arXiv:2301.04994v1 [math.FA] 12 Jan 2023

Drury-Arveson 空间及其他加权Besov空间中的循环性

ALEXANDRU ALEMAN、KARL-MIKAELPERFEKT、STEFAN RICHTER、CARL SUNDBERG 和 JAMES SUNKES

摘要。设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{C}^d$ 中单位球 $\mathbb{B}_d$ 上的解析函数空间，其乘子代数为 Mult($\mathcal{H}$)。若函数 $f \in \mathcal{H}$ 满足集合 $[f]$（即 $\{\varphi f$ 的闭包，其中 $\varphi \in$ Mult($\mathcal{H}$)$\}$）等于 $\mathcal{H}$，则称其为循环函数。对于乘子，我们还考虑循环性概念的一种弱化形式。具体而言，对于 $n \in \mathbb{N}_0$，我们考虑以下类

$$\mathcal{C}_n(\mathcal{H}) = \{\varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H}) : \varphi \neq 0, [\varphi^n] = [\varphi^{n+1}]\}.$$

我们的许多结果适用于 $\mathbb{B}_d$ 上 N 阶的径向加权 Besov 空间 $\mathcal{H} = B^N_\omega$，但此处我们仅介绍 Drury-Arveson 空间 H^2_d 的结果。

令 $\mathbb{C}_{\mathrm{stable}}[z]$ 表示 $\mathbb{B}_d$ 的稳定多项式，即在 $\mathbb{B}_d$ 中没有零点的 d 元复多项式，我们证明

$$\text{if } d \text{ is odd, then } \mathbb{C}_{\mathrm{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_{\frac{d-1}{2}}(H^2_d), \text{ and}$$
$$\text{if } d \text{ is even, then } \mathbb{C}_{\mathrm{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_{\frac{d}{2}-1}(H^2_d).$$

对于 $d = 2$ 和 $d = 4$，这些包含关系是最优的；但一般而言，我们只能证明，若 $0 \leq n \leq \frac{d}{4} - 1$，则 $\mathbb{C}_{\mathrm{stable}}[z] \not\subseteq \mathcal{C}_n(H^2_d)$。

对于多项式以外的函数，我们证明，若 f、$g \in H^2_d$ 满足 $f/g \in H^\infty$，且 f 是循环的，则 g 是循环的。我们利用这一点证明：若 f、$g \in H^2_d$ 可解析延拓到 $\overline{\mathbb{B}_d}$ 的某个邻域，在 $\mathbb{B}_d$ 中没有零点，且它们的零点集在边界上重合，$Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d = Z(g) \cap \partial\mathbb{B}_d$，那么 f 是循环的，当且仅当 g 是循环的。此外，若对于 $f \in H^2_d \cap C(\overline{\mathbb{B}_d})$，集合 $Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 包含一个实维数为 ≥ 3 的立方体，则 f 在 Drury-Arveson 空间中不是循环的。另一方面，在 $\partial\mathbb{B}_d$ 中零点集有限的稳定多项式是循环的。

1. 引言

关于单变量解析函数空间中循环向量的研究可谓经典。Beurling [13] 证明了

日期：2023年1月13日。2020 数学学科分类。主要分类 47B32，47A16；次要分类 30H25。

Hardy空间 H^2 中的循环向量是外函数，也就是说，这些函数 $f \in H^2$ 满足

$$-\infty < \log|f(0)| = \int_0^{2\pi} \log|f(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}.$$

Korenblum [32, 33] 为拓扑代数 $A^{-\infty} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : |f(z)| = O((1-|z|)^{-n})$（其中某个 $n \in \mathbb{N}\}$）以及加权 Dirichlet 空间 $\{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f^{(n)} \in H^2\}$建立了完整的结果。关于 Bergman空间 $L^2_a = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f|^2 dA < \infty\}$ 和 Dirichlet 空间 $D = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : f' \in L^2_a\}$ 中的循环函数，尚缺乏完整的刻画；但该领域已有许多深刻成果，阐明了这些空间的函数论，参见例如[21, 23, 28]。

对于多复变量函数空间，人们所知则少得多。Hedenmalm 研究了球和多圆盘代数中的范数闭理想， [29, 30], 而 Clouâtre 和 Davidson 针对 Drury-Arveson背景中的类似问题也取得了一些成果， [18]。Bénéteau-Condori-Liaw-Seco- Sola [10], Bénéteau-Knese-Kosiński-Liaw-Seco-Sola [11], 以及 Knese-Kosiński-Ransford-Sola [31]研究了双圆盘加权 Dirichlet 空间中多项式的循环性。Guo-Zhou 的论文 [25] 包含了专门针对双圆盘 Hardy空间的结果，而 Bergqvist 的论文 [12]则研究了多圆盘。Sola 在 [44] 中将已知的双圆盘结果推广到了两个复变量的单位球。关于 Drury-Arveson 空间中循环性的一些结果， H^2_d 可见于 [40, 定理 1.4 和 1.5]。关于 Drury-Arveson 空间的概述，请参阅 [26] H^2_d。

本文旨在研究在 $\mathbb{B}_d$ 中没有零点的循环函数和非循环函数 $f \in H^2_d$ 的性质。由于 H^2_d 是与 $\mathbb{B}_d$ 相关的多变量算子理论的核心，我们预计我们的结果将在该领域具有重要意义。众所周知，Drury-Arveson 空间是两类重要函数空间的一个例子：它是具有完备Pick核的希尔伯特函数空间，同时也是定义在 $\mathbb{C}^d$ 的单位球上的径向加权 Besov 空间。我们的许多方法都适用于这一一般情形。因此，我们的论述将具有很强的一般性。在单位圆盘上的 Dirichlet 空间这一特殊情形下，我们的方法为 [38] 的推论 5.5 提供了一个新的证明。

众所周知，对于完全 Pick 空间， $\mathcal{H}$ 的乘子不变子空间与 Mult($\mathcal{H}$) 的弱*闭理想之间存在一一对应关系，参见 [20]。由于我们主要关注 H^2_d ，因此将结果表述为关于 B^N_ω的不变子空间的结果，尽管

其中许多结果也适用于 Mult(B_ω^N) 中的弱*闭理想。

在第 3 节陈述并讨论主要结果之前，我们将在第 2 节介绍径向加权 Besov 空间及其乘子的必要背景知识。在本预备章节中，我们还将引入伪循环乘子类 $\mathcal{C}_n(\mathcal{H})$。第 4 节将通过若干例子说明我们的结果。第 5 节证明适用于一般径向加权 Besov 空间的定理，而第 6 节则讨论同时也是完全 Pick 空间的那些空间。最后，我们将在第 7 节探讨一些自然的开放问题。

2. 预备知识

设 X 为一个集合。定义在 X 上的希尔伯特函数空间 $\mathcal{H}$ 是一个由定义在 X 上的复值函数构成的希尔伯特空间，并且对每个 $z \in X$，求值泛函 $f \to f(z)$ 在 $\mathcal{H}$ 上连续。

设 $d \in \mathbb{N}$，并令 $\mathbb{B}_d$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 的开单位球。我们用 Hol($\mathbb{B}_d$) 表示 $\mathbb{B}_d$ 上的解析函数；当我们想强调 $d = 1$ 时，将记作$\mathbb{D} = \mathbb{B}_1$。本文的重点将放在径向加权 Besov 空间上

$$B_\omega^N = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}_d) : R^N f \in L^2(\omega)\}.$$

其中，N 是非负整数，$R = \sum_{j=1}^d z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ 是径向导算子，而 ω 是定义在 $\overline{\mathbb{B}_d}$上的可容许径向测度。也就是说，ω具有 $d\omega(z) = d\mu(r)d\sigma(w)$的形式，其中 $z = rw$、σ 是 $\partial\mathbb{B}_d$上的归一化旋转不变测度，而 μ 是 $[0,1]$ 上的博雷尔测度，并且对于满足 $0 < r < 1$的每个实数 r，都有 $\mu((r,1]) > 0$。如果 μ 在1处有点质量，则解析函数 f 的 $L^2(\omega)$-范数应理解为$\|f\|_{L^2(\omega)}^2 = \int_{\mathbb{B}_d} |f|^2 d\omega + \mu(\{1\})\|f\|_{H^2(\partial\mathbb{B}_d)}^2$。我们在 B_ω^N上定义一个范数为

$$\|f\|_{B_\omega^N}^2 = \begin{cases} \|f\|_{L^2(\omega)}^2, & \text{if } N = 0, \\ \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 + \|R^N f\|_{L^2(\omega)}^2, & \text{if } N > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

并且我们注意到，关于 μ 的假设意味着每个 B_ω^N都是 $\mathbb{B}_d$上的希尔伯特函数空间。为后文参考，我们还注意到

$$\|f\|_{B_\omega^N}^2 = \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 + \|Rf\|_{B_\omega^{N-1}}^2 \tag{2.2}$$

对所有 $N > 0$ 均成立。

一个重要的例子是 Drury-Arveson 空间 H^2_d。它可以定义为由满足以下条件的解析函数 f 构成的空间： $\mathbb{B}_d$

$$\|f\|^2_{H^2_d} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\alpha!}{|\alpha|!}|\hat{f}(\alpha)|^2 < \infty,$$

ˆ 其中 f由幂级数 $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} f(\alpha)z^\alpha$给出，采用多重指标记法。计算可得$\|f_n\|^2_{H^2(\partial\mathbb{B}_d)} = \frac{n!\ (d-1)!}{(n+d-1)!}\|f_n\|^2_{H^2_d}$，当$f_n$ 是次数为 n的齐次多项式时，参见例如 [40, 第 2]节。因此，对于任意径向加权 Besov 空间，我们有

$$\|f\|^2_{B^N_\omega} = \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 + \sum_{n=1}^\infty n^{2N}\omega_n\|f_n\|^2_{H^2_d}, \tag{2.3}$$

其中 $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ 表示将 f写成次数为 n的齐次多项式之和，且 $\omega_n = \frac{n!\ (d-1)!}{(n+d-1)!}\int_{[0,1]} r^{2n}d\mu(r)$。特别地，Drury-Arveson 空间本身就是一个径向加权 Besov 空间，二者范数等价。事实上，

$$H^2_d = \begin{cases} B^{(d-1)/2}_\omega & \text{if } d \text{ is odd and } \omega = \sigma \\ B^{d/2}_\omega & \text{if } d \text{ is even and } \omega = V. \end{cases} \tag{2.4}$$

这里， V表示 $\mathbb{B}_d$上的归一化勒贝格测度。

Drury-Arveson 空间属于一族由单参数群参数化的解析函数空间。对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $f\in$，定义 Hol($\mathbb{B}_d$)

$$\|f\|^2_{D_\alpha(\mathbb{B}_d)} = \sum_{n=0}^\infty (n+1)^\alpha\|f_n\|^2_{H^2_d} \approx \sum_{n=0}^\infty (n+1)^{\alpha+d-1}\int_{\partial\mathbb{B}_d}|f_n(z)|^2 d\sigma(z),$$

其中， $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ 是 f 按次数为 n的齐次多项式展开的结果，并令 $D_\alpha(\mathbb{B}_d) = \{f\in \text{Hol}(\mathbb{B}_d) : \|f\|^2_{D_\alpha(\mathbb{B}_d)} < \infty\}$。那么，$D_0(\mathbb{B}_d) = H^2_d$, $D_{-d+1}(\mathbb{B}_d) = H^2(\partial\mathbb{B}_d)$ 是 Hardy空间， $D_{-d}(\mathbb{B}_d) = L^2_a(\mathbb{B}_d)$ 是 Bergman空间，而 $D = D_1(\mathbb{D})$ 是 Dirichlet 空间。这里以及下文中，空间相等意味着范数可能并不相等，但彼此等价。

更一般地，对于 $\alpha < -d+1$ ，我们有

$$(n+1)^{\alpha+d-1} \approx \int_0^1 r^n(1-r)^{-(\alpha+d)}dr.$$

因此，通过令

$$d\omega_\alpha(w) = \begin{cases} d\sigma(w) & \text{if } \alpha = -d+1 \\ (1-r)^{-(\alpha+d)}dr\,d\sigma(z) & \text{if } w = rz \text{ and } \alpha < -d+1 \end{cases}$$

