arXiv:2301.04990v1 [physics.ao-ph] 12 Jan 2023

耦合海洋-大气降阶模型中的多稳态：非线性温度方程

Oisín Hamilton[1,2] | Jonathan Demaeyer[1] | Stéphane Vannitsem[1] | Michel Crucifix[2]

[1]《气候动力学》，比利时皇家气象研究所，比利时布鲁塞尔

[2]地球与生命研究所，鲁汶天主教大学，比利时新鲁汶

通信作者
Oisín Hamilton，《气候动力学》，比利时皇家气象研究所，于克勒，布鲁塞尔，1180，比利时 电子邮箱：oisin.hamilton@meteo.be

资助信息
欧盟“地平线2020”计划，玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第956170号

在对非线性温度方程进行数值求解时，我们在降阶海洋—大气耦合模型的海气流中发现了多稳态。本文阐述了如何以数值方式实现完整的非线性斯特藩—玻尔兹曼定律，以及与原模型（其中这些项经过线性化）相比，这一做法对系统动力学造成的变化。我们发现了多个稳定解，它们呈现出不同的海洋—大气流动以及不同的李雅普诺夫稳定性。此外，在稳定吸引子中还观察到了不同的低频变率（LFV）行为。我们研究了改变海洋-大气耦合强度以及大气发射率对这些解的影响；改变大气发射率是为了模拟日益增强的温室效应。对于参数固定且存在多稳态的情形，我们考察了解之间发生临界转变的可能性；然而，在这个采用恒定太阳强迫的模型版本中，并未发生临界转变。本研究采用 Python 编程语言实现的降阶准地转海洋-大气模型，该模型由两层大气和一层海洋组成，

缩写： 低频变率，低频变率；AMOC，大西洋经向翻转环流；北大西洋涛动，北大西洋涛动；MAOOAM，模块化任意阶海洋-大气模型。

编程语言。

关 键 词
低频变率、温度多稳态、海洋-大气耦合模型

1 | 引言

随着大气吸收的长波辐射不断增加，地球的平均温度正在升高。由于气候系统中的非线性过程，预计全球气温升高可能导致临界转变点（Lenton 等人，2008），使某些气候要素迅速发生变化，其中一些变化可能不可逆。鉴于此类变化可能带来的影响，了解气候系统中存在哪些临界要素，以及我们距离这些临界转变点还有多远，至关重要。

在北大西洋，已经确认了若干临界要素，例如大西洋经向翻转环流（AMOC）、格陵兰冰盖、亚极地环流和北大西洋急流（Steffen 等人，2018；Armstrong McKay 等人，2022）。这些气候要素中的任何一项发生变化，都会对欧洲气候产生重大影响；此外，现有的长期气候模式也可能从根本上改变。中纬度地区的低频变率（以下简称 LFV）是一个统称，用来指代从年际到多年代际时间尺度上缓慢变化的气候过程。北大西洋涛动（NAO）就是 LFV 的一个例子，它指亚热带环流与亚极地环流之间的海平面气压差。人们认为，更准确地预测 LFV 或有助于延长典型的两周天气预报时效；这一时效受初始条件敏感性的限制。

中纬度地区低频变率（LFV）的潜在机制包括海洋与大气之间的耦合，温度、风应力和水汽会在二者之间传递（Holton，2004）。在观测数据中已发现这种耦合（Årthun 等人，2021；Wu 和 Liu，2005；Czaja 和 Frankignoul，2002；Czaja 和 Marshall，2001）。基于数值模拟的研究尝试利用复杂程度各异的模型再现这种低频变率。一种研究思路是运用动力系统理论，分离导致低频变率的动力机制，具体做法是研究自由度较少的模型。这些模型有意舍弃准确模拟真实气候所需的复杂性，转而聚焦于产生观测到的变率所必需的最小条件集合。

在气候科学中使用降阶模型的方法可追溯至 Lorenz 的研究（Lorenz，1960）。近来，人们开发了海洋-大气耦合模型，以研究海洋系统与大气系统耦合所产生的行为（Lorenz，1984；Roebber，1995；Vannitsem 和 De Cruz，2014；De Cruz 等人，2016）。本研究所用的模型，是将 Charney 和 DeVore 开发的降阶大气模型（Charney 和 DeVore，1979）[1] 与 Pierini 的海洋模型（Pierini，2011）耦合而成。该模型最初由 Vannitsem 和 De Cruz（2014）描述，之后又引入了基于能量平衡模型的热量平衡（Vannitsem 等人，2015）。在这一最新版本的模型中加入热传递，并结合海洋与大气之间的风应力，产生了低频变率。此后，该模型以 Python 编程语言实现，并命名为模块化任意阶海洋-大气模型（MAOOAM）（De Cruz 等人，2016；Demaeyer 等人，2020）。本研究使用的正是这一版本。

[1]进一步发展 由 Charney and Straus 提出（Charney and Straus，1980），随后 Reinhold 和 Pierrehumbert 又对此进行了发展（Reinhold 和 Pierrehumbert，1982 ）.

模型方程非线性的一个来源，是海洋和大气发出的长波辐射，其建模依据是斯特藩–玻尔兹曼定律（$\sigma_B T^4$, 其中 σ_B 为斯特藩–玻尔兹曼常数）。在 MAOOAM 模型中，四次辐射项经过线性化处理，以简化方程在截断傅里叶展开上的投影。温度扰动相对于气候参考温度较小，因此这种线性化是合理的（De Cruz 等人，2016）。然而，这种线性化消除了温度项产生非线性相互作用的可能性。因此，本研究探讨在温度方程未经线性化时，对模型低频变率的影响，以及出现多重稳定性或分岔的可能性。

我们将证明，在某些海洋-大气耦合和大气发射率条件下，去除线性化会使大气和海洋中出现多种稳定流型。这些流型在性质上截然不同，并且在相同模型参数下会产生多个平均温度。它们的周期长度和主导模态也各不相同。

第 2 节介绍本研究使用的降阶模型，第 2.3 节则介绍为取消对温度方程进行线性化的要求而作出的修改。本节还描述了本研究所用的模型配置。结果分为两节：首先考察改变海洋-大气耦合的影响（第 3.1 节），然后考察大气发射率的影响（第 3.2 节）。在这两个结果部分中，我们分别考察改变相应参数对系统稳定性和可预测性的影响。第 4 节总结主要结果，并讨论这些发现的总体意义。

2 | QGS 模型

2.1 | 模型描述

qgs 模型（Demaeyer 等人，2020）是一种中纬度气候降阶模型，有多种不同的模型配置可供选择。在本研究中，我们使用海洋—大气模型版本，其中大气流由定义在 β 平面上的双层准地转流构成（Reinhold 和 Pierrehumbert，1982）。类似地，海洋流函数采用带刚盖的准地转浅水模型进行建模（Pierini，2011）。大气和海洋温度的热力学方程根据 Barsugli 和 Battisti（1998）提出的能量平衡方案推导得出。本文使用的海洋—大气耦合方案最初由 Vannitsem 等人（Vannitsem 等人，2015）提出。大气变量通过风应力与海洋变量耦合，驱动海洋环流，从而输送海洋中的热量。海洋通过辐射和直接热耦合与大气交换热量，进而影响大气流。

本研究采用封闭海洋盆地（所有边界均为无通量边界条件）和通道大气（南北边界为无通量边界条件，东西边界为周期边界条件）。第 2.2 节将介绍这些边界条件的实现方式。这个将封闭海洋盆地与大气耦合的模型版本称为模块化任意阶海洋-大气模型（MAOOAM）（De Cruz 等人，2016年）。

