arXiv:2301.05000v1 [math.GR] 12 Jan 2023

伯恩赛德型群的一种迭代小消去理论

IGOR LYSENOK

摘要。我们提出另一种方法，将奇指数为 n 、具有 $m \geq 2$ 个生成元的自由伯恩赛德群 $B(m,n)$ 表示为满足某种迭代小消去条件的群。利用这一方法，我们给出一个相当易于理解的证明，说明当奇指数 n 满足适度的界 $n > 2000$ 时，$B(m,n)$ 是无限群。

1. 引言

指数为 n 的自由 m 生成元伯恩赛德群 $B(m,n)$，按定义是满足恒等式 $x^n = 1$ 的群簇中的相对自由群，即 $B(m,n) \simeq F_m/F_m^n$，其中 F_m 是秩为 m 的自由群，而 F_m^n 是 F_m 中由所有 n 次幂生成的子群。关于群 $B(m,n)$ 的结构信息，已知是一个难题。此类问题中最主要的是：给定 m、$n \geq 2$，$B(m,n)$ 是否有限？这个问题称为伯恩赛德问题 [1]，至今仍未得到完全解答。已证明，当指数为 $n = 2$、3 [1]、$n = 4$ [14] 和 $n = 6$ [7] 时，该群是有限群。诺维科夫 – 阿迪安定理 [11, 8] 给出了伯恩赛德问题的否定解：该定理指出，具有 $m \geq 2$ 个生成元、奇指数为 $n \geq 665$ 的伯恩赛德群 $B(m,n)$ 是无限群。截至目前，对于形如 $n = 665r$ 或 $n \geq 8000$ 的指数以及任意生成元个数 $m \geq 2$，已证明 $B(m,n)$ 是无限群。注意，若 n 是 r 的倍数，则 $B(m,r)$ 是 $B(m,n)$ 的同态像；因此在这种情况下，$B(m,r)$ 是无限群就意味着 $B(m,n)$ 也是无限群。指数 n 不含较大的奇因子的情形已在文献 [4, 9] 中处理。尽管人们相信，对于相当小的 n，自由伯恩赛德群 $B(m,n)$ 也是无限群（并且已有若干此类结果的公告），目前发表且经过仔细核验的最低界仍为 665；阿迪安 [8] 在奇指数 n 的情形下得到了这一结果。

在无限情形下，理解群 $B(m,n)$ 结构的一项关键进展，来自诺维科夫和阿迪安的奠基性著作 [11] 及其改进版本 [8]。证明中的一个要素，是一种紧密交织的小消去理论，其形式类似于塔尔塔科夫斯基-1 [15]所发展的理论。文献 [8] 还证明，对于 $m \geq 2$和奇数 $n \geq 665$，群 $B(m,n)$ 具有若干类似于小消去群关键性质的性质。其中一项基本性质是分层德恩性质：在群中表示恒等式的自由约化非空词，包含一个定义关系的大段部分（模去前一层的关系）。由此很容易推出，任何这样的字都应包含一个形如 X^t 的子词（当 t 充分大时），进而说明 $B(m,n)$ 是无限群。

遗憾的是，Novikov–Adian 提出的方法，即便是经过打磨和改进后的版本 [8], ，仍然极其技术化，且逻辑结构复杂。此后的几项研究 [12, 13, 3, 2] 致力于寻找一种概念上更清晰、技术上更简单的方法

本研究得到俄罗斯科学基金会资助（项目编号：21-11-00318）。1

来研究无限伯恩赛德群；更一般地说，是研究更广泛的群类中“有界指数的无限商”现象，如 [5, 3, 2] 所示。作为基本思想，所有这些方法都以或多或少显式的形式运用了小消去理论，尽管所采用的实现技术各不相同。后来人们逐渐认识到，迭代小消去理论确实是一个恰当的框架，既可用于呈示大指数的伯恩赛德群，也可用于呈示许多其他具有“怪兽”性质的无限表示群。在显式形式下，Gromov 和 Delzant [3] 以及 Coulon [2] 阐述了该理论的一个相关版本。然而，这两种方法要应用于伯恩赛德群，都需要极大的指数。（事实上，两种方法都采用了“非构造性”工具，因此证明无法给出指数的任何显式下界 n。）

自然会产生两个问题。迭代小消去方法适用于伯恩赛德群 $B(m,n)$ 时，指数 n 的下界是多少？若指数取值相当小，例如几百或更小，我们是否需要复杂的技术框架才能运用这一方法?

本文的主要目标是发展一个示例性版本的迭代小消去理论，专门用于自由伯恩赛德群 $B(m,n)$，其指数 n 的下界为 “ 适中 ” 水平。更准确地说，我们的技术适用于奇指数 $n > 2000$。

我们将这一方法视为初步尝试，旨在引出一项技术性强得多的结果，该结果研究指数下界显著更小的伯恩赛德群的无限性。

2. The iterated small cancellation condition

2.1. 我们固定一个由分级表示给出的群 G

$$\langle \mathcal{A} \mid R = 1\ (R \in \bigcup_{\alpha \geq 1} \mathcal{X}_\alpha) \rangle. \tag{2-1}$$

这里我们假设，定义关系的集合划分为若干子集 $\mathcal{X}_\alpha$ 的并集，这些子集由正整数 α 编号。我们将字 $R \in \mathcal{X}_\alpha^{\pm 1}$秩为.....的关系词 α 的循环移位称为关系词。因此，所有秩为 α 的关系词的集合都是对称化的，即在循环移位和取逆元下封闭。

对于 G 的表示，自然会关联到由秩不超过 α 的所有关系定义的层群 G_α，即

$$G_\alpha = \langle \mathcal{A} \mid R = 1\ (R \in \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{X}_\beta) \rangle \tag{2-2}$$

2.2. 我们的小消去条件取决于两个正实参数 λ 和 Ω，它们满足

$$\lambda \leq \frac{1}{24}, \quad \lambda\Omega \geq 20. \tag{2-3}$$

我们还引入另外两个取固定值的参数:

$$\rho = 1 - 9\lambda, \quad \zeta = \frac{1}{20}.$$

λ、Ω、 ρ 和 ζ 的作用可描述如下:

- λ是经典条件 $C'(\lambda)$ 中小消去参数的类似物;

• Ω 是关系词 R 的大小下界，该关系词的秩为 α，其下界是根据与 $G_{\alpha-1}$ 相关联的长度函数 $|\cdot|_{\alpha-1}$ 来确定的（下文 2.7 中定义）；参见 2.8 中的条件（S1）。

• ρ 是用于定义约化的 G_α 字的约化阈值。更正式地说，约化的 G_α 字中，秩为 α 的关系词至多有 ρ部分与其接近（在 $G_{\alpha-1}$中）。

• ζ 是秩缩放因子；它决定函数 $|\cdot|_\alpha$ 在秩递增时如何重新缩放。

2.3. 对于任意 $\alpha \geq 0$，我们递归地引入秩为 α 的桥词集合 $\mathcal{H}_\alpha$，定义如下:

$$\mathcal{H}_0 = \{\text{the empty word}\},$$

$$\mathcal{H}_\alpha = \{uSv \mid u, v \in \mathcal{H}_{\alpha-1},\ S \text{ 是秩为 } \alpha\}.\text{的关系词的一个子词}$$

定义立即推出 $\mathcal{H}_{\alpha-1} \subseteq \mathcal{H}_\alpha$。另请注意，所有集合 $\mathcal{H}_\alpha$ 在取逆元后仍保持封闭。

2.4. 如果存在某个 $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$，使得 $x, y \in G_\alpha$ 接近 $x = uyv$，我们就称这两个元素接近。当 x 和 y 由生成元 $\mathcal{A}$的字表示时，这种关系会经常用到。在这种情况下，如果字 X 和 Y 表示 G_α中的接近元素，或者等价地，如果对于某个 $u, v \in \mathcal{H}_\alpha$，有 $X = uYv$ 在 G_α 中，那么我们称这两个字秩接近 α。

2.5. 对于 $\alpha \geq 0$，字 $\mathcal{R}_\alpha$ 的集合（在 G_α中约化的）、秩为 α 的片段集合以及长度函数 $|\cdot|_\alpha$，均通过联合递归定义。

生成元 $\mathcal{A}$上的字 X 在 G_0 中约化的，当且仅当 X 是自由约化的。对于 $\alpha \geq 1$，字 X 在 G_α 中约化的，当且仅当它在 $G_{\alpha-1}$ 中约化，并且满足以下条件：如果秩为 α 的关系词 R 的子词 S 与 X 的某个子词秩接近 $\alpha-1$，那么

$$|S|_{\alpha-1} \leq \rho |R|_{\alpha-1}.$$

A 字 X 在 G_α 中是循环约化的，如果 X 的任意循环移位在 G中都是约化的 $_\alpha$.