我们可知，只要 $\alpha \leq -d+1$， $B^0_{\omega_\alpha} = D_\alpha(\mathbb{B}_d)$。这意味着，只要 $N \in \mathbb{N}_0$ 且 $N \geq \frac{\alpha+d-1}{2}$，$D_\alpha(\mathbb{B}_d) = B^N_{\omega_{\alpha-2N}}$，参见 (2.3)。若 $\alpha > 1$，则利用柯西–施瓦茨不等式作简单推导可知，空间 $D_\alpha(\mathbb{B}_d)$ 包含于球代数，且满足 $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_{D_\alpha(\mathbb{B}_d)}$； $d = 1$ 情形见 [42] 。此外，由于 $f \in D_\alpha(\mathbb{B}_d) \Leftrightarrow Rf \in D_{\alpha-2}(\mathbb{B}_d)$，我们得出，在点 $z \in \partial\mathbb{B}_d$ 处对 f、Rf、.....、$R^{N-1}f$ 求值，只要 $\alpha > 2N-1$，便定义了 $D_\alpha(\mathbb{B}_d)$ 上的有界线性泛函。关于这些空间及其乘子的更多信息，参见例如 [4, 7, 14, 17, 19, 36, 37, 40]，以及 [1] 第 14 节。

如果 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是希尔伯特函数空间，那么

$$\mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \{\varphi : \varphi f \in \mathcal{K} \text{ for all } f \in \mathcal{H}\}$$

是从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$的乘子。Mult($\mathcal{H},\mathcal{K}$) 是一个范数为 $\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{K})} = \sup\{\|\varphi f\|_{\mathcal{K}}: f \in \mathcal{H}, \|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ 的巴拿赫空间。我们将 Mult($\mathcal{H}$) = Mult($\mathcal{H},\mathcal{H}$) 记为，并注意到

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^N_\omega)}$$

当 $N = 0$时等号成立。此外，容易验证，如果函数 f 可解析延拓到 $\overline{\mathbb{B}_d}$的一个邻域，那么对于所有可容许径向测度 ω 以及所有 $N \in \mathbb{N}_0$，都有 $f \in$Mult(B^N_ω)。

我们关注 $\mathcal{H}$的乘子不变子空间，即满足 $\varphi f \in \mathcal{M}$的子空间 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$，其中 $f \in \mathcal{M}$ 且 $\varphi \in$Mult($\mathcal{H}$)。如果 $f \in \mathcal{H}$，那么 $[f] = \mathrm{clos}_{\mathcal{H}}\{\varphi f : \varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})\}$ 表示由 f生成的不变子空间。若函数 $f \in \mathcal{H}$ 满足 $[f] = \mathcal{H}$，则称其在 $\mathcal{H}$ 中是循环的。如果 $\mathcal{H}$ 是径向加权 Besov 空间，那么所有多项式都是乘子，并且它们在 $\mathcal{H}$中稠密。因此，在这种情况下， f 是循环的当且仅当 $1 \in [f]$。

若 $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$，则循环函数就是经典的外函数。若 $f \in \mathcal{H} = H^2_d$，则每个切片函数 $f_z(\lambda) = f(\lambda z)$、 $z \in \partial\mathbb{B}_d$ 都属于 $H^2(\mathbb{D})$，且满足 $\|f_z\|_{H^2(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{H^2_d}$；其他空间中的推广见第6.3节。因此，若 f 在 H^2_d 中是循环的，则每个切片函数 f_z 都必须是 $H^2(\mathbb{D})$ 中的外函数。然而，我们将在第 4 节看到，对于 $d \geq 2$，存在非循环函数 $0 \neq f \in H^2_d$，使得其每个切片都是外函数。

作为研究 $\mathcal{H}$中函数循环行为的一种工具，我们定义以下乘子集，每个集合均由一个整数 $n \geq 0$ 编号：

$$\mathcal{C}_n(\mathcal{H}) = \{\varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H}) : \varphi \neq 0 \text{ and } [\varphi^n] = [\varphi^{n+1}]\}.$$

我们还定义

$$\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}) = \{\varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H}) : \bigcap_{n=1}^{\infty} [\varphi^n] \neq (0)\}.$$

我们将属于 $\mathcal{C}_n(\mathcal{H})$ 视为循环性的一种弱化形式。事实上，如果乘子在 $\mathcal{H}$ 中稠密，那么 $\mathcal{C}_0(\mathcal{H})$ 就由循环乘子构成，并且很容易证明

$$\mathcal{C}_0(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{C}_1(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{C}_2(\mathcal{H}) \cdots \subseteq \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H}). \tag{2.5}$$

在 $\mathcal{H} = H^2(\mathbb{D})$ 的情形下，处处取等号，每个集合都等于 $H^\infty(\mathbb{D})$ 中的外函数，这可由内外因子分解看出。类似地，如果 $\alpha \geq 0$，那么我们将在第6.3节证明：若对某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $f \in \mathcal{C}_n(D_\alpha(\mathbb{B}_d))$，则对每个 $z \in \partial\mathbb{B}_d$，切片函数 f_z 是 $H^\infty(\mathbb{D})$ 中的外函数。容易验证，对于 $d = 1$，同样的结论适用于 $f \in \mathcal{C}_\infty(D_\alpha(\mathbb{B}_d))$。然而，在命题 6.12 中，我们将给出一个例子，说明若 $d \geq 2$，则 $\mathcal{C}_\infty(H^2_d)$ 中的函数可能具有带非平凡奇异内因子的切片。由此可得 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n(H^2_d) \subsetneq \mathcal{C}_\infty(H^2_d)$。

对于 Dirichlet 空间 $D = D_1(\mathbb{D})$，[39, 定理 4.3]证明了类 $\mathcal{C}_1(D)$ 等于 $\mathrm{Mult}(D)$ 中的外函数。另一方面，已知 [14] 在 $\mathrm{Mult}(D)$ 中存在非循环外函数，因此 $\mathcal{C}_0(D) \neq \mathcal{C}_1(D)$。在这个特定情形下，我们有 $\mathcal{C}_1(D) = \mathcal{C}_\infty(D)$，但一般而言并不存在类似结论。

例 2.1。若 $\mathcal{H} = D_4(\mathbb{D}) = B^2_\omega$, $d\omega = d\delta_1 \frac{|dz|}{2\pi}$，那么 $\varphi(z) = 1 - z$ 就是 $\mathcal{C}_2(B^2_\omega) \setminus \mathcal{C}_1(B^2_\omega)$ 中外函数的一个例子。

这是因为观察到，在 $D_4(\mathbb{D})$ 上，对函数及其导数进行求值定义了有界线性泛函。因此 $1 - z \notin [(1 - z)^2]$。初等地可以证明 $1 - z \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$，参见定理 3.5。

我们通过证明集合 $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ 的另外一些初等性质来结束本节。

引理2.2. 假设 乘子空间$(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$。那么

(a) 若 $\varphi \in \mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$，则对所有 $z \in \mathbb{B}_d$，$\varphi(z) \neq 0$。*(b)* 若 $n, m \in \mathbb{N}_0$，且若 $\psi, \varphi \in$ 乘子空间 $(\mathcal{H})$ 满足 $[\varphi^n] = [\varphi^{n+1}]$ 且 $[\psi^m] = [\psi^{m+1}]$，则 $[\varphi^n \psi^m] = [\varphi^{n+1} \psi^{m+1}]$。

证明。(a) 设 $\varphi \in$ 乘子空间$(\mathcal{H})$，且 $z_0 \in \mathbb{B}_d$ 满足 $\varphi(z_0) = 0$。我们需要证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\varphi^n] = (0)$，因此对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $f \in [\varphi^n]$。设 $r > 0$，使得 $B = \{z$ 的闭包：$|z - z_0| < r\}$ 包含于 $\mathbb{B}_d$。只需证明对每个 $z \in B$，$f(z) = 0$。显然，在每个满足 $\varphi(z) = 0$ 的点 z，都有 $f(z) = 0$。取满足 $\varphi(z) \neq 0$ 的 $z \in B$。

对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，令 $\psi_z(\lambda) = z_0 + \lambda(z - z_0)$。那么 $\varphi_z = \varphi \circ \psi_z$ 和 $f_z = f \circ \psi_z$ 在单位圆盘的某个邻域内解析。由于 $f(z) = f_z(1)$，只需证明 $f_z = 0$。

我们有 $\varphi(z_0) = 0$，但 $\varphi(z) \neq 0$。因此，函数 φ_z satisfies$\varphi_z(0) = 0$，但 φ_z 并非恒等于 0。因此，存在 $k \geq 1$ 和解析函数 h，使得 $h(0) \neq 0$ 且 $\varphi_z(\lambda) = \lambda^k h(\lambda)$。现在固定 $n \in \mathbb{N}$。于是，由 $f \in [\varphi^n]$ 可知，存在乘子 g_j，使得 $g_j\varphi^n \to f$ 属于 $\mathcal{H}$。于是 $g_j \circ \psi_z \varphi_z^n \to f_z$ 在闭单位圆盘上一致收敛。由于每个 $g_j\varphi^n$ 在 0 处都有一个重数为 nk 的零点，我们得出 f_z 在 0 处有一个重数为 nk 的零点。由于 $k \geq 1$ 且 n 任意，这意味着 $f_z = 0$。

(b) 假设 n、m、φ、ψ 满足假设中的条件。由于 $\varphi^{n+1}\psi^{m+1} =(\varphi\psi)$ $\varphi^n\psi^m \in [\varphi^n\psi^m]$，我们只需证明 $\varphi^n\psi^m \in [\varphi^{n+1}\psi^{m+1}]$。关于 φ 的假设意味着存在一列乘子 u_j，使得 $u_j\varphi^{n+1} \to \varphi^n$ 属于 $\mathcal{H}$。于是 $u_j\varphi^{n+1}\psi^{m+1} \to \varphi^n\psi^{m+1}$ 属于 $\mathcal{H}$。这意味着 $\varphi^n\psi^{m+1} \in [\varphi^{n+1}\psi^{m+1}]$。类似地，存在一列乘子 v_j，使得 $v_j\psi^{m+1} \to \psi^m$ 属于 $\mathcal{H}$。于是 $\varphi^n v_j\psi^{m+1} \to \varphi^n\psi^m$，从而 $\varphi^n\psi^m \in [\varphi^n\psi^{m+1}] \subseteq [\varphi^{n+1}\psi^{m+1}]$。■

特别是，如果 Mult($\mathcal{H}$) 在 $\mathcal{H}$ 中稠密包含，那么乘以循环函数会保持每个 $\mathcal{C}_n(\mathcal{H})$ 类。

3. 主要结果陈述

本节将介绍我们的主要结果。以下我们假设 $N \in \mathbb{N}$，并用 ω 表示一个可容许径向测度。

定理 3.1。若 φ，$\psi \in \mathrm{Mult}(B^N_\omega)$ 且满足 $\varphi/\psi \in H^\infty(\mathbb{B}_d)$，则对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $\varphi^{N+k-1} \in [\psi^k] \subseteq [\psi]$。

因此，若 $N = 1$ 或 $\varphi \in \mathcal{C}_1(B^N_\omega)$，则 $|\varphi(z)| \leq |\psi(z)|$ 蕴含 $\varphi \in [\psi]$。特别是，φ 的循环性蕴含 ψ 的循环性。定理 3.1 证明中的一个主要技术步骤本身也很有趣：

定理 3.2。若 φ，$\psi \in \mathrm{Mult}(B^N_\omega)$ 且满足 $\varphi/\psi \in H^\infty(\mathbb{B}_d)$，则 $\varphi^{N+1}/\psi \in \mathrm{Mult}(B^N_\omega)$。

当然，如果 $N = 0$，那么 $\mathcal{H}$ 是加权 Bergman 空间或 Hardy空间，并且 Mult(B^N_ω) $= H^\infty(\mathbb{B}_d)$。因此，在这种情况下，该定理显然成立。然而，如果 $N > 0$，那么可能会出现 Mult(B^N_ω) $\subsetneq H^\infty(\mathbb{B}_d)$ 的情况，因此可能必须选择 $n > 1$，才能使 φ^n/ψ成为乘子。

通过将定理 3.2 应用于 $\varphi = 1$，我们重新得到 [34] 中的以下定理。

推论 3.3. “单函数 *Corona* 定理”对 乘子空间(B_ω^N)成立。也就是说，只要 $\psi \in$ 乘子空间(B_ω^N) 且 $|\psi(z)| \geq 1$ 对所有 $z \in \mathbb{B}_d$均成立，那么 $1/\psi \in$ 乘子空间(B_ω^N)。因此，对所有 $\varphi \in$ 乘子空间(B_ω^N)，我们有$\sigma(M_\varphi) = \varphi(\mathbb{B}_d)$。

定理 3.2 或许会让人想到关于H^∞、 [45]的 Wolff 理想定理。事实上，与 [9], 一样，定理 3.2 确实给出了在 Mult(B_ω^N) 中判定由主理想生成的根理想成员关系的一个简单条件。对于 $\psi \in$Mult(B_ω^N)，令

$$\text{Rad}(\psi) = \{\varphi \in \text{Mult}(B_\omega^N): \ \varphi^n = u\psi \text{ 对某个 } u \in \text{Mult}(B_\omega^N) \ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

