arXiv:2301.04987v1 [math.CO] 12 Jan 2023

二维网格的完美覆盖

Elias Heikkil¨a、Pyry Herva 和 Jarkko Kari

摘要

我们采用代数方法研究顶点集为$\mathbb{Z}^2$ 的平移不变图中的完美多重覆盖。在这种方法中，我们将任何此类覆盖视为二维二进制构型，并将其表示为二元形式幂级数。利用已知结果，我们得出结论：任何完美多重覆盖都有一个非平凡周期化子，也就是说，存在一个非零多项式，其与表示该覆盖的幂级数的形式乘积是一个二周期构型。如果一个非平凡周期化子至多在一个方向上含有直线多项式因子，那么已知该构型是周期的。利用这一结果，我们找到了许多情形，在这些情形下，无限网格的完美多重覆盖必定是周期的。我们还研究了寻找完美多重覆盖的一些算法问题。

1 引言与预备知识

图中的完美多重覆盖是指一个顶点集（即码），使得任意顶点的邻域中码字的数量仅取决于该顶点是否属于码。本文研究顶点集为 $\mathbb{Z}^2$ 的平移不变图上的这类码。我们将码表示为二维二进制构型，并指出完美覆盖条件给出了一个代数条件，可利用 [8] 中发展出的代数工具加以处理。我们着重研究周期码，尤其关注所有码必然是周期码的情形。我们采用的方法最初由第三作者在综述 [6] 中的一个例子里提及，并由第一作者在硕士论文[5]中加以研究。

我们首先给出基本定义，介绍前述代数方法，并陈述一些与本文相关的已有结果。第 2 节介绍一种算法，用于求出任意给定的（ Laurent ）多项式的直线多项式因子。第 3 节正式定义图上的完美多重覆盖，并证明关于它们的一些周期性结果。我们为无限方格网和三角网格 [1, 12], 上的一些已知完美多重覆盖结果给出新的代数证明，并给出关于王棋网格上这类覆盖的强制周期性的新结果。此外，我们将完美覆盖的定义推广到具有不同邻域和覆盖常数的二维二进制构型。第 4 节讨论有关完美覆盖的一些算法问题。利用 H. Wang 的一个标准论证，我们证明

在某些约束条件下，可以通过算法判定是否存在具有给定邻域和给定覆盖常数的完美覆盖。

构型、周期性、有限图案与子移位

d维构型是对无限网格 $\mathbb{Z}^d$ 的一种着色，使用有限种颜色，也就是说，它是 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 中的一个元素，我们称之为 d维构型空间，其中 $\mathcal{A}$是某个有限字母表。对于构型 c，我们记 $c_{\mathbf{u}} = c(\mathbf{u})$ 为 c 在单元格 $\mathbf{u}$ 中的符号或颜色。向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$ 所对应的平移 $\tau^{\mathbf{t}}$ 会移动构型 c，使得对于所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$，都有 $\tau^{\mathbf{t}}(c)_{\mathbf{u}} = c_{\mathbf{u}-\mathbf{t}}$。如果构型 c满足 $\tau_{\mathbf{t}}(c) = c$，则称其为 $\mathbf{t}$-周期的；如果对于某个非零 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$，构型 c是 $\mathbf{t}$-周期的，则称其为周期的。我们还称构型 c 沿方向 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ 周期，如果对于某个 $k \in \mathbb{Q}$，c 是 $k\mathbf{v}$-周期的。若一个 d维构型 c具有 d 个线性无关的周期向量，则称其为强周期的。因此，强周期构型在所有方向上都是周期的。二维强周期构型称为二周期构型。

有限图案是指在某个有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^d$ 上指定符号的赋值，也就是 $\mathcal{A}^D$ 的一个元素，其中 $\mathcal{A}$ 是某个固定字母表。特别地，$\mathcal{A}^D$ 中的有限图案称为 D-图案。我们用 $\mathcal{A}^*$ 表示字母表 $\mathcal{A}$ 上所有有限图案的集合，其维数 d 可由上下文得知。若对于某个 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d$，$\tau^{\mathbf{t}}(c)|_D = p$，则称有限图案 $p \in \mathcal{A}^D$ 出现在构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 中。若图案 p 出现在构型 c 中，则称构型 c 包含该图案。对于固定形状 D，在 c 中出现的所有 D-图案构成集合 $\mathcal{L}_D(c) = \{\tau^{\mathbf{t}}(c)|_D \mid \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$；而 c 中所有有限图案的集合记作 $\mathcal{L}(c)$，称为 c 的语言。对于构型集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$，我们分别将 $\mathcal{L}_D(\mathcal{S})$ 和 $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ 定义为对所有 $c \in \mathcal{S}$ 的 $\mathcal{L}_D(c)$ 和 $\mathcal{L}(c)$ 取并集。

让我们回顾一下所需的符号动力系统基本概念。参考资料可参见例如 [3, 10, 11]。为 $\mathcal{A}$ 赋予离散拓扑，并考虑它在$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 上诱导的乘积拓扑——积离散拓扑，即可将构型空间 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 构造成一个紧致拓扑空间。该拓扑由一种度量诱导：如果两个构型在原点周围的一大片区域内相同，那么它们彼此接近。因此，$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 是一个紧致度量空间。

构型空间的子集 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ 若是拓扑闭集且平移不变，则称为子移位；平移不变是指，如果 $c \in \mathcal{S}$，那么对任意 $\mathbf{t}$，$\in \mathbb{Z}^d$ 也有 $\tau^{\mathbf{t}}(c) \in \mathcal{S}$。等价地，我们可以用禁用图案来定义子移位：给定一个禁用有限图案集合 $F \subseteq \mathcal{A}^*$，集合

$$X_F = \{c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \mid \mathcal{L}(c) \cap F = \emptyset\}$$