2.6. 非空字 F 若在 $G_{\alpha-1}$ 中约化，且秩接近于秩为 $\alpha-1$ 的字 P的一个子词，其中该字具有形式 R^k，而 R 是秩为 α的关系词，则称其为秩为 的片段 F。（在几乎所有情况下，P 都是 R的某个循环移位的子词。）秩为 0 的片段是长度为 1 的字，即字母表 $\mathcal{A}^{\pm 1}$中的单个字母。

方便起见，我们假设每个秩为 $\alpha \geq 1$ 的片段 F 都与固定的关联词 P、u、v以及秩为 α的关系词 R一同考虑，使得 $F = uPv$属于 $G_{\alpha-1}$、u、$v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且对于某个 $k > 0$，P是 R^k的子词；也就是说，片段形式上是一个五元组（F、P、u、v、R）。

2.7. 字 X 的秩为 α 的分段（线性或循环）是将 X 划分为若干非空子词片段，其秩为 $\beta \leq \alpha$。若 $\mathcal{F}$ 是 X的秩为 α 的分段，则根据定义，α 中 $\mathcal{F}$ 的秩为权重定义为

$$\text{weight}_\alpha(\mathcal{F}) = m_\alpha + \zeta m_{\alpha-1} + \zeta^2 m_{\alpha-2} + \cdots + \zeta^\alpha m_0$$

其中，m_β 是 $\mathcal{F}$中秩为 β 的子词片段的数量。这里假设 $\mathcal{F}$ 中的每个子词都被赋予一个唯一的秩 β。

现在我们 定义生成元 $\mathcal{A}$上的字的半可加长度函数 $|\cdot|_\alpha$:

$$|X|_\alpha = \min\{\text{weight}_\alpha(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ is a fragmentation of rank } \alpha \text{ of } X\}.$$

注意，$|X|_0$ 是 X的通常长度 $|X|$。

2.8. 迭代小消去条件由以下四个条件 (S0)–(S3) 组成，其中假定量词“对所有 $\alpha \geq 1$”成立。

(S0)（“关系词是约化的”）任何秩为 α 的关系词在 $G_{\alpha-1}$中都是循环约化的。(S1)（“关系词很长”）任何秩为 α 的关系词 R 都满足

$$|R|_{\alpha-1} \geq \Omega.$$

(S2)（“小重叠”）对于 $i = 1$、2，设 S_i 是秩为 α的关系词 R_i 的一个起始段。假设对于某个 u、$v \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ 和 $|S_1|_{\alpha-1} \geq \lambda|R_1|_{\alpha-1}$，$S_1 = uS_2v$ 在 $G_{\alpha-1}$ 中成立。那么 $R_1 = uR_2u^{-1}$ 在 $G_{\alpha-1}$中成立。

2.9. 可以证明，满足条件(S0)–(S2)的群 G 具有小消去群的核心性质，尤其是某种形式的Dehn性质。然而，我们将在 G 的分级表示中额外施加一个条件，该条件意味着群 G_α 的所有有限子群都是循环的，并避免了伯恩赛德群 $B(m, n)$ 在偶指数 n情形下因非循环有限子群的存在而产生的困难。

(S3)（“无逆共轭关系词”）没有任何秩为 α 的关系词在 $G_{\alpha-1}$ 中与其逆元共轭。

如下所示，若每个秩为 α 的关系词 R 都具有 R_0^n的形式，其中指数 n （不同的 R可以取不同值）为奇数，且 R_0 是 $G_{\alpha-1}$中的非幂元，则此条件成立。见推论 13.11。

从第8节开始，我们将对分级表示（2-1）采用一项温和的附加假设，要求其按以下意义规范化。这项假设并非必要，只是为了简化论证（主要得益于引理 8.1），并略微改善常数的界。

2.10. **定义**。 若分级表示（2-1）满足以下断言，我们就称其为规范化：

(i) 每个关系词 $R \in \mathcal{X}_\alpha$ 都具有 $R = R_0^t$ 的形式，其中 R_0 表示 $G_{\alpha-1}$ 中的一个非幂元（即， R_0 在 $G_{\alpha-1}$ 中不表示任何形如 g^k 的元素，其中 $k \geq 2$）；我们称 R_0 为关系词 R的根。(ii) 若 R、$S \in \mathcal{X}_\alpha$ 且 $R \neq S$，则 R 与 S 在 $G_{\alpha-1}$中不共轭。

请注意，规范化条件并不苛刻：每个分级表示都可以替换为一个规范化的分级表示（尽管严格来说，这种替换可能会影响迭代小消去条件；然而在实际应用中，这种情况几乎不会发生）。

注。 检验条件 (S0)–(S3) 需要了解群 $G_{\alpha-1}$。因此，通过满足迭代小消去条件的关系来表示一个群，本身就需要按秩归纳证明群 G_α 的性质。

3. 主要结果

与经典小消去的情形一样，迭代小消去条件对呈示群 G有深远影响。其中一个基本结论是德恩性质的类似结论：每个表示群的单位元的非空自由约化字都“包含”某个关系词的“大段”。

下文中，我们假设群 G由满足上述条件 (S0)–(S3) 的规范化分级表示给出，并且对于任意 $\alpha \geq 0$, G_α ， α表示由秩不超过 α的所有关系所定义的群。若一个字 X 在 G 中对所有 $\alpha \geq 0$都在 G_α中约化，则称其在 G 中约化。以下定理是命题 7.6 的直接推论。

定理 1. 设 X 是生成元 $\mathcal{A}$中的一个非空字。若 X 在 G_α 中约化，则$X \neq 1$ 属于 G_α。若 X 在 G 中约化，则 $X \neq 1$ 属于 G。

展开 G 中约化词的定义，我们可以得到一种等价表述，这种表述更符合小消去理论的精神。

推论。 设 X 是一个自由约化的非空字。若 $X = 1$ 属于 G ，则对于某个 $\alpha \geq 1$， X有一个子词与秩为 α 且满足 $|P|_{\alpha-1} \geq \rho|R|_{\alpha-1}$的关系词 R 的子词 P 在 $G_{\alpha-1}$ 中相近。

在经典小消去理论中，群元素存在 Dehn约化表示，是一个简单的推论：含有某个关系词一半以上部分的字，可以通过应用相应的关系缩短。这种方法不适用于我们的迭代小消去版本，而约化代表的存在性是一个非平凡事实，将在下文证明，并表述为命题 11.1 和推论 14.8。

定理 2. G_α 中的每个元素都可以表示为一个在 G_α 中约化的字。 G 中的每个元素都可以表示为一个在 G 中约化的字。

第5–14节确立了群 G_α 和 G 的许多其他性质。我们的主要结果表明，我们版本的迭代小消去理论可应用于奇指数 n 且 n具有适中下界的自由伯恩赛德群。下述定理是命题 16.8 和推论 16.10 的推论（另见注记 15.4）。

定理 3. 对于奇数 $n > 2000$ 和 $m \geq 2$，自由伯恩赛德群 $B(n,\ m)$ 具有一个规范化分级表示

$$\left\langle \mathcal{A} \ \middle|\ C^n = 1\ (C \in \bigcup_{\alpha \geq 1} \mathcal{E}_\alpha) \right\rangle$$

满足条件 *(S0)–(S3)*，其中 $\lambda = \frac{80}{n}$ ， $\Omega = 0.25n$。

下述定理是指数足够大的奇指数伯恩赛德群的一个众所周知的性质。它直接由命题 9.14 和 16.6 得出（ ω 的定义见 4.19）。

定理 4. 设 $n > 2000$ 为奇数。设 X 是一个非空的自由约化字，且它在 $B(m,n)$中等于 *1*。那么 X 包含一个形如 C^{480} 的子词，其中 $C \in \bigcup_{\alpha \geq 1} \mathcal{E}_\alpha$。

注意，结合二字母字母表中无限非周期词的存在性（例如参见 [8, §I.3]），这意味着当 $n > 2000$ 为奇数且 $m \geq 2$时， $B(n,m)$ 是无限群。

一些注。 本文的方法与论文 [9]有很多共同之处。然而， [9] 中的方法基于这样一个假设：所考虑群的定义关系具有 $x^n = 1$ 的形式，其中 n充分大。尽管我们的大部分证明的总体方案与 [9], 中的相同，但我们的论证所处的技术环境不同。

我们尽可能简化了迭代小消去条件。特别是，我们采用了群中一种简单的接近性定义 G_α（见 2.3 和 2.4）。然而，在将

自由伯恩赛德群表示为迭代小消去群时，这一定义在指数界方面并非最优。更精细的定义可以显著降低这一界。尽管如此，我们认为，指数界 $n > 2000$ 在最优性与定义和证明的复杂度之间取得了合理的平衡。

整个方法本质上依赖于按秩同时归纳 α。由于证明关于群 G_α 的所需陈述，需要全面分析前几秩群中的某些类型的关系，因此归纳假设的数量相当多（几十条）。我们认为，对于指数下界相当小的无限伯恩赛德群，任何“小消去”方法都不可避免地需要大量归纳假设。请注意，在第 5–7 节的“基本”小消去理论中，我们只使用命题 7.8（及其直接推论命题 7.9）作为归纳假设。