推论 3.4。若 φ, $\psi \in \text{Mult}(B_\omega^N)$，则 $\varphi \in \text{Rad}(\psi)$ 当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\varphi^n/\psi \in H^\infty$。

在定理 3.2 的证明过程中，我们还将建立一些一致范数界，这些界对于证明下一个定理很有用。令 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z]$ 表示稳定多项式，即在 $\mathbb{B}_d$中没有零点的多项式。

定理 3.5. 我们有 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_N(B_\omega^N)$。此外，若$N > 0$ 且 ω 具有 $d\omega(z) = u(r)2rdrd\sigma(w)$的形式，其中某个 $u \in L^\infty([0,1])$，则 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_{N-1}(B_\omega^N)$。

有人可能会想，满足 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_k(B_\omega^N)$的最小 k 是什么。例 2.1 表明，对于空间 $D_4(\mathbb{D})$，定理 3.5 已经达到了最佳结果。另一方面，对每个 ω，都存在另一个可容许径向测度 ω'，使得 $B_\omega^N = B_{\omega'}^{N+1}$ （范数等价），见 [4, 定理 2.4]。因此，定理 3.5 对$B_{\omega'}^{N+1}$ 当然并非锐利。

对于通过 (2.4) 表示为 Besov 空间的 Drury-Arveson 空间，定理 3.5 推出

$$\text{if } d \text{ is odd, then } \mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_{\frac{d-1}{2}}(H_d^2),$$
$$\text{if } d \text{ is even, then } \mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_{\frac{d}{2}-1}(H_d^2).$$

特别地，对于 $d = 2$，每个稳定多项式都是循环的。我们将在第 2 节证明，若 $n \leq \frac{d}{4} - 1$，则 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \not\subseteq \mathcal{C}_n(H_d^2)$，见命题 4.4 (b)。因此，对于 $d = 2$ 和 $d = 4$，这些包含关系是最佳的；但对于 d 的其他取值，则可能存在差距。

如果 $f \in$ Hol($\mathbb{B}_d$) 可延拓为在 $\overline{\mathbb{B}_d}$ 上连续，则记作 $Z(f) = \{z \in \overline{\mathbb{B}_d}: f(z) = 0\}$。我们称 $f \in$ Hol($\mathbb{B}_d$) 满足阶数为 $\alpha > 0$ 的 Lipschitz 条件，如果存在 $C > 0$ 使得 $|f(z) - f(w)| \leq C|z - w|^\alpha$ 对所有 $z, w \in \mathbb{B}_d$ 都成立。注意，满足 Lipschitz 条件的函数可以延拓为在$\overline{\mathbb{B}_d}$ 上连续。

定理 3.6. 设 $f, g \in$ 乘子空间(B_ω^N) 满足

(i) $f(z) \neq 0$ 且 $g(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{B}_d$均成立，(ii) f 可延拓为在 $\overline{\mathbb{B}_d}$的某个邻域内解析，(iii) g 满足阶数为 $\alpha > 0$ 的 *Lipschitz* 条件。

假设 $Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d \subseteq Z(g) \cap \partial\mathbb{B}_d$。那么存在一个 $n \in \mathbb{N}$使得 $g^n \in [f]$。此外，如果我们进一步假设 g 是一个多项式，那么对每个 $N \geq 1$，都有 $g^N \in [f^N] \subseteq [f]$。

特别地，若 g 是循环的，则 f 也是循环的。因此，对于多项式 $p \in \mathbb{C}_{\text{stable}}[z]$， $Z(p) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 的几何性质决定了p 是否循环。若 $w \in \partial\mathbb{B}_d$，则 $p(z) = 1 - \langle z, w\rangle$ 是一个多项式，使得 $Z(p) \cap \partial\mathbb{B}_d = \{w\}$，并且很容易看出， p 在 H_d^2中是循环的。这意味着，如果 f 可延拓为在 $\overline{\mathbb{B}_d}$的某个邻域内解析，在 $\mathbb{B}_d$中没有零点，且在 $\partial\mathbb{B}_d$中只有有限个零点，那么 f 在 H_d^2中是循环的。在例 4.3 和 4.6 中，我们将给出 H_d^2 中的循环多项式示例，使得 $Z(p) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 的实维数为 1 或 2。然而，在定理 4.8 中，我们将证明，如果 $Z(p) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 包含一个实维数为 ≥ 3 的立方体，那么 p 在 H_d^2 中不是循环的。

如果径向加权 Besov 空间恰好属于所谓的完全 Pick 空间（定义见第 6 节），那么定理 3.1 的结果可以部分推广到适用于 B_ω^N 中的任意函数。对于所有 $\alpha \geq 0$，空间 $D_\alpha(\mathbb{B}_d)$ 都是完全 Pick 空间。这包括 Dirichlet 空间 D 和 Drury-Arveson 空间 H_d^2。此外，在 [4] 中给出了关于 ω 的一般条件，这些条件可推出B_ω^N是完全 Pick 空间。例如，若 $\alpha > -1$，且若 $d\omega(z) = w(z)dV(z)$，其中 $^{w}{}_{(z)\ (1-|z|^2)^\alpha}$ 随 $|z| \to 1$单调不减，那么对于 $N \geq \frac{\alpha+d}{2}$，空间 B_ω^N就是完全 Pick 空间。完全 Pick 空间对我们很重要，因为如果 $\mathcal{H}$ 是完全 Pick 空间，且 $f \in \mathcal{H}$，那么对于某个 u，有 $f = u/v$，其中$v \in$ 属于 Mult($\mathcal{H}$)，并且 v 是循环的。

定理 3.7。 设 $N \in \mathbb{N}$，且 B_ω^N 是同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间。设 f， $g \in B_\omega^N$ 满足 $f/g \in H^\infty(\mathbb{B}_d)$。

如果 $N = 1$，或者对于 v， $f = u/v$ 是循环的，且 $u \in \mathcal{C}_1(B_\omega^N)$，那么 $f \in [g]$。

由此可知，如果 $|f(z)| \leq |g(z)|$，且 f 是循环的，那么 g 也是循环的。由于常数 1 在 B_ω^N 中是循环的，该定理表明，任何有下界的 $g \in \mathcal{H}$ 都必定是循环的。因此，定理 3.7 改进了 [40], 的定理 1.5；该定理仅在附加假设 $f = 1$ 和 g 属于 Bloch 空间的情况下，才证明了 H_d^2 的结论。

对于单位圆盘的 Dirichlet 空间 D，定理 3.7 已为人所知，参见 [38] 的推论 5.5。这里的证明技术性要低得多

于 [38] 中的证明。定理 3.7 将由定理 6.8 推出，后者包含一个稍微更一般的结果。

4. 一些例子

为了阐明我们的定理，我们先从H^2_d的一些例子开始。我们介绍两种将 $D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D})$ 嵌入 H^2_d 的方法，其中 $1 \le k \le d$。第一种方法广为人知，且此前已用于构造在 Drury-Arveson 空间中具有有趣性质的函数，参见例如 [8, 定理 3.3], [27, 引理 2.1], [6, 引理 9.1], ，或参见 [10,例 2] ，其中给出了此类嵌入的双圆盘版本。

注意，若 $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{B}_d$，则由几何算术平均不等式可知，对于每个满足 $1 \le k \le d$ 的整数 k，我们有

$$\left(\prod_{j=1}^{k} |z_j|^2 \right)^{1/k} \le \frac{\sum_{j=1}^{k} |z_j|^2}{k} \le \frac{1}{k}.$$

因此， $\tau_k(z) = k^{k/2} \prod_{j=1}^{k} z_j$ 映射到 $\mathbb{D}$中。

引理 4.1。 设 $1 \le k \le d$。算子

$$T_{k,d} : D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}) \to H^2_d, \quad T_{k,d} f = f \circ \tau_k$$

有界且有正下界。此外，若 $\varphi \in$ 乘子空间$(D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}))$，则 $T_{k,d}\varphi \in$ 乘子空间(H^2_d)。

若 $d = k$，则这是 $s = 1$ 中引理 9.1 和命题 9.4 的特殊情形。若 $d > k$，则我们结合使用 H^2_k 到 H^2_d 的等距嵌入，该嵌入由 $f \to f \circ P$给出，其中 P是从 $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^k$到 $(z_1, \dots, z_d) \to (z_1, \dots, z_k)$的投影。作为乘子代数 Mult$(H^2_k) \to$Mult$(H^2_d)$之间的映射，此嵌入同样是等距的，参见 [6]的引理 6.2。

引理 4.2. 设 $1 \le k \le d$.

(a) 若 $f \in D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D})$，则 f 在 $D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D})$中是循环的，当且仅当 $T_{k,d}f$在 H^2_d中是循环的。

(b) 设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f \in$ 乘子空间$(D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}))$，则 $f \in \mathcal{C}_n(D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}))$，当且仅当 $T_{k,d}f \in \mathcal{C}_n(H^2_d)$。

(c) 若 $f \in D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D})$ 是一个外函数，则对每个 $z \in \partial\mathbb{B}_d$，切片函数 $(T_{k,d}f)_z$都是外函数。这里 $(T_{k,d}f)_z(\lambda) = T_{k,d}f(\lambda z)$，$\lambda \in \mathbb{D}$。

证明。 我们证明 (b) 和 (c)。(a) 的证明与 (b) 类似。

(b) 固定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $f \in$ 乘子空间$(D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}))$。那么根据引理 4.1 $T_{k,d}f \in$乘子空间(H^2_d)。如果 $f \in \mathcal{C}_n(D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}))$，那么存在一个多项式序列

$\{p_j\}$使得 $p_j f^{n+1} \to f^n$属于 $D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D})$。那么对每个 j，我们有$q_j = T_{k,d}p_j$是一个多项式，并且根据引理 4.1 $(T_{k,d}p_j)(T_{k,d}f)^{n+1} = T_{k,d}(p_j f^{n+1}) \to T_{k,d}(f^n)$ $=(T_{k,d}f)^n$属于 H^2_d。因此 $T_{k,d}f \in \mathcal{C}_n(H^2_d)$。

反之，若 $T_{k,d}f \in \mathcal{C}_n(H^2_d)$，则存在多项式 $q_j \in \text{Mult}(H^2_d)$，使得 $q_j(T_{k,d}f)^{n+1} \to (T_{k,d}f)^n$属于 H^2_d。

对于 $n \in \mathbb{N}_0$，定义 $\alpha_n = (n, \ldots, n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}_0^d$，其中 α_n 的前 k 个分量等于 n，其余分量为 0。若 $q_j(z) = \sum_\alpha \hat{q}_j(\alpha)z^\alpha$，则令 $P_k q_j(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{q}_j(\alpha_n) \prod_{k=1}^d z_k^n$。注意，对于某个多项式 p_j，有 $P_k q_j = T_{k,d}p_j$，并且

$$(q_j - P_k q_j)T_{k,d}(f^{n+1}) \perp (P_k q_j)T_{k,d}(f^{n+1}) - T_{k,d}(f^n)$$

根据 H^2_d 中单项式的正交性。因此

$$\begin{aligned}
\|p_j f^{n+1} - f^n\|^2_{D_{(k-1)/2}} &\approx \|T_{k,d}(p_j f^{n+1}) - T_{k,d}(f^n)\|^2_{H^2_d} \\
&= \|(P_k q_j)T_{k,d}(f^{n+1}) - T_{k,d}(f^n)\|^2_{H^2_d} \\
&\leq \|(q_j - P_k q_j)T_{k,d}(f^{n+1})\|^2 + \|(P_k q_j)T_{k,d}(f^{n+1}) - T_{k,d}(f^n)\|^2_{H^2_d} \\
&= \|q_j(T_{k,d}f)^{n+1} - (T_{k,d}f)^n\|^2_{H^2_d} \to 0
\end{aligned}$$

当 $j \to \infty$ 时。因此，$f \in \mathcal{C}_n(D_{(k-1)/2})$。

(c) 若 $f \in D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D})$ 是外函数，则 $\log |f(0)| = \int_0^{2\pi} \log |f(e^{it})| \frac{dt}{2\pi}$。令 $z \in \partial\mathbb{B}_d$，则 $(T_{k,\ d}f)_z(e^{it}) = f(e^{ikt}\tau_k(z))$，因此

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \log |(T_{k,d}f)_z(e^{it})| \frac{dt}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \log |f(e^{ikt}\tau_k(z))| \frac{dt}{2\pi} \\
&= \log |f(0)| = \log |(T_{k,d}f)_z(0)|.
\end{aligned}$$

