U} = (\mathrm{Tr}_{\Theta(\overline{U})}\otimes\mathrm{id})(\theta^*_{\overline{U},U}\Theta(r_U r^*_U)\theta_{\overline{U},U}).$$

此外，对于每个 $U \in \mathcal{D}$，以下四元组都是 $\mathcal{C}$ 中的标准解:

$$(\Theta(U), \Theta(\overline{U}), (1\otimes a^{1/2}_{\Theta,U})\theta^*_{\overline{U},U}\Theta(r_U), (a^{-1/2}_{\Theta,U}\otimes\mathrm{id})\theta^*_{U,\overline{U}}\Theta(\overline{r}_U)).$$

证明。通过直接计算即可验证该结论。 □

例 4.20. 若 (Θ, θ) 是从 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 到 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{f}}$ 的纤维函子，则每个分量 $a_{\Theta,\ \pi}$ 恰好是 NT13 中命题 1.4.4] 的 ρ_π。另见 NT13，例 2.2.13]。

我们将 $\mathcal{D}$-模函子 (F, f) 视为一个 C*-函子 F 与一族酉态射 $f_U\colon F\otimes\Phi(\Theta(U)) \longrightarrow \Phi(\Theta(U))\otimes F$。

命题 4.21. 设 $(F, f)\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{D}$-模函子。若 F 在 $[\mathcal{M}, \mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中是刚性的，则对每个 $U \in \mathcal{D}$，以下条件等价。

(i) 我们有 $f_U(\mathrm{id}_F\otimes\Phi(a_{\Theta,U})) = (\Phi(a_{\Theta,U})\otimes\mathrm{id}_F)f_U$。(ii) 对于 $[\mathcal{M}, \mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中的一个标准解 $(\Phi(\Theta(U))\ \Phi(\Theta(U))\ R_{\Phi(\Theta(U))}, \overline{R}_{\Phi(\Theta(U))})$，以下自然变换是酉的:

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f^*_U\otimes\mathrm{id})(R_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}).$$

(iii) 对于一个标准解 $(F,\overline{F},R,\overline{R})$，以下自然变换$\overline{f}_U\colon\ \overline{F}\otimes\Phi(\Theta(U))\longrightarrow\Phi(\Theta(U))\otimes\overline{F}$ 是酉的：

$$\overline{f}_U=(R^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}).$$

证明。设 $(U,\overline{U},r_U,\overline{r}_U)$ 是 $\mathcal{D}$中的一个标准解，并定义 $r_{\Phi(\Theta(U))}$和$\overline{r}_{\Phi(\Theta(U))}$ 如下：

$$\begin{aligned}r_{\Phi(\Theta(U))}&=\varphi^*_{\overline{\Theta(U)},\Theta(U)}\Phi(\theta^*_{\overline{U},U}\Theta(r_U)),\\ \overline{r}_{\Phi(\Theta(U))}&=\varphi^*_{\Theta(U),\overline{\Theta(U)}}\Phi(\theta^*_{U,\overline{U}}\Theta(\overline{r}_U)).\end{aligned}$$

利用编织方程，我们得到

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})f^*_{\overline{U}}\\ &=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f^*_{U\otimes\overline{U}})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\ &=(\mathrm{id}\otimes\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\ &=\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

由于 $f_{\overline{U}}$ 是酉的，这意味着我们有

$$\begin{aligned}f_{\overline{U}}&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}),\\ f_U&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes r^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f^*_{\overline{U}}\otimes\mathrm{id})(\overline{r}_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}).\end{aligned}$$

现在我们给出 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) 的证明。设 $(\Theta(U)\ \Theta(\overline{U})\ R_{\Theta(U)},\overline{R}_{\Theta(U)})$ 是引理 4.19 中的标准解。令

$$\begin{aligned}R_{\Phi(\Theta(U))}&=\varphi^*_{\Theta(\overline{U}),\Theta(U)}\Phi(R_{\Theta(U)}),\\ \overline{R}_{\Phi(\Theta(U))}&=\varphi^*_{\Theta(U),\Theta(\overline{U})}\Phi(\overline{R}_{\Theta(U)}).\end{aligned}$$

那么命题 4.14 断言 $(\Phi(\Theta(U))\ \Phi(\Theta(\overline{U}))\ R_{\Phi(\Theta(U))},\overline{R}_{\Phi(\Theta(U))})$ 是一个标准解。在条件 (i) 下，我们有

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(R_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\ &=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\Phi(a^{1/2}_{\Theta,U}))f_U^*(\Phi(a^{-1/2}_{\Theta,U})\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})(R_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\ &=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\ &=f_{\overline{U}}.\end{aligned}$$

因此，(ii) 对标准解成立。由于所有标准解彼此酉等价，(ii) 对一般的标准解也成立。为证明反向结论，需要注意到我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes a^{1/2}_{\Theta,U})\theta^*_{\overline{U},U}\Theta(r_U)&=(a^{-1/2}_{\Theta,\overline{U}}\otimes\mathrm{id})\theta^*_{\overline{U},U}a^{1/2}_{\Theta,\overline{U}\otimes U}\Theta(r_U)\\ &=(a^{-1/2}_{\Theta,\overline{U}}\otimes\mathrm{id})\theta^*_{\overline{U},U}\Theta(r_U)a^{1/2}_{\mathbf{1}}=(a^{-1/2}_{\Theta,\overline{U}}\otimes\mathrm{id})\theta^*_{\overline{U},U}\Theta(r_U).\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$(\mathrm{id}\otimes a^{1/2}_{\Theta,U})\theta^*_{U,\overline{U}}\Theta(\overline{r}_U)=(a^{-1/2}_{\Theta,\overline{U}}\otimes\mathrm{id})\theta^*_{U,\overline{U}}\Theta(\overline{r}_U).$$

利用这些公式，我们可以看到

$$\begin{aligned}&(\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{-1/2})\otimes\mathrm{id})f_{\overline{U}}(\mathrm{id}\otimes\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{1/2}))\\&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{-1/2})\otimes f_U^*\otimes\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{1/2}))(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\\&=(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}^*_{\Phi(\Theta(U))})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(R_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}).\end{aligned}$$

因此，$(\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{-1/2},)\otimes\mathrm{id})f_{\overline{U}}(\mathrm{id}\otimes\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{1/2},U))$ 是酉的。现在我们有

$$(\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{-1/2})\otimes\mathrm{id})f_{\overline{U}}(\mathrm{id}\otimes\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}))f_{\overline{U}}^*(\Phi(a_{\Theta,\overline{U}}^{-1/2})\otimes\mathrm{id})=1.$$

于是可见，由于 $f_{\overline{U}}$ 是酉的，(i) 对 $\overline{U}$ 成立。我们已经证明了 $\Longrightarrow$ 的 (i) 蕴含 (ii)，以及对于 $U\Longrightarrow$，$\overline{U}$ 的 (ii) 蕴含 (i)，因此也已证明 $\Longrightarrow$ 的 (ii) 蕴含 (i)。

(ii) 与 (iii) 的等价性可由引理 4.17 的 (iii) 以及以下四元组的标准性得出：

$$\begin{aligned}&(F\otimes\Phi(\Theta(U)),\Phi(\overline{\Theta(U)})\otimes\overline{F},(\mathrm{id}\otimes R\otimes\mathrm{id})R_{\Phi(\Theta(U))},(\mathrm{id}\otimes\overline{R}\otimes\mathrm{id})\overline{R}_{\Phi(\Theta(U))}),\\&(\Phi(\Theta(U))\otimes F,\overline{F}\otimes\Phi(\overline{\Theta(U)}),(\mathrm{id}\otimes R_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id})R,(\mathrm{id}\otimes\overline{R}_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id})\overline{R}).\end{aligned}$$

□

考虑 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon\ \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}$ 的情形，可得以下推论。

推论 4.22. 对于一个 $\mathcal{C}$-模函子 (F,f)，它在 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{C}}$ 中是刚性的，当且仅当 F 在 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中是刚性的。在这种情况下，(F,f) 的共轭对象 $(\overline{F},\overline{f})$ 可由标准解 $(F,\overline{F},R,\overline{R})$ 如下得到：

- $\overline{F}$：F在$[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$中的一个共轭对象。
- $\overline{f}_U=$（$R^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$）（$\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id}$）（$\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}$）。

推论 4.23。如果 $\mathcal{M}$ 作为一个迹的 $\mathcal{C}$-模范畴是连通的，那么 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{C}}$ 中的标准解在 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$中也是标准的。

对于一个 $\mathcal{C}$-模范畴，我们可以在 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{M}$上考虑如下等价关系 $\sim_{\mathcal{C}}$：

$$i\sim_{\mathcal{C}}j\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}\text{ there exists }U\in\mathcal{C}\text{ such that }\mathcal{M}(i,U\otimes j)\neq0.$$

对于一个 C*-函子 $F\colon\ \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$，我们定义 $\mathrm{Irr}\,\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{R}$ 上的函数 d_F如下：

$$d_F(i)=\frac{d(F(i))}{d(i)}.$$

命题 4.24。如果（F，f）$\in[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{D}}$对所有 $U\in\mathcal{D}$都满足命题 4.21 中的条件，则函数 d_F 在 $\sim_{\mathcal{D}}$的每个等价类上都是常值的。如果 F 是范畴等价，则逆向结论也成立。