我们简要介绍本方法的关键要素。

第 5–7 节致力于分析群 G_α的表示（2-2）上的范坎彭图。在 5.1 节中，我们引入一种带有特殊边界标记的图，使得图的边界回路被划分为边和桥。边的标签是 G_α 中约化的字，而桥则是边之间标记为秩 α桥词的“小”区段。根据标记方式，图可分为双边形型、三边形型等。随后，我们利用邻接子图的概念（见 6.5 节）分析带标记边界的图的整体结构。在定量分析中，我们采用一种符合 [10] 思路的离散联络及相应的高斯-博内公式离散类比（命题 7.3）。主要结果包括：无纽带图的边的总大小上界（命题 7.9 和 7.12），以及小复杂度图的“单层”结构（命题 7.11 和 7.13）。

第 5–7 节的结果为进一步分析 G_α 中的关系提供了背景。我们所考虑的最重要的一类关系是 G_α 中的“接近性”关系，形式为 $X = uYv$，其中 X、$Y \in \mathcal{R}_\alpha$ 和 u、$v \in \mathcal{H}_\alpha$。关于 G_α 表示的图的结构描述，自然可以转化为凯莱图 Γ_α 的语言，其中 G_α，参见 9.4。在 Γ_α 中，群生成元上的字由路径表示，而 G_α 中的关系由回路表示。关系 $X = uYv$ 变为 Γ_α 中的一个回路 $X^{-1}uYv$，它可以看作一个粗双边形；我们也称路径 X 和 Y 接近。填充图的单层结构蕴含着 X 和 Y 中秩为 α 的片段之间存在一一对应关系，这些片段来自图中的二维胞腔，称为相对于粗双边形 $X^{-1}uYv$ 的秩为 α 的活跃片段。为表述这种对应关系，我们在 Γ_α 中秩为 α 的片段集合上使用 8.6 中定义的相容性关系（即 Γ_α 中由秩为 α 的片段标记的路径）：若 K 和 M 分别是 X 和 Y 中对应的秩为 α 的活跃片段，则 K 和 M^{-1} 相容（命题 9.7）。

在第9节中，我们将这一过程从关于 G_α 的表示的图转移到凯莱图 Γ_α 上。我们建立了 Γ_α 中粗双边形、三边形，以及更一般的粗多边形的若干性质。我们还研究了 G_α 中的共轭关系，它们在 Γ_α 中由平行无限直线表示（见 4.3）。

在 Γ_α中，标签为 (X) 和 label(Y) $\in \mathcal{R}_\alpha$的近路径 X 和 Y 的一项基本性质是：X 与 Y 中秩为 α 的片段之间的对应关系可以扩展到非活跃片段。若 X 中的片段 K 足够大，则 Y 中存在一个秩为 α的片段 M，使得 K 与 M 或 M^{-1}相容，但 K 在 X 中位于两端的情况可能例外

位置（命题 10.6）。非正式地说，当 G_α中的词的相同被接近性取代时，秩为 α 的片段起到字母的作用。在 Γ_α 中，近路径 X 和 Y 的这一性质，以及它在 G_α 中粗三边形上的类似性质（命题 10.7）和在 G_α 中共轭关系上的类似性质（命题 10.10 和 10.12），为进一步分析群 G_α 和 G的性质提供了技术基础。特别是，在作适当调整后，粗双边形中秩为 α 的片段之间的对应关系至关重要，因为我们将在第 13 节中考察 G_α 中的近周期词。

在第 11 节中，我们证明 G_α 的任意元素都可以用约化词表示（命题 11.1），并且与某个由循环约化词表示的元素共轭；此外，若其具有无限阶，则还可以与某个由强循环约化词表示的元素共轭（定义 4.15，命题 11.5）。

第 12 节和第 13 节为分析 G_α 上的周期关系做准备。在第 12 节中，我们引入了 G_α 上的粗略周期词 集合，这些词以一种更强的意义（比定义 2.4 中的意义更强）接近具有强约化 G_α 周期的周期词（定义 12.4）。第 13 节的主要结果命题 13.4，是周期词一项众所周知性质的类似结论：若两个周期词有足够大的重叠（例如，它们的重叠长度至少是各自周期的两倍），那么它们就有一个公周期。

在最后两节，即第 15 节和第 16 节中，我们为伯恩赛德群 $B(m,n)$ 定义了一组形如 $C^n = 1 (C \in \bigcup_{\alpha\geq 1} \mathcal{E}_\alpha)$ 的定义关系，并证明这组关系满足迭代小消去条件 (S0)–(S3)。更确切地说，在定义 15.1–15.3 中，我们描述了一个递归步骤：已知 $\beta \leq \alpha$ 的 $\mathcal{E}_\beta$，即已知 G_α 的表示，来定义 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$。构造 $\mathcal{E}_\alpha$ 的主要思路可以粗略地描述为“按周期深度对周期词进行分类”，这与 [11, 8] 中采用的方法类似。请注意，其他针对“伯恩赛德型”群的研究方法 [12, 13, 4, 5, 3, 2] 会构造周期关系 $C^n = 1$，其中对于下一秩，C 相对于当前群被选得“大小较短”。我们认为，“周期深度”方法虽然在若干方面更具技术性，但能给出指数 n 的更优下界。

4. 预备知识

从第 5 节开始，我们假设秩 $\alpha \geq 0$ 固定，并给定群 G_α 的一个表示 (2-2)，其关系词 $R \in \mathcal{X}_\beta$ 对所有秩 $\beta \leq \alpha$ 都有定义。我们假设 G_α 的表示已经规范化，并且对不超过固定值 α 的所有秩均满足条件 (S0)–(S3) 和不等式 (2-3)。在证明中，我们会像此前已确立的那样，前向引用较小秩值对应的陈述。我们会使用诸如“命题 $2.3_{\alpha-1}$”或“引理 $3.4_{<\alpha}$”等引用，分别表示“秩为 $\alpha-1$ 时命题 2.3 的陈述”或“所有秩 $\beta < \alpha$ 下引理 3.4 的陈述”。除少数例外，表述中包含情形 $\alpha = 0$ 的陈述在该情形下要么是显然的，要么可直接由定义推出。

4.1. 字。 我们固定群 G的一组生成元 $\mathcal{A}$。本文所说的字，始终指字母表 $\mathcal{A}^{\pm 1} = \mathcal{A} \cup \{a^{-1} \mid a \in \mathcal{A}\}$ 上的群词。我们用记号 $X \equiv Y$ 表示字 X 和 Y 相同。用 X° 表示由普通词 X 表示的循环词。

一个字的子词 Y 总是与 Y 在 X中的一个关联出现一起考虑的，这一点从上下文中可以明确看出。为了使其形式化，我们将 X 的一个子词 Y 与一对字（U，V）相关联，使得 $UYV \equiv X$。如果 Y是 X的一个子词，并且其关联对为（U，V）

那么记作 $Y = WZ$ 时，我们的意思是将 W 和 Z 视为 X 的子词，其关联对分别为（U，ZV）和（UW，V）。注意，如果 $X_1 \neq X_2$，则“ X_1的子词 Y”和“X_2的子词 Y”在形式上是两个不同的对象。对于 Y，上下文总能明确所假定的环境字。

周期为的字，或简称为 A-周期字，是 A^t中任意的子词 $t > 0$。根据关于子词的约定，A-周期字 P 总是与其在某个字 A^t中对应的一次出现 P 一起考虑。

字 X的划分是将 X表示为若干子词 X_i的连接 $X = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k$。若字 X 存在一个划分 $X = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k$，使得 X_i 是某个 Y_{t_i} 的子词，且 $t_i \neq t_j$ 对于 $i \neq j$成立，则称字 X 被字的集合 $(Y_i)_i$ 覆盖。

4.2. 图。我们用“图”作为“组合 1-复形”的同义词。图的边被视为具有两种可能方向之一，因此形式上我们所有的图都是有向的。我们分别用 ι(e)和 τ(e)表示边e的起始顶点和终止顶点，而e^{-1} 表示逆边。图 Γ 上的 $\mathcal{A}$-标记是一个函数，它将 Γ的边集映射到 $\mathcal{A}^{\pm 1} \cup \{1\}$中，并满足对任意e都有label $(\mathsf{e}^{-1}) = \text{label}(\mathsf{e})^{-1}$；这里1表示空词。 $\mathcal{A}$-标记自然地延伸到 Γ中的路径，因此路径P的标签是 $\mathcal{A}^{\pm 1}$中的一个字。若P是 Γ 中的路径，则 ι(P)和 τ(P)分别表示P的起始顶点和终止顶点。对 Γ中的任意顶点a，都存在唯一的以a为起点的空路径。我们将此空路径与顶点a本身等同，因此 $\iota(\mathsf{a}) = \tau(\mathsf{a}) = \mathsf{a}$，且label $(\mathsf{a}) = 1$。若一条路径不重复经过任何顶点，则称其为简单路径。若两条路径没有公共边，也没有互为逆边的边，则称它们不相交。 Γ 中的一条直线是双无限路径（我们不假设直线没有回路）。