因此 $(T_{k,\ d}f)_z$ 是外函数。 ■

例 4.3。若 $1 \leq k \leq 3$，$f(z) = 1 - z$，则 $T_{k,\ d}f$ 在H^2_d中是循环的。此外，集合 $Z(T_{k,\ d}f) \cap \partial\mathbb{B}_d$等于一个嵌入的 $k-1$ 维立方体。

众所周知，对于 $\alpha \leq 1$，f 在 $D_\alpha(\mathbb{D})$ 中是循环的，参见 [14]。这也可由定理 3.5 的第二部分推出，该部分将在后文证明。因此，$T_{k,\ d}f$ 的循环性可由引理 4.2 (a) 得出。关于零点集的结论也很容易看出。例如，若 $k = 3$，则

$$Z(T_{k,d}f) \cap \partial\mathbb{B}_d = \{3^{-1/2}(e^{it}, e^{is}, e^{-i(t+s)}, 0, \ldots, 0) : t, s \in [0, 2\pi]\}.$$

类似地可知，对于 $k \geq 4$，集合 $Z(T_{k,\ d}f) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 包含一个维数为 $k-1 \geq 3$ 的立方体，因此由定理 4.8 可得，$T_{k,\ d}f$ 对任何 $k \geq 4$ 都不是循环的。或者，也可以由下述命题的 (b) 部分得出这一结论。

命题 4.4。*(a)* 若 $d \geq 2$，则存在非循环的 $f \in H^2_d$，使得每个切片函数 f_z 都是 $H^2(\mathbb{D})$ 中的外函数。

(b) 若 $d \geq k \geq 4n > 0$ 和 $p(z) = 1 - z$，则多项式$T_{k,d}p \notin \mathcal{C}_{n-1}(H^2_d)$。因此 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \nsubseteq \mathcal{C}_{n-1}(H^2_d)$。

证明。(a) 根据引理 4.2，只需证明存在一个非循环外函数 $f \in D_{1/2}(\mathbb{D})$，因为这样一来，$T_{2,d}f$ 就会是所需的例子。这一点早已为人所知，我们在此简要概述其思路。证明用到了 Carleson 集和 α-容量（针对 $\alpha = 1/2$）。事实上，利用 [16] 第四节定理 3，可以构造一个具有正 $1/2$-容量的"广义康托"集 E （另见 [22], 第 4 节）。广义康托集是 Carleson 集。因此，根据 Carleson 的结果，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在一个外函数 $f \in C^n(\overline{\mathbb{D}}) \cap \text{Hol}(\mathbb{D})$，使得$f = 0$ 在 E ([15]) 上成立。于是 f 在 $D_{1/2}$中不是循环的，参见例如 [22] 定理 1.1。

(b) 若 $d \geq k \geq 4n > 0$，则 $\frac{k-1}{2} > 2n - 1$。如引言中所述，由此可知，对于所有 $z \in \partial\mathbb{D}$ 和所有 $j = 0, 1, \ldots, n-1$， $f \to f^{(j)}(z)$ 在 $D_{(k-1)/2}(\mathbb{D})$ 上定义了一个有界线性泛函。但在 1 处取 $n-1$ 阶导数的求值泛函会使 $[(1-z)^n]$ 中的每个函数都被消去，却不会消去 $(1-z)^{n-1}$。因此 $(1-z)^{n-1} \notin [(1-z)^n]$。这意味着 $1 - z \notin \mathcal{C}_{n-1}(D_{(k-1)/2}(\mathbb{D}))$。于是，命题的 (b) 部分由引理 4.2 得证。■

将 $D_{(k-1)/2}$ 嵌入 H^2_d 的第二种方式由下面的引理给出。

引理 4.5. 设 $1 \leq k \leq d$。那么算子 $S_k : D_{\frac{k-1}{2}}(\mathbb{D}) \to H^2_d$，$S_k f(z) = f(\sum_{j=1}^k z_j^2)$ 是有界的，且有正下界。

证明。如上所述，利用嵌入 $H^2_k \subseteq H^2_d$，只需证明情形 $k = d$。若 $f(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty a_n \lambda^n$，则

$$S_d f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n (\sum_{j=1}^d z_j^2)^n = \sum_{n=0}^\infty a_n \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^{(2\alpha)}.$$

Then

$$\|S_d f\|^2_{H^2_d} = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{|\alpha|=n} \frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2}.$$

因此，我们需要证明

$$(n+1)^{(d-1)/2} \approx \frac{(n!)^2}{(2n)!} \sum_{|\alpha|=n} \frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2},$$

其中隐含常数可以依赖于 d，但不能依赖于 n。对于 $n=0$，等式成立，因此只需考虑 $n \geq 1$。我们将对 d 使用归纳法来证明该命题。对于 $d=1$，该命题以等式形式成立，我们还将明确验证 $d=2$ 的情形。由斯特林公式可知，$(n!)^2/(2n)! \approx \sqrt{n}/2^{2n}$，当 $n \geq 1$ 时。于是

$$\begin{aligned}
\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{|\alpha|=n}\frac{(2\alpha)!}{(\alpha!)^2} &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2} \\
&\approx 2+\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2} \\
&\approx 2+\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \\
&\approx \sqrt{n}\sum_{1\leq k\leq n/2}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \\
&\approx \sum_{1\leq k\leq n/2}\frac{1}{\sqrt{k}} \approx \sqrt{n}.
\end{aligned}$$

现在假设 $d \geq 2$，并且该结论对 d 成立。我们将证明它对 $d+1$ 也成立。注意，对每个 $n \geq 0$，我们都有

$$\{\beta \in \mathbb{N}_0^{d+1} : |\beta| = n\} = \{(\alpha, n-|\alpha|) : \alpha \in \mathbb{N}_0^d, 0 \leq |\alpha| \leq n\}$$

因此，根据归纳假设

$$\begin{aligned}
\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{\beta\in N_0^{d+1},|\beta|=n}\frac{(2\beta)!}{(\beta!)^2} &= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,|\alpha|=k}\frac{(2\alpha)!(2(n-k))!}{(\alpha!)^2((n-k)!)^2} \\
&\approx \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2}(k+1)^{(d-1)/2} \\
&\leq (n+1)^{(d-1)/2}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2} \\
&\approx (n+1)^{(d-1)/2}\sqrt{n} \leq (n+1)^{d/2} \quad \text{by the } d=2 \text{ case.}
\end{aligned}$$

因此，我们得到了所需的上界。对于下界，注意到由对称性可知

$$2\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2}(k+1)^{(d-1)/2}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2}((k+1)^{(d-1)/2}+(n-k+1)^{(d-1)/2})$$
$$\geq\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{(k!)^2}\frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2}(\frac{n}{2}+1)^{(d-1)/2},$$

现在我们可以将其代入前一个公式，并通过类似的计算得到下界。■

例4.6。 若 $d\geq 3$，则 $p(z)=1-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)$ 在 H_d^2 中是循环的，并且 $Z(p)\cap\partial\mathbb{B}_d$ 是一个二维立方体。

同样，我们注意到，对于 $k=3$， $D_{(k-1)/2}(\mathbb{D})=D$ 是经典狄利克雷空间，而多项式 $1-z$ 在 D 中是循环的。因此，利用引理 4.1，并采用与引理 4.2 (a) 的证明类似的论证，该结论可由引理 4.5 得出。在这种情况下

$$Z(p)\cap\partial\mathbb{B}_d=\{(\cos t\cos s,\cos t\sin s,\sin t,0,\dots,0):t,s\in[0,2\pi]\}.$$

为了完成本节，我们将沿用 Brown 和 Shields [14] 的思路（另见 [44] 中的 $\mathbb{B}_2$ 版本），得到 H_d^2 中循环性的一个必要条件，即循环函数 $f\in H_d^2\cap C(\overline{\mathbb{B}_d})$ 的零点集不能嵌入三维立方体。为证明这一点，我们希望构造如下形式的有界线性泛函

$$f\to\int_{\partial\mathbb{B}_d}f d\mu,\quad f\in H_d^2\cap C(\overline{\mathbb{B}_d}),$$

对于适当的有限博雷尔测度 μ on $\partial\mathbb{B}_d$，使得这些泛函消去非平凡的乘子不变子空间。该论证可直接应用于核具有 $(1-\langle z,w\rangle)^{-\alpha}$ 形式的希尔伯特函数空间，但此处我们将聚焦于 H_d^2。

引理 4.7。 设 μ 是 $\partial\mathbb{B}_d$ 上的有限博雷尔测度，且

$$f_\mu(z)=\int\frac{1}{1-\langle z,w\rangle}d\mu(w),\quad z\in\mathbb{B}_d.$$

(i) 如果

$$E(\mu)=\int\int\frac{1}{|1-\langle z,w\rangle|}d\mu(w)d\mu(z)<\infty,\tag{4.1}$$

那么 $f_\mu \in H_d^2$ 且 $\|f_\mu\|_{H_d^2}^2 \le E(\mu)$。

(ii) 若 $E(\mu) < \infty$ 且 $f \in H_d^2 \cap C(\overline{\mathbb{B}_d})$，则

$$\langle f, f_\mu \rangle_{H_d^2} = \int f d\mu.$$

证明。**(i)** 对固定的 $r \in (0,1)$，H_d^2-值函数 $u_r(z) = k_{rz}$在闭单位球 $\mathbb{B}_d$上连续。对于陈述中所述的测度 μ，考虑 Bochner 积分 $\int u_r d\mu$。在 $z \in \mathbb{B}_d$处取值，并利用 Bochner 积分的基本性质可得

$$\left(\int u_r d\mu\right)(z) = \int \langle u_r, k_z \rangle_{H_d^2} d\mu = f_\mu(rz) = (f_\mu)_r(z).$$

但随后，Bochner 积分的相同性质给出 $f \in H_d^2$

$$\langle f, (f_\mu)_r \rangle_{H_d^2} = \int f_r d\mu. \tag{4.2}$$

特别地，对于 $f = (f_\mu)_r$，我们得到

$$\|(f_\mu)_r\|_{H_d^2}^2 = \int\int \frac{1}{1 - r^2\langle z, w\rangle} d\mu(w) d\mu(z) \le \int\int \frac{1}{|1 - r^2\langle z, w\rangle|} d\mu(w) d\mu(z).$$

现在令 $r \to 1$，使用不等式

$$|1 - r^2\zeta| \ge \frac{1}{2}|1 - \zeta|,$$

结合控制收敛定理，得出

$$\limsup_{r\to 1} \|(f_\mu)_r\|_{H_d^2}^2 \le E(\mu).$$

由于 $(f_\mu)_r(z) \to f_\mu(z)$ $z \in \mathbb{B}_d$，可得 $f_\mu \in H_d^2$ 且 $\|f_\mu\|_{H_d^2}^2 \le E(\mu)$，这就证明了 **(i)**。由 **(i)** 和 **(4.2)** 可得 **(ii)**，因为

$$\int f_r d\mu = \langle f, (f_\mu)_r \rangle = \langle f_r, f_\mu \rangle.$$

若 $f \in H_d^2 \cap C(\overline{\mathbb{B}_d})$，令 $r \to 1$，即可得到所需结果。 ■

给定集合 $S \subseteq \mathbb{C}^d$ 和整数 $m \ge 0$，若存在从 $(-1,1)^m$ 到 S的微分同胚 ϕ，则称 S 包含一个维数为 m 的嵌入立方体。

定理 4.8。设 $f \in H_d^2 \cap C(\overline{\mathbb{B}_d})$，并假设 $Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 包含一个维数为 $m \ge 3$ 的嵌入立方体。那么 f 在H_d^2中不是循环的。

证明。 设 $\phi\colon (-1,1)^m \to U \subseteq Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d$ 是一个微分同胚。那么 ϕ 满足某个 $c>0$，使得

$$|\phi(t)-\phi(s)| \geq c|t-s|, \quad t,s \in (-1,1)^m. \tag{4.3}$$

考虑推前测度

$$\mu(E) = \lambda_m(\phi^{-1}(E\cap U))$$

在 $\partial\mathbb{B}_d$ 上，其中 λ_m 表示 $(-1,1)^m$ 上的 m–维勒贝格测度。根据引理 4.7，只需证明 (4.2) 成立。事实上，在这种情况下，引理的 (ii) 部分给出 $f_\mu \in [f]^\perp$，并且显然 $f_\mu \neq 0$。为此，我们注意到

$$|1-\langle z,w\rangle| \geq \operatorname{Re}\,(1-\langle z,w\rangle) = \frac{|z-w|^2}{2}, \qquad z,w\in\partial\mathbb{B}_d,$$

从而得到

$$E(\mu) \leq \frac{2}{c}\int_{(-1,1)^m}\int_{(-1,1)^m} \frac{1}{|t-s|^2} d\lambda_m(s) d\lambda_m(t) < \infty,$$