大气正压 ψ_a 和斜压 θ_a 流函数以及海洋流函数 ψ_o 的控制偏微分方程（PDEs）如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_{\mathrm{a}}\right)+J\left(\psi_{\mathrm{a}},\nabla^2\psi_{\mathrm{a}}\right)+J\left(\theta_{\mathrm{a}},\nabla^2\theta_{\mathrm{a}}\right)+\beta\frac{\partial\psi_{\mathrm{a}}}{\partial x}=-\frac{k_d}{2}\nabla^2\left(\psi_{\mathrm{a}}-\theta_{\mathrm{a}}-\psi_{\mathrm{o}}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\theta_{\mathrm{a}}\right)+J\left(\psi_{\mathrm{a}},\nabla^2\theta_{\mathrm{a}}\right)+J\left(\theta_{\mathrm{a}},\nabla^2\psi_{\mathrm{a}}\right)+\beta\frac{\partial\theta_{\mathrm{a}}}{\partial x}=-2k_d'\nabla^2\theta_{\mathrm{a}}+\frac{k_d}{2}\nabla^2\left(\psi_{\mathrm{a}}-\theta_{\mathrm{a}}-\psi_{\mathrm{o}}\right)+\frac{f_0}{\Delta p}\omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi_{\mathrm{o}}-\frac{\psi_{\mathrm{o}}}{L_{\mathrm{R}}^2}\right)+J\left(\psi_{\mathrm{o}},\nabla^2\psi_{\mathrm{o}}\right)+\beta\frac{\partial\psi_{\mathrm{o}}}{\partial x}=-r\nabla^2\psi_{\mathrm{o}}+d\nabla^2\left(\psi_{\mathrm{a}}-\theta_{\mathrm{a}}-\psi_{\mathrm{o}}\right), \tag{3}$$

其中， ψ_{a} 和 ψ_{o} 分别为大气和海洋正压流函数， θ_{a} 为大气斜压流函数。垂直速度由 ω给出。

海洋和大气温度由能量平衡模型得出：

$$\gamma_{\mathrm{a}}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{a}}}{\partial t}+J\left(\psi_{\mathrm{a}},T_{\mathrm{a}}\right)-\sigma\omega\frac{p}{R}\right)=-\lambda\left(T_{\mathrm{a}}-T_{\mathrm{o}}\right)+\varepsilon\sigma_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{o}}^4-\varepsilon\sigma_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{a}}^4+R_{\mathrm{a}} \tag{4}$$

$$\gamma_{\mathrm{o}}\left(\frac{\partial T_{\mathrm{o}}}{\partial t}+J\left(\psi_{\mathrm{o}},T_{\mathrm{o}}\right)\right)=-\lambda\left(T_{\mathrm{o}}-T_{\mathrm{a}}\right)-\sigma_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{o}}^4+\varepsilon\sigma_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{a}}^4+R_{\mathrm{o}}, \tag{5}$$

其中 T_{a} 和 T_{o} 分别为大气温度和海洋温度， γ_{a} 和 γ_{o} 分别为大气和海洋的热容， σ 为大气静力稳定度（假定为常数）， σ_{B} 为斯特藩-玻尔兹曼常数，R_{a}和R_{o} 分别为被大气和海洋吸收的入射太阳辐射， ε 为大气发射率。

为减少变量数量，大气温度变量 T_{a} 通过气压坐标下的静力平衡和理想气体定律与斜压流函数相关联，从而得到关系式 $T_{\mathrm{a}}=2f_0\theta_{\mathrm{a}}/R$。

2.2 | 数值解

将微分方程投影到基模态上，这一过程也称为伽辽金展开。基模态的选取确保满足上一节所述的边界条件。具体做法是规定，对于边界上的点（x， y）， $\phi_i(x,y)=0$；对于边界上的x，$\partial F_i(x,y)/\partial x=0$；对于边界上的$y$，$F_i(x,y)=0$。本研究采用 10 个大气基模态和 8 个海洋基模态，与 Vannitsem（2017）相同。它们定义在$x\in[0,2\pi]$、$y\in[0,\pi]$的区域上。大气F_i和海洋 ϕ_i模态如下所示：

表 1 MAOOAM 模型参数

参数	数值	描述（单位）
β	1.62×10^{-11}	给定纬度处科里奥利参数的经向梯度 ($m^{-1}s^{-1}$)
f_0	1.032×10^{4}	科里奥利参数 (s^{-1})
k_d	$gC/\Delta p$	大气-地表摩擦 (s^{-1})
k'_d	$克C/\Delta 页$	内部大气摩擦 (s^{-1})
r	1×10^{-7}	海底瑞利摩擦 (s^{-1})
L_R	1.9934×10^{4}	约化罗斯贝变形半径
h	136.5	海洋层深度 (m)
d	$C/(\rho_o小时)$	海洋-大气机械耦合系数 (s^{-1})
γ_a	1×10^{7}	大气比热容 ($Jm^{-2}K$)
γ_o	5.46×10^{8}	海洋比热容 ($Jm^{-2}K^{-1}$)
σ	0.2	大气静力稳定度
λ	1004摄氏度	海洋与大气之间的显热和湍流热交换 ($Wm^{-2}K^{-1}$)
R	287.058	干空气气体常数 ($Jkg^{-1}K^{-1}$)
σ_B	5.67×10^{-8}	斯特藩-玻尔兹曼常数 ($Jm^{-2}s^{-1}K^{-4}$)

本研究中使用的关键模型参数。这里C是一个变量，我们通过改变它来研究海洋-大气耦合的影响。与 Charney and Straus (1980) 一样，我们假设 $k' = k_d$；与 Vannitsem (2015年) 一样，假设重力 $g = 10ms^{-2}$。

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \sqrt{2}\cos(y) \\
F_2 &= 2\cos(nx)\sin(y) & \phi_1 &= 2\sin(nx/2)\sin(y) \\
F_3 &= 2\sin(nx)\sin(y) & \phi_2 &= 2\sin(nx/2)\sin(2y) \\
F_4 &= \sqrt{2}\cos(2y) & \phi_3 &= 2\sin(nx/2)\sin(3y) \\
F_5 &= 2\cos(nx)\sin(2y) & \phi_4 &= 2\sin(nx/2)\sin(4y) \\
F_6 &= 2\sin(nx)\sin(2y) & \phi_5 &= 2\sin(nx)\sin(y) \\
F_7 &= 2\cos(2nx)\sin(y) & \phi_6 &= 2\sin(nx)\sin(2y) \\
F_8 &= 2\sin(2nx)\sin(y) & \phi_7 &= 2\sin(nx)\sin(3y) \\
F_9 &= 2\cos(2nx)\sin(2y) & \phi_8 &= 2\sin(nx)\sin(4y) \\
F_{10} &= 2\sin(2nx)\sin(2y)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

三个基模态尤为重要，因为它们在现实世界中都有对应现象：

- $F_1(x, y) = \sqrt{2}\cos(y)$ 表示南北之间的太阳辐照不平衡。
- $\phi_1(x, y) = 2\sin(x/2)\sin(y)$ 表示海洋平均温度波动。
- $\phi_2(x, y) = 2\sin(x/2)\sin(2y)$ 是双环流，其方向设定为峰值位于波谷以北或以南。它粗略模拟了北大西洋涛动（NAO）；北大西洋涛动由北部和南部位置（通常是亚速尔群岛和冰岛）之间的海平面气压异常差异定义（Hurrell 等人，2003年）。亚速尔高压周围盛行的顺时针风，以及北部低压周围的逆时针风，可以通过将大气流函数异常投影到这一模态上进行大致模拟，从而模拟北大西洋涛动对风和热输送的影响。

模型变量通过基模态展开。在以往采用此类能量平衡模型的研究中，模型中的温度变量会围绕一个时间上固定的平衡温度进行线性化：$T(t, x, y) = T_0 + \delta T(t, x, y)$，以去除四次项 $\sigma_B T^4$(Vannitsem 等人，2015)。由此，温度可表示为：

$$
\begin{aligned}
T_a(t, x, y) &= T_{a,0} + \delta T_a(t, x, y) &&= T_{a,0} + \sum_{i=1}^{10} \delta T_{a,i}(t) F_i(x, y) \\
T_o(t, x, y) &= T_{o,0} + \delta T_o(t, x, y) &&= T_{o,0} + \sum_{i=1}^{8} \delta T_{o,i}(t) \phi_i(x, y).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

偏微分方程 i 在方程（4、5）中引入的项随后通过内积投影到这些基模态上， t:

$$
\langle f, g \rangle = \frac{n}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi/n} f(x, y) g(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{8}
$$