若 X 和 Y 是简单路径 Z 的子路径，则当存在某个 Z_i，使得 $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_1\mathsf{X}\mathsf{Z}_2\mathsf{Y}\mathsf{Z}_3$ 时，我们记作 $\mathsf{X} \ll \mathsf{Y}$；若存在某个 Z_i 以及非空的 u 和 v，使得 $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_1\mathsf{X}\mathsf{u}\mathsf{Z}_2 = \mathsf{Z}_1\mathsf{v}\mathsf{Y}\mathsf{Z}_2$ 时，我们记作 $\mathsf{X} < \mathsf{Y}$。尽管这两个关系都取决于 Z，但根据上下文总能清楚地知道所指的 Z。显然，若 X 和 Y 均不包含对方，则必有 $\mathsf{X} < \mathsf{Y}$ 或 $\mathsf{Y} < \mathsf{X}$。子路径 X 和 Y 在 Z 中的并集$\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}$，是 Z 中同时包含 X 和 Y 的最短子路径。

群 G 的凯莱图 $\Gamma(G, \mathcal{A})$（其生成集为 $\mathcal{A}$ ）自然可视为一个 $\mathcal{A}$ 标记的图。我们将 $\Gamma(G, \mathcal{A})$ 的顶点与 G 的元素对应起来，因此，若 $\iota(\mathsf{P}) = \mathsf{a}$ 且$\tau(\mathsf{P}) = \mathsf{b}$，则 label(P) 是一个表示 $\mathsf{a}^{-1}\mathsf{b}$ 的字。

群 G 通过左乘作用于 $\Gamma(G, \mathcal{A})$。

在 $\Gamma(G, \mathcal{A})$ 中，由 A-周期词标记的路径 P 是一条 A-周期线段。 A-周期线是一条由 A^∞ 标记的双无限路径。由于假定 A-周期词在某个 A^t 中有对应的出现，因此周期线段 P 可唯一延拓为一条 A-周期线，称为 P 的无限周期延拓。如果 P 和 Q 是 A-周期线段，P 是 Q 的子路径，且二者有相同的无限周期延拓，那么 Q 是 P 的周期延拓。

我们还定义平移元素 $s_{A,\,\mathsf{P}} \in G$ 它将 P 的无限周期延拓 L 沿正向平移一个周期 A。根据定义，$s_{A,\,\mathsf{P}}$ 可按如下方式计算。在 L 上任取一个顶点 a，使得 L 在 a 处的标签以 A 开头。则 $s_{A,\,\mathsf{P}} = \mathsf{a}A\mathsf{a}^{-1}$。

如果 L_1 和 L_2 是两条周期分别为 A_1 和 A_2 的周期线，那么当 $s_{A_1,\,\mathsf{L}_1} = s_{A_2,\,\mathsf{L}_2}$ 时，L_1 和 L_2 是平行 的。

4.3. 凯莱图中的映射关系。根据凯莱图的定义，生成元 $\mathcal{A}$ 中的字 X 表示 G 的恒等式，当且仅当某个

（因此，任意）在 $\Gamma(G,\mathcal{A})$ 中标签为 $=X$ 的路径 X 都是一个回路。因此， G 中的关系由 $\Gamma(G,\mathcal{A})$ 中的回路表示。我们将利用这一表示，根据群的凯莱图的几何性质来分析群中的关系。

我们经常使用以下记号约定。若 $X_1X_2\dots X_n=1$ 是群 G 中的一个关系，则在 G 的凯莱图中用回路 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\dots\mathrm{X}_n$ 表示该关系，并以无衬线字体标出相同的字母；默认情况下，对所有 i，label$(\mathrm{X}_i)=X_i$。

我们也用 $\Gamma(G,\mathcal{A})$中的平行周期线表示 G 中的共轭关系，具体如下。设 $X=Z^{-1}YZ$ 属于 G。考虑 $\Gamma(G,\mathcal{A})$中的回路 $\mathrm{X}^{-1}\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{YZ}'$，其中 label (X) $=X$，label (Y) $=Y$，label (Z) $=$，label (Z′) $=Z$。将 X 延伸为一条 X-周期线 $\mathrm{L}_1=\dots\mathrm{X}_{-1}\mathrm{X}_0\mathrm{X}_1\dots$，其 label $(\mathrm{X}_i)=X$，且 $\mathrm{X}_0=\mathrm{X}$；类似地，将 Y延伸为一条 Y-周期线 $\mathrm{L}_2=\dots\mathrm{Y}_{-1}\mathrm{Y}_0\mathrm{Y}_1\dots$，其 label $(\mathrm{Y}_i)=Y$，且 $\mathrm{Y}_0=\mathrm{Y}$。由此得到一对平行线 L_1和 L_2，表示 G中 X 与 Y 的共轭关系。

我们将自由地 在凯莱图中的路径语言与字关系之间切换 .

4.4. 范坎彭图。 设 G 是一个带表示 $\mathcal{P}=\langle\mathcal{A}\mid\mathcal{R}\rangle$的群。一个图 Δ基于 $\mathcal{P}$ 是嵌入于 $\mathbb{R}^2$ 中的有限二维复形 Δ，其 1-骨架 $\Delta^{(1)}$带有给定的 $\mathcal{A}$标记，使得 Δ中每个二维胞腔的边界环路标签要么为空，要么具有$a^{\pm1}a^{\mp1}$ 的形式（其中 $a\in\mathcal{A}$），要么是 $\mathcal{R}^{\pm1}$中的一个关系词。请注意，这里我们采用了广泛使用的定义的扩展版本，允许二维胞腔的边界环路标记为空词或可自由消去的一对字母。这样可以避免与奇点相关的技术问题（见 [13, §11.5] 或 [9, §4]）。

默认情况下，假定所有图都是连通的。

我们将图 Δ 中的二维胞腔简称为胞腔；和往常一样，1-胞腔和 0-胞腔分别称为边和顶点。用 $\delta\mathrm{D}$ 表示胞腔 D 的边界环路；当 Δ 单连通时，用 $\delta\Delta$ 表示 Δ 的唯一边界环路。我们固定 $\mathbb{R}^2$ 的一个定向，并假定 Δ 的胞腔边界环路以及 Δ 的边界环路，分别相对于胞腔和图取正向。例如，$(\delta\mathrm{D})^{-1}$是从 Δ中移除胞腔 D 后所得图 Δ –的一个边界环路。请注意， Δ 及其胞腔的边界环路都只在循环移位意义下确定。

根据范坎彭引理（[6, 定理 V.1.1] 和 [13, 定理 11.1]），生成元 $\mathcal{A}$ 中的字 X在 G 中表示恒等式，当且仅当存在一个覆盖 $\mathcal{P}$、且标签为（$\delta\Delta$）$=X$的单连通图示 Δ。字 X 和 Y 表示 G 中的共轭元素，当且仅当存在一个覆盖 $\mathcal{P}$的环带图（即与环带同伦等价），其边界回路为 X 和 Z，且标签 (X) 为 $=X$、标签 (Z) 为 $=Y^{-1}$（[6, 引理 V.5.2]和 [13, 定理 11.2]）。

若 Σ 是 Δ 的子图，则 $\Delta-\Sigma$ 表示通过对补集 $\Delta\setminus\Sigma$取拓扑闭包而从 Δ 得到的子图。

设 Δ 和 Δ′ 是覆盖 $\mathcal{P}$ 的图，并且 Δ′ 由 Δ 通过以下任一种方式得到

- 将带有标签 (e) $=1$ 的边 e 收缩为一个顶点，
- 将带有标签 (δD) $=1$ 的胞腔 D 收缩为一个顶点，或
- 将带有标签 (δD) $=a^{\pm1}a^{\mp1}$, $a\in\mathcal{A}$ 的胞腔 D 收缩为一条带有标签 $a^{\pm1}$ 的边。

我们称从 Δ′ 到 Δ 的逆向转变为初等细化。一系列初等细化称为细化。

细化有几种常见用途:

- 任何图示都可以通过细化变为非奇异图示，即与一个带孔圆盘同胚。特别地，任何单连通图示都可以细化为一个非奇异圆盘。

- 若 C 是 Δ 的边界环，且表示为路径的乘积 C $= X_1 \ldots X_k$，其中路径为 X_i，那么经过细化后，新图中的对应边界环 Δ' 变为 $X'_1 \ldots X'_k$，其中每个 X_i 细化为非空路径 X'_i（见 4.5 中的定义）。

4.5. 图的组合连续映射。我们考虑$\mathcal{A}$标记图之间的映射类，这些映射保标记，且可实现为拓扑空间的连续映射。更准确地说，$\Lambda \to \Lambda'$ 与 $\mathcal{A}$标记图之间的映射 ϕ: Λ Λ' 称为组合连续，如果

- ϕ 将顶点映射为顶点，将边映射为边或顶点；对于 Λ中的任意一条边 e，只有当 e 具有空标记时，ϕ(e)才是顶点；若 ϕ(e)是边，则 label(ϕ(e)) $=$ label(e)。
- 若 ϕ(e)是边，则 ϕ 保留 e 的起始顶点和终止顶点；若 ϕ(e)是顶点，则 ϕ(e) $= \phi(\iota$(e)) $= \phi$ (τ(e))。

组合连续映射 ϕ : $\Lambda \to \Lambda'$ 以自然的方式扩展为一个映射（也记作 ϕ），该映射将 Λ 中的路径集合映到 Λ' 中的路径集合。显然，ϕ 保持路径标记不变。

若图示 Δ' 是由图示 Δ 经细化得到的，则由收缩序列 $\Delta' \to \Delta$可诱导出组合连续映射 ϕ: $\Delta'^{(1)} \to \Delta^{(1)}$。若 P 是 Δ 中的一条路径，且 $P' = \phi(P)$，则 P细化为P'。