证明。设 $(F,\overline{F},R,\overline{R})$ 是 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中的一个标准解。则命题 4.21 的条件 (iii) 表明，我们有一个 $\mathcal{D}$-模函子 $(\overline{F},\overline{f})\colon\ \mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{M}$，其定义为

$$\overline{f}_U=(R^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}).$$

则 R 和 $\overline{R}$ 是 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{D}}$ 中的态射，因此 R^*R 也是 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{D}}$ 中从 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 到 $\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 的态射。这意味着我们有

$$(R^*R)_{\Theta(U)\otimes i}=\mathrm{id}_{\Theta(U)}\otimes(R^*R)_i$$

对于任意 $U\in\mathcal{D}$ 和 $i\in\operatorname{Irr}\mathcal{M}$。特别地，$i\in\operatorname{Irr}\mathcal{M}\longmapsto(R^*R)_i$ 在 $\sim_{\mathcal{D}}$ 的每个等价类上都是常数。另一方面，根据引理 4.17 的证明，我们有

$$(R^*R)_i=\sum_{j\in\operatorname{Irr}\mathcal{M}}\frac{d(j)\dim\mathcal{M}(j,F(i))}{d(i)}=\frac{d(F(i))}{d(i)}.$$

这就完成了第一个陈述的证明。

为了证明第二个陈述，我们将验证命题 4.21 的条件 (iii)。设 $(F,\overline{F},R,\overline{R})$ 是一个标准解。我们的假设意味着，对于任意 $i\in\operatorname{Irr}\mathcal{M}$，$F(i)$ 是不可约的，因此 $d(F(i))^{-1/2}d(i)^{1/2}R_i=d_F(i)^{-1/2}R_i$ 是酉的。此外，根据关于 d_F 的假设，对于任意 $U\in\mathcal{D}$，$d_F(i)^{-1/2}R_{\Theta(U)\otimes i}$ 也是酉的。由于我们有

$$d_F(\overline{F}(i))=d(F(\overline{F}(i)))/d(\overline{F}(i))=d_{\overline{F}}(i)^{-1},$$

类似的论证表明，$d_{\overline{F}}(i)^{-1/2}\overline{R}_{\Theta(U)\otimes i}$ 也是酉的。于是我们有

$$\begin{aligned}&(R\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R})_i\\&\qquad=d_F(\overline{F}(i))^{-1/2}R_{U\otimes\overline{F}(i)}\overline{F}(f^*_{U,\overline{F}(i)})\overline{F}(\mathrm{id}_{\Theta(U)}\otimes d_{\overline{F}}(i)^{-1/2}\overline{R}_i).\end{aligned}$$

这意味着 (F,f) 满足条件 (iii)。 □

本小节最后说明，在有限性条件下，条件 (iii) 自动成立。

定理 4.25. 设 $\mathcal{M}$ 是一个迹的 $\mathcal{C}$-模范畴，且 $|\operatorname{Irr}\mathcal{M}|<\infty$。则 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{D}}$ 是刚性的。此外，$[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{D}}$ 中的一个标准解在 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中仍是标准解。

我们需要以下引理来证明该定理。

引理 4.26. 设 (F,f) 是一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}$ 的 $\mathcal{D}$-模函子，且 $\overline{F}$ 是 F 在 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中的一个共轭对象。则函数 d_F 和 $d_{\overline{F}}$ 在 $\sim_{\mathcal{D}}$ 的每个等价类上均为常数。

证明。设 I 是 $\sim_{\mathcal{D}}$ 的一个等价类。由于 $\operatorname{Irr}\mathcal{M}$ 是有限的，I 也是有限的。因此，我们可以取一个对象 $U\in\mathcal{D}$，使得对于任意 i、$j\in I$，都有 $\mathcal{M}(i,\Theta(U)\otimes j)\neq 0$。这意味着矩阵 $M=(\dim\mathcal{M}(j,\Theta(U)\otimes i))_{ij\in I}$ 是一个元素为正的不可约矩阵。现在，$d=(d(i))_{i\in I}$ 满足 $Md=d(\Theta(U))d$，即 d 是 M 的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}d(\Theta(U))d(F(i))&=d(\Theta(U)\otimes F(i))\\&=d(F(\Theta(U)\otimes i))=\sum_{j\in I}d(F(j))\dim\mathcal{M}(j,\Theta(U)\otimes i).\end{aligned}$$

因此，$(d(F(i)))_{i\in I}$ 也是 M 的佩龙-弗罗贝尼乌斯特征向量，而它必定是 d 的一个标量倍数。现在我们得到了关于 d_F 的结论。对于 $\overline{F}$，应注意到 $\overline{F}$ 是 F 的一个伴随函子。因此我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(i,\overline{F}(\Theta(U)\otimes j)) &\cong \mathcal{M}(F(i),\Theta(U)\otimes j)\\ &\cong \mathcal{M}(\Theta(\overline{U})\otimes F(i),j)\\ &\cong \mathcal{M}(F(\Theta(\overline{U})\otimes i),j)\\ &\cong \mathcal{M}(\Theta(\overline{U})\otimes i,\overline{F}(j))\cong \mathcal{M}(i,\Theta(U)\otimes\overline{F}(j)).\end{aligned}$$

对任意 $i,j\in\mathrm{Irr}\ \mathcal{M}$。这意味着 $\overline{F}(\Theta(U)\otimes i)\cong\Theta(U)\otimes\overline{F}(i)$，因此我们可以用上述论证证明关于 $\overline{F}$ 的结论。□

定理 4.25 的证明。取 $(F,f)\in[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}^{\mathcal{D}}$以及 $[\mathcal{M},\mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 中的一个标准解 $(F,\overline{F},R,\overline{R})$。由于 $(R^*R)_i=d_F(i)^{-1}$ 且 $(\overline{R}^*\overline{R})_i=d_{\overline{F}}(i)^{-1}$，前面的引理意味着

$$R^*R\otimes\mathrm{id}_{\Phi(\Theta(U))}=\mathrm{id}_{\Phi(\Theta(U))}\otimes R^*R,\quad \overline{R}^*\overline{R}\otimes\mathrm{id}_{\Phi(\Theta(U))}=\mathrm{id}_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}^*\overline{R}$$

对任意 $U\in\mathcal{D}$。

如命题 4.21 中所示，令 $\overline{f}_U$：

$$\overline{f}_U=(R^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{R}).$$

只需证明 $\overline{f}_U$是酉的。取$\mathcal{D}$ 中的一个标准解 $(U,\overline{U},r_U,\overline{r}_U)$，并按照命题 4.21 的证明设定 $r_{\Phi(\Theta(U))}$ 和 $\overline{r}_{\Phi(\Theta(U))}$。现在考虑由下式给出的$\omega_l\in\mathrm{End}_{\mathrm{b}}(\overline{F}\otimes\Phi(\Theta(U)))^*$

$$\omega_l(\eta)=\omega_{\mathcal{M}}(r_{\Phi(\Theta(U))}^*(\mathrm{id}\otimes\overline{R}^*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\eta)(\mathrm{id}\otimes\overline{R}\otimes\mathrm{id})r_{\Phi(\Theta(U))}).$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\omega_l(\mathrm{id}) &= \omega_{\mathcal{M}}(r^*_{\Phi(\Theta(U))}(\mathrm{id}\otimes\overline{R}^*\overline{R}\otimes\mathrm{id})r_{\Phi(\Theta(U))})\\ &= \omega_{\mathcal{M}}(r^*_{\Phi(\Theta(U))}r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}^*\overline{R})\\ &= d(U)\,\mathrm{Tr}_F(\mathrm{id}_F),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_l(\overline{f}^*_U\overline{f}_U) &= \omega_{\mathcal{M}}((r^*_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}^*)(\mathrm{id}\otimes f_U f_U^*\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}))\\ &= d(U)\,\mathrm{Tr}_F(\mathrm{id}_F),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_l(\overline{f}^*_U\overline{f}_U\overline{f}^*_U\overline{f}_U) &= \omega_{\mathcal{M}}((r^*_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}^*)(\mathrm{id}\otimes f_U\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{f}_U\overline{f}^*_U)\\ &\qquad (\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}))\\ &= \omega_{\mathcal{M}}((r^*_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}^*)(\mathrm{id}\otimes f_U\otimes\mathrm{id})(f_{\overline{U}}f^*_{\overline{U}}\otimes\overline{f}_U\overline{f}^*_U)\\ &\qquad (\mathrm{id}\otimes f_U^*\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\overline{R}))\\ &= \omega_{\mathcal{M}}(\overline{R}^*(\mathrm{id}\otimes r^*_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\overline{f}_U\overline{f}^*_U)(\mathrm{id}\otimes r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes\mathrm{id})\overline{R})\\ &= \omega_{\mathcal{M}}((r^*_{\Phi(\Theta(U))}\otimes R^*)(\mathrm{id}\otimes\overline{f}_U\overline{f}^*_U\otimes\mathrm{id})(r_{\Phi(\Theta(U))}\otimes R))\\ &= \omega_{\mathcal{M}}(r^*_{\Phi(\Theta(U))}(\mathrm{id}\otimes R^*\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes f^*_U f_U)(\mathrm{id}\otimes R\otimes\mathrm{id})r_{\Phi(\Theta(U))})\\ &= \omega_l(\mathrm{id})\\ &= d(U)\,\mathrm{Tr}_F(\mathrm{id}_F).\end{aligned}$$

因此 $\omega_l((1-\overline{f}^*_U\overline{f}_U)^2)=0$ 且 $\overline{f}^*_U\overline{f}_U=1$，因为 ω_l 是忠实的。

为证明 $\overline{f}_U\overline{f}^*_U=1$，可以使用以下 $\omega_r\in\mathbf{End}_{\mathrm{b}}(\Phi(\Theta(U))\otimes\overline{F})^*$:

$$\omega_r(\eta)=\omega_{\mathcal{M}}(\overline{r}^*_{\Phi(\Theta(U))}(\mathrm{id}\otimes R^*\otimes\mathrm{id})(\eta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes R\otimes\mathrm{id})\overline{r}_{\Phi(\Theta(U))}).$$