由此得到描述大气流函数的 20 个常微分方程（ODE）：其中 10 个对应正压流函数，10 个对应斜压流函数。此外，海洋部分还有 16 个常微分方程，其中 8 个对应正压流函数，另外 8 个对应温度异常。因此，该模型总共由 36 个常微分方程描述。

2.3 | 非线性辐射项

本研究聚焦于 MAOOAM 模型温度方程中的辐射项不进行线性化所导致的系统动力学变化。这要求式 7 所示展开中的参考温度 $T_{a,0}$ 和 $T_{o,0}$ 成为随时间变化的量。因此，为了让大气和海洋的平均温度能够随时间动态变化，我们引入了两个新的基模态，它们对应于空间常数模态：$F_0(x, y) = 1$ 和 $\phi_0(x, y) = 1$。这些模态被添加到第 2.2 节所介绍的基模态列表中：

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 & \phi_0 &= 1 \\ F_1 &= \sqrt{2}\cos(y) & \phi_1 &= 2\sin(nx/2)\sin(y) \\ F_2 &= 2\cos(nx)\sin(y) & \phi_2 &= 2\sin(nx/2)\sin(2y) \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \tag{9}$$

这些新增的基模态使式 7 所示的展开可以写为 $T_o(t, x, y) = \sum_{i=0}^{8} T_{o,i}(t)\phi(x, y)$，大气部分也同理。

只有温度方程投影到了这些新增的基模态上，因为在原始 MAOOAM 模型中，只有这些变量经过了线性化。这意味着大气正压流函数仍有 10 个常微分方程，海洋正压流函数有 8 个常微分方程。此外，大气斜压流函数（该变量取代了大气温度变量）和海洋温度各增加一个常微分方程。因此，描述该系统的常微分方程总数增至 38 个。

现在，我们介绍本研究中使用的两个修订版模型：

动力平衡：此版本的模型采用与模型线性化版本相同的线性化处理，但平衡温度随时间变化：$T(t, x, y) = T_0(t) + \delta T(t, x, y)$。我们将此版本称为动力平衡（ DE ）。

非线性 T4：此版本不对斯特藩–玻尔兹曼定律中的项进行线性化，而是将方程直接投影到基模态上。这样保留了四次辐射项。我们将此版本的模型称为 T4。

由此得到三个模型版本：

- 线性模型（LM）
- 动力平衡（DE）
- 非线性（T4）

关于这些修改如何完成的更多信息，请参阅模型手册（Demaeyer 等人，2022年）。另请参阅补充信息。

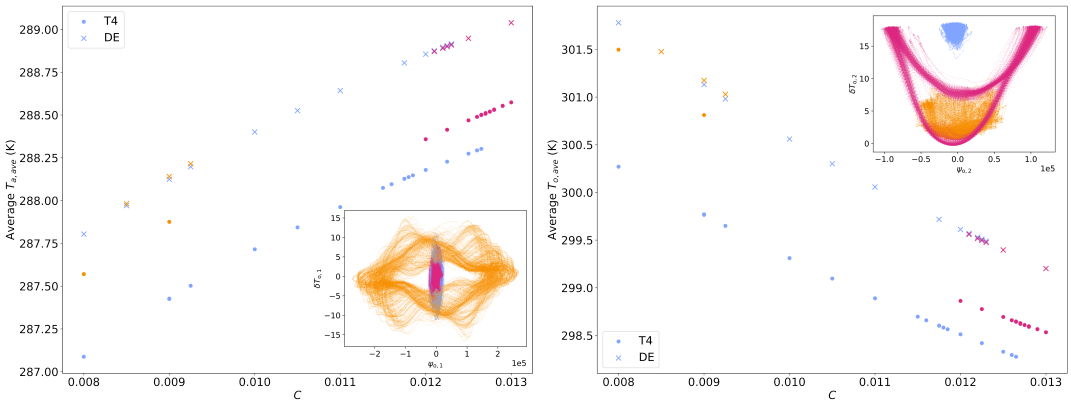


图 1 动力平衡模型（叉号）和 T4 模态（圆点）中稳定吸引子的平均大气温度（左）和海洋温度（右）的温度-C 图。通过定性考察各吸引子的行为，为各分支标注了不同颜色。将吸引子投影到平面 $(\psi_{o,1}, T_{o,1})$（左）和 $(\psi_{o,2}, T_{o,2})$（右），以展示三个稳定吸引子之间的行为差异。橙色吸引子的投影对应$C = 0.009\mathrm{kgm^{-2}s^{-1}}$，另外两个吸引子（蓝色和粉红色）的投影对应$C = 0.0125\mathrm{kgm^{-2}s^{-1}}$。

3 | 结果

结果部分分为两个主要部分。首先，我们描述改变海洋与大气耦合时的系统动力学；其次，我们改变大气发射率。我们重点关注那些会产生多个不同海气流的参数值，这些海气流由不同的吸引子描述。对于给定的参数值，多个稳定吸引子的存在使模型解有可能在适当强迫的作用下从一个吸引子转变到另一个吸引子。这种吸引子之间的转变可能代表临界转变点、突变或流动切换。我们尤其关注呈现低频变率（LFV）的流动，这种变率由海洋变量与大气变量之间的耦合产生，因为这类模型解能够提高系统动力学的可预测性。

3.1 | 海洋-大气耦合

本节展示了在三个模型版本中改变海洋-大气耦合强度所得的结果。增强海洋-大气耦合会增加海洋与大气之间的热传递。这会降低海洋温度（其平衡温度高于大气），并提高大气温度，进而影响斜压流函数。海洋温度异常会导致大气中的温度交换不均匀，因此需要由大气风输送热能。同时，增强海洋-大气耦合会加大海洋表面风应力对大气的摩擦作用。反过来，这会使大气风对海温异常移动的影响更大。总的来说，通过与时间尺度较慢的海洋耦合，大气的快速变化时间尺度会减慢。

我们通过调整以下参数来改变海洋-大气耦合C：海洋-大气耦合强度d、海洋-大气摩擦k_d、内部大气摩擦k'_d，以及直接热量

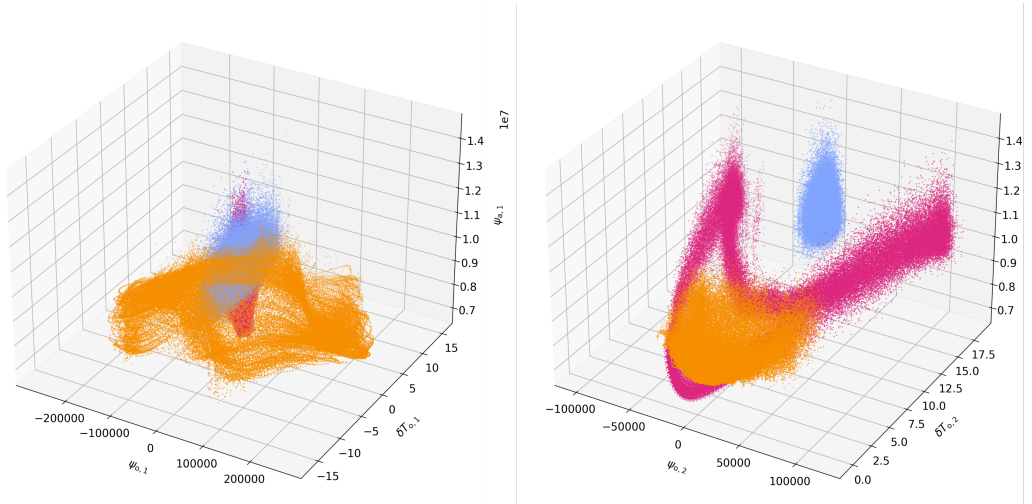


图 2 将 T4模拟的不同吸引子投影到 $(\psi_{a,\,1},\ \psi_{o,\,1},\ T_{o,\,1})$（左）和 $(\psi_{a,\,1},\ \psi_{o,\,2},\ T_{o,\,2})$（右），以展示海洋-大气耦合的程度。橙色吸引子对应于 $C = 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$，另外两个吸引子对应于 $C = 0.0125\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$。这里仅展示T4模拟，因为在这三个变量上，T4 和 DE模型运行的动力学完全相同。