所有避开这些禁用图案的构型所组成的集合是一个子移位，并且每个子移位都可以通过禁用某个有限图案集合得到。如果 $F \subseteq \mathcal{A}^*$ 是有限的，那么我们称 X_F 为有限型子移位（SFT）。

构型 c 的轨道是其每个平移 $\mathcal{O}(c) = \{\tau^{\mathbf{t}}(c) \mid \mathbf{t} \in \mathbb{Z}^d\}$ 所构成的集合。轨道闭包 $\mathcal{O}(c)$ 是其轨道在积离散拓扑下的拓扑闭包。构型 c 的轨道闭包是包含 c 的最小子移位。它由所有满足 $\mathcal{L}(c') \subseteq \mathcal{L}(c)$ 的构型 c' 组成。

代数方法

为了从代数角度表示构型 $c \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$，我们假设 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$。然后将构型 c 与形式幂级数对应起来

$$c(X) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}}$$

关于 d 个变量 $x_1, \ldots, x_d$，其中我们将 $X = (x_1, \ldots, x_d)$ 记作 $X^{\mathbf{u}} = x_1^{u_1} \cdots x_d^{u_d}$，并且对任意 $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) \in \mathbb{Z}^d$。对于 $d = 2$，我们通常将 $X = (x, y)$ 记作 $X =$。更一般地，我们研究由复系数组成的、关于 d 个变量 $x_1, \ldots, x_d$ 的所有形式幂级数的集合，并将其记作 $\mathbb{C}[[X^{\pm 1}]] = \mathbb{C}[[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}]]$。如果一个幂级数仅含有限种不同的系数，则称其为有限型；如果其系数全为整数，则称其为整数系数。因此，我们将构型与有限型且为整数系数的幂级数对应起来。

我们也使用劳朗多项式，以下简称多项式。谈及 proper（即非劳朗）多项式时，我们使用“proper”一词。我们用 $\mathbb{C}[X^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_d^{\pm 1}]$ 表示关于 d 个变量$x_1, \ldots, x_d$ 且具有复系数的所有（劳朗）多项式的集合，它是劳朗多项式环。如果两个多项式的所有公因子都是单位，我们就说它们没有公因子；如果它们有非单位公因子，则称它们有公因子。

多项式与幂级数的乘积是良定义的。若多项式$f = f(X)$ 湮灭幂级数 $c = c(X)$，也就是说，若 $fc = 0$，即它们的乘积是零幂级数，我们就称该多项式为幂级数的湮灭子。若形式幂级数 $c = c(X)$ 被差分多项式 $X^{\mathbf{t}} - 1$ 湮灭，其中 t 非零，则称其为周期的。注意，这一定义与上文对构型周期性的定义一致。事实上，若 $c = c(X)$ 是一个构型，那么将其乘以单项式 $X^{\mathbf{t}}$ 会得到平移后的构型 $\tau^{\mathbf{t}}(c)$，因此， c 是 t-周期的，当且仅当 $c = \tau^{\mathbf{t}}(c) = X^{\mathbf{t}} c$，这等价于 $(X^{\mathbf{t}} - 1)c = 0$。因此，研究湮灭理想

$$\mathrm{Ann}(c) = \{f \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \mid fc = 0\}$$

幂级数 $c \in \mathbb{C}[[X^{\pm 1}]]$ 的湮灭理想是很自然的；它确实是劳朗多项式环的一个理想。因此，判断一个构型（或任意形式幂级数）是否周期的，等价于判断其湮灭理想是否包含一个差分多项式。我们研究的另一个有用的理想是周期化子理想

$$\mathrm{Per}(c) = \{f \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \mid fc \text{ is strongly periodic}\}.$$

显然，Ann(c) 是 Per(c) 的子集。还要注意，构型 c 存在非平凡（= 非零）湮灭子，当且仅当它存在非平凡周期化子。下面的定理指出，如果一个构型存在非平凡周期化子，那么它实际上存在一个形式特别简单的湮灭子——由差分多项式相乘而成。

定理 1（[8]）。设 c 是任意维数中一个具有非平凡周期化子的构型。那么存在两两线性无关的向量 $\mathbf{t}_1$、.....、$\mathbf{t}_m$，满足 $m \geq 1$，使得

$$(X^{\mathbf{t}_1} - 1) \cdots (X^{\mathbf{t}_m} - 1) \in \mathrm{Ann}(c).$$

直线多项式

幂级数 $c = \sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}}$ 的支撑集是集合 $\mathrm{supp}(c) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d \mid c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$。因此，多项式是支撑集有限的幂级数。线多项式是指支撑集中至少包含两个点，且这些点位于唯一一条直线上的多项式。换言之，多项式 f 是线多项式，当且仅当它不是单项式，并且存在向量 $\mathbf{u}$、$\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$，使得 $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathbf{u}+\mathbb{Q}\mathbf{v}$。在这种情况下，我们称 f是方向为 $\mathbf{v}$ 的线多项式。若非零向量 $\mathbf{v}$、$\mathbf{v}' \in \mathbb{Z}^d$ 满足 $\mathbf{v}' \in \mathbb{Q}\mathbf{v}$，则称它们平行；显然，此时方向为 $\mathbf{v}$ 的线多项式也是任何与 $\mathbf{v}$ 平行的方向上的线多项式。若向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$ 的分量两两互素，则称 $\mathbf{v}$ 为本原向量。如果 $\mathbf{v}$ 是本原向量，那么 $\mathbb{Q}\mathbf{v} \cap \mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}\mathbf{v}$。对于任意非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^d$，都存在一个与之平行的本原向量 $\mathbf{v}' \in \mathbb{Z}^d$。由此可知，在定义线多项式时，我们可以假设向量 $\mathbf{v}$ f 是本原向量，从而 $\mathrm{supp}(f) \subseteq \mathbf{u}+\mathbb{Z}\mathbf{v}$。下文中，我们倾向于用本原向量来表示方向。