因为 $m\geq 3$。 ■

5. 径向加权 Besov 空间

在本节中， ω 表示一个可容许径向测度，见第 2 节。

5.1. 关于乘子比的引理。 我们先介绍一个引理，它基本上出自 [4], ，说明所有径向加权 Besov 空间都满足常数为 1 的“乘子包含条件”。

引理 5.1。 对于每个 $k\in\mathbb{N}$，空间 $\operatorname{Mult}(B^k_\omega)$ 以收缩方式包含于 $\operatorname{Mult}(B^{k-1}_\omega)$ 中，也就是说，

$$\|\varphi\|_{\operatorname{Mult}(B^{k-1}_\omega)} \leq \|\varphi\|_{\operatorname{Mult}(B^k_\omega)} \quad \textit{for all } \varphi \in \operatorname{Mult}(B^k_\omega).$$

证明。 若测度 $d\omega(z) = d\mu(r)d\sigma(w)$ 满足 μ 绝对连续，则这可直接由定理 1.2 或 [4]的推论 3.4 得出。不过， [4] 中给出的证明实际上适用于此处考虑的更一般情形，其中不假设 μ 绝对连续。事实上，由 (2.3) 可知， B^k_ω 的再生核 K^k 为

$$K^k_w(z) = \frac{1}{\omega(\mathbb{B}_d)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}\omega_n}\langle z,w\rangle^n.$$

因此，对于 $n\geq 1$，我们可以将 [4] 的命题 3.3 应用于序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，其中 $a_0 = b_0 = \frac{1}{\omega(\mathbb{B}_d)}$、 $a_n = \frac{1}{n^{2k}\omega_n}$ 和 $b_n = \frac{1}{n^{2(k-1)}\omega_n}$。 ■

对我们而言，乘子包含条件很重要，因为下面的引理现在是显然的。

引理 5.2。 我们有 $\varphi \in$ 乘子空间(B_ω^k) 当且仅当 $\varphi \in$ 乘子空间(B_ω^{k-1})且 $R\varphi \in$ 乘子空间$(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})$。此外，

$$\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k)} \leq 2(\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^{k-1})} + \|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})}) \text{ and} \tag{5.1}$$

$$\|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})} \leq 2\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k)} \tag{5.2}$$

证明。由于 $f \in B_\omega^k$ 当且仅当 $Rf \in B_\omega^{k-1}$，我们看到 $\varphi \in$乘子空间(B_ω^k) 当且仅当 $(R\varphi)f + \varphi Rf \in B_\omega^{k-1}$ 对每个 $f \in B_\omega^k$. 因此，如果 $\varphi \in$ 乘子空间(B_ω^{k-1}) 且 $R\varphi \in$ 乘子空间$(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})$，那么 $\varphi \in$ 乘子空间(B_ω^k)。反之，如果 $\varphi \in$ 乘子空间(B_ω^k)，那么根据乘子包含条件 $\varphi \in$乘子空间(B_ω^{k-1})，因此恒等式 $(R\varphi)f = R(\varphi f) - \varphi Rf$表明 $R\varphi \in$乘子空间$(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})$。该论证还可用于得到这些估计。令 $f \in B_\omega^k$。那么由方程 (2.2) 可得

$$\begin{aligned}
\|\varphi f\|_{B_\omega^k}^2 &= \omega(\mathbb{B}_d)|(\varphi f)(0)|^2 + \|(R\varphi)f + \varphi Rf\|_{B_\omega^{k-1}}^2 \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^{k-1})}^2 \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 \\
&\quad + 2(\|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})}^2 \|f\|_{B_\omega^k}^2 + \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^{k-1})}^2 \|Rf\|_{B_\omega^{k-1}}^2) \\
&\leq 2(\|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k, B_\omega^{k-1})}^2 + \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^{k-1})}^2)\|f\|_{B_\omega^k}^2
\end{aligned}$$

这就证明了 (5.1)。此外，由于 $(R\varphi)f = R(\varphi f) - \varphi Rf$ 中的所有函数在原点处均为 0，因此我们有

$$\begin{aligned}
\|(R\varphi)f\|_{B_\omega^{k-1}} &\leq \|R(\varphi f)\|_{B_\omega^{k-1}} + \|\varphi Rf\|_{B_\omega^{k-1}} \\
&\leq \|\varphi f\|_{B_\omega^k} + \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^{k-1})}\|Rf\|_{B_\omega^{k-1}} \\
&\leq (\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k)} + \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^{k-1})})\|f\|_{B_\omega^k} \\
&\leq 2\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k)}\|f\|_{B_\omega^k},
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由引理 5.1 得出。因此 (5.2) 成立。

■

下面的引理是证明定理 3.1 的关键。注意，它立即推出定理 3.2。

引理 5.3。若 $M > 0$ 且 φ，$\psi \in$ 乘子空间(B_ω^N) 满足

(i) $\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^N)}\ \|\psi\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^N)} \leq M$

且(ii) $\frac{\varphi}{\psi} \in H^\infty(\mathbb{B}_d)$ 满足 $\|\frac{\varphi}{\psi}\|_\infty \leq 1$,

那么，对于所有 $s \in \mathbb{N}$ 以及满足 $0 \leq k \leq N$ 的整数 k，我们有 $\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^s} \in$乘子空间 (B_ω^k)，其中

$$\left\|\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^s}\right\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^k)} \leq 8^k(s+k)^k M^k \tag{5.3}$$

此外，如果函数 φ， ψ 在 $\mathbb{B}_d$ 中非零，那么结论和不等式 *(5.3)* 对所有实数 $s > 0$ 都成立。

证明。 注意，如果 s 是正整数，或者函数 φ、ψ 在 $\mathbb{B}_d$ 和 $s \in (0, \infty)$ 中均非零，那么 $\varphi^s/\psi^s \in H^\infty(\mathbb{B}_d)$。这是唯一用到关于 s 和 φ、ψ 的不同假设之处；下文将同时处理这些情形。

我们首先注意到，引理 5.1 表明 $\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \leq M$ 和 $\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \leq M$ 对所有满足 $0 \leq k \leq N$ 的 k 都成立，因此由引理 5.2 可得 $\|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)} \leq 2M$ 和 $\|R\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)} \leq 2M$，如果$1 \leq k \leq N$。

现在我们将通过对 k 进行归纳法来证明该引理。由于 $\mathrm{Mult}(B^0_\omega) = H^\infty(\mathbb{B}_d)$，显然 $k = 0$ 的情形成立。现在假设 $1 \leq k \leq N$，并且对于所有 $s > 0$ 以及满足 (i) 和 (ii) 的某些 φ, ψ，不等式 (5.3) 对 $k-1$ 成立。那么特别地，对于固定的 s，它对 $s+1$ 也成立，即，

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\varphi^{s+k-1}}{\psi^s}\right\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} &\leq 8^{k-1}(s+k-1)^{k-1}M^{k-1} \leq 8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^{k-1} \\ \left\|\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^{s+1}}\right\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} &\leq 8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^{k-1}.\end{aligned}$$

我们计算

$$R\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^s} = (s+k)\frac{\varphi^{s+k-1}}{\psi^s}R\varphi - s\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^{s+1}}R\psi,$$

因此

$$\begin{aligned}\left\|R\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^s}\right\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)} &\leq (s+k)\left\|\frac{\varphi^{s+k-1}}{\psi^s}\right\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)}\|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)} \\ &\quad + s\left\|\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^{s+1}}\right\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)}\|R\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)} \\ &\leq (2s+k)8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^{k-1}(2M) \\ &= 2(2s+k)8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^k\end{aligned}$$

根据上述归纳假设。于是，由不等式（5.1）和归纳假设可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\varphi^{s+k}}{\psi^s}\right\|_{B_\omega^k} &\le 2\left(\left\|\varphi\frac{\varphi^{s+k-1}}{\psi^s}\right\|_{B_\omega^{k-1}} + 2(2s+k)8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^k\right)\\ &\le 2(M8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^{k-1} + 2(2s+k)8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^k)\\ &\le 2(1+2(2s+k))8^{k-1}(s+k)^{k-1}M^k\\ &\le 8^k(s+k)^kM^k.\end{aligned}$$

■

5.2. **定理 3.5 的证明**。若 f ∈全纯函数空间($\mathbb{B}_d$) 且 $0<r<1$，我们记 $f_r(z) = f(rz)$。

定理 5.4. 设 $N\in\mathbb{N}_0$。若 $M>0$ 且 φ ∈ 乘子空间(B_ω^N) 满足$\varphi(z)\neq 0$ 对每个 $z\in\mathbb{B}_d$ 都成立，并且 $\|\frac{\varphi}{\varphi_r}\|_\infty \le M$ 对所有 $0<r<1$都成立，则 $[\varphi^N]=[\varphi^{N+1}]$，也就是说，$\varphi\in\mathcal{C}_N(B_\omega^N)$。

证明。根据假设，$\frac{1}{\varphi_r}$ ∈乘子空间(B_ω^N)，因此对每个r都有 $\frac{\varphi^{N+1}}{\varphi_r}\in[\varphi^{N+1}]$。由引理 5.3，取 $\psi = C\varphi_r$、$k=N$和 $s=1$，可得一个常数$K>0$，使得 $\|\frac{\varphi^{N+1}}{\varphi_r}\|_{\mathrm{Mult}(B_\omega^N)} \le K$ 对所有 $0<r<1$均成立。这意味着 $\frac{\varphi^{N+1}}{\varphi_r}\to\varphi^N$ 在 B_ω^N中弱收敛，因此 $\varphi^N\in[\varphi^{N+1}]$. ■

定理 5.4 适用于 $\mathbb{C}_{\mathrm{stable}}[z]$ 中的多项式，因此推出定理 3.5 的第一部分。为了证明定理 3.5 的其余部分，我们需要关于 p^n/p_r 及其导数在 $n\ge 1$ 上的估计。我们将通过考察切片函数来证明所需结果。因此，我们先给出一个单变量引理（ [31] 中的引理 1 讨论了 $n=1$ 的情形）。

定理 5.5。设 n，$m\in\mathbb{N}$。存在常数 $c=c(n,\ m)$，使得每当 p 是一个次数为 $\le m$ 且在 $\mathbb{D}$ 中没有零点的多项式时，对所有 $0\le r<1$，都有

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\frac{p(z)^n}{p(rz)}\right| \le c\ |p(0)|^{n-1} \quad for\ all\ 0\le k<n, z\in\mathbb{D}, \quad and$$

$$\int_{|z|<1}\left|\frac{d^n}{dz^n}\frac{p(z)^n}{p(rz)}\right|^2\frac{dA(z)}{\pi} \le c\ |p(0)|^{2n-2}.$$

证明。对于常数多项式，该命题显然成立，因此我们可以假设 p 的次数等于 $m\ge 1$。将两边除以 $p(0)$ 后，我们还可以假设 $p(0)=1$。于是存在 A_1、$\dots A_m\in$

$\overline{\mathbb{D}}$使得

$$\frac{p(z)^n}{p(rz)} = \prod_{j=1}^{m} \frac{(1-A_j z)^n}{(1-A_j rz)} \quad z \in \mathbb{D}, 0 \le r \le 1.$$

记 $g_{A,\ r}(z) = \frac{(1-Az)^n}{(1-Arz)}$，则由多重乘积莱布尼茨公式，对于每个 $0 \le k \le n$，有

$$\frac{d^k}{dz^k}\frac{p(z)^n}{p(rz)} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \prod_{j=1}^{m} g_{A_j,r}^{(\alpha_j)}(z).$$

如果我们证明存在一个 $c > 0$，它与 $A \in \overline{\mathbb{D}}$ 和 $0 \le r \le 1$ 无关，使得当 $0 \le j < n$ 和 $z \in \mathbb{D}$ 时，$|g_{A\,r}^{(j)}(z)| \le c$，且 $\int_{|z|<1} |g_{A\,r}^{(n)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi} \le c$，则定理得证。

注意到 $|g_{A\,r}^{(j)}(z)| = |g_{1\,r}^{(j)}(Az)A^j| \le |g_{1\,r}^{(j)}(Az)|$。因此，只需对 $A = 1$ 证明该结论即可。如果 $0 \le r \le 1/2$，那么函数 $\frac{1}{(1-z^n)}$ 及其所有导数都是在 $\{|z| \ge 2\}$ 中具有极点的有理函数，并且作为参数 r 的函数连续。因此，由紧致性可知，存在 $c > 0$，使得对于所有 $0 \le j \le n$、$|z| \le 1$ 以及所有 $0 \le r \le 1/2$.，都有 $|g_{1\,r}^{(j)}(z)| \le c$