海洋与大气之间的传递 λ (Vannitsem，2015年)。这些参数由单一摩擦系数C控制，其中C 与上述参数之间的关系见表1。本研究关注C 处于现实范围内的取值（$C \in [0.008\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}, 0.02\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}]$），该范围适用于现实世界中的海洋与大气耦合（Houghton，1986年；Nese和Dutton，1993年；Vannitsem，2017年）。

3.1.1 | 状态空间探测

通过固定耦合值C，并使用随机初始条件运行许多条轨迹，研究海洋-大气耦合对系统动力学的影响。当这些轨迹似乎已收敛到某个吸引子后，便舍弃轨迹的初始瞬态部分，并继续长时间运行这些轨迹（1×10^7 模型日）。此举旨在确保吸引子保持稳定，且轨迹始终位于吸引子上。在这些实验中，大气发射率设为 $\varepsilon = 0.7$，即模型默认值（De Cruz 等人，2016）。对不同的 C 值重复这一过程。

通过将嵌入吸引子中的轨迹投影到基模态上，计算海洋和大气的平均温度，从而获得每个时间步长的温度剖面。随后，我们对空间域内的温度取平均，得到每个时间步长对应的单一平均温度。最后，我们再对时间取平均，得到一个温度值，代表与给定吸引子相关的平均温度。下图展示了海洋温度的这一过程；平均大气温度的计算过程与此类似：

$$\langle T_o(t)\rangle_{\text{space, time}} = \frac{1}{n_\tau n_x n_y}\sum_{\tau=0}^{n_\tau}\sum_{i=0}^{n_x}\sum_{j=0}^{n_y}\sum_{k=0}^{n_o} T_{o,k}(t_\tau)\phi_k(x_i, y_j)$$

其中，n_o 为海洋模态的数量，n_x 和 n_y 为参与平均的空间网格点数量，而 n_τ 为数值解中的时间步数。

3.1.2 | 温度中的多稳态 - C

空间和时间平均温度显示在温度-C图上。这些图并非分岔图，因为我们仅掌握通过所述方法找到的稳定分支的信息。图 1 展示了大气和海洋平均温度的结果，其中海洋-大气耦合值有所变化。在这些图中，分支根据吸引子的定性行为以不同颜色标示。图中显示，温度存在两个多稳态区间。它们约为 $C \in [0.008\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}, 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ 和 $C \in [0.012\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}, 0.0127\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}]$。图中还显示，存在一条连接这两个区间的单一稳定分支（以蓝色显示）。我们在同一张图中绘制了动力平衡（DE）和非线性（T4）模型运行的结果。

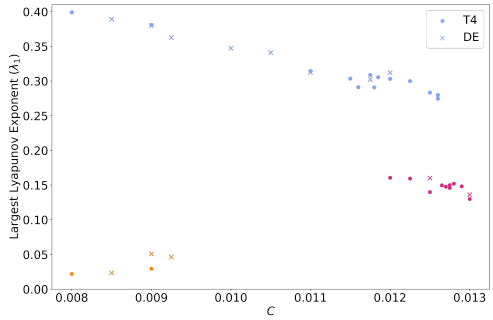
我们发现 T4模拟 与动力平衡模拟之间存在两处差异。第一处是，动力平衡模拟中稳定分支之间的平均温度差小于 T4模拟中的差异。动力平衡模拟中吸引子之间的温度差较小，这是因为零阶温度方程控制的平衡温度（$T_{a,0}$, $T_{o,0}$）只有一个实稳定解。这意味着，各个稳定平衡中的平均温度差仅由高阶项造成。在 T4 模型中，零阶温度方程还包含其他项，因此零阶温度之间的差异更大。方程中的这一差异出现在非线性长波辐射项中，下面以海洋温度方程为例进行示意。在下列表达式中，我们引入张量 $v_{i,j,k,l,m} = \langle F_i, \phi_j, \phi_k, \phi_l, \phi_m \rangle$。

	完整项	零阶项
动力平衡模型	$T_{o,0}^4 + 4T_{o,}^3{}_0 \sum^{n_o}{}_{m=1} v_{i,0,0,0,m} T_{o,m}$	$T_{o,0}^4$
T4 模型	$\sum^{n_o}{}_{j,k,l,m=0} v_{i,j,k,l,m} T_{o,j} T_{o,k} T_{o,l} T_{o,m}$	$T_{o,0}^4 + \sum^{n_o}{}_{j,k,l,m=1} v_{0,j,k,l,m} T_{o,j} T_{o,k} T_{o,l} T_{o,m}$

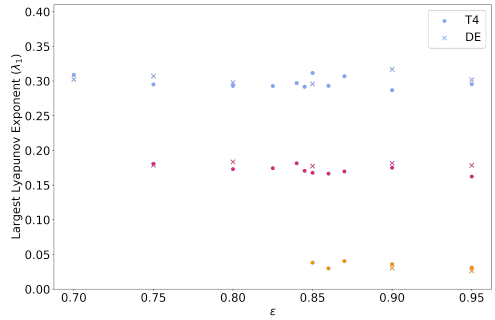
模型模拟之间的第二个区别是，与动力平衡模拟相比，T4模拟在 $C \in [0.012\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}, 0.0127\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ 区间内呈现出更宽的多稳态区域。我们再次认为，这是因为 T4 模型方程中的高阶项相互作用；而在动力平衡模拟中，线性化会去除高阶项。

为了研究多稳态区域中吸引子的性质，我们将吸引子投影到海洋变量（$\psi_{o,1}, T_{o,1}$）和（$\psi_{o,2}, T_{o,2}$）上，以便观察其行为。从这些投影可以看出，存在三种定性上不同的吸引子行为，对应于海洋中的三种不同流动行为。我们将这三种吸引子投影到同一张图中进行比较，如图 1 所示；其中，橙色吸引子对应 $C = 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$，另外两个吸引子对应 $C = 0.0125\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$。在 $C \in [0.008\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}, 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ 区间内存在两个吸引子，其中橙色吸引子在变量（$\psi_{o,1}, T_{o,1}$）上表现出低频变率（LFV）。当 $C > 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 时，橙色吸引子变得不稳定。其他采用线性 MAOOAM 模型的研究中并未发现这种多稳态现象。第一海洋模态中的低频变率表明，在此情形下，单环流振荡显著影响海洋温度和流函数的变率。

粉红色吸引子 r 在 $C > 0.012\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 时趋于稳定，并在变量（$\psi_{o,2}, T_{o,2}$）上呈现低频变率（LFV） ，



(a) 动力平衡和 T4 模型模拟的最大李雅普诺夫指数，随C变化，并 $\varepsilon = 0.7$。



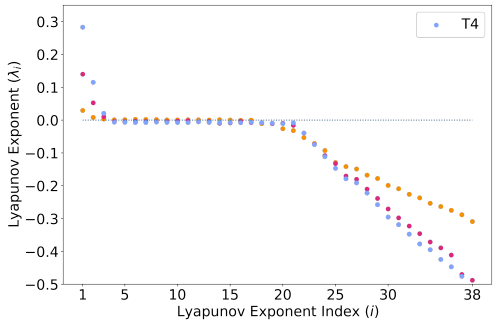
(b) 动力平衡和 T4 模型模拟的最大李雅普诺夫指数，$C = 0.01175\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 并随 ε变化。