然后，类似的论证可证明 $\overline{f}_U\overline{f}^*_U=1$。 □

4.3. 最大 Kac 量子子群的印象型结果。本小节中，我们将上一小节的结果应用于源自量子齐性空间的模范畴。

首先，我们刻画具有模迹的关联模范畴所对应的量子齐性空间。

命题 4.27. 设 $\mathbb{G}$ 是 Kac 型紧量子群，A 是 $\mathbb{G}$ 的量子齐性空间。则以下条件等价:

(i) $\mathbb{G}\text{-Mod}^{\mathrm{f}}_A$ 具有 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模迹。(ii) A 上存在迹态。(iii) A 上的 $\mathbb{G}$-不变态是迹态。

证明。(ii) 与 (iii) 的等价性源于：对于 A 上的态 φ，$(\varphi\otimes h)\alpha$ 的 $\mathbb{G}$-不变性。

我们通过从给定的迹态 τ on A 构造一个 $\mathbf{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模迹，证明 (ii) $\Longrightarrow$ (i)。设 E 是一个有限生成的 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模。则存在一个 $\mathbb{G}$ 的有限维酉表示 π，使得存在

一个等距映射 $V \in \mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(E, \mathcal{H}_\pi \otimes A)$。现在我们定义 $\mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(E)$ 上的迹态 Tr_E 如下：

$$\mathrm{Tr}_E(T) = (\mathrm{Tr} \otimes \tau)(VTV^*).$$

由于 $\mathrm{Tr} \otimes \tau$ 是迹的，这一定义不依赖于 V 和 π 的选择。此外，角技巧表明 Tr_E 满足定义 4.9 的 (i)。为证明它与 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 的左作用相容，需要注意，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 中的标准解在希尔伯特空间范畴 $\mathrm{Hilb}^{\mathrm{f}}$ 中也是标准的。因此，偏迹 $\mathrm{Tr}_\pi \otimes \mathrm{id}\colon\ \mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(\mathcal{H}_\pi \otimes E) \longrightarrow \mathcal{L}_A^{\mathbb{G}}(E)$ 与 $\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{id}$ 一致。这就说明了相容性。

接下来我们转向 (i) $\Longrightarrow$ (ii) 的证明。固定一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模迹 $\{\mathrm{Tr}_E\}_E$，定义在$\mathbb{G}$- $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 上，且满足 $\mathrm{Tr}_A(1) = 1$。利用 A 的代数核 $\mathcal{A}$ 的谱分解，可以将 A 上的 $\mathbb{G}$-不变态 φ 视为从$\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{A}_{\mathbf{1}_\mathbb{G}}$ 的投影。我们利用 $\{\mathrm{Tr}_E\}_E$ 证明它是迹的。由于 $\mathcal{A}$ 的谱分解相对于来自φ 的内积是正交的，只需证明 $(T\otimes\xi)^*(S\otimes\eta)$ 和 $(S\otimes\eta)(T\otimes\xi)^*$ 的 $\mathcal{A}_{\mathbf{1}_\mathbb{G}}$-分量对 $T\otimes\xi$、$S\otimes\eta \in \mathcal{A}_\pi$ 相同。对于前者，其 $\mathcal{A}_{\mathbf{1}_\mathbb{G}}$-分量计算如下：

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle \xi, \eta\rangle}{\dim \pi}(R_\pi^* \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_{\overline{\pi}} \otimes T^*S)(R_\pi \otimes \mathrm{id}_A)\\
&= \frac{\langle \xi, \eta\rangle}{\dim \pi}\,\mathrm{Tr}_A((R_\pi^* \otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_{\overline{\pi}} \otimes T^*S)(R_\pi \otimes \mathrm{id}_A))1_A\\
&= \frac{\langle \xi, \eta\rangle}{\dim \pi}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\pi \otimes A}(T^*S)1_A\\
&= \frac{\langle \xi, \eta\rangle}{\dim \pi}\,\mathrm{Tr}_A(ST^*)1_A\\
&= \frac{\langle \xi, \eta\rangle}{\dim \pi}ST^*.
\end{aligned}$$

最后一个公式恰好是第二个公式的 $\mathcal{A}_{\mathbf{1}_\mathbb{G}}$-分量。现在我们得出结论。□

设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群，$\mathbb{K}$ 是它的最大 Kac 量子子群。从 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 到 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$ 的限制函子记作 Θ。取 $\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}$ 中一个代表元集合，其中包含 $\mathbb{G}$ 的所有不可约表示等价类的代表元。

对于 $\pi, \rho \in \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$，我们将 $L_0(\pi, \rho)$ 定义为 $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\pi|_\mathbb{K}, \rho|_\mathbb{K})$ 的一个子集，它由以下形式的交织算子组成：

$$T^* \circ (a_{\Theta,\sigma_1}^{n_1} \otimes a_{\Theta,\sigma_2}^{n_2} \otimes \cdots \otimes a_{\Theta,\sigma_k}^{n_k}) \circ S$$

其中 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, $n_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\sigma_i \in \in \mathrm{Irr}\ \mathbb{G}$, $T \in \in \mathrm{Hom}_\mathbb{G}(\rho, \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_k)$, $S \in \in \mathrm{Hom}_\mathbb{G}(\pi, \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_k)$。接着，我们将 $\mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\pi|_\mathbb{K}, \rho|_\mathbb{K})$ 的一个子空间 $L(\pi, \rho)$ 定义为以下形式交织算子的线性张成：$T_l T_{l-1} \cdots T_1$ 其中 $T_j \in L_0(\sigma_{j-1}, \sigma_j)$,$\sigma_0 = \pi$, $\sigma_l = \rho$, $\sigma_j \in \in \mathrm{Irr}\,\mathbb{G}$，对于 $1 \le j \le l-1$。

引理 4.28. 对任意 $\pi, \rho \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$，我们有 $L(\pi, \rho) = \mathrm{Hom}_\mathbb{K}(\pi|_\mathbb{K}, \rho|_\mathbb{K})$。

证明。考虑一个 C*-范畴，其对象集为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$，态射集 $L(\pi, \rho)$ 是从 π 到 ρ 的态射。设 $\mathcal{L}$ 为其 Karoubi 包络。由于

$T \otimes S \in L(\pi \otimes \pi', \rho \otimes \rho')$ 对任意 $T \in L(\pi, \rho)$ 和 $S \in L(\pi', \rho')$ 均成立， $\mathcal{L}$ 成为一个 C*-张量范畴。此外，从 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$ 到 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$ 的限制函子诱导出一个从 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$ 到 $\mathcal{L}$ 的 C*-张量函子。特别地， $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$ 在 $\mathcal{L}$ 中是刚性的，因此 $\mathcal{L}$ 是刚性的。

现在，通过复合包含 $\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$ 和纤维函子 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{Hilb}^{\mathrm{f}}$，我们得到一个纤维函子 $\mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Hilb}^{\mathrm{f}}$。接着，Woronowicz 的 Tannaka-Krein 对偶（[NT13, 定理 2.3.2]）表明，存在一个紧量子群 $\mathbb{H}$ 以及态射 $\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{H}$ 和 $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{G}$，它们分别对应于 $\mathcal{L}$ 和这些函子。由于 $\mathcal{L}$ 的每个对象都是 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$ 的像的直和项，因此可以将 $\mathbb{H}$ 视为 $\mathbb{G}$ 的量子子群，且它包含 $\mathbb{K}$。

另一方面，$(\pi, \overline{\pi}, (\mathrm{id} \otimes a_{\Theta\,\pi}^{1/2},\,)R_\pi, (a_{\Theta}^{-1/2},\,{}_\pi \otimes \mathrm{id})\overline{R}_\pi)$ 是 $\mathcal{L}$ 中共轭方程的一个解。此外，它满足

$$\|(\mathrm{id} \otimes a_{\Theta,\pi}^{1/2})R_\pi\| = \|(a_{\Theta,\pi}^{-1/2} \otimes \mathrm{id})\overline{R}_\pi\| = \dim \mathcal{H}_\pi.$$

这意味着 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K} = \mathcal{L}$ 的纤维函子是保维的，因此$\mathbb{H}$ 是 Kac 型。于是 $\mathbb{H}$ 必须包含于 $\mathbb{K}$，从而有 $\mathbb{H} = \mathbb{K}$。因此， $L(\pi, \rho)$与 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\pi|_{\mathbb{K}}, \rho|_{\mathbb{K}})$的维数相同。现在即可得到结论。□

~定理 4.29. 设 A 是 $\mathbb{K}$ 的一个量子齐性空间， A 是其诱导的$\mathbb{G}$-C*-代数。若 A 有一个迹态，且 $\mathrm{Irr}\ \mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 有限，则 $\mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Corr}_{\widetilde{A}}^{\mathrm{rf}}$是刚性的，并且 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}$给出 $\mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Corr}_A^{\mathrm{rf}} \cong \mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Corr}_{\widetilde{A}}^{\mathrm{rf}}$作为 C*-张量范畴之间的一个等价。

证明。设 $\mathcal{M} = \mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$。那么 $\mathcal{M}$ 是一个带有$|\mathrm{Irr}\,\mathcal{M}| < \infty$的迹态 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$-模范畴。

由定理 4.8，只需证明从$[\mathcal{M}, \mathcal{M}]^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}}{}_{\mathrm{b}}$到 $[\mathcal{M}, \mathcal{M}]^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}}{}_{\mathrm{b}}$的典范包含是一个等价。容易看出，这个包含是全忠实的，因此剩下的部分就是证明其本质满射性。

取 $(F, f) \in [\mathcal{M}, \mathcal{M}]^{\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}}{}_{\mathrm{b}}$。定理 4.25 和命题 4.21 断言我们有

$$(\Phi(a_{\Theta,\pi}) \otimes \mathrm{id}_F) f_\pi = f_\pi(\mathrm{id}_F \otimes \Phi(a_{\Theta,\pi}))$$