现在令 $1/2 \le r < 1$。对于 $z \in \mathbb{D}$，令 $w = 1 - rz$。于是

$$\begin{aligned} g_{1,r}(z) &= \frac{((r-1)+w)^n}{r^n w} \\ &= \frac{1}{r^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{\alpha} (r-1)^{n-k} w^{k-1} \\ &= \frac{1}{r^n} \left(\frac{(r-1)^n}{1-rz} + q(r,z) \right) \end{aligned}$$

其中 $q(r,z)$ 是变量 r 和 z 的多项式表达式。

令 $0 \le j \le n$，并取 j 阶导数

$$\begin{aligned} |g_{1,r}^{(j)}(z)| &= r^{-n} \left| \frac{j! r^j (r-1)^n}{(1-rz)^{j+1}}) + \frac{\partial^j}{\partial z^j} q(r,z) \right| \\ &\le 2^{-n} \left(\frac{j!(1-r)^n}{|1-rz|^{j+1}} + |\frac{\partial^j}{\partial z^j} q(r,z)| \right) \end{aligned}$$

由紧致性可知，表达式 $|\frac{\partial^j}{\partial z^j} q(r,z)| \le C$，其中 C 与 $0 \le j \le n$、$|z| \le 1$ 和 $1/2 \le r \le 1$无关。此外，若 $j < n$，则 $\frac{j!(1-r)^n}{|1-rz|^{j+1}} \le j!(n-1)!$，因此有界性结论在

这些情形下成立。最后，我们有

$$\int_{\mathbb{D}} |g_{1,r}^{(n)}(z)|^2 \frac{dA(z)}{\pi} \leq 2 \cdot 2^{-2n} \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(n!)^2(1-r)^{2n}}{|1-rz|^{2n+2}} \frac{dA(z)}{\pi} + C^2 \right) \leq C(n)$$

例如，参见 [28,定理 1.7]。 ■

现在我们可以证明定理 3.5 的第二部分。为方便起见，我们在此重述。

定理 5.6. 设 $N \in \mathbb{N}$，且设 ω 为形如 $d\omega(w) = u(r)2rdrd\sigma(z)$、$u \in L^\infty(0,1)$的可容许径向测度。那么，每个在 $\mathbb{B}_d$ 中无零点的多项式p 都满足 $[p^{N-1}] = [p^N]$ 在 B_ω^N中成立，即 $\mathbb{C}_{\text{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_{N-1}(B_\omega^N)$。

证明。 设 $f \in$ 属于全纯函数空间 Hol($\mathbb{B}_d$)，且 $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ 表示为次数为 n的齐次多项式之和。对于 $\lambda \in \mathbb{C}$，令 $f_z(\lambda) = f(\lambda z)$ 为在 $z \in \partial\mathbb{B}_d$处的切片函数。记 $D_\lambda = \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}$，则对于$f = \sum_{n=0}^\infty f_n$，有 $Rf(\lambda z) = \sum_{n=1}^\infty n f_n(z)$ $\lambda^n = D_\lambda f_z(\lambda)$。于是

$$R^N f(\lambda z) = \sum_{k=1}^N a_k \lambda^k \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} f_z(\lambda)$$

对于某些系数 a_1、.....、 a_N，并且

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_d} |R^N f|^2 d\omega &= \int_{\partial\mathbb{B}_d} \int_{[0,1]} \int_0^{2\pi} |R^N f(re^{it}z)|^2 \frac{dt}{2\pi} w(r) 2rdrdtd\sigma(z) \\
&\leq \|w\|_\infty \int_{\partial\mathbb{B}_d} \int_{\mathbb{D}} \left| \sum_{k=1}^N a_k \lambda^k \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} f_z(\lambda) \right|^2 \frac{dA(\lambda)}{\pi} d\sigma(z) \\
&\leq N\|w\|_\infty \sum_{k=1}^N |a_k| \int_{\partial\mathbb{B}_d} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} f_z(\lambda) \right|^2 \frac{dA(\lambda)}{\pi} d\sigma(z).
\end{aligned}$$

因此，由引理可得，

$$\int_{\mathbb{B}_d} \left| R^N \frac{p^N}{p_r} \right|^2 d\omega \leq N\|w\|_\infty \sum_{k=1}^N |a_k| \; c|p(0)|^{2N-2}$$

这意味着当 $r \to 1$ 时，$\frac{p^N}{p_r} \to p^{N-1}$ 在 B_ω^N 中弱收敛，因此 $p^{N-1} \in [p^N]$。 ■

5.3. **定理 3.1 的证明**。 在引理 5.3 中，我们证明了对于满足 $\varphi/\psi \in H^\infty$ 的 $\varphi, \psi \in$ 乘子空间 (B_ω^N)，有 $\varphi^{N+k}/\psi^k \in$ 乘子空间 (B_ω^N)。这立即意味着 $\varphi^{N+k} \in [\psi^k]$。现在我们将利用 ω 是径向测度这一事实，证明实际上

$\varphi^{N+k-1} \in [\psi^k]$。也就是说，我们将证明定理 3.1。我们先介绍一些预备知识。

引理 5.7. 设 $N \geq 1$。对于任意 $f \in B^N_\omega$，有

$$\|f - f_r\|_{B^{N-1}_\omega} \leq (1-r)\|f\|_{B^N_\omega}, 0 < r < 1.$$

证明。设 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 是 f 按次数为 n 的齐次多项式展开所得的和。那么对于 $0 < r < 1$，有

$$\begin{aligned}\|f - f_r\|^2_{B^{N-1}_\omega} &= \sum_{n=0}^{\infty} \|(1-r^n)f_n\|^2_{B^{N-1}_\omega} \\ &\leq (1-r)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|f_n\|^2_{B^{N-1}_\omega} \\ &\leq (1-r)^2 \|f\|^2_{B^N_\omega}.\end{aligned}$$

■

引理 5.8. 设 $k \geq 0$ 且 $\varphi \in$乘子空间(B^k_ω)。那么

$$\|R\varphi_r\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \leq \frac{\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)}}{1-r^2}.$$

证明。对于 $\lambda \in \mathbb{D}$，定义 $z \in \mathbb{B}_d$ 为 $F(\lambda)(z) = \varphi(\lambda z)$。那么 $F\colon \mathbb{D} \to$Mult(B^k_ω) 是一个解析函数，且 $\|F(\lambda)\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \leq \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)}$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$ 都成立。由柯西公式可得 $\|F'(\lambda)\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \leq \frac{\|\varphi\|}{1-|\lambda|^2}$。引理得证，因为 $(R\varphi_r)(z) = rF'(r)(z)$。■

引理 5.9. 若 $N \geq 1$ 且若 f，$g \in B^N_\omega$满足 $\varphi = f/g \in$乘子空间(B^{N-1}_ω)，则对所有 $0 \leq r < 1$，我们有

$$\|\varphi_r g\|_{B^N_\omega} \leq 3\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^{N-1}_\omega)}\|g\|_{B^N_\omega} + \|f\|_{B^N_\omega}$$

因此 $f \in [g]$，因为 $\varphi_r g \to f$ 在 B^N_ω中弱收敛。

证明。我们有

$$\|\varphi_r g\|_{B^N_\omega} \leq \|\varphi_r(g-g_r)\|_{B^N_\omega} + \|\varphi_r g_r\|_{B^N_\omega} \leq \|\varphi_r(g-g_r)\|_{B^N_\omega} + \|f\|_{B^N_\omega}.$$

由于 $g - g_r$在原点处为零，我们有 $\|\varphi_r(g-g_r)\|_{B^N_\omega} = \|R(\varphi_r(g-g_r))\|_{B^{N-1}_\omega}$。根据前两个引理，我们有

$$\begin{aligned}\|R(\varphi_r(g-g_r))\|_{B^{N-1}_\omega} &\leq \|(g-g_r)R\varphi_r\|_{B^{N-1}_\omega} + \|\varphi_r R(g-g_r)\|_{B^{N-1}_\omega} \\ &\leq \frac{\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^{N-1}_\omega)}}{1-r^2}(1-r)\|g\|_{B^N_\omega} + \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^{N-1}_\omega)}\|R(g-g_r)\|_{B^{N-1}_\omega} \\ &\leq 3\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^{N-1}_\omega)}\|g\|_{B^N_\omega},\end{aligned}$$

从而完成证明。■

定理 *3.1* 的证明。设 $N \in \mathbb{N}$，且 $\varphi, \psi \in$ 属于B_ω^N的乘子空间，其中 $\varphi/\psi \in H^\infty$。令 $k \in \mathbb{N}$，并设 $f = \varphi^{N+k-1}$ 和 $g = \psi^k$。于是由引理 5.3 可得 $\frac{f}{g} = \frac{\varphi^{N+k-1}}{\psi^k} \in$ 属于B_ω^{N-1}的乘子空间。因此，由引理 5.9 可知$\varphi^{N+k-1} \in [\psi^k]$。
■

5.4. **循环性与零点集**。若 $f : U \to \mathbb{R}$ 是一个函数，则令$Z(f) = \{x \in U\colon f(x) = 0\}$为 f的零点轨迹。与 [31]中一样，我们将使用实代数几何中的Łojasiewicz不等式，见 [35]。

引理 5.10。设 $U \subseteq \mathbb{R}^{2d}$ 为开集，且 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 为实解析函数，使得 $Z(f) \neq \emptyset$。那么对于每个紧集$K \subseteq U$，都存在正数常数 p 和 C，使得

$$\operatorname{dist}(x, Z(f))^p \leq C|f(x)| \quad \textit{for all } x \in K.$$

我们得到如下结论。

引理 5.11。设 $f, g \in$ 全纯函数空间$(\mathbb{B}_d)$ 满足

(i) $f(z) \neq 0, g(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{B}_d$均成立，(ii) f 可延拓为在$\overline{\mathbb{B}_d}$的某个邻域内解析的函数，(iii) g 满足阶数为 $\alpha > 0$ 的*Lipschitz* 条件。

令 $Z(g) \subseteq \partial\mathbb{B}_d$ 表示 g 的 *Lipschitz*延拓的零点集。

若 $Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d \subseteq Z(g) \cap \partial\mathbb{B}_d$，则存在常数 $C > 0$ 和一个整数 $j > 0$，使得

$$|g(z)|^j \leq C|f(z)|$$

对所有 $z \in \mathbb{B}_d$.

证明。若 $Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d = \emptyset$，则 $|f|$ 在 $\overline{\mathbb{B}_d}$ 上有下界，由此引理的结论对 $j = 1$ 成立。因此，我们假设 $Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d \neq \emptyset$。由于 f 在 $\mathbb{B}_d$ 中没有零点，我们有

$$1 - \sum_{i=1}^d |z_i|^2 \leq 2 \operatorname{dist}(z, Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d) \text{ for all } z \in \mathbb{B}_d.$$

于是，将 Łojasiewicz不等式应用于 $K = \overline{\mathbb{B}_d}$，可得存在一个偶整数 n 和一个 $C_1 > 0$，使得

$$\left(1 - \sum_{i=1}^d |z_i|^2\right)^n \leq 2^n \operatorname{dist}(z, Z(f))^n \leq C_1 |f(z)|^2, \quad z \in \mathbb{B}_d.$$

接下来，我们将Łojasiewicz不等式应用于函数

$$r(z) = |f(z)|^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^d |z_i|^2\right)^n,$$

并且我们发现，存在整数 m 和 $C_2 > 0$，使得对所有$z \in \mathbb{B}_d$

$$\operatorname{dist}(z, Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d)^m \leq C_2 r(z) \leq C_2(1 + C_1)|f(z)|^2.$$

另一方面，由于 g 的 Lipschitz 性质，我们有存在 $C_3 > 0$ 使得

$$|g(z)| \leq C_3 \operatorname{dist}(z, Z(g))^\alpha \leq C_3 \operatorname{dist}(z, Z(f) \cap \partial\mathbb{B}_d)^\alpha \text{ for all } z \in \mathbb{B}_d.$$

这就用 $j \geq \frac{m}{2\alpha}$ 证明了引理。 ■

定理 *3.6* 的证明。 设 $f, g \in$ 是定理假设中的 Mult(B^N_ω)。由引理 5.11，存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{g^j}{f} \in H^\infty$。于是定理 3.1 推出，对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $g^{j(N+k-1)} \in [f^k] \subseteq [f]$。这就用 $n = jN$ 证明了定理的第一部分。如果 g 是一个多项式，那么对所有 $m \geq N$，都有 $[g^N] = [g^m]$。因此，取 $k = N$，可得 $g^N \in [g^N] = [g^{j(2N-1)}] \subseteq [f^N]$。 ■

6. 完全 Pick 空间

6.1. 背景。 回顾一下，每个希尔伯特函数空间 $\mathcal{H}$ 都有一个再生核 $k\colon X \times X \to \mathbb{C}$。写作 $k_w(z) = k(z, w)$，它满足$f(w) = \langle f, k_w \rangle$，对所有 $f \in \mathcal{H}$、 $w \in X$均成立。若再生核 k在 X上称为归一化完全 Pick 核，则存在 $w_0 \in X$ 以及一个从 X 映射到某个辅助 Hilbert 空间 $\mathcal{K}$ 的函数 b，使得$b(w_0) = 0$，并且

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \langle b(z), b(w) \rangle_{\mathcal{K}}}.$$

在 $\mathcal{H}$ 是解析函数的希尔伯特空间这一有趣情形下，很容易证明 $\mathcal{H}$ 是可分的，于是也可以假设$\mathcal{K}$ 是可分的。

如果某个希尔伯特函数空间 $\mathcal{H}$ 在 X 上存在一个与原范数等价的希尔伯特空间范数，并且 $\mathcal{H}$ 相对于新范数的再生核是归一化完全 Pick 核，我们就称该空间为完全 Pick 空间。单位圆盘上的 Hardy 空间 H^2 是完全 Pick 空间中最简单的例子。Drury-Arveson 空间 H^2_d 是 $\mathbb{B}_d$上的一个完全 Pick 空间例子，其再生核为 $k_w(z) = \frac{1}{1-\langle z, w \rangle}$。单位圆盘上的超调和加权 Dirichlet 空间是完全 Pick 空间的其他例子 [43]。 [4] 的结果还给出了大类的径向加权 Besov 空间，它们同样是完全 Pick 空间。

现在我们回顾完全 Pick 空间的一些重要基本性质。

引理 6.1。 如果 k 是一个归一化完全 *Pick* 核，且如果 $w \in X$，那么 $k_w \in$ 乘子空间$(\mathcal{H})$ 满足 $\|k_w\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \leq 2\|k_w\|_{\mathcal{H}}^2$.