4.6. 凯莱图中的图示映射。众所周知，单连通图示可以视为群的凯莱复形中的组合曲面。由于我们不使用二维结构，因此将这一观点推广到凯莱图的情形。

若 Δ 是 $\mathcal{P}$ 上的单连通图示，则存在组合连续映射 ϕ: $\Delta^{(1)} \to \Gamma(G, \mathcal{A})$。任意两个这样的映射 ϕ_1, ϕ_2: $\Delta^{(1)} \to \Gamma(G, \mathcal{A})$相差一个元素 $g \in G$所对应的平移，即 $\phi_1 = t_g \phi_2$，其中 t_g: $x \mapsto gx$ 是该平移。

特别地，若 X 是 $\Gamma(G, \mathcal{A})$ 中的一个回路，且对于边界回路，使得 $\phi(\tilde{X}) = X$。在这种情况下，我们称 Δ 填充X（通过 ϕ）。

若 Δ不是单连通的，则可以考虑一个组合连续映射ϕ : $\tilde{\Delta}^{(1)} \to \Gamma(G, \mathcal{A})$，其中 $\tilde{\Delta}$ 是 Δ 的万有覆盖。同样，任意两个这样的映射ϕ_1, ϕ_2: $\tilde{\Delta}^{(1)} \to \Gamma(G, \mathcal{A})$ 相差一个 G中某元素所对应的平移。Δ 的边界回路集合 $\{L_i\}_i$ 提升为 Δ 的一个（可能无限的）双无限边界直线集合 $\{\tilde{L}_i^j\}_{i,j}$，从而产生 $\Gamma(G, \mathcal{A})$ 中的直线集合 $\{\phi(\tilde{L}_i^j)\}_{i,j}$。每个 $\phi(\tilde{L}_i^j)$ 都可以看作一条以 $P_i =$ label(L_i) 为周期的 P_i-周期线。我们主要关注 Δ 是一个环形图的情形，也就是说，它与一个圆同伦等价。在这种情况下，$\tilde{\Delta}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$的边界回路 L_1 和 L_2 产生 $\Gamma(G, \mathcal{A})$ 中两条 P_i-周期线 $\phi(L_i)$ $(i = 1, 2)$，使得 $\phi(L_1)$ 和 $\phi(L_2)^{-1}$ 平行。

4.7. **定义**。设 Δ 和 Δ' 是群 G的一个表示上的同伦类型相同的图。我们假设，Δ 和 Δ' 的边界回路之间给定了一个保标签双射 $L_i \mapsto L'_i$（这通常可从上下文中明确看出）。如果存在组合连续映射 ϕ: $\tilde{\Delta}^{(1)} \to \Gamma(G, \mathcal{A})$ 和

ψ：$\tilde{\Delta}'^{(1)} \to \Gamma(G,\mathcal{A})$，使得对于每个 i，我们都有相同的直线集合（若 Δ 和 Δ'是单连通的，则为回路集合）$\{\phi(\tilde{\mathrm{L}}_i^j)\}_j = \{\psi(\tilde{\mathrm{L}}_i'^j)\}_j$。

下面两个观察结论都可由定义轻易推出。

4.8.**引理**。两个单连通图示 Δ 和 Δ' 具有相同的框架类型，当且仅当它们的边界环标签是相同的字。

设 Δ 和 Δ' 是边界环 $\{L_1, L_2\}$ 和 $\{L_1', L_2'\}$的环形图。则 Δ和 Δ' 具有相同的框架类型，当且仅当满足以下条件：任取 L_i $(i = 1, 2)$ 上的顶点 a_i，并设 p 是从 a_1 到 a_2 且位于 Δ中的一条路径。则存在 $L_i'(i = 1, 2)$ 上的顶点 a_i'，以及一条从 a_1' 到 a_2' 且位于 Δ' 中的路径 p'，使得在 a_i 处读取的 L_i 标签与在 a_i'处读取的 L_i'标签是相同的字，并且 $label(p) = label(p')$ 在 G中。

4.9.**引理**。在以下两种情况下，图 Δ 和 Δ' 具有相同的框架类型：

- Δ' 由 Δ 细化得到；
- Δ' 由 Δ 切去一个单连通子图并用另一个单连通子图替换后得到。

4.10. 群 G_α。本文将研究由表示（2-2）给出的固定群族 G_α。因此，大多数相关术语都会将秩 α 作为参数（尽管有些情况下并未明确提及；例如，前面引入的秩为 α的片段的测度 $\mu_{\mathrm{f}}(F)$在形式上依赖于 α）。

群 G_α 的表示上的图简称为 G_α上的图。对于$1 \le \beta \le \alpha$，在 G_α 上的图 D 中，标签为 $(\delta \mathrm{D}) \in \mathcal{X}_\beta$ 的胞腔是一个秩为 β的胞腔。边界标签平凡（即为空或具有 aa^{-1}的形式）的胞腔是秩为 0 的胞腔。

G_α 的凯莱图记为 Γ_α。注意，如果 $\beta > \alpha$，那么我们有一个标记图的自然覆盖映射 $\Gamma_\beta \to \Gamma_\alpha$。$\Gamma_\alpha$ 中的回路 L 提升到 Γ_β 后是一个回路，当且仅当 label(L) $= 1$于 G_β中。

4.11. 片。我们将关系词 α的任意（包括空的）子词称为一个秩为 α 的片段 α。如果 S 是关系词 R 的某个循环移位的子词，那么我们也称 S 为 R的片段。我们规定秩为 α 的片可以是空词。注意，我们的定义不同于小消去理论中关于片的传统观点，后者将片视为两个不同关系词的公共起始段。

我们假设秩为 α 的片 S 总是具有一个秩为 α 的关联关系词 R，使得 S 是 R的起始段；因此，形式上，秩为 α 的片应被视为形如（S，R）的一对。关联关系词在取子词和取逆时自然继承：如果 S是一个秩为 α 的片，其关联关系词为 $R = ST$，且 $S = S_1S_2$，那么 S_1 和 S_2 分别被视为秩为 α 的片，其关联关系词分别为 R 和 S_2TS_1，而 S^{-1} 被视为一个秩为 α 的片，其关联关系词为 $S^{-1}T^{-1}$。

对于秩为 α 的片，我们使用一种“测度” $\mu(S) \in [0, 1]$，其定义为 $\mu(S) = \frac{|S|_{\alpha-1}}{|R^\circ|_{\alpha-1}}$，如 (8-1) 中所示，其中 R 是关联关系词。（回想一下，R° 表示由 R 表示的循环词。）若对于某个 β，S 是 Γ_β 中的一条路径，或是 G_β 的表示上的图中的一条路径，并且 S 标记为秩为 α 的关系词的一个片段（或标记为一个 R-周期词，其中 R 是秩为 α 的关系词），则我们将 μ(label(S)) 简记为 μ(S)。

4.12. 用凯莱图重新表述条件 *(S2)* 和 *(S3)*。表示 (2-1) 上的下列条件分别等价于 (S2) 和 (S3)。

(S2-凯莱) 设 L_i $(i = 1, 2)$ 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条 R_i-周期线，其中 R_i 是秩为 α 的关系词。若 L_1 和 L_2 有相近子路径 P_1 和 P_2，且 $|P_i| \le |R_i|$ 和 $\mu(P) \ge \gamma$，则 L_1 和 L_2 平行。

(S3-凯莱) 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中不存在平行的 R-周期线和 R^{-1}-周期线，其中 R 是秩为 α 的关系词。

4.13. 桥划分。我们还如下定义字 $w \in \mathcal{H}_\alpha$ 的秩为 α 的桥划分。秩为 0 的桥划分为空。秩为 $\alpha \ge 1$ 的桥划分或者

- 具有形式 $w_1 \cdot S \cdot w_2$，其中 $w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，而 S 是秩为 α 的片段，称为 w 的中心片段；或者

在 $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ 的情况下，• 本身是单个因子 w。

若 w 是一个带有桥划分 $u \cdot S \cdot v$、秩为 α 的桥词，且 ST 是与 S 相关联的秩为 α 的关系词，则 $w' = uT^{-1}v$ 是一个在 G_α 中等于 w、秩为 α 的桥词。我们称 w' 是由 w 经切换得到的。在这种情况下，我们还假设 w' 带有桥划分 $u \cdot T^{-1} \cdot v$。因此，应用两次切换操作会得到初始字 w。

我们将考察凯莱图中由秩为 α 的桥词标记的路径 Γ_β。我们称它们为秩为 α 的桥（稍微宽泛地使用这一术语：在第 5 节中，我们也会用它指表示 G_α 上图中的、带有适当标签的边界路径）。若 w 是 Γ_β 中秩为 α 的桥，则 w 的秩为 α 的 桥划分，要么是因子分解 w = u · S · v，其中 u 和 v 是秩为 $\alpha - 1$ 的桥，且 label(S) 是秩为 α 的片段；要么是在 w 是秩为 $\alpha - 1$的桥时，以 w 为唯一因子的平凡因子分解。在前一种情形下，若还满足 $\beta \ge \alpha$，我们便以与字的情形类似的方式定义对 w 的切换操作；也就是说，取通过切换 $w =$ label(w) 得到的字 w'，并考虑从与 w 相同的顶点出发、标签为 (w′) $= w'$ 的路径 w′。由于 $w = w'$ 属于 Γ_β，桥 w 和 w′ 具有相同端点。