任意直线多 项式 ϕ沿方向 $\mathbf{v}$（本原方向）可唯一地写成如下形式:

$$\phi = X^{\mathbf{u}}(a_0 + a_1 X^{\mathbf{v}} + \ldots + a_n X^{n\mathbf{v}}) = X^{\mathbf{u}}(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)$$

其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d, n \geq 1, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$ 和 $t = X^{\mathbf{v}}$。我们称单变量真多项式 $a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{C}[t]$ 为 ϕ的标准形。此外，对于单项式$aX^{\mathbf{u}}$ ，我们将其标准形定义为 a。因此，方向 $\mathbf{v}$ 上的两个直线多项式具有相同的标准形，当且仅当它们相差一个$X^{\mathbf{u}}$的乘数，其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^d$。

差分多项式是直线多项式，因此定理 1 给出的湮灭子是直线多项式的乘积。被差分多项式湮灭意味着具有周期性。更一般地，若构型 c 被沿本原方向 $\mathbf{v}$ 的直线多项式湮灭，则可将其理解为该多项式湮灭了 c 沿方向 $\mathbf{v}$ 的一维 $\mathbf{v}$-纤维$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{\mathbf{u}+k\mathbf{v}} X^{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}$ ；而由于一维情形下的湮灭意味着周期性，我们可以得出结论：构型具有周期性，当且仅当它被直线多项式湮灭。已知若 c 具有一个周期化子，且其直线多项式因子至多沿一个方向，那么 c 具有周期性:

定理 2（[9]）。设 c 是一个二维构型，且 $f \in \mathrm{Per}(c)$。则满足以下条件。

- 如果 f 没有任何直线多项式因子，那么 c 是二周期的。
- 如果 f 的所有直线多项式因子都沿同一方向，那么 c 在该方向上是周期的。

证明概要。周期化子理想 $\mathrm{Per}(c)$ 是由多项式$g = \phi_1 \cdots \phi_m$生成的主理想，其中 ϕ_1、.....、ϕ_m 是沿两两不平行的方向 [9] 的直线多项式。由于 $f \in \mathrm{Per}(c)$，我们知道 g 整除 f。如果 f 不含任何直线多项式因子，那么 $g = 1$ ，因此 $c = gc$ 是二周期的。如果 f 含有直线多项式因子，且这些因子都沿同一本原方向 $\mathbf{v}$，那么 g 是沿此方向的直线多项式。由于 gc 是

二周期的，因此它被某个 $k \in \mathbb{Z}$ 的 $(X^{k\mathbf{v}} - 1)$ 湮灭。于是构型 c 被沿方向 $\mathbf{v}$ 的直线多项式 $(X^{k\mathbf{v}} - 1)g$ 湮灭。我们得出结论，c 沿方向 $\mathbf{v}$ 周期。

□

（关于模仿在 [7], 中使用结式、而不依赖理想 Per(c) 结构的另一种证明，请参阅附录。）

2 直线多项式因子

由非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ 确定的开、闭离散半平面分别为集合 $H_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{\perp} \rangle > 0\}$ 和 $\overline{H}_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}^{\perp} \rangle \geq 0\}$，其中 $\mathbf{v}^{\perp} = (v_2, -v_1)$ 与 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 正交。我们还用 $l_{\mathbf{v}} = \overline{H}_{\mathbf{v}} \setminus H_{\mathbf{v}}$ 表示与 $\mathbf{v}$ 平行且经过原点的离散直线。换言之，沿 $\mathbf{v}$ 的方向移动时，由 $\mathbf{v}$ 确定的半平面是直线 $l_{\mathbf{v}}$ “右侧”的半平面。若存在向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2$，使得有限集 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 满足 $D \subseteq \overline{H}_{\mathbf{v}} + \mathbf{t}$ 和 $|D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})| \geq 2$，则称该有限集在方向 $\mathbf{v}$ 上有一条外边。此时称 $D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})$ 为 D 在方向 $\mathbf{v}$ 上的一条外边。与 $\mathbf{v}$ 对应的外边意味着，D 的凸包沿顺时针方向绕 D 时有一条边的方向为 $\mathbf{v}$。

如果有限非空集合 D 在方向 $\mathbf{v}$ 上没有外边，那么存在一个向量 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2$，使得 $D \subseteq \overline{H}_{\mathbf{v}} + \mathbf{t}$ 且 $|D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})| = 1$，于是我们称 D 在方向 $\mathbf{v}$ 上有一个顶点，并称 $D \cap (l_{\mathbf{v}} + \mathbf{t})$ 为 D 在方向 $\mathbf{v}$ 上的一个顶点。若多项式 f 的支撑集在方向 $\mathbf{v}$ 上有外边或顶点，我们就分别称该多项式在方向 $\mathbf{v}$ 上有外边或顶点。注意，每个有限形状 D 在任意非零方向上都有边或顶点。还要注意，在此语境中，方向 $\mathbf{v}$ 和 $-\mathbf{v}$ 并不相同：一个形状在方向 $\mathbf{v}$ 上可能有外边，但在方向 $-\mathbf{v}$ 上没有外边。下面的引理表明，多项式只有在其外边所在的方向上才可能有直线多项式因子。

引理3（[7]）。设 f 是一个在方向 $\mathbf{v}$ 上有直线多项式因子的非零多项式。那么 f 在方向 $\mathbf{v}$ 和 $-\mathbf{v}$ 上都有外边。

令 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 为任意非零本原向量，令 $f = \sum f_{\mathbf{u}} X^{\mathbf{u}}$ 为一个多项式。回顾一下，f 的一个 $\mathbf{v}$-纤维是形如 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{\mathbf{u}+k\mathbf{v}} X^{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}$ 的多项式，其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$。因此，多项式的非零 $\mathbf{v}$-纤维要么是线多项式，要么是单项式。我们用 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 表示多项式 f的所有非零 $\mathbf{v}$-纤维的不同标准形所构成的集合，因此它是一个有限集。下面这个简单的例子说明了纤维及其标准形的概念。