对任意 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$，其中 (Φ, φ): $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K} \longrightarrow [\mathcal{M}, \mathcal{M}]_{\mathrm{b}}$ 是典范的 C*-张量函子。

利用 u 上的编织方程以及前面的引理，我们还得到

$$(\Phi(T) \otimes \mathrm{id}_F) f_\pi = f_\pi(\mathrm{id}_F \otimes \Phi(T))$$

对任意 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$ 以及任意 $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\pi|_{\mathbb{K}}, \pi|_{\mathbb{K}})$。因此，我们可以如下定义 f_ρ（其中 $\rho \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$）：

$$\widetilde{f}_\rho = (\Phi(V)^* \otimes \mathrm{id}_F) f_\pi(\mathrm{id}_F \otimes \Phi(V))$$

其中 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$，且 $V \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\rho, \pi|_{\mathbb{K}})$ 是一个等距映射。根据上述等式，~ f_ρ 的定义不依赖于 π 和 V 的选择。容易看出，$(F, \widetilde{f})$ 定义了一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$-模函子，并且作为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{G}$-模函子，它是 (F, f)。□

例 4.30。令 $A = C(\mathbb{K})$。那么，相应的 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$-模范畴是希尔伯特空间范畴$^{\mathrm{f}}$，其作用由纤维函子给出。这个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{K}$-模范畴具有一个

$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$-模迹，且只有一个不可约对象，因此我们可以应用定理 4.29。由于 $C(\mathbb{K})$ 的诱导是 $C(\mathbb{G})$，我们可以得出 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{G})}$ 是刚性的，并且 $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{K})}$ 与 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{G})}$ 之间存在 C*-张量范畴的等价。另一方面，根据命题 3.10，我们有 $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{K})} \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathcal{O}(\mathbb{K})$，以及 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{C(\mathbb{G})} \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$。结合这些等价，我们可以看出 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 是刚性的，并且 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathcal{O}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathcal{O}(\mathbb{G})$。直接计算可知，这个等价由典范态射 $q\colon \mathcal{O}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{K})$ 诱导。

根据这些观察，定理 4.29 可以视为 [CKS, 定理 2.3] and $\mathfrak{b}\mathbb{K} \cong \mathfrak{b}\mathbb{G}$ 的推广，而其本质上已在 [So05, 第 4 节.3] 中得到证明。

对于 $\mathbb{G}$ 的量子齐性空间 A，我们将其皮卡群 $\mathrm{Pic}_{\mathbb{G}}(A)$ 定义为 $\mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}_{A}$ 中所有可逆对象的等价类所成的群（参见 [DC12, 推论 2.5]）。其乘积由张量积给出。

在定理 4.29 的证明中用命题 4.24 代替定理 4.25，我们可以得到以下定理。

定理 4.31。设 Γ 是 $\mathbb{K}$ 的余交换量子子群。那么对于 Γ 的任意量子齐性空间 A，诱导函子给出群同构 $\mathrm{Pic}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ind}\,{}^{\mathbb{K}}_{\widehat{\Gamma}}A) \cong \mathrm{Pic}_{\mathbb{G}}(\mathrm{Ind}\,{}^{\mathbb{G}}_{\widehat{\Gamma}}A)$。

此外，我们还可以看到，诱导函子给出了自同构群之间的一个同构。对于量子齐性空间 A of $\mathbb{G}$，A 的 $\mathbb{G}$-等变自同构群记为 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(A)$。若给定 $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(A)$，我们可以构造一个 $\mathbb{G}$-等变可逆对应A_θ，其定义在 A 上，定义如下：

- 作为一个 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特 A-模，$A_\theta = A$。
  A_θ 上 $x \in A$ 的左乘由 $\theta^{-1}(x)$的左乘给出。

于是我们有 $A_\theta \otimes_A A_{\theta'} \cong A_{\theta\theta'}$，因此得到群同态 $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(A) \longmapsto [A_\theta] \in \mathrm{Pic}_{\mathbb{G}}(A)$。由于 $A^{\mathbb{G}} = \mathbb{C}1_A$，该同态是单射。

引理 4.32. 设 M 是定义在 A上的一个 $\mathbb{G}$-等变可逆对应。那么存在 $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(A)$，使得 $M \cong A_\theta$ 当且仅当 M 具有一个非零的$\mathbb{G}$-不变向量。

证明。显然，在 A_θ 中存在一个非零的 $\mathbb{G}$-不变向量。因此，只需证明存在一个非零的 $\mathbb{G}$-不变向量蕴含 θ 的存在。由于 M 作为 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特空间 A-模是不可约的，它必与 A 同构。因此，A 上存在一个左 A-作用，使得 M 和 A 作为 A 上的 $\mathbb{G}$-等变对应同构。但这种对应必为 A_θ 的形式，其中 $\theta\colon A \longrightarrow A$ 是一个 $\mathbb{G}$-等变的 $*$-同态。由于 M 可逆，这个 θ 必为一个自同构。由此便得出结论。□

定理 4.33。在与定理 4.31 相同的设定下，等变自同构的诱导给出群同构 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ind}\,{}^{\mathbb{K}}_{\widehat{\Gamma}}A) \cong \mathrm{Aut}_{\mathbb{G}}(\mathrm{Ind}\,{}^{\mathbb{G}}_{\widehat{\Gamma}}A)$。

证明。应注意，对于任意 $E \in \mathbb{K}\text{-Mod}_A^{\mathrm{f}}$，$\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} E$ 有非零的 $\mathbb{G}$-不变向量，当且仅当 E 有非零的 $\mathbb{K}$- 不变向量。

T那么该结论可由定理 4.31 和前述引理得出。 □

例 4.34。设 $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ 是一个特征值重数均为一的正可逆矩阵。那么，自由酉量子群 U_Q^+ ([DW96, 定理 1.3]) 的最大 Kac 量子子群同构于自由群 F_n ([DFS, 定理 2.6]) 的离散对偶。特别地，它是余交换的，因此我们有群同构

$$\mathrm{Pic}_{\widehat{F_n}}(A) \cong \mathrm{Pic}_{U_Q^+}(\mathrm{Ind}_{\widehat{F_n}}^{U_Q^+} A), \quad \mathrm{Aut}_{\widehat{F_n}}(A) \cong \mathrm{Aut}_{U_Q^+}(\mathrm{Ind}_{\widehat{F_n}}^{U_Q^+} A)$$

$\widehat{\ }$对于任意量子齐性空间 A，只要它是 F_n 的量子齐性空间。

5. Classification results for G_q

5.1. 印迹型结果。设 G 是一个单连通紧李群，T 是它的极大环面。G 的 Weyl 群记作 W。考虑固定 $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ 时的 Drinfeld-Jimbo 变形 G_q。我们用符号 ε_t 表示 $C(G_q)$ 上的特征，该特征定义为在 $t \in T$ 处取值。

让我们回顾一下在[DS99, NY12, So91]中建立的 $C(G_q)$和 $C(T\backslash G_q)$的表示论。

对于每个 $w \in W$，我们都有 $C(G_q)$的一个不可约 $*$-表示$(\pi_w, \mathcal{H}_w)$。当 $w = e$时，它与余单位 ε 相同；否则，它是无限维的。利用这些表示，作为集合，$C(G_q)$可通过$(w, t) \in W \times T \longmapsto (\varepsilon_t \otimes \pi_w)\Delta$与 $W \times T$ 同一化。若考虑通过此同一化从 $C(G_q)$在 $W \times T$上诱导的 Borel 结构，则每个 $\{w\} \times T \subset W \times T$都是 $C(G_q)$的一个 Borel子集。

对于 $C(T\backslash G_q)$，π_w 在 $C(T\backslash G_q)$上的限制仍然不可约，并且 $w \in W \longmapsto \pi_w|_{C(T\backslash G_q)}$ 是一个双射。W 的诱导 Borel 结构是离散的。

以下命题是我们希望在本小节中使用的结果

命题 5.1。双对偶 $C(T\backslash G_q)^{**}$ 与 $\prod_{w\in W} B(\mathcal{H}_w)$ 同构。此外，其中心包含于 $Z(C(G_q)^{**})$ 中。

证明。注意到 $C(T\backslash G_q)$ 是可分 I 型。因此，我们可以将 $C(T\backslash G_q)$ 在 $C(T\backslash G_q) \cong W$ 上的任意可分 $*$- 表示分解为直积分。由于 W 作为博雷尔空间是离散的，这意味着可分的 $*$-表示具有不可约分解。通过将表示分解为循环表示，我们也可得到非可分 $*$-表示的不可约分解。这便说明了命题的前半部分。

令 $p_w \in C(T\backslash G_q)^{**}$ 为与 $B(\mathcal{H}_w)$ 对应的投影。为证明命题的后半部分，只需证明对于 $C(G_q)$ 的任意可分 $*$-表示 $(\pi, \mathcal{H})$，都有 $\pi(p_w) \in \pi(C(G_q))'$。由于 $C(G_q)$ 是 I 型，我们可以将 $(\pi, \mathcal{H})$ 在 $C(G_q)$ 上分解为直积分。于是每个 $w \in W$ 都定义了一个投影 $P_w \in \pi(C(G_q))'$，它对应于 $\{w\} \times T \subset W \times T \cong C(G_q)$ 的特征函数。

这 P_w必定是 $\pi(p_w)$，因为我们有$(\varepsilon_t \otimes \pi_w)\Delta|_{C(T\backslash G_q)} = \pi_w$，对任意 $t \in T$均如此。特别地，我们有 $\pi(p_w) = P_w \in \pi(C(G_q))'$。□