4.14. 函数 $|\cdot|_\alpha$ 的以下性质可由定义推出：

(i) $|X|_\alpha + |Y|_\alpha - 1 \le |XY|_\alpha \le |X|_\alpha + |Y|_\alpha$；特别地，若 Y 是 X 的子词，则 $|Y|_\alpha \le |X|_\alpha$。(ii) 更一般地，若字的集合 $(X_i)_i$ 覆盖一个（普通或循环）字 X，则

$$|X|_\alpha \le \sum_i |X_i|_\alpha.$$

若 $(X_i)_{1 \le i \le k}$ 是 X 的一组两两不相交的子词 k，则

$$\sum_i |X_i|_\alpha \le |X|_\alpha + k.$$

(iii) $|X|_\alpha \le \zeta |X|_{\alpha-1}$。(iv) $|X^\circ|_\alpha = \min\{|Y|_\alpha \mid Y$ 是 $X\}$. 的一个循环移位

若 X 是 Γ_β 中的一条路径，或是 G_β 的表示上的图中的一条路径，则我们用缩写 $|X|_\alpha =$ | label(X)$|_\alpha$。

4.15. 约化词。G_α 中约化的字所成的集合记为 $\mathcal{R}_\alpha$。定义立即表明，$\mathcal{R}_\alpha$ 在取子词的运算下封闭。

若字 X 的任意幂 X^t 在 G_α 中都是约化的，则称 X 在 G_α 中是强循环约化的。

4.16. 粗多边形关系。 G_α 中形如 $X_1u_1\dots X_mu_m = 1$ 的关系，其中字 X_i 在 G_α 中是约化的，且 u_i 是秩为 α 的桥词，称为 G_α 中的粗 m边形关系 。粗多边形关系可以用不同形式表示。例如，粗双边形关系可以写作 $X = uYv$ ，其中 X 和 Y 在 G_α 中是约化的，且u、 $v \in \mathcal{H}_\alpha$。在这种形式下，该关系表示 X 和 Y 在 G_α 中的接近性。

4.17. 我们将关于字的一些术语转用于 Γ_α中的路径。

我们称 Γ_α 中带有在 G_α 中约化这一标签的路径为约化的。注意，根据命题 7.6， Γ_α 中的约化路径 X 是简单的。这意味着我们可以正确处理 X 的子路径的次序、子路径的交集、并集等。

如果 Γ_α 中的两个顶点可以通过一条秩为 α 的桥连接（见 4.13），则称它们接近。如果 Γ_α 中的两条路径 X 和 Y 的起始顶点彼此接近，且终止顶点也彼此接近，则称它们接近 。

如果 Γ_α 中的回路 $\mathrm{P} = \mathrm{X}_1\mathrm{u}_1\mathrm{X}_2\mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{X}_r\mathrm{u}_r$ 满足：每个 X_i 都是约化的，且每个 u_i 都是秩为 α的桥，则称其为一个粗 r边形。路径 X_i 是 P 的边 。

注意，当且仅当存在某些 u 和 v，使得 $\mathrm{X}^{-1}\mathrm{uYv}$ 是一个粗双边形时， Γ_α 中的路径 X 和 Y 才彼此接近。

4.18. 对称性。 所有概念（即关系、函数等）以及涉及凯莱图 Γ_α 中路径的陈述，都以自然的方式在 G_α 的作用下保持不变。例如，若 Γ_α 中的路径 X 和 Y 彼此接近，那么对于任意 $g \in G_\alpha$，路径 gX 和 gY 也彼此接近。我们采用这样一个约定（这对于保持不变性至关重要）：将 G_α 的作用扩展到与 Γ_α中路径相关联的附加数据上。例如，若 F 是秩为 β 、基为 P 的片段，那么 gF 被视为秩为 β 、基为 gP 的片段，依此类推。例如，这意味着对于任意 $g \in G_\alpha$， $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{F}) = \mu_{\mathrm{f}}(g\mathrm{F})$。

我们将默认使用关于取逆的对称性。例如，若 F 是秩为 β、基为 P 的片段，那么 F^{-1}是秩为 β、基为 P^{-1}的片段，并且 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{F}^{-1}) = \mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{F})$。如果一个陈述有两种对称形式，则只表述其中一种（例如引理 10.15 的情形）。

4.19. 数值参数。 在许多情况下，使用 Ω 的逆量而非 Ω 在记号上更为方便：

$$\omega = \frac{1}{\Omega}.$$

注意，由（2-3）可得，

$$\omega \le \frac{1}{480} \quad \text{and} \quad \lambda \ge 20\omega. \tag{4-1}$$

我们将广泛使用 ω 作为测度秩为 α 的片和片段的单位。

2.8 中的条件（S1）常以下列形式使用：如果 P 是关系词 R的一个片段，秩为 α 那么

$$\mu(P) \le \omega|P|_{\alpha-1}. \tag{4-2}$$

为方便读者，我们列出其他全局数值参数，并标明它们首次出现的位置。

$$\nu = \frac{\zeta}{1-2\zeta} = \frac{1}{18}, \quad \theta = \frac{1}{6}(5-22\nu) = \frac{17}{27} \quad \text{(Proposition 7.4)},$$

$$\eta = \frac{1+2\nu}{\theta} = \frac{30}{17} \quad \text{(Proposition 7.9)},$$
$$\xi_0 = 7\lambda - 1.5\omega \quad \text{(Proposition 9.7)},$$
$$\xi_1 = \xi_0 - 2.6\omega \quad \text{(Definition 12.2)},$$
$$\xi_2 = \xi_1 - 2\lambda - 3.4\omega \quad \text{(Definition 12.4)}.$$

5. 带标记边界的图

5.1. 秩为 α的边界标记。我们先介绍一类带有附加数据的图，它们基于 G_α 的表示 (2-2)，尤其可以表示 G_α 中的粗多边形关系。

设 Δ 是表示 (2-2) 上的非奇异图。若对于 Δ 的每个边界环 L，都固定一个乘积表示 $L = X_1 u_1 \dots X_m u_m$，其中路径 X_i 和 u_i 均非空，X_i 的标签在 G_α 中是约化的，且每个 u_i 的标签都属于 $\mathcal{H}_\alpha$，则称 Δ 具有秩为 α 的边界标记。路径 X_i 称为 Δ 的边，路径 u_i 称为 Δ 的桥 。我们也允许将 Δ 的整个边界环 L 视为一条称为循环边的边。在这种情况下，我们要求 L 的标签在 G_α中是循环约化的。

若 $X_1 u_1 \dots X_m u_m = 1$ 是 G_α 中的粗多边形关系，则存在一个边界标签为 $X_1 u_1 \dots X_m u_m$ 的圆盘图，使得对所有 i，标签 $(X_i) = X_i$ 且标签$(u_i) = u_i$。如有必要，可对 Δ 进行细化（见 4.4），从而可以假设 Δ 是非奇异的，且所有路径 X_i 和 u_i 均非空；也就是说，Δ 满足上述定义。类似地，我们可以将 G_α 中的共轭关系与 G_α 的表示上的一个环形图相关联，并赋予其适当的边界标记。

除非另有说明，“秩为 α 的图”始终指“表示式 (2-2) 上带有固定的秩为 α 的边界标记的非奇异图”。我们使用“单边形、双边形、三边形类型的图等”来称呼具有相应边数的秩为 α 的圆盘图。

5.2. 复杂度。若 Δ 是秩为 α 的图，则用 $b(\Delta)$ 表示 Δ 中桥的数量。我们将 Δ 的复杂度 $c(\Delta)$定义为

$$c(\Delta) = b(\Delta) - 2\chi(\Delta).$$

5.3. 降低秩。设 Δ 是秩为 $\alpha \geq 1$ 的图。用 $\Delta_{\alpha-1}$ 表示从 Δ 中移除所有秩为 α 的胞腔后，得到的表示式 $G_{\alpha-1}$ 上的图。经过对 Δ 的细化后，我们假设 $\Delta_{\alpha-1}$ 是非奇异的。

我们假设为 Δ 的每条桥 w 指定一个如 4.13 中定义的秩为 α 的桥划分，即对某些桥 w，固定一个因子分解 $w = u \cdot S \cdot v$，其中 label (u)、label(v) $\in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 label (S) 是秩为 α 的片段；对所有其他 w，均有 label (w) $\in \mathcal{H}_{\alpha-1}$。当 w 具有非平凡的桥划分 $u \cdot S \cdot v$ 时，我们称 w 的原生秩 为 α，并称 S 为 u 的中心弧 。