对于解析函数空间，这一点已在 [24] 中得到证明。一般情形请参见 [41, 命题 4.4] 或 [1, 引理 7.2]。

推论 6.2. 若 $\mathcal{H}$ 是一个完全 *Pick* 空间，则 乘子空间$(\mathcal{H})$ 在 $\mathcal{H}$中稠密。特别地， $f \in \mathcal{H}$ 是循环的，当且仅当 $1 \in [f]$。

我们还需要一个关于具有归一化完全 Pick 核的空间的有用估计。对于解析函数空间，这一点也已在 [24], 中得到证明；这里给出的一般情形则可由 [3]中的推论 3.3 推出。

引理 6.3. 若 k 是一个归一化完全 *Pick* 核， $f \in \mathcal{H}$，且$w \in X$，则

$$|f(w)|^2 \leq 2\mathrm{Re}\langle f, k_w f\rangle_{\mathcal{H}} - \|f\|_{\mathcal{H}}^2.$$

最后，我们回顾 [3,定理 1.1 (i)]的一个特例。

定理6.4。 设 $\mathcal{H}$ 为完全 *Pick* 空间，且满足 $k_{w_0} = 1$。对于$f:\ X \to \mathbb{C}$, 以下各项等价:

（i） $f \in \mathcal{H}$ 和 $\|f\| \leq 1$; （ii）存在乘子 φ, $\psi \in$ 乘子空间（$\mathcal{H}$），使得（a） $f = \frac{\varphi}{1-\psi}$（b） ψ （w_0） $= 0$，并且（c）对每个 $h \in \mathcal{H}$都有 $\|\psi h\|^2 + \|\varphi h\|^2 \leq \|h\|^2$ 。

我们将频繁使用的一个直接应用是：每个完全 Pick 空间 $\mathcal{H}$ 都包含于相应的 Pick–Smirnov 类中

$$N^+(\mathcal{H}) = \{\varphi/\psi : \varphi, \psi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H}), \psi \text{ cyclic}\},$$

见下文引理 6.5。

6.2. **循环子空间**。 本小节旨在说明，对于同时也是完全 Pick 空间的径向 Besov 空间，存在一个定理3.1的变体，该变体涉及 $\mathcal{H}$ 中的函数，而非乘子。我们首先列出关于形如$[f]$的子空间的三个观察结果。

引理 6.5. 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 X上的可分希尔伯特函数空间。若$f = \varphi/(1-\psi) \in \mathcal{H}$, 其中 $\varphi, \psi \in$乘子空间$(\mathcal{H})$ 且 $\psi \neq 1$, $\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \leq 1$，则 $1 - \psi$ 在 $\mathcal{H}$ 和 $[f] = [\varphi]$ 中是循环的。

证明。 这是引理 2.3（ [2]）与引理 3.6 (a)（ [5]）的直接结合。■

引理6.6。 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 X 上的可分希尔伯特函数空间。若 $f = \frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1} \in N^+(\mathcal{H})$，其中 u， v， u_1， $v_1 \in$乘子空间$(\mathcal{H})$， v， v_1 是循环的，则$[u^n] = [u_1^n]$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。我们有 $u^n v_1^n = v^n u_1^n$，因此 $u^n v_1^n \in [v^n u_1^n] \subseteq [u_1^n]$。由于 v_1是循环的，v_1^n也如此；又由于 u^n 是乘子，很容易推出$u^n \in [u_1^n]$。由对称性可得 $u_1^n \in [u^n]$，因此 $[u^n] = [u_1^n]$。■

引理6.7。 设 $\mathcal{H}$ 是一个完全 *Pick* 空间。若 $f = \frac{u}{v} \in \mathcal{H}$，其中$u$， $v \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 且 v 是循环的，则 $[u] = [f]$。

证明。设 $f = \frac{u}{v}$。由定理6.4，存在 φ、$\psi \in$Mult$(\mathcal{H})$，使得$\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \le 1$、$\psi \neq 1$，且 $f = \frac{\varphi}{1-\psi}$。由引理 6.5 可得 $[f] = [\varphi]$，因此我们只需证明 $[u] = [\varphi]$，这可由引理 6.6 得出。■

有了这些引理，我们可以转向本小节的主要结果，其中定理 3.7 是其一个特例。

定理 6.8. 设 $N \in \mathbb{N}$，并设 B_ω^N 是一个同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间。设 $f, g \in B_\omega^N$ 满足$f/g \in H^\infty$。

若 $f = \frac{u}{v}$，其中 $u, v \in$乘子空间(B_ω^N)，且 v 是循环的，则 $u^{N-1} f \in [g]$。若$u \in \mathcal{C}_n(B_\omega^N)$ 对某个 $1 \le n \le N$成立，则 $u^{n-1} f \in [g]$。

证明. 写作 $f = \frac{u}{v}$，$g = \frac{a}{b}$，其中 $a, b, u, v \in$属于乘子空间(B_ω^N)，且 v，而 b是循环的。由引理6.7可知，$[f] = [u]$ 且 $[g] = [a]$。由定理 3.1及$k = 1$ 可得 $b^N u^N \in [va] = [a]$，从而 $u^N \in [a] = [g]$。现在，引理6.7推出 $u^{N-1} f = \frac{u^N}{v} \in [u^N] \subseteq [g]$。

如果 $u \in \mathcal{C}_n(B_\omega^N)$，那么对于所有非负整数 k，都有 $u^n \in [u^{n+k}]$，因此 $u^n \in [u^N] \subseteq [g]$。如上所述，这一点与引理6.7意味着$u^{n-1} f \in [g]$。■

6.3. **切片的内因子**。 通常，对于函数 $u\colon \mathbb{B}_d \to \mathbb{C}$ 和$z \in \partial\mathbb{B}_d$，相应的切片函数 $u_z\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 定义为

$$u_z(\lambda) = u(\lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

下面的简单观察可直接由引理 6.3 得出。

引理 6.9。 设 $N \in \mathbb{N}$，且令 B_ω^N 为一个同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间。那么存在 $c > 0$，使得只要 $f \in B_\omega^N$，则每个切片 $f_z \in H^2(\mathbb{D})$ 都满足

$$\|f_z\|_{H^2(\mathbb{D})} \le c\|f\|_{B_\omega^N}, \quad z \in \partial\mathbb{B}_d.$$

证明。 设 $f \in B_\omega^N$，$z \in \partial\mathbb{B}_d$。由引理 6.3 可知，对所有 $\lambda \in \mathbb{D}$

$$|f_z(\lambda)|^2 \le 2\mathrm{Re}\langle f, k_{\lambda w} f\rangle - \|f\|^2,$$

对于 B_ω^N 上一个适当的等价范数及其诱导的标量积。右侧关于 λ 是调和函数，且其在 0 处的值等于 $\|f\|^2$。因此， $|f_z|^2$ 在单位圆盘内有一个调和主函数，即 $f_z \in H^2(\mathbb{D})$，其中 $\|f_z\|^2_{H^2(\mathbb{D})} \leq \|f\|^2 \leq c\|f\|^2_{B_\omega^N}$，常数 c 的出现是由于范数的等价性。■

由该引理可得以下结果。

命题 6.10. 设 $N \in \mathbb{N}$，并设B_ω^N 是一个同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间。若 $\varphi \in \mathcal{C}_n(B_\omega^N)$ 对某个 $n \geq 0$成立，则每个切片 $\varphi_z,\ z \in \partial\mathbb{B}_d$ 都是 H^∞ 中的外函数。

证明. 根据假设，存在 Mult(B_ω^N) 中的一个序列 (u_k)，使得 $(u_k\varphi^{n+1})$ 在 B_ω^N中收敛到 φ^n 。于是，由引理 6.3 可知，对每个 $z \in \partial\mathbb{B}_d$，$(u_k)_z\varphi_z^{n+1} \to \varphi_z^n$ 属于 $H^2(\mathbb{D})$。由于 $(u_k)_z \in H^\infty$，这表明 $\varphi_z \in C_n(H^2(\mathbb{D}))$，也就是说它是外函数。■

自然会想到，这个结果在较弱的假设下是否仍然成立，即乘子 φ 属于 $\mathcal{C}_\infty(B_\omega^N)$? 当然，在单变量情形下答案是肯定的。然而，当 $d > 1$时，情况就不再如此。我们的反例基于以下关于 Drury-Arveson 空间H_d^2结构的结果。它是 [24]中定理 4.3 后的评注里所用分解的一个精确版本。对于 $n \geq 0$ ，令 $\mathcal{K}_n$ 为单位圆盘上的解析函数空间，其再生核为 $k_\lambda(z) = (1-\overline{\lambda}z)^{-n-1}$。

引理 6.11. 设 $d \in \mathbb{N},\ d > 1$。对于 $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d-1}$, $z = (z_1, \ldots, z_{d-1}) \in \mathbb{C}^{d-1}$，令 $e_\alpha(z_1, \ldots, z_{d-1}) = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha!}} z^\alpha$。那么从 $\mathcal{K}_{|\alpha|}$到 H_d^2的映射，

$$f \to g, \quad g(z) = e_\alpha(z_1, \ldots, z_{d-1}) f(z_d),$$

是一个等距映射，并且

$$H_d^2 = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{d-1}} e_\alpha \mathcal{K}_{|\alpha|}.$$

证明。 直接计算可知，对所有 $k \in \mathbb{N}$，都有

$$\|w^k\|_{\mathcal{K}_{|\alpha|}} = \|e_\alpha(z_1, \ldots, z_{d-1}) z_d^k\|_{H_d^2}$$

由于归一化单项式构成了 $\mathcal{K}_{|\alpha|}$ 中的标准正交基，第一个断言即得。显然，子空间 $e_\alpha\mathcal{K}_{|\alpha|} \subseteq H_d^2$ 两两正交；又由于它们的和包含所有单项式，因此必等于整个空间 H_d^2。■

需要注意的是， $\mathcal{K}_0 = H^2$，而对于 $|\alpha| > 0$ $\mathcal{K}_{|\alpha|}$ ，它是一个满足 $\mathcal{K}_1 = L_a^2$ 的加权 Bergman 空间，非加权 Bergman

空间是单位圆盘上的空间。特别是，如果 $u \in H^\infty$，那么函数

$$v(z_1, \dots, z_d) = u(z_d), \quad (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{B}_d,$$

是 H^2_d 的一个乘子，其中

$$\|v\|_{\mathrm{Mult}(H^2_d)} = \|u\|_\infty.$$

最后，对于下面的结果，我们将用到一个众所周知的事实：存在奇异内函数 $\theta \in H^\infty$，使得 θ 在每个空间 $\mathcal{K}_{|\alpha|}$、$|\alpha| > 0$ 中都是循环的（见 [28]）。

命题 6.12. 设 $\theta \in H^\infty$ 是奇异内函数，且 θ 在每个空间 $\mathcal{K}_{|\alpha|}$（$|\alpha| > 0$）中都是循环的，并对 $d > 1$ 定义

$$\varphi(z_1, \dots, z_d) = \theta(z_d), \quad (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{B}_d,$$