例4。我们来确定 $f = f(X) = f(x, y) = 3x + y + xy^2 + xy + x^3y^3 + x^4y^4$ 且 $\mathbf{v} = (1, 1)$ 时的集合 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$。将各项分组后，我们可以写成

$$f = 3x + y(1 + xy) + xy(1 + x^2y^2 + x^3y^3) = X^{(1,0)} \cdot 3 + X^{(0,1)}(1 + t) + X^{(1,1)}(1 + t^2 + t^3)$$

其中 $t = X^{(1,1)} = xy$。因此 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f) = \{3, 1 + t, 1 + t^2 + t^3\}$。图1展示了示意图。

□

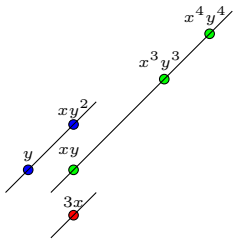


图1： $f = 3x + y + xy^2 + xy + x^3y^3 + x^4y^4$ 的支撑集及其不同的 (1, 1)-纤维。

如上例所示，多项式是其纤维的线性组合：对于任意多项式 f 以及任意非零本原向量 v，我们可以写成

$$f = X^{\mathbf{u}_1}\psi_1 + \ldots + X^{\mathbf{u}_n}\psi_n$$

对于某些 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{Z}^2$，其中 $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$。我们在下一个定理的证明中使用这一点。

定理5. 多项式 f 在方向 v 上有一个直线多项式因子，当且仅当 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式有一个公因子。

证明. 对于任意一个方向为 v 的直线多项式 ϕ，以及任意多项式 g，乘积 ϕg 的 v-纤维有一个公因子 ϕ。换言之，若多项式 f 有一个方向为 v 的直线多项式因子 ϕ，则 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式以 ϕ 的标准形作为公因子。

对于反方向，假设 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式有一个公因子 ϕ，因此它是一个方向为 v 的直线多项式。于是存在向量 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{Z}^2$ 和多项式 $\phi\psi_1, \ldots, \phi\psi_n \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$，使得

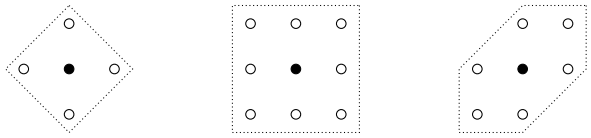
$$f = X^{\mathbf{u}_1}\phi\psi_1 + \ldots + X^{\mathbf{u}_n}\phi\psi_n.$$

因此， ϕ 是 f 在方向 v 上的直线多项式因子。 □

注意，引理3实际上可由定理5直接推出：在方向 v 或 –v 上取一个顶点而非外边，会得到一个非零单项式 v-纤维，这意味着 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式没有公因子。

因此，要找出 f 的直线多项式因子，我们首先需要找出直线多项式可能的方向，也就是 f的（有限多个）外边的方向；然后，我们需要检查对于这些可能的方向 v，$\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)$ 中的多项式是否有公因子。显然，存在算法可以找出给定多项式的外边，并判断有限多个直线多项式是否有公因子。如果存在这样的公因子，那么根据定理5， f 在该方向上有一个直线多项式因子。因此，我们证明了以下定理。

定理6。存在一种算法，可以求出给定（Laurent）多项式的直线多项式因子。



(a) 方格网　　(b) 王棋网格　　(c) 三角网格

图 2: (a) 方格网、(b) 王棋网格和 (c) 三角网格中黑色顶点的 1-邻域。

3 完美覆盖

本文中，$graph$ 是一个元组 $G = (V, E)$，其中 V 是G 的（可能无限的）顶点集，而 $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ 是 G的边集。因此，我们考虑的图都是简单无向图。我们还假设图中的每个顶点都只有有限个邻点。对于图 $G = (V, E)$，我们称顶点集的任意子集 $S \subseteq V$ 为 G中的一个码。两个顶点 u、$v \in V$之间的距离 $d(u, v)$是它们之间最短路径的长度。顶点 $u \in V$ 的（闭） r-邻域是集合 $N_r(u) = \{v \in V \mid d(v, u) \leq r\}$，也就是以 u为中心、半径为 r 的球。现在我们来定义所考虑的码族。

定义 7。设 $G = (V, E)$ 是一个图。如果对于非负整数 b 和 a，G 中每个属于 S 的顶点的 r-邻域恰好包含 S 的 b 个元素，并且每个不属于 S 的顶点的 r-邻域恰好包含 S 的 a 个元素，则码 $S \subseteq V$ 是一个 (r, b, a)-覆盖；也就是说，对于每个 $u \in V$

$$|N_r(u) \cap S| = \begin{cases} b \text{ if } u \in S \\ a \text{ if } u \notin S \end{cases} .$$

完美（多重）覆盖是指任意的（r, b, a）-覆盖。

3.1 无限网格

无限网格是顶点集为 $\mathbb{Z}^2$ 的平移不变图。换言之，在无限网格中，对于所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$，都有 $N_r(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + N_r(\mathbf{0})$。方格网是图 $(\mathbb{Z}^2, E_{\mathcal{S}})$，其 $E_{\mathcal{S}} = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}\}$；王棋网格是图 $(\mathbb{Z}^2, E_{\mathcal{K}})$，其 $E_{\mathcal{K}} = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}\}$；三角网格是图 $(\mathbb{Z}^2, E_{\mathcal{T}})$，其 $E_{\mathcal{T}} = \{\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \mid \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (1, 1), (-1, -1)\}\}$.。这些图中顶点的 1-邻域见图 2。若存在非零 $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}^2$，使得 $S = S + \mathbf{t}$，则称码 $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ 为周期的。若 $S = S + \mathbf{t}_1$ 且 $S = S + \mathbf{t}_2$，其中 $\mathbf{t}_1$ 和 $\mathbf{t}_2$线性无关，则称其为二周期的。下述结果出自 Axenovich。