图 3 最大李雅普诺夫指数（LLE），单位为天$^{-1}$；结果根据第 3.1.2 节和第 3.2.1 节所述的吸引子行为以不同颜色标示。

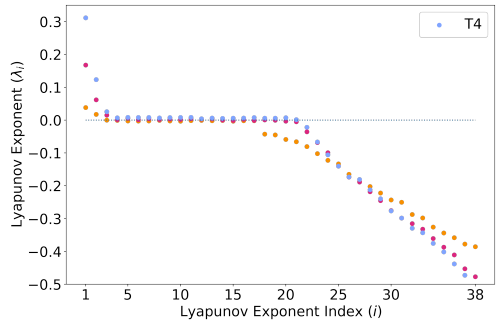
这表明流的动力学受到双环流动力学的影响。另一个存在的吸引子（蓝色）在任何模态上都未呈现低频变率，这表明与该吸引子相关的流并未呈现与另外两个吸引子相同的低频变率或海洋动力学。蓝色吸引子在$C > 0.01275\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$时变得不稳定。Vannitsem（2017）使用该模型的线性版本发现了这第二个分岔，但使用线性模型未发现此区间内的多稳态区域。我们进行了长时间的模型运行，以确保该区间内两个吸引子的稳定性，并发现两个吸引子至少在 3×10^7 个模型日内保持稳定。在 T4 和动力平衡模型运行中都发现了这个多稳态区域，但与动力平衡模型相比，T4 模型中的多稳态区域范围更广。

按照 Vannitsem 等人（Vannitsem，2017年）的分析，我们将吸引子投影到变量 ($\psi_{a,1}$,$\psi_{o,1}$,$T_{o,1}$) 和 ($\psi_{a,1}$,$\psi_{o,2}$,$T_{o,2}$) 上，以便直观展示吸引子中的海洋-大气耦合程度。图 2 展示了三个吸引子，C 的取值与之前相同。每幅图中都有一个吸引子，它稳定在一条不稳定轨道附近，并且该轨道中的三个变量都会随年代际时间尺度发生变化。展示 ($\psi_{a,1}$,$\psi_{o,2}$,$T_{o,2}$) 的图表明，粉红色吸引子在这三个变量上呈现出与 Vannitsem（2017年）发现的吸引子相同的振荡行为。此外，我们还重现了 Vannitsem 发现的另一个不呈现低频变率（蓝色）的吸引子。这里的新发现是，对于较低的 C 值，我们找到了另一个吸引子（橙色）；它在耦合海洋-大气系统中也表现出低频变率，但涉及海洋-大气模态 ($\psi_{a,1}$,$\psi_{o,1}$,$T_{o,1}$)。

为了根据吸引子行为直观展示海洋中的流，我们制作了视频，展示海洋流函数和温度剖面，并根据其在投影的二维状态空间中的位置进行呈现；相关视频可在补充材料中找到。视频名称依据上述图表中使用的颜色编码确定。蓝色吸引子显示$T_{o,2}$ 变量持续为正值，导致海洋温度中持续存在双环流温度异常。此外，视频中没有明显的低频变率（LFV）。粉红色吸引子在变量$T_{o,2}$ 和 $\psi_{o,2}$ 上表现出振荡行为，时间尺度约为模型年的 70 年，导致海洋中双环流温度异常与四环流温度异常之间发生转换。类似地，海洋流函数中也可见明显振荡，其中最显著的变量在同一时间段内于 $\psi_{o,2}$ 和$\psi_{o,6}$ 之间振荡。最后，对于橙色吸引子，海洋温度剖面中没有明显的双环流，而低频变率则表现为第一海洋模态$\phi_{o,1}$。这使温度变量$T_{o,1}$、 $T_{o,5}$和$T_{o,7}$呈现时间尺度为模型年 80–100 年的低频变率（LFV）。



（a）显示橙色吸引子的李雅普诺夫谱对于C = 0.009kgm^{-2}s^{-1}，另外两个则对应C = 0.0125kgm^{-2}s^{-1}，其中 ε = 0.7。



（b） ε = 0.85 和 C = 0.01175kgm^{-2}s^{-1} 对应的李雅普诺夫谱

图 4 绘出了所发现的三个不同吸引子的李雅普诺夫谱（单位：天$^{-1}$），以比较最大李雅普诺夫指数 λ_1的大小以及接近零的李雅普诺夫指数的数量。

3.1.3 | 李雅普诺夫稳定性 - C

为了分析所发现吸引子的稳定性属性，我们计算了稳定吸引子的李雅普诺夫属性，重点考察前一节中确定的C值，在这些值下存在多个稳定吸引子。关于海洋-大气耦合模型中李雅普诺夫属性计算的更多详情，请参阅 Vannitsem 和 Lucarini（2016）；Vannitsem（2017）；Vannitsem 等人（2019）；Vannitsem 和 Duan（2020）。

我们在图 3 (a) 中展示了最大李雅普诺夫指数（LLE）随C变化的情况。与前文一样，在所确定的两个区间内均存在多稳态。我们采用了与第 3.1.2 节相同的颜色编码，以显示各李雅普诺夫指数分别对应哪个吸引子。中纬度地区的天气尺度预报时间尺度约小于两周（Lorenz，1982），而更大尺度的过程则具有更长的预报时间（Lorenz，1969）。在天气尺度上，这对应的 LLE 约为 0.2-0.3 天$^{-1}$。在 MAOOAM 模型中，随着C增大，LLE 的幅度总体呈下降趋势，这是由于海洋与大气之间的耦合增强，使得大气动力学引起的流动不稳定性减弱（Vannitsem，2017）。不过，显然在C值相对较小时，橙色分支的 LLE 显著小于另外两个分支。其他研究表明，较低的C值会使 LLE 的幅度降低（Vannitsem，2017）；然而，这一现象是在$C \leq 0.0015$kgm^{-2}s^{-1}的取值下观察到的。由于这些海洋-大气耦合值在真实地球系统中并不现实，我们没有针对如此低的C值进行模拟。

图 4 (a) 展示了在改变海洋-大气耦合程度时识别出的三个不同吸引子的李雅普诺夫谱。图中显示，位于C = 0.0125kgm^{-2}s^{-1} 处的两个吸引子（蓝色和粉红色）均有 18 个接近零的李雅普诺夫指数、17 个负指数和 3 个正指数。然而，其中一个吸引子的正李雅普诺夫指数约为另一个的两倍，这表明在蓝色吸引子中，初始条件发散的速率要大得多。本研究发现的新吸引子（橙色）的正李雅普诺夫指数绝对值显著小于其他吸引子，且接近零的李雅普诺夫指数数量较少，这意味着该吸引子存在于维数低于其他吸引子的混沌流形上。三个吸引子中有两个的正李雅普诺夫指数绝对值较小，这是因为它们存在于产生年代际时间尺度 LFV 的不稳定周期轨道附近，因此提高了可预测性。

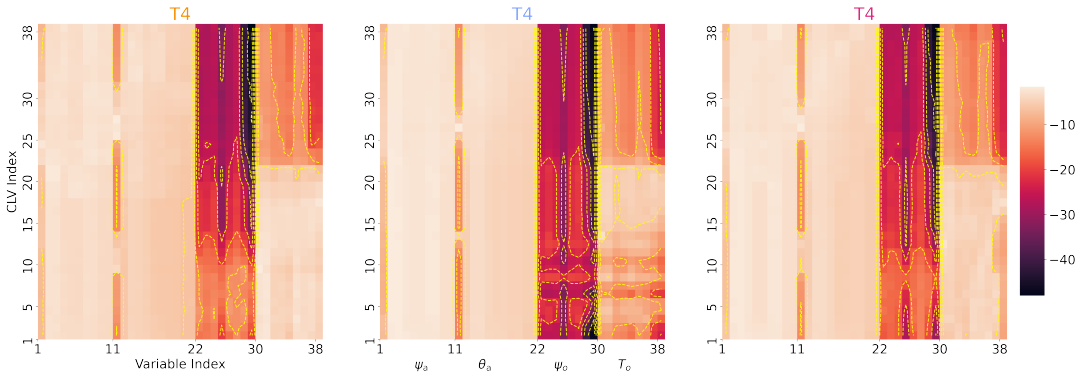


图 5 三个不同吸引子的协变李雅普诺夫向量（以对数10刻度显示）的方差，见图 1。吸引子以标题的颜色标示，颜色与前文各节相对应。橙色吸引子的协变李雅普诺夫向量是在 $\varepsilon = 0.7$ 和 $C = 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 条件下计算的，另外两个吸引子的协变李雅普诺夫向量则是在 $\varepsilon = 0.7$ 和 $C = 0.0125\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 条件下计算的。