Then

$$[\varphi^n] = \varphi^n e_{(0,\dots,0)} \mathcal{K}_0 \oplus (H^2_d \ominus e_{(0,\dots,0)} \mathcal{K}_0). \tag{6.1}$$

特别地，$\varphi \in \mathcal{C}_\infty(H^2_d)$，但对于 $z = (0, \dots, 0, 1) \in \partial\mathbb{B}_d$，我们有$\varphi_z(\lambda) = \theta(\lambda)$ 是一个内函数。

证明。结论显而易见，因为当 $|\alpha| > 0$ 时，$\varphi^n e_\alpha \mathcal{K}_{|\alpha|}$ 包含于 $e_\alpha \mathcal{K}_{|\alpha|}$ 且在其中稠密，这立即导出 (6.1)。显然，

$$\bigcap_{n \geq 1} [\varphi^n] = H^2_d \ominus e_{(0,\dots,0)} \mathcal{K}_0,$$

即 $\varphi \in \mathcal{C}_\infty(H^2_d)$。 ■

7. 进一步的问题

我们从一个尚未解决的显而易见的问题开始。

问题 7.1. 如果 $d \in \mathbb{N}$，那么满足 $\mathbb{C}_{\mathrm{stable}}[z] \subseteq \mathcal{C}_n(H^2_d)$ 的最小 n 是什么？

我们将类 $\mathcal{C}_n(\mathcal{H})$ 中的函数视为没有内函数因子的函数的 H^2_d-类比。基于这一点，我们为 H^2_d 提出布朗-希尔兹猜想的一个弱化形式，见 [14]。

问题 7.2. 给定 $d \in \mathbb{N}$，是否存在 $N \in \mathbb{N}$，使得只要对于某个 n 有 $f \in \mathcal{C}_n(H^2_d)$，便有 $f \in \mathcal{C}_N(H^2_d)$？

还有一些自然相关的问题。

问题 7.3。如果 $f \in$ 乘子空间(H^2_d) 使得每个切片 f_z 都是外函数，那么是否存在某个 N，使得 $f \in \mathcal{C}_N(H^2_d)$？

我们在引言中提到，Dirichlet 空间 D 中的类似问题有肯定的答案。最后，我们再提供一些证据，表明这一结论可能也适用于 H^2_d。设 $A^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}) : f|\mathbb{D}$ 解析$\}$。那么对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$，都有 $A^\infty(\mathbb{D}) \subseteq$ 乘子空间(D_α)。

命题 7.4。如果 $f \in A^\infty(\mathbb{D})$ 是外函数，且 $1 \leq k \leq d$，那么$T_{k,d} f \in \mathcal{C}_n(H^2_d)$ 对每个 $n \geq \frac{k-1}{4}$ 都成立。

证明。设 $1 \leq k \leq d$、$n \geq \frac{k-1}{4}$，且 $f \in A^\infty(\mathbb{D})$ 是外函数。由引理 4.2，只需证明 $f \in \mathcal{C}_n(D_{(k-1)/2}(\mathbb{D}))$。$n$ 的选取意味着 $D_{2n}(\mathbb{D}) \subseteq D_{(k-1)/2}$，其中 $\|g\|_{D_{(k-1)/2}} \leq \|g\|_{D_{2n}(\mathbb{D})}$ 对所有 $g \in D_{2n}(\mathbb{D})$ 都成立。因此，只需证明 $f \in \mathcal{C}_n(D_{2n}(\mathbb{D}))$。对于空间 $D_{2n}(\mathbb{D})$，Korenblum 确定了不变子空间[32]。事实上，每个包含外函数的不变子空间都具有如下形式

$$I(E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}) = \{f \in D_{2n}(\mathbb{D}) : f^{(j)}(z) = 0 \text{ on } E_j \text{ for } j = 0, \ldots n-1\},$$

其中 $\partial\mathbb{D} \supseteq E_0 \supseteq E_1 \supseteq \cdots \supseteq E_{n-1}$ 是紧集，使得 E_0 是 Carleson 集，而 $E_0 \backslash E_{n-1}$ 是离散的。若 $E = \{z \in \partial\mathbb{D} : f(z) = 0\}$，则可得 $[f^n] = [f^{n+1}] = I(E, \ldots, E)$。因此 $f \in \mathcal{C}_n(D_{2n}(\mathbb{D}))$。■

参考文献

[1] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter。完全 Pick 空间中的自由外函数。美国数学会会刊，即将发表。[2] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter。具有完全 Pick 性质的空间的 Smirnov 类。伦敦数学会杂志 *(2)*，96(1):228–242，2017。[3] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter。由完全 Nevanlinna-Pick 因子诱导的分解。*Adv. Math.*，335:372–404，2018。[4] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter。径向加权 Besov 空间与 Pick 性质。载于函数空间上的算子分析，数学前沿丛书，第29–61页。Birkhäuser/Springer，Cham，2019。[5] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter。完全 Pick 空间的弱乘积。印第安纳大学数学杂志，70(1):325–352，2021。[6] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter。乘子检验与乘子代数的次齐性。数学文献，27:719–764，2022。[7] N. Arcozzi、R. Rochberg 和 E. Sawyer。Drury-Arveson Hardy 空间及复球上其他 Besov-Sobolev 空间的 Carleson 测度。*Adv.Math.*，218(4):1107–1180，2008。[8] William Arveson。C^*-代数的子代数。III. 多变量算子理论。*Acta Math.*，181(2):159–228，1998。

[9] Debendra P. Banjade 和 Tavan T. Trent。Dirichlet 空间乘子代数中的 Wolff 理想问题。Complex Anal. Oper. Theory，8(8):1707–1721，2014。[10] Catherine Bénéteau、Alberto A. Condori、Constanze Liaw、Daniel Seco 和 Alan A. Sola。Dirichlet 型空间中的循环性与极值多项式 II：双圆盘上的函数。Pacific J. Math.，276(1):35–58，2015。[11] Catherine Bénéteau、Greg Knese、Łukasz Kosiński、Constanze Liaw、Daniel Seco 和 Alan Sola。二元循环多项式。Trans. Amer. Math. Soc.，368(12):8737–8754，2016。[12] Linus Bergqvist。关于多圆盘中循环多项式的一则注记。Anal. Math. Phys.，8(2):197–211，2018。[13] Arne Beurling。关于希尔伯特空间中线性变换的两个问题。Acta Math.，81:239–255，1948。[14] Leon Brown 和 Allen L. Shields。Dirichlet 空间中的循环向量。Trans. Amer. Math. Soc.，285(1):269–303，1984。[15] Lennart Carleson。单位圆上正则函数的唯一性集。Acta Math.，87:325–345，1952。[16] Lennart Carleson。关于例外集的精选问题。Van Nostrand 数学研究丛书，第13号。D. Van Nostrand Co., Inc.，普林斯顿，新泽西州—多伦多，安大略省—伦敦，1967。[17] Carme Cascante 和 Joaquin M. Ortega。加权全纯 Besov 空间的 Carleson 测度。Ark. Mat.，49(1):31–59，2011。[18] Raphaël Clouâtre 和 Kenneth R. Davidson。球上的乘子代数中的理想。Trans. Amer. Math. Soc.，370(3):1509–1527，2018。[19] Şerban Costea、Eric T. Sawyer 和 Brett D. Wick。Drury-Arveson Hardy 空间及单位球 $\mathbb{C}^n$上其他全纯 Besov-Sobolev 空间的 Corona 定理。Anal. PDE，4(4):499–550，2011。[20] Kenneth R. Davidson、Christopher Ramsey 和 OrrMoshe Shalit。若干泛算子代数的同构问题。Adv. Math.，228(1):167–218，2011。[21] Peter Duren 和 Alexander Schuster。Bergman 空间，数学调查与专著第100卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2004。[22] O. El-Fallah、K. Kellay 和 T. Ransford。Cantor 集与加权 Dirichlet 空间中的循环性。J. Math. Anal. Appl.，372(2):565–573，2010。[23] Omar El-Fallah、Karim Kellay、Javad Mashreghi 和 Thomas Ransford。Dirichlet 空间入门，剑桥数学论丛第203卷。剑桥大学出版社，剑桥，2014。[24] Devin C. V. Greene、Stefan Richter 和 Carl Sundberg。具有完备 Nevanlinna-Pick 核的空间上的内乘子结构。J. Funct. Anal.，194(2):311–331，2002。[25] Kunyu Guo 和 Qi Zhou。二元情形下的循环向量、外函数与 Mahler 测度。Integral Equations Operator Theory，93(5):论文第56号，14页，2021。[26] Michael Hartz。Drury-Arveson 空间简介。arXiv:2204.01559。[27] Michael Hartz。Drury-Arveson 空间的 Henkin 测度。Michigan Math. J.，67(4):815–826，2018。

[28] Haakan Hedenmalm、Boris Korenblum 和 Kehe Zhu。《Bergman 空间理论》，Graduate Texts in Mathematics 第 199 卷。Springer-Verlag，纽约，2000 年。[29] Håkan Hedenmalm。球代数中的闭理想。《Bull. London Math. Soc.》，21(5):469–474，1989 年。[30] Håkan Hedenmalm。双圆盘代数中的闭理想。《Ark. Mat.》，28(1):111–117，1990 年。[31] Greg Knese、Łukasz Kosiński、Thomas J. Ransford 和 Alan A. Sola。各向异性 Dirichlet 空间中的循环多项式。《J. Anal. Math.》，138(1):23–47，2019 年。[32] B. I. Korenbljum。某些加权序列希尔伯特空间中移位算子的不变子空间。《Dokl. Akad. Nauk SSSR》，202:1258–1260，1972 年。[33] Boris Korenblum。一种 Beurling 型定理。《Acta Math.》，138(3-4):265–293，1976 年。[34] Mikael Lindström、Santeri Miihkinen 和 David Norrbo。乘子谱性质的统一研究方法。《Taiwanese J. Math.》，24(6):1471–1495，2020 年。[35] Stanisław Łojasiewicz。《复解析几何导论》。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1991 年。Maciej Klimek 从波兰语译出。[36] Joaquín Ortega 和 Joan Fàbrega。Hardy-Sobolev 空间中的乘子。《Inte- gral Equations Operator Theory》，55(4):535–560，2006 年。[37] Joaquín M. Ortega 和 Joan Fàbrega。解析 Besov 空间中的逐点乘子与分解定理。《Math. Z.》，235(1):53–81，2000 年。[38] Stefan Richter 和 Carl Sundberg。局部 Dirichlet 积分的一个公式。《Michigan Math. J.》，38(3):355–379，1991 年。[39] Stefan Richter 和 Carl Sundberg。Dirichlet 空间中的乘子与不变子空间。《J. Operator Theory》，28(1):167–186，1992 年。[40]Stefan Richter 和 James Sunkes。Drury-Arveson 空间中的 Hankel 算子、不变子空间与循环向量。《Proc. Amer. Math. Soc.》，144(6):2575–2586，2016 年。[41] António Serra。Dirichlet 型空间中的最小范数乘子。《J. Oper- ator Theory》，52(2):293–302，2004 年。[42] Allen L. Shields。加权移位算子与解析函数论。载于《算子理论专题》，Math. Surveys，第 13 号，第 49–128 页。Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，R.I.，1974 年。[43] Serguei Shimorin。Dirichlet 型空间的完备 Nevanlinna-Pick 性质。《J. Funct. Anal.》，191(2):276–296，2002 年。[44] Alan Sola。关于 Dirichlet 型空间与 $\mathbb{C}^2$单位球中的循环向量的一则注记。《Arch. Math. (Basel)》，104(3):247–257，2015 年。[45] Thomas Wolff。Corona 定理的一个改进。载于《Havin, V.P., Hruscev, S.V., Nikolski, N.K. (编) 线性与复分析问题集》，Math. Surveys，第 13 号，第 49–128 页。Springer，柏林，1984 年。

隆德大学，数学系，理学院，邮政信箱 118，S-221 00 隆德，瑞典电子邮箱地址：alexandru.aleman@math.lu.se

数学科学系 ，挪威科学大学与技术大学 (NTNU)，7491 特隆赫姆，挪威
电子邮箱：karl-mikael.perfekt@ntnu.no

数学系，田纳西大学，Circle Drive 1403号，诺克斯维尔，田纳西州 37996-1320，美国电子邮箱：srichter@utk.edu

数学系，田纳西大学，Circle Drive 1403号，诺克斯维尔，田纳西州 37996-1320，美国电子邮箱：csundber@utk.edu

亨茨维尔，阿拉巴马州，美国电子邮箱：jsunkes@gmail.com