注记 5.2. 设 $\{p_w\}_{w\in W}$ 如证明中所述。则从$C(G_q)^{**}$ 到 $C(T)^{**}$ 的典范映射经由 $x \in C(G_q)^{**} \longmapsto p_e x \in p_e C(G_q)^{**}$分解。此外，我们有 $p_e C(G_q)^{**} \cong C(T)^{**}$。

~推论 5.3。设 A T-C*-代数，其诱导的 A G_q-C*-代数为 ~。对于 A上的任意迹正线性泛函 τ，存在 A上的迹正线性泛函 τ'，使得 $\tau = \tau' \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)|_{\widetilde{A}}$。

~证明。取 A上的迹正线性泛函 τ。若 $\tau = 0$，则无需证明。因此我们可以假设 $\tau \neq 0$；此外，经过归一化后， τ 是一个迹态。

现在考虑相对于 τ的 GNS 三元组 $(\pi_\tau, \mathcal{H}_\tau, \xi_\tau)$。那么 $\pi_\tau($ ~ $A)''$是一个有限冯·诺依曼代数。特别地，$\pi_\tau(C(T\backslash G_q))''$ 是有限的，因此$\pi_\tau(p_e) = 1$且 $\pi_\tau(p_w) = 0$，其中 $w \neq e$。

取 φ $A\otimes C(G_q)^*$ 上的一个态，使得 $\varphi|_{\widetilde{A}} = \tau$，其 GNS 三元组为 $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$。那么存在一个等距映射 $V\colon\ \mathcal{H}_\tau \longrightarrow \mathcal{H}_\varphi$，使得对于任意~$x \in A$， $V\pi_\tau(x)\xi_\tau = \pi_\varphi(x)\tau$。因此，对于任意 $w \in W \setminus \{e\}$，我们有

$$\pi_\varphi(1 \otimes p_w)\xi_\varphi = V\pi_\tau(p_w)\xi_\tau = 0.$$

由于 $1 \otimes p_w$ 是 $(A \otimes C(G_q))^{**}$ 中的中心元，且 ξ_φ 是循环的，这意味着对于 $w \neq e$，有 $\pi_\varphi(p_w) = 0$。命题 5.1之后的注记表明，π_φ 通过~$A \otimes C(G_q) \longrightarrow A \otimes C(T)$进行分解；特别地， π_τ通过 $A \longrightarrow \mathrm{Ind}_T^T A$进行分解。由于 $(\mathrm{id} \otimes\varepsilon)|_{\mathrm{Ind}_T^T A}$给出了 $\mathrm{Ind}_T^T A \cong A$的一个同构，结论得证。□

以下是本小节的一个主要定理。

定理 5.4. 设 A 和 B 是 T-C*代数。若 B 具有忠实迹态族，则任何从 $\mathrm{Ind}_T^{G_q} A$ 到 $\mathrm{Ind}_T^{G_q} B$的 G_q-等变 $*$-同态，均由一个从 A 到 B的 T-等变 $*$-同态诱导。

证明. 设 $\varphi\colon \mathrm{Ind}_T^{G_q} A \longrightarrow \mathrm{Ind}_T^{G_q} B$是一个 G_q-等变 $*$-同态。对于 B上的任意迹态 τ， $\tau \circ (\mathrm{id} \otimes\varepsilon) \circ \varphi$ 也是 $\mathrm{Ind}_T^{G_q} B$上的迹态。因此它可经由 A分解。由于 B 具有忠实迹态族，映射 $(\mathrm{id} \otimes\varepsilon) \circ \varphi$ 也可经由 A分解，即存在一个 $*$-同态 $\varphi_0\colon\ A \longrightarrow B$，使得 $(\mathrm{id} \otimes\varepsilon) \circ \varphi = \varphi_0 \circ (\mathrm{id} \otimes\varepsilon)$。 φ_0的 T-等变性由 φ的G_q-等变性可得。

我们要证明 φ_0 是所需的同态。对于元素 $a \in \mathrm{Ind}_T^{G_q} A$，有

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= (\mathrm{id} \otimes\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\widetilde{\beta}(\varphi(a))) \\
&= ((\mathrm{id} \otimes\varepsilon) \circ \varphi \otimes \mathrm{id})(\widetilde{\alpha}(a)) \\
&= (\varphi_0 \circ (\mathrm{id} \otimes\varepsilon) \otimes \mathrm{id})(\widetilde{\alpha}(a)) \\
&= (\varphi_0 \otimes \mathrm{id})(a).
\end{aligned}$$

因此有 $\varphi = \mathrm{Ind}_T^{G_q} \varphi_0$。 □

~ ~推论 5.5. 设 A, B 是 T 的量子齐性空间， A, B 是其诱导的 G_q-C*-代数。那么 $\mathrm{Ind}_T^{G_q}\colon\ T\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{A,\ B} \longrightarrow G_q\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{\widetilde{A},\ \widetilde{B}}$ 是 C* 范畴之间的等价。

证明。我们需要证明 $\mathrm{Ind}_T^{G_q}$ 的本质满射性。取 $\widetilde{M} \in {}_{G_q}\text{-}\mathrm{Corr}^{\mathrm{rf}}_{\widetilde{A},\ \widetilde{B}}$。根据定理 4.1，我们可以取 $M \in T\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{f}}_B$，使得 $\widetilde{M} \cong \mathrm{Ind}_T^{G_q} M$。于是，$\widetilde{M}$ 是一个 G_q-等变 Hilbert B-模。A 在 M 上的右作用诱导出一个从 $\widetilde{A}$ 到 $\mathcal{L}_{\widetilde{B}}(\widetilde{M}) \cong \mathrm{Ind}_T^{G_q}\mathcal{L}_B(M)$ 的 G_q- 等变 $*$- 同态。若能证明 $\mathcal{L}_B(M)$ 有忠实迹，则由前一个定理可知，该 $*$- 同态是由一个从 A 到 $\mathcal{L}_B(M)$ 的 T-等变 $*$-同态诱导的。这定义了一个 T-等变 (A, B)-对应 M，并且我们有 $\mathrm{Ind}_T^{G_q} M \cong \widetilde{M}$。

现在我们证明 $\mathcal{L}_B(M)$ 上存在忠实迹。取某个 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} T$ 的 M 到 $\mathcal{H}_\pi \otimes B$ 的等距映射后，我们可以假设 $M = \mathcal{H}_\pi \otimes B$。于是 $\mathcal{L}_B(\mathcal{H}_\pi \otimes B) \cong B(H_\pi) \otimes B$，由有限性定理 [HKLS, 定理 4.1], 可知存在忠实迹，该定理断言 B 上存在忠实迹。□

推论 5.6。设 A 是 G_q 的量子齐性空间。若 A 包含 $C(T\backslash G_q)$ 作为一个含幺 G_q-C*-子代数，且具有迹态，则它必定由 T 的某个量子齐性空间诱导而来。

证明。设 J 是 A 的一个理想，定义如下：

$$J = \{x \in \widetilde{A} \mid \tau(x^* x) = 0 \text{ for any tracial state } \tau \in \widetilde{A}^*\}.$$

根据我们的假设，这是 A 的一个 T-不变真闭理想。

令 A 到 A/J 的商映射记为 q。J 的 T-不变性使我们能够在 A 上诱导一个 T- 作用。我们将证明 $(q \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}$ 给出一个从 $\widetilde{A}$ 到 $\mathrm{Ind}_T^{G_q} A$ 的 G_q- 等变 $*$- 同构。这个映射的良定义性和 G_q-等变性显而易见。由于 $\widetilde{A}^{G_q} = \mathbb{C}1_{\widetilde{A}}$，单射性是自动成立的。因此，只需证明满射性。由定理 5.4，限制映射 $(q\otimes\mathrm{id})\widetilde{\alpha}|_{C(T\backslash G_q)}$ 由 $\mathbb{C} \subset A$ 诱导，即与典范包含 $C(T\backslash G_q) \subset \mathrm{Ind}_T^{G_q} A$ 一致。因此，该包含的像包含于 $(q \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}$ 的像之中。另一方面，对于任意 $a \in A$ 和 $x \in C(G_q)$，我们有

$$\begin{aligned} P_A((q \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}(a)(1 \otimes x)) &= (q \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}(a) P_A(1 \otimes x) \\ &= (q \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}(a)(1 \otimes (h_T \circ q_T \otimes \mathrm{id})\Delta(x)), \end{aligned}$$

其中，P_A 是引理 4.3 中的期望，h_T 是定义在 $C(T)$ 上的 Haar 态，而 q_T 是从 $C(G_q)$ 到 $C(T)$ 的典范商映射。由于 $(h_T \circ q_T \otimes \mathrm{id})\Delta(x)$ 是 $C(T\backslash G_q)$ 中的一个元素，我们可以由此等式得出 $(q \otimes \mathrm{id})\widetilde{\alpha}$ 的满射性。□

推论 5.7. 设 $A \subset B$ 是量子齐性空间上的有限量子 G_q-覆盖空间。若 A 包含 $C(T\backslash G_q)$ 且具有迹态，则 $A \subset B$ 同构于 $\mathrm{Ind}_T^{G_q} A \subset \mathrm{Ind}_T^{G_q} B$，其中 $A \subset B$ 是有限量子 T-覆盖空间。

5.2. 离散量子子群。本小节中，我们将探讨其在离散量子群中的一些应用，并对 G_q 的有限指标离散量子子群进行分类。

设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群，$\mathbb{H}$ 是它的商群。那么有包含关系 $C(\mathbb{H}) \subset C(\mathbb{G})$。在这种情况下，存在唯一的 $\mathbb{G}$-期望 $E\colon C(\mathbb{G}) \longrightarrow C(\mathbb{H})$，即保持 Haar 态的条件期望。