我们始终假设所有因子 u、v 和 S 都是非空路径（这可以通过细化实现）。

于是，我们定义了一个自然诱导的 $\Delta_{\alpha-1}$ 秩为 $\alpha-1$ 的边界标记（见图1）：

Δ 的• 边成为 $\Delta_{\alpha-1}$的边；此外，我们还有 $\Delta_{\alpha-1}$ 的额外边，定义如下。

• 若 D 是 Δ 中秩为 α 的胞腔，则边界环 $(\delta D)^{-1}$ 将成为 $\Delta_{\alpha-1}$ 的循环边 $\Delta_{\alpha-1}$。

- 对于 Δ 中每个秩为 α 的桥 w，我们按如下方式处理。若 w 的桥划分形式为 u $= v \cdot S \cdot w$，则取 v 和 w 作为 $\Delta_{\alpha-1}$ 的桥，并取中心弧 S 作为 $\Delta_{\alpha-1}$的一条边。否则，我们有 label(w) $\in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ ，并取 w 作为 $\Delta_{\alpha-1}$的桥。

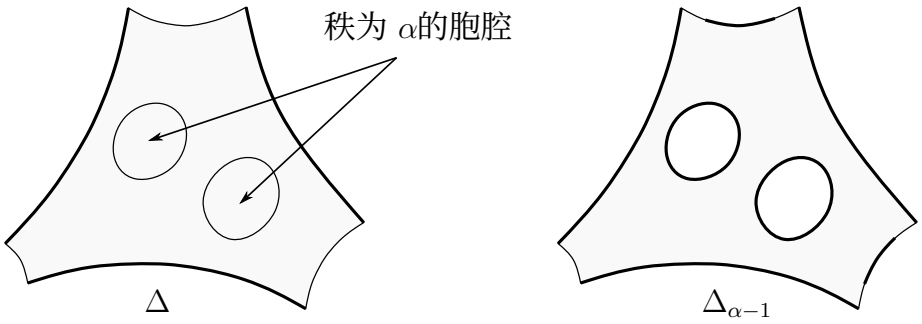

图1. 从 Δ生成 $\Delta_{\alpha-1}$ 。 Δ 的边和 $\Delta_{\alpha-1}$ 由较粗的直线表示

5.4. 胞腔消去。我们引入图 Δ的两种初等约化，其秩为 $\alpha \geq 1$。在这两种情况下，我们都减少秩为 α的胞腔数。与5.3节一样，我们假设为每个桥 Δ固定一个桥划分。

设C和D是 Δ中两个秩为 α 的胞腔。如果存在一条简单路径p，连接分别位于C和D边界上的两个顶点a和b，并且路径$QpRp^{-1}$ 的标签在 $G_{\alpha-1}$ 中等于1，其中Q和R分别是从a和b起始的C和D的边界回路（见图2a），则称C和D构成一个胞-胞可消去对。在这种情况下，

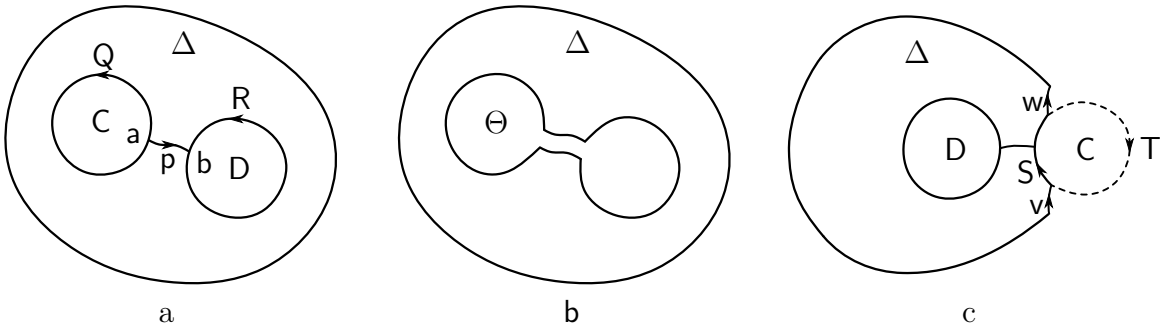

图2。

我们可以按如下方式进行胞-胞消去过程。从 Δ中移除胞腔C和D，沿p切开剩余的图，并用一个 Θ图填充由此产生的区域；该图取自 $G_{\alpha-1}$ 的表示（见图2b）。新图的边界标记自然继承自 Δ 的边界标记，边和桥的标签保持不变。

现在，设 u 是原生秩为 α 的 Δ 的一座桥，其桥划分为 $u = v \cdot S \cdot w$。S 的标签 S 有一个秩为 α 的关联关系词 R，使得对于某个 T（根据 4.11 中的约定），有 $R = ST$。我们沿着 S 附加一个秩为 α 的胞腔 C，使得 $(ST)^{-1}$ 成为 C 的边界环 $(ST)^{-1}$ 的标签（见图2c）。对于新图 $\Delta \cup C$，我们

用一座新的桥 $vT^{-1}w$ 来定义秩为 α 的边界标记，以取代 u。我们称此操作为u 的切换。

若 $\Delta \cup C$ 中的 C 与另一个秩为 α、属于 Δ 的胞腔 D 构成胞-胞消去对，则称 u 与 D 构成桥-胞可消去对。此时，在 $\Delta \cup C$ 中进行胞-胞消去后，我们得到一个图 Δ'，其中有一个胞腔的秩比 Δ 小 α。我们将此约化步骤称为桥-胞消去。

5.5. **定义**（约化图）。设 Δ 是一个秩为 $\alpha \geq 1$ 的图，并且为 Δ 的所有桥固定了桥划分。若经过任意细化后都不存在可消去对，则称 Δ 是约化的。

5.6. 注。下文中，若上下文需要，我们将假设秩为 $\alpha \geq 1$ 的图 Δ 已为 Δ 的所有桥固定了桥划分。特别是，当我们考察子图 $\Delta_{\alpha-1}$ 以及 Δ 具有约化性质时，均适用这一假设。

5.7. 约化过程。如果秩为 α 的图 Δ 不是约化的，那么经过可能的细分后，我们可以得到一对可消去对，并通过执行上述约化过程将其移除。因此，任何秩为 $\alpha \geq 1$ 的图都可以转化为约化图。注意，在约化过程中，我们使用以下两类变换构成的序列：

- 保持框架类型不变的变换（见引理 4.9）；
- 桥切换。

因此，约化后得到的新图 Δ 与 Δ 具有相同的框架类型，至多相差桥切换。

由定义 5.4 和 5.5 可得以下观察，后文将不再明确引用。

5.8. **命题**。设 Σ 是秩为 $\alpha \geq 1$ 的约化图 Δ 的一个子图，并且 Σ 中任一桥的中心弧，要么是 Δ 中某个桥的中心弧的子路径，要么是$(\delta D)^{-1}$ 的子路径，其中D 是 Δ 中秩为 α 的一个胞腔。那么 Σ 也是约化的。

6. 化归到前一秩

6.1. **定义**。设 Δ 是一个秩为 α 的图。Δ 中的一条键 是满足以下条件的简单路径 u：

(i) u 连接 Δ 边上的两个顶点，且仅在 u 的端点处与 Δ 的边界相交；(ii) label(u) 在 G_α 中等于 $\mathcal{H}_\alpha$ 中的一个字。(iii) u 在 Δ 中不与 Δ 的某条边上的子路径同伦（相对端点）；(iv) u 不会从 Δ 中切出一个单连通子图，其边界环为 $u^{\pm 1}$ pvq，其中 p 是 Δ 的某条边的末段，v 是 Δ 的一座桥，q 是 Δ 的某条边的起始段，且 p 和 q 的标签均为空词。见图 3。

6.2. 在大多数情况下，我们将假设键 u 的标签已经属于 $\mathcal{H}_\alpha$。注意，通过沿 u 切开 Δ，并附加一个边界环为 $u^{\pm 1}v$ 的子图（其中 label(v) $\in \mathcal{H}_\alpha$）及其镜像副本，总能满足这一条件，见图4。

6.3. **定义**。秩为 α 的图若在任何细化后都没有纽带，则称为小。

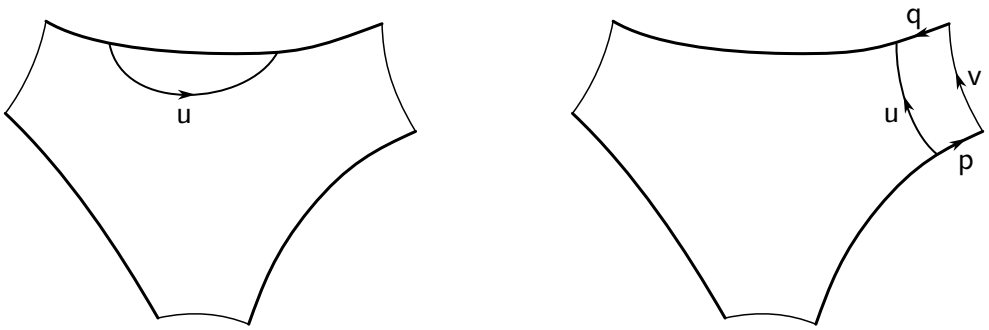

图 3. (iii) 和 (iv) 中排除的情形

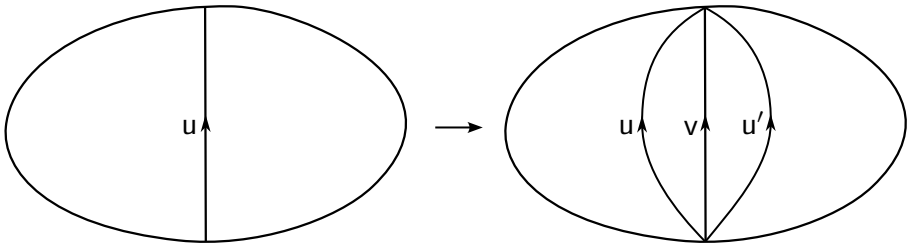

图4。

下述观察显而易见。

6.4. **命题**。

(i) 图 Δ 秩为 α 是否为小图，仅取决于 Δ的框架类型。(ii)秩为 α 的图是否为小图，在桥的切换下保持不变。(iii) 若 Δ 是秩为 0 的小图，且 $c(\Delta) > 0$ ，那么 Δ 所有边的标签都是空词。