定理 8（[1]）。如果 $b - a \neq 1$，那么方格网中的任何 $(1, b, a)$-覆盖都是二周期的。

任意无限网格中的码 $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ 可表示为一个构型 $c \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$，其定义如下：$c_{\mathbf{u}} = 1$ 若 $\mathbf{u} \in S$，则 $c_{\mathbf{u}} = 0$；若 $\mathbf{u} \notin S$，则 r。于是，任意顶点 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$ 的 r-邻域内码字的位置可表示为一个有限模式 $c|_{\mathbf{u}+N_r(\mathbf{0})}$。

定义 9. 若对于所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^2$，模式 $c|_{\mathbf{u}+D}$ 在 $c_{\mathbf{u}} = 1$ 时恰好包含 b 个符号 1，在$c_{\mathbf{u}} = 0$ 时恰好包含 a 个符号 1，则称构型 $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ 是有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$（邻域）以及非负整数 b 和 a （覆盖常数）所确定的 (D, b, a)-覆盖。

我们也称任意 (D, b, a)-覆盖为完美覆盖，因此完美覆盖要么是图中的码，要么是二维二进制构型。

定义 7 和定义 9 在无限网格中是一致的：无限网格 G 中的码 S 是一个 (r, b, a)-覆盖，当且仅当表示 S的构型 $c \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ 是一个 (D, b, a)-覆盖，其中 D 是 G中 0 的 r-邻域。对于集合 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$，我们将其特征多项式定义为 $f_D(X) = \sum_{\mathbf{u}\in D} X^{-\mathbf{u}}$。记常数幂级数 $\sum_{\mathbf{u}\in\mathbb{Z}^2} X^{\mathbf{u}}$为 $\mathbb{1}(X)$。若 c是一个 (D, b, a)-覆盖，则根据定义可得$f_D(X)c(X) = (b-a)c(X) + a\mathbb{1}(X)$，这等价于 $(f_D(X) - (b-a))\, c(X) = a\mathbb{1}(X)$。因此，若 c是一个 (D, b, a)-覆盖，则 $f_D(X) - (b-a) \in \mathsf{Per}(c)$。利用这一表述，我们可以给出定理 8 的一个简明证明：

定理 8 的重述。令 D 为方格网中 0 的 1-邻域，并假设 $b - a \neq 1$。那么每个 (D, b, a)-覆盖都是二周期的。

证明。令 c为任意一个 (D, b, a)-覆盖。我们证明 $g = f_D - (b-a) = x^{-1} + y^{-1} + 1 - (b-a) + x + y \in \mathsf{Per}(c)$ 没有直线多项式因子。于是，根据定理 2，c是二周期的。g 的外边方向为 $(1, 1)$、$(-1, -1)$、$(1, -1)$ 和 $(-1, 1)$，因此根据引理3，g 的任一直线多项式因子只能沿 $(1, 1)$ 或 $(1, -1)$ 方向。对于 $\mathbf{v} \in \{(1, 1), (1, -1)\}$，有 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g) = \{1 + t, 1 - (b-a)\}$。图3给出了示意图。由于 $1 - (b-a)$ 是非平凡单项式，根据定理5，周期化子 $g \in \mathsf{Per}(c)$ 没有直线多项式因子。 □

以下结果已在 [12] 中以更一般的形式证明。我们使用代数方法给出一个简短的证明。

定理10（[12]）。设 $r \geq 2$，并令 D 为方格网中 0 的 r-邻域。那么每个 (D, b, a)-覆盖都是二周期的。换言之，对所有 $r \geq 2$，方格网中的所有 (r, b, a)-覆盖都是二周期的。

证明。设 c 是任意一个 (D, b, a)-覆盖。同样，根据定理 2，只需证明 $g = f_D - (b-a) \in \mathsf{Per}(c)$ 没有直线多项式因子。根据引理3，g 的任何直线多项式因子的方向都是 $(1, 1)$ 或 $(1, -1)$。因此假设 $\mathbf{v} \in \{(1, 1), (1, -1)\}$。我们有 $\phi_1 = 1 + t + \ldots + t^r \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 和 $\phi_2 = 1 + t + \ldots + t^{r-1} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$。图3展示了 $r = 2$ 时的示意图。由于 $\phi_1 - \phi_2 = t^r$，多项式 ϕ_1 和 ϕ_2 没有公因子，因此根据定理5，周期化子 g 没有直线多项式因子。 □

如果 $a \neq b$，那么对于所有 $r \geq 1$，王棋网格中的任意 (r, b, a)-覆盖都是二周期的：

定理11. 令 $r \geq 1$ 为任意值，令 D 为王棋网格中 0 的 r-邻域，并假设 $a \neq b$。那么任意 (D, b, a)-覆盖都是二周期的。换言之，只要 $a \neq b$，王棋网格中的所有 (r, b, a)-覆盖都是二周期的。