定义 5.8. 设 $\mathbb{G}$ 是一个离散量子群，$\mathbb{H}$ 是 $\mathbb{G}$的一个量子子群。$E\colon C(\mathbb{G}) \longrightarrow C(\mathbb{H})$ 的标量指标称为量子群指标，记作 $[\mathbb{G}\colon \mathbb{H}]$。若量子子群 $\mathbb{H}$ 满足 $[\mathbb{G}\colon \mathbb{H}]$ 有限，则称其为有限指标。

注 5.9. 指标 $[\mathbb{G}\colon \mathbb{H}]$ 必定是正整数或 ∞。考虑 $C(\mathbb{H}) \subset C(\mathbb{G})$ 的基本构造，由推论 3.13 可知这一点。

在给出 G_q的有限指标量子子群的分类结果之前，我们先准备以下引理。设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群，$\mathbb{K}$ 是其最大 Kac 量子子群。从 $\mathcal{O}(\mathbb{G})$ 到 $\mathcal{O}(\mathbb{K})$ 的典范映射记作 q。

引理 5.10. 设 A 是 $\mathbb{G}$ 的一个右余理想，$\mathcal{A}$ 是其代数核。若典范包含 $A \subset C(\mathbb{G})$ 是一个有限量子 $\mathbb{G}$覆盖空间，则有$q^{-1}(q(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$。

证明。令 $E\colon C(\mathbb{G}) \longrightarrow A$ 为一个 $\mathbb{G}$-期望。根据我们的假设，这样的期望是唯一的，且具有有限指标。现在考虑 $\mathbb{G}$-等变希尔伯特A-模 $C(\mathbb{G})_E$。这给出了 $\mathbb{G}$-等变的不可约双模 betwee$A$ 和 $B = \mathcal{L}_A(C(\mathbb{G})_E)$。特别地，我们有一个等价 $\mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}} \cong \mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_B^{\mathrm{f}}$，它是 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模范畴。此外，$\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 是有限的，因为 $- \otimes_{C(\mathbb{G})} C(\mathbb{G})_E\colon \mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_{C(\mathbb{G})}^{\mathrm{f}} \longrightarrow \mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$ 是可伴随的，而 $\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_{C(\mathbb{G})}^{\mathrm{f}}$ 仅由一个元素构成。

另一方面，由于 $C(\mathbb{G}) \subset B$ 是一个有限量子 $\mathbb{G}$-覆盖空间，定理 4.29 蕴含存在一个有限量子 $\mathbb{K}$-覆盖空间 $C(\mathbb{K}) \subset B_0$，使得 $C(\mathbb{G}) \subset B$ 同构于 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} C(\mathbb{K}) \subset \mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} B_0$。特别地，我们有一个等价 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_B^{\mathrm{f}} \cong \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod}_{B_0}^{\mathrm{f}}$，它们是 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$-模范畴。因此，$\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$上具有 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$-模范畴的结构。由于 $\mathrm{Irr}\,\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$是有限的，定理 4.25 蕴含 $- \otimes_A \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 是一个 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$-模函子，其定义域为$\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$，值域为 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_{C(\mathbb{G})}^{\mathrm{f}} \cong \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod}_{C(\mathbb{K})}^{\mathrm{f}}$。

取一个量子齐性空间 A_0 of $\mathbb{K}$，它对应于 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$-模范畴 $\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}}$中的一个不可约对象 A。若固定一个同一化$\mathbb{G}\text{-}\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{f}} \cong \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod}_{A_0}^{\mathrm{f}}$，则有相应的 $\mathbb{G}$-等变同构 $A \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} A_0$。此外，$- \otimes_A \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 诱导出一个从 $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod}_{A_0}^{\mathrm{f}}$到 $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod}_{C}^{\mathrm{f}}(\mathbb{K})$ 的 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$-模函子。由定理 3.14，我们有相应的 $M \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Corr}_{A_0,C(\mathbb{K})}^{\mathrm{rf}}$，它满足 $A_0 \otimes_{A_0} M \cong C(\mathbb{K})$。因此，$M$ 可视为 $C(\mathbb{K})$，作为一个 $\mathbb{K}$-等变希尔伯特 $C(\mathbb{K})$-模。于是我们有一个 $\mathbb{K}$-等变的 $*$-同态$\varphi\colon A_0 \longrightarrow C(\mathbb{K})$。根据我们的构造，此映射使下图

交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} A_0 & \xrightarrow{\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}\varphi} & \mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}} C(\mathbb{K}) \\ \cong\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes\mathrm{id}} \\ A & \longrightarrow & C(\mathbb{G}). \end{array}$$

这意味着 $q(A) = \varphi(A_0)$ 且 $q^{-1}(\varphi(A_0)) = A$。 □

现在我们给出 G_q 的有限指数离散量子子群的分类定理。令 P（分别为 Q）表示权格（分别为根格）。我们自然地将 P 识别为 T 的 Pontrjagin 对偶。

定理 5.11. G_q 的有限指数离散量子子群集合与 P/Q 的子群集合之间存在一一对应。

证明. 令 $q\colon C(G_q) \longrightarrow C(T)$ 为典范映射。取一个有限指数离散量子子群 $\widehat{\mathbb{H}} \subset \widehat{G_q}$。表示范畴 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H}$ 可视为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 的全子范畴。

考虑像 $q(C(\mathbb{H})) \subset C(T)$。若赋予其 $C(T)$ 上余乘法的限制，则这定义了一个紧量子群 H。于是 H 是 T 的商紧群，并给出 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} T$ 的全子范畴 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} H$。性质 $q(C(\mathbb{H})) = C(H)$ 意味着 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} H$ 由 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} T$ 构成，其中 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} T$ 是某个 $\rho \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H} \subset \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 的直和项。结合 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 与最高权理论可知，$H \subset T = P$ 必须包含根格 Q。

另一方面，我们有 $q^{-1}(C(H)) = C(\mathbb{H})$ 这意味着，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H}$由满足 $\pi|_T \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} H \subset \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} T$ 的 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 组成。因此，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H}$ 是 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 的全子范畴，由其权属于 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ H 的 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 组成。这些观察说明，$\mathbb{H} \longmapsto \mathbb{H}/Q$ 是一个单射，将 G_q 的有限指标离散量子子群集合映射到 P/Q 的子群集合。

为证明满射性，取一个包含 Q 的子群 $\Lambda \subset P$。令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 的全子范畴，由权属于 Λ 的 $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}} G_q$ 组成。于是这是一个刚性 C*-张量范畴，因此存在一个以 $\widehat{G_q}$ 为对象的离散量子群 $\widehat{\mathbb{H}}$，使得 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\mathbb{H} \cong \mathcal{C}$。此外，包含 $C(\mathbb{H}) \subset C(G_q)\widehat{\ }$ 是由 $C(\Lambda) \subset C(T)$ 导出的。由于 $Q \subset P$ 是有限指标，该包含具有有限指标的 T-期望。因此，$C(\mathbb{H}) \subset C(G_q)$ 具有有限指标的 G_q-期望 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，即 $\mathbb{H}$ 是有限指标的 G_q。由于 $\mathbb{H}$ 在上一段定义的映射下的像为 Λ，故满射性得证。□

Appendix A.

A.1. 命题 2.8 的证明。

引理 A.1. 设 A 是一个 $\mathbb{G}$-C*-代数。那么其不动点子代数 $A^{\mathbb{G}}$ 在 A 中是非退化的。此外，对于任意 $a \in \mathcal{A}$，我们有 $x \in A^{\mathbb{G}}$ 和 $b \in \mathcal{A}$，使得 $a = xb$。

证明. 设 $\mathcal{A}$ 是 A 的代数核。要证明 $A^{\mathbb{G}} \subset A$ 的非退化性，只需说明任意 $a \in \mathcal{A}$ 都可以用形如 xb 的元素逼近，其中 $x \in A^{\mathbb{G}}$ 且 $b \in \mathcal{A}$。任取 $\varepsilon > 0$，并令 $\alpha(a) = \sum_{i=1}^{n} a_0^i \otimes a_1^i$。于是我们可以找到 $e \in A$，使得对于 $1 \leq i \leq n$，有 $\|ea_0^i - a_0^i\| < \varepsilon(n\|S(a_1^i)\|)^{-1}$。现在我们有

$$\alpha(e)(a \otimes 1) - a \otimes 1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha(ea_0^i - a_0^i)(1 \otimes S(a_1^i)).$$

因此我们也有

$$\|(\mathrm{id} \otimes h)(\alpha(e))a - a\| \leq \|\alpha(e)(a \otimes 1) - a \otimes 1\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|ea_0^i - a_0^i\| \|S(a_1^i)\| < \varepsilon.$$

由于 $(\mathrm{id} \otimes h)(\alpha(e))$ 属于 $A^{\mathbb{G}}$，这个不等式完成了前半部分的证明。

接下来我们证明陈述的后半部分。取一个不可约表示 π of $\mathbb{G}$，并令 $C(\mathbb{G})_\pi$ 为 π 的矩阵系数的线性张成。此外，定义 A_π 如下：

$$A_\pi = \{x \in A \mid \alpha(x) \in A \otimes C(\mathbb{G})_\pi\}.$$

那么，正如 [DC16, Section 3] 中所示，以下性质成立：

(i) $\mathcal{A} = \bigoplus_{\pi \in \text{不可约表示} \mathbb{G}} A_\pi$。(ii) 每个 A_π 都是一个闭 $A^{\mathbb{G}}$-双模 A。

(iii) 关于 (i) 中分解的 A_π 上的投影可延拓为连续投影 $E_\pi \colon A \longrightarrow A_\pi$。

利用 (i)，可见对于 $A_F = \sum_{\pi \in F} A_\pi$，(ii) 和 (iii) 成立，其中$F$ 是 Irr $\mathbb{G}$的有限子集。