海洋与大气之间的耦合在多大程度上造成了 LFV，可通过协变李雅普诺夫向量（CLVs）的方差来直观呈现（Vannitsem 和 Lucarini，2016年）。CLVs 为系统切线性空间提供了一个协变基。换言之，CLVs 是构成一个基、并与流保持协变的向量，这一点不同于正向或反向李雅普诺夫向量（Kuptsov 和 Parlitz，2012年）。系统动力学会按照相应的局部 Lyapunov 指数拉伸每个协变李雅普诺夫向量。每个 CLV 由 38 个分量构成，系统中的每个变量对应一个分量。我们在每个时间步长计算 CLVs，并针对 38 个向量中的每一个，计算其 38 个向量分量随时间变化的方差。该方差衡量 CLV 分量沿给定变量方向的变化程度。大气和海洋中的变量若在同一 CLV 索引下均具有较高方差，则意味着这些变量彼此作用或相互影响。因此，彼此耦合的变量在同一 CLV 索引下（图中的水平行）会呈现较高方差。这使我们能够直观了解哪些变量相互耦合，并对系统动力学产生较大影响。图 5 展示了三个不同吸引子的方差热图（log10 尺度）。这些图以 y 轴表示 CLV 索引，以 x 轴表示模型变量。变量的排列顺序如下：

- 大气正压流函数ψa（索引：1-10）
- 大气斜压流函数 θa（索引：11-21）
- 海洋正压流函数ψo（索引：22-29）
- 海洋温度T_o（索引：30-38）

正如预期，大部分方差出现在大气中，因为这些变量是构成系统快速时间尺度动力学的分量。对于 CLV 指数 13–22，所有三个吸引子都呈现出耦合，其中海洋温度变量的变率与大气变量相似。总体而言，接近零的 Lyapunov 指数（CLV 指数 4–22）在海洋变量（第 22–38 列）上的投影更大。对于大于 22 的指数，所有三个吸引子都呈现出相似的动力学，此时海洋分量在动力学上的投影较低，这表明大幅值的负 Lyapunov 指数主要由大气动力学导致。然而，呈现低频变率（LFV）的吸引子在指数 1–12 上具有更高的方差，这意味着

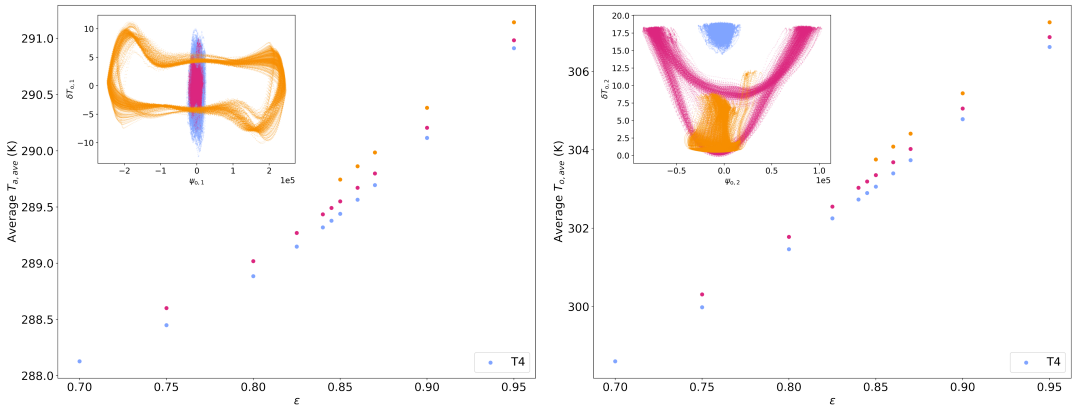


图 6 温度-ε图，展示了大气（左）和海洋（右）的平均温度。不同颜色表示稳定分支，这些分支对应着性质迥异的吸引子。这里仅展示 T4 模型的模拟结果，因为 DE 结果与之相同；而且 DE 模拟的三个分支之间温度差异过小，在这些图中无法辨认。与图 1 一样，吸引子投影到海洋变量平面上，其中左图为单环流，右图为双环流，对应 $\varepsilon = 0.9$。

在这些吸引子中，海洋温度对大气动力学具有稳定作用，而且海洋与大气之间的耦合程度更高。此外，橙色吸引子（左侧的热图）显示模型所有四个分量之间的耦合更强，因为海洋流函数在指数 1–10 上呈现出更高的方差。这解释了该吸引子的正 Lyapunov 指数幅值较小，因为不稳定大气分量与稳定海洋之间存在高度耦合。

3.2 |发射率

为模拟气候变化对 MAOOAM 模型中海洋-大气动力学的影响，我们提高了发射率ε 。发射率上升可作为温室气体含量增加的替代指标，这会使大气“截留”更多向外长波辐射，从而提高海洋和大气的平均温度。我们选取一个海洋-大气耦合值 $C = 0.01175\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 进行研究。在上一节中，对于 $\varepsilon = 0.7$，这一取值C 对应单一稳定吸引子。

3.2.1 | 温度 - ε中的多稳态

通过图 6 所示的温度-ε 图，我们可以看到，随着发射率增加，会在两个值处发生分岔，从而产生另外两个稳定分支。这些图展示了通过数值方法找到的稳定吸引子的空间和时间平均温度。我们用不同颜色标示稳定分支，以呈现表现出定性差异行为的吸引子。这些图仅展示 T4 模型运行的结果，因为 T4 和动力平衡模型的运行都呈现出相似的轨迹行为，但动力平衡模型模拟中三个不同分支的平均温度彼此过于接近，无法在图中辨认。这是因为线性化版本移除了高阶非线性项，详见第 3.1.2 节。

我们取了在 $\varepsilon = 0.9$ 处找到的三个稳定吸引子，并将它们投影到平面 $(\psi_{o,1}, T_{o,1})$ 和 $(\psi_{o,2}, T_{o,2})$ 上，这些也显示在图 6 中。我们可以看到，其中两个吸引子（以粉红色和蓝色显示）

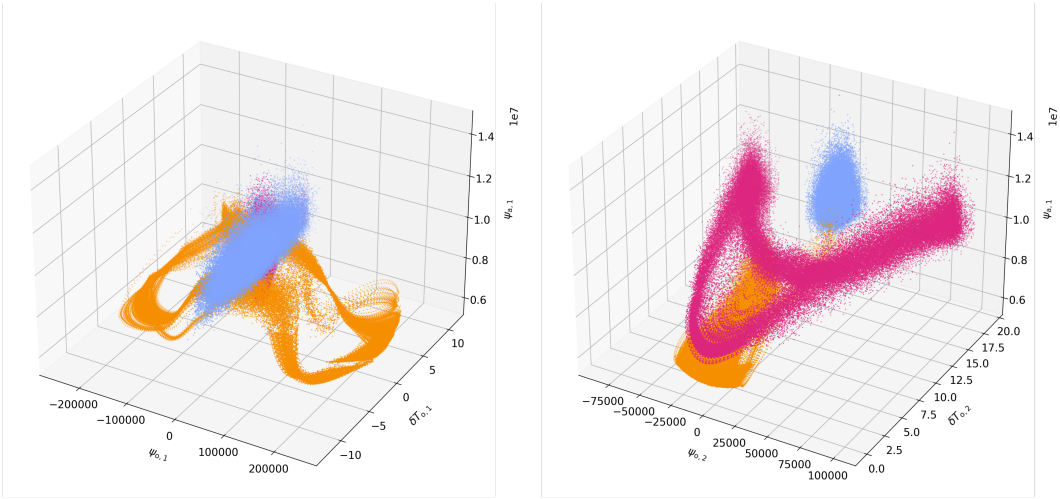


图 7　在C = 0.01175kgm^{-2}s^{-1}和 ε = 0.9 处发现的三个不同吸引子，分别投影到左侧的 ($\psi_{a,1}$,$\psi_{o,1}$,$T_{o,1}$) 和右侧的 ($\psi_{a,1}$, $\psi_{o,2}$, $T_{o,2}$)。吸引子的颜色与图 6 中所示示意图相对应。