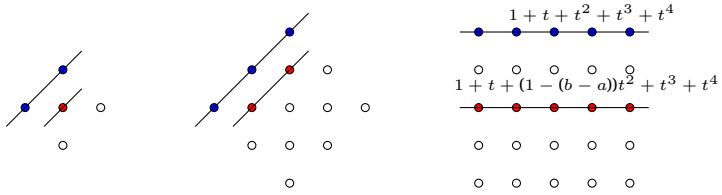


图3：左侧的星群展示了定理 8 的证明，中间的星群展示了定理10在 $r=2$ 条件下的证明，右侧的星群展示了定理11在 $r=2$条件下的证明。

证明. 令 c 为任意一个 (D,b,a)-覆盖。根据定理 2，只需证明$g = f_D - (b-a)$ 没有直线多项式因子。 g 的外边方向为 (1, 0)、(−1, 0)、(0, 1) 和 (0, −1)。因此，根据引理3， g 的任一直线多项式因子的方向为 (1, 0) 或 (0, 1)。令 v $\in$ {(1, 0)、(0, 1)}。我们有
$\phi_1 = 1+t+\ldots+t^{r-1}+(1-(b-a))t^r+t^{r+1}+\ldots+t^{2r} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 和
$\phi_2 = 1+t+\ldots+t^{2r} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$。图3展示了 $r=2$ 时的示意图。由于 $\phi_2-\phi_1=(b-a)t^r$ 是一个非平凡单项式， ϕ_1 和 ϕ_2 没有公因子。因此，根据定理5， g 没有直线多项式因子。 □

与方格网中的情况类似，我们可以为 [12] 关于三角网格中强制周期性的已知结果给出简洁的证明：

定理 12（[12]）。设 D 是三角网格中 0 的 1-邻域，并假设$b-a \neq -1$。那么，三角网格中的每个（D， b， a）-覆盖都是二周期的。换言之，只要 $b-a \neq -1$，三角网格中所有的（1， b， a）-覆盖都是二周期的。

定理13（[12]）。设 $r \geq 2$，并设 D 为三角网格中 0 的 r-邻域。那么，每个（D， b， a）-覆盖都是二周期的。换言之，当 $r \geq 2$ 时，三角网格中所有的（r， b， a）-覆盖都是二周期的。

3.2 一般凸邻域

形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 若是 $D = 凸(D) \cap \mathbb{Z}^2$ 的交集，则称其为凸形状；其中，凸包 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 是 D的实凸包。

设 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 是一个有限凸形状。任意 (D,b,a)-覆盖都有一个周期化子 $g = f_D - (b-a)$。与前文一样，我们研究 g 是否有直线多项式因子。对于任意 v $\neq 0$，集合 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f_D)$ 只包含关于不同 $n \geq 1$ 的多项式 $\phi_n = 1+\ldots+t^{n-1}$，因为$D$ 是凸的：如果 D 包含两个点，那么 D 就包含它们之间的每一个点。因此，$\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 只包含关于不同 $n \geq 1$ 的多项式 ϕ_n；若 $b-a \neq 0$, 还包含一个多项式$\phi_{n_0} - (b-a)t^{m_0}$，其中某个 $n_0 \geq 1$ 满足 $\phi_{n_0} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f_D)$，且某个 $m_0 \geq 0$。若 $b-a=0$，则 $g = f_D$，因此 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g) = \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f_D)$。

两个多项式 ϕ_m 和 ϕ_n 有公因子，当且仅当 gcd$(m,n) > 1$。更一般地，多项式 $\phi_{n_1},\ldots,\phi_{n_r}$ 有公因子，当且仅当 $d = \gcd(n_1,\ldots,n_r) >$

1，而且事实上，它们的最大公因子是第 d 个分圆多项式

$$\prod_{\substack{1\le k\le d\\ \gcd(k,d)=1}} (t-e^{i\cdot\frac{2\pi k}{d}}).$$

引入以下记号。对于任意多项式 f，我们用 $\mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(f)$ 表示所有 $\mathbf{u}\notin\mathbb{Z}\mathbf{v}$ 对应的非零纤维 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}X^{\mathbf{u}+k\mathbf{v}}$ 的标准形集合。换言之，我们排除经过原点的纤维。我们还用 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f)$ 表示经过原点的纤维 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{k\mathbf{v}}X^{k\mathbf{v}}$ 的标准形。我们有 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)=\mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(f)\cup\{\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f)\}$，如果 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f)\neq 0$；并且 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(f)=\mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(f)$，如果 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(f)=0$。

应用定理 2 和定理 5，我们得到以下定理，它给出了充分条件，使有限凸形状 D 的每个 (D,b,a)-覆盖都是周期的。该定理的第一部分也曾在 [4] 中以更一般的形式提及。

定理 14。设 D 是一个有限凸形状，$g=f_D-(b-a)$，并设 E 为 g 的外边方向集合。

- 假设 $b-a=0$。对于任意的 $\mathbf{v}\in E$，记 $d_{\mathbf{v}}=\gcd(n_1,\dots,n_r)$，其中 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)=\{\phi_{n_1},\dots,\phi_{n_r}\}$。如果对所有 $\mathbf{v}\in E$，$d_{\mathbf{v}}=1$ 成立，那么每个 (D,b,a)-覆盖都是二周期的。如果除某些平行的 $\mathbf{v}\in E$ 外，$d_{\mathbf{v}}=1$ 均成立，那么每个 (D,b,a)-覆盖都是周期的。

- 假设 $b-a\neq 0$。对于任意的 $\mathbf{v}\in E$，记 $d_{\mathbf{v}}=\gcd(n_1,\dots,n_r)$，其中 $\mathcal{F}'_{\mathbf{v}}(g)=\{\phi_{n_1},\dots,\phi_{n_r}\}$。如果对任意 $\mathbf{v}\in E$，$d_{\mathbf{v}}$ 次分圆多项式与 $\mathrm{fib}_{\mathbf{v}}(g)$没有公因子，那么每个 (D,b,a)-覆盖都是二周期的。如果除某些平行的 $\mathbf{v}\in E$ 外，该条件均成立，那么每个 (D,b,a)-覆盖都是周期的。（请注意，特别地，如果 $d_{\mathbf{v}}=1$，则该条件成立。）

4 算法方面

所有覆盖都是周期的，尤其是在根本不存在覆盖的情况下！能够检测出这类平凡情况很有用。

集合

$$\mathcal{S}(D,b,a)=\{c\in\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}\mid (f_D-(b-a))c=a_{\mathbb{I}}(X)\}$$