任取 $a \in \mathcal{A}$ 以及 Irr $\mathbb{G}$ 的有限子集 $F \subset$，使得 $a \in A_F$。由于$A^{\mathbb{G}}$ 在 A中非退化， $A^{\mathbb{G}}$ 的一个近似单位也构成左 Banach $A^{\mathbb{G}}$-模 A_F的近似单位。接着，利用 Cohen-Hewitt 分解定理（[BD73，第 I 章第 11 节定理 10]），可取 $x \in A^{\mathbb{G}}$ 和 $b \in A_F$，使得 $a = xb$。由于 $A_F \subset \mathcal{A}$，证明完毕。□

命题 A.2（命题 2.8）。设 A 和 B 是具有代数核 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的 $\mathbb{G}$-C*代数。如果 $\varphi \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是一个从 $\mathcal{A}$ 到 B的 $\mathbb{G}$-等变完全正映射，则它可延拓为一个从 A 到 B的 $\mathbb{G}$-等变完全正映射。

证明。将 φ 替换为 $\varphi \oplus \mathrm{id} \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$后，我们可以假设 φ 是忠实的，即当且仅当 $x = 0$时，$\varphi(x^*x) = 0$。

根据我们的假设，可以在 $\mathcal{A} \otimes B$ 上定义一个取值于 B的半内积，如下所示：

$$\langle a \otimes b, a' \otimes b' \rangle_B = b^* \varphi(a^* a') b'.$$

令 E 为通过对 $\mathcal{A} \otimes B$取完备化得到的希尔伯特 B-模。我们证明，$a \in \mathcal{A}$ 通过 $L_a(a' \otimes b') = aa' \otimes b'$在 E 上定义了一个可伴随的右 B-模映射 L_a。任取一个元素 $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in \mathcal{A} \otimes B$。那么，引理 A.1 表明，我们有一个表示 $a_i = x_i a_i'$，其中 $x_i \in A^{\mathbb{G}}$ 且 $a_i' \in \mathcal{A}$。由于$A^{\mathbb{G}}$ 是一个 C*-代数，对于任意 $a \in A^{\mathbb{G}}$，我们可以取 $X \in A^{\mathbb{G}} \otimes M_n(\mathbb{C})$ 使得

$$\mathbf{x}^* a^* a \mathbf{x} + X^* X = \|a\|^2 \mathbf{x}^* \mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1\, x_2\, \dots\, x_n)$。那么， φ 的完全正性意味着

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_{i=1}^{n} aa_i \otimes b_i, \sum_{j=1}^{n} aa_j \otimes b_j \right\rangle_B &= \sum_{i,j=1}^{n} b_i^* \varphi(a_i'^* x_i^* a^* a x_j a_j') b_j \\ &\leq \|a\|^2 \sum_{i,j=1}^{n} b_i \varphi(a_i'^* x_i^* x_j a_j') b_j \\ &= \|a\|^2 \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i, \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes b_j \right\rangle_B .\end{aligned}$$

因此， L_a 定义良好且有界。

对于一般的 $a \in \mathcal{A}$，我们采用 DC16 命题 4.1] 的证明中的论证。于是可以取一族 $(v_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$，使得 $a = v_1$ 且 $\sum_i v_i^* v_i \in A^{\mathbb{G}}$，从而得到如下的上界估计：

$$\langle a\xi, a\xi \rangle_B \leq \left\langle \xi, \sum_{i=1}^{n} v_i^* v_i \xi \right\rangle_B \leq \|\sum_{i=1}^{n} v_i^* v_i\| \langle \xi, \xi \rangle_B .$$

这证明了 L_a的有界性。其伴随性可由下式看出：

$$\langle aa_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \rangle_B = \langle a_1 \otimes b_1, a^* a_2 \otimes b_2 \rangle_B .$$

特别地， $L_a^* = L_{a^*}$ 成立，因此 $a \longmapsto L_a$ 定义了一个 $*$-同态 $L\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{L}_B(E)$。由于 φ 是忠实的，这个映射也是忠实的。

接下来我们证明存在一个酉算子 $V\colon E \otimes_\beta (B \otimes C(\mathbb{G})) \longrightarrow E \otimes C(\mathbb{G})$，它对任意 $a \in \mathcal{A}$、 b、 $c \in B$ 以及 $x \in C(\mathbb{G})$ 均满足下述条件。

$$V((a \otimes b) \otimes (c \otimes x)) = \alpha(a)_{13} \beta(b)_{23} (1 \otimes c \otimes x).$$

此映射的良定义性和有界性可由下述方式看出：

$$\begin{aligned}&\langle V((a \otimes b) \otimes (c \otimes x)), V((a' \otimes b') \otimes (c' \otimes x')) \rangle_{B \otimes C(\mathbb{G})} \\ &= (c^* \otimes x^*) \beta(b^*) (\varphi \otimes \mathrm{id}) (\alpha(a^* a')) \beta(b') (c' \otimes x') \\ &= (c^* \otimes x^*) \beta(b^* \varphi(a^* a') b') (c' \otimes x') \\ &= \langle (a \otimes b) \otimes (c \otimes x), (a' \otimes b') \otimes (c' \otimes x') \rangle_{B \otimes C(\mathbb{G})} .\end{aligned}$$

特别地， V 是等距映射，因此只需证明 V 的值域在 $E \otimes C(\mathbb{G})$中稠密。这可由 $\operatorname{span} \alpha(\mathcal{A})(\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 和 $\operatorname{span} \beta(\mathcal{B})(\mathbb{C} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})) = \mathcal{B} \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G})$ 得出。

令 $\lambda\colon C(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathcal{L}_{C(\mathbb{G})}(C(\mathbb{G}))$为由左乘法定义的 $*$-同态。那么对任意 $a \in \mathcal{A}$，我们有 $V(L_a \otimes_\beta 1)V^* = (L \otimes \lambda)\alpha(a)$。这意味着：

$$\|L_a\| = \|L_a \otimes_\beta 1\| = \|(L \otimes \lambda)(\alpha(a))\| = \|(L \otimes \mathrm{id})(\alpha(a))\|.$$

在第一个和第三个等式处，我们分别利用了 β 和 λ 的忠实性。由于 L 是忠实的， $a \in \mathcal{A} \longmapsto \|L_a\|$ 在 $\mathcal{A}$上定义了一个 C*-范数。上述等式表明， $\mathcal{A}$ 关于此范数的完备化带有由 α诱导的 $\mathbb{G}$ 作用。于是，根据 [DY13，命题 4.4]，此范数与 A的原范数一致。因此， L延拓为一个 $*$-同态 $L\colon\ A \longrightarrow \mathcal{L}_{B^{\mathbb{G}}}(E)$。

于是，对于 x、 $a \in \mathcal{A}$、 $b \in B$，有如下不等式：

$$\begin{aligned}\|b^*\varphi(a^*xa)b\| &= \|\langle a \otimes b, L_x(a \otimes b)\rangle_B\| \\ &\leq \|x\|\|a \otimes b\|^2 \leq \|x\|\|b\|^2\|\varphi(a^*a)\|.\end{aligned}$$

利用 B 的一个近似单位，我们还可得到以下关于 x、 $a \in \mathcal{A}$ 的不等式：

$$\|\varphi(a^*xa)\| \leq \|x\|\|\varphi(a^*a)\|.$$

因此，对于任意 $a \in \mathcal{A}$， $x \longmapsto \varphi(a^*xa)$ 都是连续的。利用极化恒等式，我们还可看到，对于任意 a、 $a' \in \mathcal{A}$， $\varphi_{a,\,a'}$： $x \longmapsto \varphi(axa')$ 是连续的。

为证明 φ 的连续性，取 $\mathcal{A}$ 中的一个零序列 $(x_n)_n$。于是，我们可以找到一个由 $\operatorname{Irr}\mathbb{G}$ 的有限子集组成的序列 $(F_n)_n$，使得 $x_n \in A_{F_n}$，其中 A_{F_n} 是 A 的子空间，正如引理 A.1 的证明中所述。令 $M = c_0\text{-}\bigoplus_n A_{F_n}$。于是， $A^{\mathbb{G}}$ 从左侧和右侧作用于 M。此外， $A^{\mathbb{G}}$ 的一个近似单位在 M 的两侧都作为有界近似单位起作用，因为 $A^{\mathbb{G}}$ 在 A 中是非退化的。因此，我们可以将 Cohen-Hewitt 分解定理（[BD73，第 I 章第 11 节，定理 10]）应用于作为 $A^{\mathbb{G}}$-双模的 M。

现在将 $(x_n)_n$ 视为一个元素 $x \in M$。那么我们可以找到 a、 a' 和 $y \in M$，使得 $x = aya'$；也就是说，我们可以找到一个零序列 $(y_n)_n \subset \mathcal{A}$，使得对于所有 n，都有 $x_n = ay_na'$。$\varphi_{a,a'}$ 的连续性意味着 $\varphi(x_n) = \varphi(ay_na') = \varphi_{a,a'}(y_n)$ 在范数下收敛于 0。因此， φ 关于范数拓扑连续，并可延拓到 A。完全正性和 $\mathbb{G}$-等变性由 φ 的相应性质推出。□

A.2. 命题 2.13 的证明。

命题 A.3（命题 2.13）。设 $E\colon B \longrightarrow A$ 是一个条件期望。那么， E 具有有限指标，当且仅当它满足以下两个条件：