表现出与第 3.1 节所见相同的行为。此外，最高温度分支（以橙色显示）在定性上似乎与上一节中我们观察到的、相对于 ($\psi_{o,1}$, $T_{o,1}$) 呈现周期性行为的吸引子相似。因此，增加 ε 的值似乎能够使不稳定分支趋于稳定。图 6 显示，随着 ε 增大，大气和海洋的平均温度迅速升高；此外，在相同发射率值下，多稳态之间的温差最高可达 1°K。

与第 3.1 节一样，我们通过将三个稳定吸引子投影到第一大气模态以及单环流和双环流海洋模态上，来直观呈现海洋-大气耦合程度。与前一节一样，我们看到橙色吸引子表现出振荡行为，将正压流函数与单环流变量耦合起来；粉红色吸引子则与双环流变量一起表现出低频变率（LFV）。同样，我们观察到两种不同的流，其中海洋与大气之间存在耦合，这种耦合持续于年代际时间尺度。这些结果表明，在 MAOOAM 模型中，发射率升高会使海洋-大气系统出现多稳态，而低发射率下并不存在这种现象。模型运行中，我们没有发现轨迹在稳定分支之间切换的例子；不过，所有模型运行均采用恒定的太阳强迫。要了解这些吸引子对强迫的稳健性，还需要进行更多模型运行。

与第 3.1.2 节类似，我们制作了视频，展示不同吸引子对应的海洋流函数和温度变化。这些视频见补充材料。本节识别出的各个吸引子的定性行为，与第 3.1.2 节中相应的吸引子（颜色相同者）相似。海洋-大气耦合模型运行结果与发射率模型运行结果之间的一个细微差异是，橙色吸引子在第一个海洋模态$\phi_{o,1}$上的低频变率（LFV）表现得更为清晰。这可从吸引子在平面（$\psi_{o,1}$, $T_{o,1}$）上的投影看出：这些变量的振荡行为所含的噪声和变化较少。橙色吸引子的这一变化可能是两次模型运行之间海洋-大气耦合增强所致；第 3.1.2 节中使用的值为 C = 0.009kgm^{-2}s^{-1}，而本节中使用的是C = 0.01175kgm^{-2}s^{-1}。

3.2.2 | 李雅普诺夫稳定性 - ε

按照第 3.1.3 节的格式，我们在图 3 (b) 中给出了李雅普诺夫特征指数（LLEs），其中 ε 变化，而海洋-大气耦合固定为$C = 0.01175\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$。随着 ε 增大，我们看到出现了更多稳定吸引子；然而，各稳定分支上的李雅普诺夫特征指数值不会随发射率而变化。这是因为发射率会使各层温度在空间上均匀升高。模型中的大气层受太阳辐照度的经向梯度驱动，进而导致斜压不稳定性。在当前的模型设置中，发射率不会影响这一温度梯度。为了更贴近全球变暖的预期结果，应进行模型运行，使发射率升高能够减小北极与赤道之间的温度梯度（Francis 和 Vavrus，2012年；Rantanen 等，2022年）。

我们在图 4 (b) 中展示了 $\varepsilon = 0.9$ 时，$C = 0.01175\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 条件下三个吸引子的李雅普诺夫谱。有趣的是，与另外两个吸引子以及第 3.1.3 节中展示的橙色吸引子相比，最大李雅普诺夫指数幅值最低的橙色吸引子，其接近零的李雅普诺夫指数数量也显著更少。在索引 18 处，李雅普诺夫指数的幅值明显骤降。这一结果很有意思，因为它表明该吸引子的李雅普诺夫维数显著低于其他吸引子。图 4 (a) 和 (b) 中橙色吸引子的李雅普诺夫谱之所以不同，可能是因为本节两个模型运行中的海洋-大气耦合有所增强：耦合参数从 $C = 0.009\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 增至 $C = 0.0175\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$。

4 | 讨论

我们描述了在降阶大气-海洋模型中发现的新型多稳态，这些多稳态源于未对长波辐射项进行线性化。对 MAOOAM 模型所做的修改带来了若干原线性化版本（采用固定参考温度）中不存在的特征。本研究介绍了该模型的两个新版本（动力平衡版本和非线性版本），并将这两个版本的结果与现有线性模型进行了比较。我们对新发现的吸引子及其多稳态区域的性质进行了定性分析，并利用吸引子的李雅普诺夫性质加以研究。

我们证明，在降阶海洋-大气模型 MAOOAM 中，通过修改长波辐射项的线性化方式，可以获得三个性质迥异的稳定吸引子，并且在某些参数范围内存在多稳态。有趣的是，该模型的动力平衡版本采用与原模型相同的线性化方式，但允许零阶平衡温度随时间变化；对于大多数参数值，其动力学表现与完全非线性版本相似。在动力平衡（DE）版本中可以得到这三个不同的吸引子，其中两个吸引子呈现低频变率（LFV），但对应的耦合海洋-大气流存在显著差异。此外，动力平衡版本的运行时间与采用固定参考温度的版本相同，几乎比模型的非线性版本快一个数量级。

两个不同的吸引子呈现出低频变率（LFV）行为。其中一个吸引子在第二海洋模态 ϕ_2上表现出低频变率，已在线性模型中得到识别。本研究发现了另一个吸引子，它在第一海洋模态 ϕ_1上表现出低频变率，而这一吸引子尚未在线性模型中得到识别。与第一个吸引子（其时间尺度约为 70 年）相比，这个吸引子的时间尺度更长（~ 80 – 100 年）。此外，两个吸引子在海洋和大气流动方面表现出显著差异。其中一个吸引子产生了双涡旋行为，与北大西洋观测到的情况相似；另一个吸引子则呈现出更复杂的流动，其主要关系与第一海洋模态 ϕ_1 和

第五海洋模态 ϕ_5有关。与其他稳定吸引子相比，该吸引子表现出海洋与大气之间最强的耦合，四个变量彼此耦合。这使得正 Lyapunov 指数显著降低，意味着该吸引子可能具有更长的预测窗口。还需开展进一步研究，以确定该吸引子是否描述了真实世界中的海气流。

开展本研究而不对长波辐射项进行线性化的一个关键原因，是探究多稳态之间发生临界转变的可能性。虽然我们发现，对于相同的参数值，存在彼此不同的吸引子，但未能得到在稳定分支之间间歇切换的轨迹，尽管无法排除存在此类轨迹的可能性。然而，在当前模型设置中，所有外部强迫均不随时间变化。为检验各吸引子稳定性的稳健性，可以开展模型模拟，并纳入随机强迫或扰动，以考察稳定分支之间是否可能发生噪声诱导跃迁。另一个可能导致临界转变的来源是周期循环，例如类似的线性化模型中所采用的太阳年周期（Vannitsem，2017年）。

随着全球气温升高，研究气候中临界转变点的可能性及其影响至关重要。了解气温升高会如何影响气候中现有的年代际变化模式，有助于更深入地认识既有气候模式未来可能呈现的样貌，也有助于探究是否可能从一种状态突变到另一种状态。本文介绍了一种修正模型，该模型既能产生多稳态，也能产生呈现低频变率（LFV）的吸引子，并且这些吸引子会在发射率升高时变得稳定。这些特性值得关注，因为它们有助于研究能够在大气李雅普诺夫时间之后仍支持预测的吸引子，以及从一个吸引子跃迁到另一个吸引子的可能性。未来将对这些方面展开研究。

代码可用性

用于获得结果的代码是 qgs 的新版本（v0.2.6）（Demaeyer、De Cruz 和 Vannitsem，2020），最近已发布在 GitHub：https://github.com/Climdyn/qgs，并托管于 Zenodo（Demaeyer、De Cruz 和 Hamilton，2022）。

致谢

本项目获得了欧盟地平线2020研究与创新计划的资助，资助依据为玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第956170号。MC 以研究主任身份获得了比利时国家科学研究基金的资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