所有 (D,b,a)-覆盖构成一个有限型子移位，对任意给定的有限形状 D 以及非负整数 b和 a 均如此。因此，对于给定的邻域 D 以及覆盖常数 b和 a，是否存在任何 (D,b,a)-覆盖的问题，等价于有限型子移位 $\mathcal{S}=\mathcal{S}(D,b,a)$ 是否非空的问题。给定有限型子移位的非空性问题通常是不可判定的；但若已知该有限型子移位不是非周期的，则该问题变为可判定。特别地，若 $g=f_D-(b-a)$ 至多在一个方向上具有直线多项式因子，则此问题可判定：

定理 15. 给定有限 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 以及非负整数 b 和 a，使得多项式 $g = f_D - (b - a)$ 至多在一个平行方向上具有直线多项式因子。则存在一种算法，可判定是否存在任何 (D, b, a)-覆盖。

证明。令 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, b, a)$ 表示所有 (D, b, a)-覆盖构成的有限型子移位。由于 g 的直线多项式因子至多沿一个方向存在，根据定理 2，$\mathcal{S}$ 的每个元素都是周期的。任何包含周期构型的二维有限型子移位也包含双周期构型，因此 $\mathcal{S}$ 要么为空，要么包含一个双周期构型。根据 H. Wang 的标准论证，[13] 存在半算法，可用于判定给定的有限型子移位是否为空，以及是否包含双周期构型。并行运行这两个半算法，就得到一个算法来检验 $\mathcal{S} \neq \emptyset$。 □

我们也可能希望针对给定的 D、b 和 a，设计一个完美的 (D, b, a)-覆盖。在定理 15 的假设下，这可以有效完成：正如我们所见，若 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, b, a)$ 非空，它就包含一个双周期构型。对于任意双周期构型 c，很容易检查 c 是否包含禁用图案。逐个枚举双周期构型，最终必能找到一个属于 $\mathcal{S}$ 的构型。

如果多项式 ial g 没有直线多项式因子，那么有以下更强的结果成立 s:

定理 16. 对于给定的有限形状 $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ 以及非负整数 b 和 a，如果多项式 $g = f_D - (b - a)$ 没有直线多项式因子，那么有限型子移位 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(D, b, a)$ 是有限的。这样便可以有效地构造出 $\mathcal{S}$ 中所有有限多个元素。

上述定理第一部分的证明依赖于这样一个事实：二维子移位是有限的，当且仅当它只包含二周期构型 [2]。根据定理 2，如果 g 没有直线多项式因子，那么它周期化的每个构型（包括 $\mathcal{S}$ 中的每个构型）都是二周期的，因此 $\mathcal{S}$ 是有限的。定理中“此外”的部分，即可以有效地生成 $\mathcal{S}$ 中所有有限多个元素这一事实，对有限型子移位普遍成立。（为完整起见，证明见附录。）

参考文献

[1] M. A. Axenovich. 关于使用固定半径的球对无限矩形网格进行多重覆盖。《离散数学》，268(1):31 – 48，2003。

[2] A. Ballier、B. Durand 和 E. Jeandal。《铺砖的结构方面》。载于 Susanne Albers 和 Pascal Weil（编），第 25 届理论计算机科学国际研讨会论文集，第 1 卷，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs），第 61–72 页，德国达格施图尔，2008 年。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik。

[3] T. Ceccherini-Silberstein 和 M. Coornaert。《元胞自动机与群》。《Springer数学专著》。Springer 柏林海德堡，2010。

[4] N. Geravker 和 S. A. Puzynina. 非矩形模式的阿贝尔型尼瓦猜想。arXiv:2111.04690，2021年12月。[5] E. Heikkil¨a. 关于覆盖码的代数观点。硕士论文，图尔库大学，2020年5月。[6] J. Kari. 平面的低复杂度铺砖。载于《形式系统的描述复杂性——第21届 IFIP WG 1.02 国际会议》，DCFS 2019，《计算机科学讲义》第11612卷，第35–45页。施普林格，2019。[7] J. Kari 和 E. Moutot. 代数子移位中的尼瓦猜想与图案复杂度。《理论计算机科学》，777：379–386，2019。[8] J. Kari 和 M. Szabados. 尼瓦猜想的代数几何方法。载于 ICALP 2015 论文集，第二部分，《计算机科学讲义》第9135卷，第273–285页，2015。[9] J. Kari 和 M. Szabados. 尼瓦猜想的代数几何方法。《信息与计算》，271，2020。[10] P. Kurka.《拓扑与符号动力系统》。SMF 丛书。法国数学会，2003。[11] D. Lind 和 B. Marcus.《符号动力学与编码导论》。剑桥大学出版社，1995。[12] S. A. Puzynina. 关于广义二维无限词的周期性。《信息与计算》，207(11)：1315–1328，2009。[13] H. Wang. 通过模式识别证明定理——II。《贝尔系统技术期刊》，40(1)：1–41，1961。



图4：左侧的星座图说明了定理12的证明，右侧的星座图说明了定理13的证明，其中 $r=2$。

附录

定理12和定理13的证明

定理12。令 D 为三角网格中 0 的 1-邻域，并假设 $b-a \neq -1$。那么，三角网格中的每个 (D,b,a)-覆盖都是二周期的。换言之，只要 $b-a \neq -1$，三角网格中的所有 $(1,b,a)$-覆盖都是二周期的。