(i) E 的概率指标有限。(ii) 希尔伯特 A-模 B_E 可以分解为有限生成投射希尔伯特 A-模的直和。

在这种情况下， E 的标量指标与 $\|$指标 $E\|$一致。

证明。假设 E 具有有限指标，并取一个拟基$(v_i)_{i=1}^n \subset B$。那么我们有一个线性映射 $V\colon B_E \longrightarrow A^n$，定义为 $V(x) = (E(v_i^*x))_{i=1}^n$。于是我们有

$$\langle V(y), V(x)\rangle_A = \sum_{i=1}^n E(v_i^*y)^*E(v_i^*x) = E\left(y^*\sum_{i=1}^n v_iE(v_i^*x)\right) = E(y^*x) = \langle y, x\rangle_A.$$

因此， V 是一个等距的 A-模映射，所以 B_E 是有限生成的投射希尔伯特 A-模。由不等式 $\|\operatorname{Index} E\|E(x) - x \geq 0$可知 E 的概率指标有限，该不等式已在 [Wa90, 引理 2.6.2.]中证明。此外，将 E 替换为 $E \otimes \mathrm{id}\colon B \otimes M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow A \otimes M_n(\mathbb{C})$，我们还可以看出 $\|\operatorname{Index} E\|$ 等于或大于 E 的标量指标，其中 n 是任意正整数。

接下来我们证明反向结论。首先注意到， B 上的原始 C*-范数与相对于 E 的 L^2-范数等价，因此 $B_E = B$ 作为$\mathbb{C}$-向量空间亦然。

由前一个命题可知，标量指标 c of E 有限。于是， B 上的乘积映射诱导出一个有界的 B-模映射 $T\colon B_E \otimes_A B \longrightarrow B$，其中 $\|T\|^2 \leq c$，因为我们有

$$\left\langle \sum_{i=1}^n x_i y_i, \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\rangle_B = {}^t\mathbf{y}^* \mathbf{x}^* \mathbf{x}^t \mathbf{y}$$

$$\leq c\, {}^t\mathbf{y}^* (E \otimes \mathrm{id})(\mathbf{x}^*\mathbf{x})^t\mathbf{y} = c \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\rangle_B ,$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)$， $\mathbf{y} = (y_1\, y_2\, \ldots\, y_n)$。现在，对于任意 $\xi \in B_E \otimes_A B$，我们都可以找到 $\eta \in B_E \otimes_A B$，使得 $T\xi = \langle \eta, \xi \rangle_B$，因为 B_E 是有限生成投射希尔伯特 A-模的直和。此外，我们可以找到数列 $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset B_E$ 和 $\{y_i\}_{i=1}^\infty \subset B$，使得 $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ 收敛到 η。令 S_n 为定义在 B_E 上的一个 A-模映射，其定义为

$$S_n(z) = \sum_{i=1}^n y_i^* \langle x_i, z \rangle_A = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i, z \otimes 1 \right\rangle .$$

于是 S_k 收敛到算子范数下的 id_B，因此对于某个 k， S_k 是可逆的。这一事实使我们能够找到 B 中的 $(u_i)_{i=1}^n$ 和 $(v_i)_{i=1}^n$，使得对于任意 $x \in B$，都有 $x = \sum_{i=1}^n u_i E(v_i^* x)$。于是，根据 [Wa90, 引理 2.1.6.]，我们可以找到 E 的一个拟基。

对于最后一个结论，只需证明 $\|\mathrm{Index}\, E\| \leq c$。这很容易看出，因为 $T^*(1_B) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^*$，且 $TT^*(1_B) =$ 的指标为 E。□

致谢。作者感谢 Yasuyuki Kawahigashi 提供有益的意见，并指出本文中的错误和笔误。他也感谢 Reiji Tomatsu 与作者共同举办研讨会。本研究得到前沿物理与数学计划的资助。

References

[AV16] Y. Arano, S. Vaes, 《全不连通群的 C*-张量范畴与子因子》，阿贝尔研讨会，第 1–43 页，Springer，2016 年。[BD73] F. F. Bonsall, J. Duncan, 《完备赋范代数》，数学成果丛书第 80 卷，Springer-Verlag，柏林和纽约，1976 年。[BDH] M. Baillet, Y. Denizeau, J. -F. Havet, 《条件期望的指标》，《数学汇编》66 (1988)，第 2 期，199–236。[BKLR] M. Bischoff, Y. Kawahigashi, R. Longo, K.-H. Rehren, 《冯·诺依曼代数的端同态与包含的张量范畴》，SpringerBriefs in Mathematical Physics，第 3 卷，Springer Verlag，柏林（2015）。[CKS] A. Chirvasitu, J. Krajczok, P. M. So ltan, 《I 型 C*-代数上的紧量子群结构》，预印本（2020），可见 arXiv:2008.03772。[DC12] K. De Commer, 《Podle´s 球面之间的等变 Morita 等价》，Banach Center Publications 98 (2012)，85–105。[DC16] K. De Commer, 《紧量子群作用》，预印本（2016），可见 arXiv:1604.00159。

[DFS] B. Das, U. Franz, A. Skalski, 《泛正交量子群的 RFD 与 Kac 商》, Ann. Math. Blaise Pascal, 28 (2021), 第 2 期, 141–155。[Di82] J. Dixmier, 《C*代数》, North-Holland 数学丛书, 第 15 卷, North-Holland, 1977 年。[DKSS] M. Daws, P. Kasprazak, A. Skalski, P. M. So ltan, 《局部紧量子群的闭量子子群》, Adv. Math. 231 (2012), 3473–3501。[DS99]M. S. Dijkhuizen, J. V. Stokman, 《量子化旗流形与不可约 $*$-表示》, Comm. Math. Phys. 203 (1999), 297–324。[DY13] K. De Commer, M. Yamashita, 《紧量子齐性空间的 Tannaka-Krein 对偶 I: 一般理论》, Theory Appl. Categ. 28 (2013), 第 31 期, 1099–1138。[DY15] K. De Commer, M. Yamashita, 《紧量子齐性空间的 Tannaka-Krein 对偶 II: 量子 $SU(2)$ 的量子齐性空间分类》, J. Reine Angew. Math. 708 (2015), 143–171。[DW96] A. van Daele, S. Wang, 《泛量子群》, Int. J. Math. 7 (1996), 第 2 期, 255–263。[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, 《张量范畴》, Mathematical Surveys and Monographs, 第 25 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2015 年。[FK00] M. Frank, E. Kirchberg, 《有限指标条件期望》, J. Oper. Theory 40 (1998), 第 1 期, 87–111。[HKLS] R. Høegh-Krohn, M. Landstad, E. Størmer, 《紧自同构遍历群》, Ann. of Math., 114 (1981), 75–86。[Jo83] V. F. Jones, 《子因子的指标》, Invent. Math. 72 (1983), 1–25。[KV00] J. Kustermans, S. Vaes, 《局部紧量子群》, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. 33 (2000), 第 6 期, 837–934。[Lo94] R. Longo, 《Hopf 代数与子因子的对偶》, Commun. Math. Phys. 159 (1994), 第 1 期, 133–150。[LR97] R. Longo, J. E. Roberts, 《维数理论》, K-Theory 11 (1997), 103–159。[Ne14] S. Neshveyev, 《非遍历作用的对偶理论》, M¨unster J. Math. 7 (2014), 第 2 期, 413–437。[NY12] S. Neshveyev, R. Tuset, 《具有泊松稳定子的齐性空间上的量子化函数代数》, Comm. Math. Phys. 312 (2012), 223–250。[NT13] S. Neshveyev, R. Tuset, 《紧量子群及其表示范畴》, Specialized Courses, 第 20 卷。SMF, 2013 年。[NY14] S. Neshveyev, M. Yamashita, 《Yetter-Drinfeld 代数的范畴对偶》, Doc. Math. 19 (2014), 1105–1139。[NY17] S. Neshveyev, M. Yamashita, 《幺半范畴的泊松边界》, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) 50 (2017), 第 4 期, 927–972。[NY18] S. Neshveyev, M. Yamashita, 《范畴 Morita 等价的紧量子群》, Doc. Math. 23 (2018), 2165–2216。[PP86] M. Pimsner, S. Popa, 《子因子的熵与指标》, Ann. ´E c. Norm. Sup. 19 (1986), 第 1 期, 57–106。[Po94] S. Popa, 《子因子对称包络代数的一些性质及其在可容许性和 T 性质中的应用》, Doc. Math. 4 (1999), 665–744。[Po95] S. Popa, 《子因子及其端同态的分类》, CBMS Lecture Notes Series, 86 (1995), 美国数学会。[Sc13]G. Schaumann, 《融合范畴上的模范畴的迹》, J. Algebra 379 (2013), 382–425。[So91] Y. S. Soibel'man, 《紧量子群的函数代数及其表示》, Leningrad Math. J. 2 (1991), 161–178。[So05] P. M. So ltan, 《量子 Bohr 紧化》, Illinois J. Math. 49 (2005), 第 4 期, 11245–1270。[To07] R. Tomatsu, 《商型右余理想的刻画及其在泊松边界分类中的应用》, COmm. Math. Phys. 275 (2007), 第 1 期, 271–296。[To15] R. Tomatsu, 《关于 G_q 的乘积型作用》, Adv. Math. 269 (2015), 第 10 期, 162–196。

[Va05] S. Vaes, 《诱导与不可约性结果的新方法》, 《函数分析杂志》229（2005）, 第2期, 317–374页。[Ve02] R. Verginoux, 《量子群的 KK 等变理论与 Julg-Valette 算子》, 博士论文, 巴黎, 2002。[Wa90] Y. Watatani, 《C*-子代数的指标》, 《美国数学会回忆录》83（1990）, 第424期, vi+117 页。[Ya03] S. Yamagami, 《C*-张量范畴与自由积双模》, 《函数分析杂志》197（2003）, 第2期, 323–346页。

Department of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Komaba 3-8-1, Tokyo 153-8914, Japan电子邮箱：mhoshino@ms.u-tokyo.ac.jp