补充信息

与新温度方案相关的新版本 qgs 文档手册作为本文的补充材料提供。

第 3.1.2 节和第 3.2.1 节中提到的视频可通过下表访问。

视频列表			
Link	C 值	ε 值	吸引子颜色
https://doi.org/10.5446/60104	C = 0.009千克米$^{-2}$秒$^{-1}$	ε = 0.7	橙色
https://doi.org/10.5446/60105	C = 0.0125kgm^{-2}s^{-1}	ε = 0.7	Blue
https://doi.org/10.5446/60106	C = 0.0125kgm^{-2}s^{-1}	ε = 0.7	Pink
https://doi.org/10.5446/60107	C = 0.01175kgm^{-2}s^{-1}	ε = 0.9	Blue
https://doi.org/10.5446/60108	C = 0.01175 千克米$^{-2}$秒$^{-1}$	ε = 0.9	橙色
https://doi.org/10.5446/60109	C = 0.01175千克米$^{-2}$秒$^{-1}$	ε = 0.9	Pink

参考文献

Armstrong McKay, D. I., Staal, A., Abrams, J. F., Winkelmann, R., Sakschewski, B., Loriani, S., Fetzer, I., Cornell, S.E., Rockström, J. 和 Lenton, T. M.（2022年）全球变暖超过 1.5°C 可能触发多个气候临界点。《科学》，**377**，eabn7950。

Årthun, M., Wills, R. C. J., Johnson, H.L., Chafik, L. 和Langehaug, H. R. (2021) 北大西洋气候变率的年代际机制及其对近期冷异常的启示。《气候学杂志》，**34**，19。

Barsugli, J. J. 和 Battisti, D. S. (1998) 大气—海洋热耦合对中纬度变率的基本影响。《大气科学杂志》，**55**，17。

Charney, J. G. 和 DeVore, J. G. (1979) 大气中的多重流动平衡态与阻塞。《大气科学杂志》，**36**，1205–1216。

Charney, J. G. 和 Straus, D.M. (1980) 斜压、地形强迫行星波系统中的形状阻力不稳定性、多重平衡态与传播行星波。《大气科学杂志》，**37**，1157–1176。

Czaja, A. 和 Frankignoul, C.（2002年）观测到的大西洋海表温度异常对北大西洋涛动的影响。《气候杂志》，**15**，606–623。

Czaja, A. 和 Marshall, J.（2001年）北大西洋大气—海洋耦合的观测。《英国皇家气象学会季刊》，**127**，1893–1916。

De Cruz, L.、Demaeyer, J. 和 Vannitsem, S.（2016年）模块化任意阶海洋—大气模型：MAOOAMv1.0。《地球科学模型发展》，**9**，2793–2808。

Demaeyer, J., De Cruz, L. 和 Hamilton, O.（2022年）qgs 0.2.6 版本发布。网址：`https://doi.org/10.5281/zenodo.7404671`。

Demaeyer, J., De Cruz, L. 和 Vannitsem, S.（2020年）qgs：一个灵活的 Python 框架，用于构建降阶多尺度气候模型。开放源代码软件期刊，**5**，2597。

Francis, J. A. 和 Vavrus, S. J.（2012年）北极放大与中纬度地区极端天气相关联的证据。地球物理研究快报，**39**。

Holton, J. R.（2004年）动力气象学导论。第88卷。爱思唯尔学术出版社。

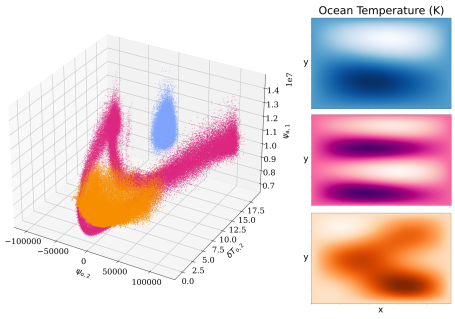
Houghton, J.（1986年）大气物理学（第2版）。剑桥大学出版社。

Hurrell, J. W., Kushnir, Y., Ottersen, G. 和 Visbeck, M.（2003年）北大西洋涛动概述。第134卷，1–35。美国地球物理联合会。

Kuptsov, P. V. 和 Parlitz, U. (2012) 协变李雅普诺夫向量的理论与计算。《非线性科学杂志》，**22**，727–762。

Lenton, T. M., Held, H., Kriegler, E., Hall, J. W., Lucht, W., Rahmstorf, S. 和 Schellnhuber, H. J. (2008) 人类世地球气候系统中的临界要素。美国国家科学院院刊，**105**，1786–1793。Lorenz, E. N. (1960年) 能量与数值天气预报。*Tellus*，**12**，364–373。— (1969年) 具有多种运动尺度的流的可预测性。*Tellus*，**21**，289–307。— (1982) 使用大型数值模型进行大气可预测性实验。*Tellus*，**34**，505–513。— (1984年) 湿大气环流低阶模型的构建。大气科学杂志，**41**，1933– 1945。Nese, J. M. 和 Dutton, J. A. (1993) 量化低阶海洋—大气模型中的可预测性变化：一种动力系统方法。《气候学杂志》，**6**，185–204。Pierini, S. (2011年) 风驱动海洋环流低阶模型中的低频变率、相干共振与相位选择。物理海洋学杂志，**41**，1585–1604。Rantanen, M., Karpechko, A. Y., Lipponen, A., Nordling, K., Hyvärinen, O., Ruosteenoja, K., Vihma, T. 和 Laaksonen, A. (2022年) 自1979年以来，北极变暖速度几乎是全球的四倍。《通讯：地球与环境》，**3**，168。Reinhold, B. B. 和 Pierrehumbert, R. T. (1982) 天气型动力学：准定常波与阻塞。《月刊天气评论》，**110**，1105–1145。Roebber, P. J. (1995) 低阶耦合海洋—大气模型中的气候变率。*TellusA*，**47**，473–494。Steffen, W., Rockström, J., Richardson, K., Lenton, T. M., Folke, C., Liverman, D., Summerhayes, C. P., Barnosky, A. D., Cornell, S. E., Crucifix, M., Donges, J. F., Fetzer, I., Lade, S. J., Scheffer, M., Winkelmann, R. 和 Schellnhuber, H. J. (2018年) 人类世地球系统轨迹。美国国家科学院院刊，**115**，8252–8259。Vannitsem, S. (2015年) 海洋混合层在北大西洋涛动发展中的作用：一种动力系统视角。《地球物理研究快报》，**42**，8615–8623。— (2017年) 大尺度大气运动的可预测性：Lyapunov 指数与误差动力学。《混沌：非线性科学跨学科期刊》，**27**，032101。Vannitsem, S. 和 De Cruz, L. (2014年) 一个24变量低阶耦合海洋—大气模型：OA-QG-WS v2。《地球科学模型发展》，**7**，649–662。Vannitsem, S., Demaeyer, J., De Cruz, L. 和 Ghil, M. (2015年) 低阶非线性耦合海洋—大气模型中的低频变率与热输送。《物理学*D*：非线性现象》，**309**，71–85。Vannitsem, S. 和 Duan, W. (2020年) 利用近中性后向李雅普诺夫向量，在耦合海洋—大气系统中获得可靠集合预报。《气候动力学》，**55**，1125–1139。Vannitsem, S. 和 Lucarini, V. (2016年) 耦合海洋—大气模型中协变李雅普诺夫向量的统计与动力学特性——多尺度效应、几何简并与误差动力学。《物理学*A*：数学与理论》，**49**，224001。Vannitsem, S., Solé-Pomies, R. 和 De Cruz, L. (2019年) 降阶耦合海洋—大气系统实现长期大气可预测性的途径：海洋盆地边界条件的影响。《英国皇家气象学会季刊》，**145**，2791–2805。Wu, L. 和 Liu, Z. (2005年) 北大西洋年代际变率：海气耦合、海洋记忆与潜在的北半球共振*。《气候学杂志》，**18**，331–349。

图文摘要



气候系统包含众多非线性相互作用，这些相互作用会产生混沌行为，并使系统可能存在多个稳态解以及在不同解之间发生临界转变。本研究考察了在降阶模型中引入非线性 Stefan-Boltzmann 定律的影响。该模型产生了多个稳态振荡解。这些解可能成为延长天气预报时效的一种方法，因为天气预报受制于对初始条件的敏感性。