证明。令 c 为任意一个 (D,b,a)-覆盖。再次，我们证明 $g = f_D-(b-a) = x^{-1}y^{-1}+x^{-1}+y^{-1}+1-(b-a)+x+y+xy$ 没有直线多项式因子，因此根据定理 2，构型 c 是二周期的。 g 的外边方向为 (1, 1)、$(-1,-1)$、(1, 0)、$(-1, 0)$、(0, 1) 和 $(0,-1)$，因此根据引理3， g 的任何直线多项式因子的方向只能是 (1, 1)、(1, 0) 或 (0, 1)。因此，令 v $\in \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$。我们有$\mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g) = \{1+t, 1+(1-(b-a))t+t^2\}$。图4展示了一个示意图。多项式 $\phi_1 = 1+t$ 和 $\phi_2 = 1+(1-(b-a))t+t^2$ 满足 $\phi_1^2-\phi_2 = (1+b-a)t$，因此当 $b-a \neq -1$ 时，它们没有公因子。因此，根据定理5， g 没有直线多项式因子。 □

定理13。设 $r \geq 2$，并令 D 为三角网格中 0 的 r-邻域。那么，每个 (D,b,a)-覆盖都是二周期的。换言之，对于 $r \geq 2$，三角网格中的所有 (r,b,a)-覆盖都是二周期的。

证明。设 c 为任意一个 (D,b,a)-覆盖。我们证明 $g = f_D-(b-a) \in \mathrm{Per}(c)$ 没有直线多项式因子；根据定理 2，这意味着构型 c 是二周期的。 g 的外边方向为 (1, 1)、$(-1,-1)$、(1, 0)、$(-1, 0)$、(0, 1) 和 $(0,-1)$，因此根据引理3， g的任何直线多项式因子的方向只能是 (1, 1)、(1, 0) 或 (0, 1)。于是，令 v $\in \{(1, 1)$、(1, 0)、$(0, 1)\}$。存在 $n \geq 1$，使得 $1+t+\ldots+t^n \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$ 且 $1+t+\ldots+t^{n+1} \in \mathcal{F}_{\mathbf{v}}(g)$。图4展示了 $r=2$的示例。由于这两个多项式没有公因子，根据定理5， g 没有直线多项式因子。 □

定理 2 的另一种证明

定理 2.. 设 c 为一个二维构型，且 $f \in \mathrm{Per}(c)$。那么以下条件成立。

- 如果 f 没有任何直线多项式因子，那么 c 是二周期的。
- 如果 f 的所有直线多项式因子都具有相同的方向，那么 c 就以该方向为周期。

第二个证明概要。由定理 1，存在非平凡周期化子 f，这意味着 c 有一个特殊湮灭子 $g = \phi_1 \cdots \phi_m$，它是若干（差分）直线多项式 ϕ_1、.....、ϕ_m 的乘积，且这些直线多项式的方向两两不同。g 的所有不可约因子都是直线多项式。如果 f 没有任何直线多项式因子，那么周期化子 f 和 g 就没有公因子。我们可以假设二者都是真多项式，因为必要时可以用单项式乘以它们。f 和 $g \in \mathbb{C}[x, y]$ 关于 x 的结式是多项式 $\mathrm{Res}_x(f, g) = \alpha f + \beta g$，其中 α、$\beta \in \mathbb{C}[x, y]$ 满足变量 x 被消去；也就是说，$\mathrm{Res}_x(f, g)$ 是一个只含变量 y 的多项式。此外，由于 f 和 g 没有公因子，$\mathrm{Res}_x(f, g)$ 不恒为零。因为 f、$g \in \mathrm{Per}(c)$，所以 $\mathrm{Res}_x(f, g) \in \mathrm{Per}(c)$，这意味着 c 有一个非平凡湮灭子，且只含变量 y。这意味着 c 以垂直方向为周期。类似地，关于 y 的结式 $\mathrm{Res}_y(f, g)$ 表明 c 是水平周期的，因此是二周期的。

对于 f 仅在一个方向 $\mathbf{v}$ 上具有直线多项式因子的情形，证明过程类似，只需考虑 ϕc 而不是 c，其中 ϕ 是 f 和 g 在方向 $\mathbf{v}$ 上的最大公直线多项式因子。我们得到 ϕc 是二周期的，这意味着 c 在方向 $\mathbf{v}$ 上是周期的。

□

寻找给定有限型子移位的所有元素的算法

定理 17. 给定一个有限的 $F \subseteq \mathcal{A}^*$，使得 X_F 是有限的，可以有效地构造出 X_F的元素。

证明。给定一个有限的 $F \subseteq \mathcal{A}^*$ 和一个模式 $p \in \mathcal{A}^D$，假设强周期构型在 X_F中稠密，可以有效地检查 $p \in \mathcal{L}(X_F)$是否成立。事实上，对于正实例，我们有一个半算法：猜测一个强周期构型c，并验证 $c \in X_F$ 和 $p \in \mathcal{L}(c)$。对于任意有限型子移位 X_F，负实例也存在一个半算法，这是一种标准的紧致性论证：猜测一个有限的 $E \subseteq \mathbb{Z}^d$，使得$D \subseteq E$，并验证每个满足 $q|_D = p$ 的 $q \in \mathcal{A}^E$ 都包含一个禁子图样。

因此，给定有限的 F、$G \subseteq \mathcal{A}^*$，并假设强周期构型在 X_F 和 X_G 中稠密，就可以有效地判定 $X_F = X_G$。事实上，当且仅当没有 $p \in G$ 属于 $\mathcal{L}(X_F)$ 时，$X_F \subseteq X_G$ 成立；我们已在上文证明，这一条件是可判定的。类似地，我们也可以检验 $X_G \subseteq X_F$。

最后，给定一个有限的 $F \subseteq \mathcal{A}^*$，且已知 X_F 是有限的。X_F 中的所有元素都是强周期的，因此强周期构型必然在 X_F 中稠密。我们可以有效地枚举所有由强周期构型组成的有限集 P。对于每个平移不变的 P（因此也是一个有限型子移位），都可以构造一个由禁用图案组成的有限集 $G \subseteq \mathcal{A}^*$，使得 $X_G = P$。如上所述，有一种算法可以检验 $X_F = X_G = P$。由于 X_F 是有限的，最终会找到一个集合 P，使得 $X_F = P$。

□