6.5. **定义**。 设 Δ 是秩为 $\alpha \geq 1$的图。若圆盘子图 Π 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的邻接子图，则其边界环 Π 具有形式 $\mathrm{Pu_1Qu_2}$，其中 P^{-1} 和 Q^{-1}是 $\Delta_{\alpha-1}$ 各边的非空子路径，并且两条路径 u_i 或者是 $\Delta_{\alpha-1}$中标签为$(\mathrm{u}_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ 的键，或者是 $\Delta_{\alpha-1}$的一座桥。注意，此处我们使用的是秩为$\alpha - 1$ 而非 α的定义 6.1。

路径 $\mathrm{P}^{\pm 1}$ 和 $\mathrm{Q}^{\pm 1}$ 是 Π的邻接弧。如果 P^{-1} 和 Q^{-1} 分别出现在 $\Delta_{\alpha-1}$ 的边 S 和 T 中，那么我们称 Π 为从 S到T 的邻接子图（或介于S和T之间）。

根据定义 2.4，如果 P 和 Q 是边界环为 $\mathrm{Pu_1Qu_2}$ 的邻接子图的邻接弧，那么 P^{-1} 和 Q 的标签在 $G_{\alpha-1}$中相近。

6.6.**引理**（约化图中的小消去）。设 Δ 是秩为 α的约化图。设 Π 是 Δ 的邻接子图，其边界环为 $\delta\Pi = \mathrm{PuQv}$，其中P 和Q 是 Π的邻接弧。假设P^{-1} 出现在秩为 α的胞腔D 的边界环中，并且Q^{-1} 出现在 $\Delta_{\alpha-1}$的一条边S 中。那么：

(i) 如果S 是 Δ 的一条边，则 $\mu(\mathrm{P}) < \rho$;

(ii) 如果S 是与D′ 不同的胞腔的边界环，则 $\mu(\mathrm{P}) < \lambda$；(iii) 如果S 是 Δ 的一个桥的中心弧，则 $\mu(\mathrm{P}) < \lambda$;

证明。 如果 S 是 Δ 的一条边，那么按照 5.1 中的定义，S 的标签在 G_α 中是约化的（如果 S 是一条循环边，则在 G_α 中是循环约化的）。于是，根据 2.5 中约化词的定义， μ(P) $< \rho$ 。

假设 μ(P) $\geq \gamma$ ，并且 S $= \delta$D′ ，其中 D′ 是一个不同于 D 的胞腔。令 R 和 R′ 分别为 D 和 D′ 的边界回路，起点分别为 u 的起始段和终点。由小消去条件 (S2)，有 label(R) $=$label (uR′u^{-1}) 在 $G_{\alpha-1}$ 中成立，因此 D 和 D′ 构成一个胞 - 胞可消去对，这与 Δ 是约化的这一假设相矛盾。

如果 μ(label(P)) $\geq \lambda$ ，并且 S 是 Δ 中一座桥的中心弧，那么以类似的方式可知，D 和 S 构成一个胞-桥可消去对。□

注意到，当 S $= \delta$D 时，该引理未涵盖一种可能性，即 Π 是 D 到其自身的邻接子图。这种情况需要特别考虑。

6.7. **定义**。 图 Δ 中秩为 α 的胞腔 D 称为折叠的，如果存在一条简单路径 u，连接 D 边界上的两个顶点 a 和 b，使得 label(PQuQPu^{-1}) $=1$属于 $G_{\alpha-1}$ ，其中 P 和 Q 分别是 D 中从 a 到 b 以及从 b 到 a 的子路径（图 5）。

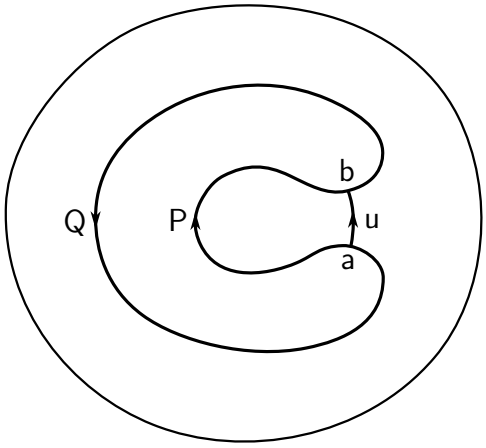

图 5。

6.8. **引理**（无折叠胞）。 假设没有秩为 α 的关系词在 $G_{\alpha-1}$ 中与其逆元共轭。那么折叠胞不存在。因此，如果 Π 是秩为 α 的胞腔到其自身的邻接子图，那么对于 Π 的一条邻接弧P ， 有 μ(标签(P)) $< \lambda$。

证明。 第一条结论直接由定义 6.7 得出。若 Π 是一个秩为 α 的胞腔 D 到其自身的邻接子图，而 P 是 Π 与 μ(label(P)) $\geq \lambda$ 的一条邻接弧，那么按照引理 6.6 的证明，我们可得 D 是一个折叠胞。□

6.9. 我们将考察图 Δ 中秩为 $\alpha \geq 1$ 的互不相交邻接子图的有限集。我们的目标是构造这样一个集合，使其在适当意义下极大。

令 $\{\Pi_i\}$ 为 Δ 的有限个两两不相交的接触子图。补集 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup \Pi_i$ 的每个连通分支 Θ 都是一个秩为 $\alpha - 1$ 的图，并带有一个自然诱导的秩为 $\alpha - 1$ 的边界标记，定义如下:

- 出现在 Θ 边界上的 $\Delta_{\alpha-1}$ 的桥会成为 Θ 的桥；
- 若 $\mathbf{u}$ 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的一条键，且出现在某个邻接子图 Π_i的边界上，而 $\mathbf{u}^{-1}$ 出现在 Θ 的边界上，则 $\mathbf{u}^{-1}$ 会成为 Θ的一座桥；
- Θ的其余边界由 $\Delta_{\alpha-1}$各边的子路径组成，也可能由 $\Delta_{\alpha-1}$的循环边组成；这些都视为 Θ 的边。

对集合 $\{\Pi_i\}$中的邻接子图数量应用归纳法，即可轻易得到以下观察结果。

6.10.**引理**。设 $\{\Pi_i\}$ 是图 Δ中两两不相交的邻接子图的集合，Δ的秩为 $\alpha \geq 1$。设 $\{\Theta_j\}$ 是补集 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$的所有连通分支构成的集合。那么

$$\sum_j c(\Theta_j) = c(\Delta_{\alpha-1}),$$

$$\sum_j \chi(\Theta_j) = \chi(\Delta_{\alpha-1}) + r.$$

6.11.**命题**。设 Δ 是一个秩为 $\alpha \geq 1$的图。那么存在另一个秩为 α 的图 Δ'，以及 Δ' 的一个有限集合 $\{\Pi_i\}$，其中的邻接子图两两不相交，使得：

(i) Δ' 是通过将其子图 $\Delta_{\alpha-1}$ 替换为 $G_{\alpha-1}$ 的表示上的另一个具有相同框架类型的子图而从 Δ 得到的；特别地，Δ 和 Δ' 具有相同的边界标记和相同的框架类型。(ii) $\Delta'_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$ 的任意连通分支 Θ 都是秩为 $\alpha - 1$的小图。(iii) 如果 $c(\Delta_{\alpha-1}) > 0$，那么对于 $\Delta'_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$的每个连通分支 Θ，都有 $c(\Theta) > 0$。

证明。设 Δ 是一个秩为 α 的图，$\{\Pi_i\}$ 是 Δ的有限个两两不相交的邻接子图组成的集合。假设$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$ 的一个连通分支 Θ 有一条键，必要时可先进行细化。我们说明如何从 $\{\Pi_i\}$ 得到一组新的互不相交的邻接子图：通过扩大该集合，或扩大 Δ 中被 $\{\Pi_i\}$覆盖的部分。我们跟踪两个归纳参数：$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$的连通分支数目 N，以及这些分支的边的总长度 L。

在 Δ 中细化 Θ，我们可以假设 Θ 有一条键 $\mathbf{u}$。简单分析可知，Θ 中的任何键也是 $\Delta_{\alpha-1}$ 中的键。按照 6.2 中所述进行手术后，我们可以假设 $\mathbf{u}$ 的标签属于 $\mathcal{H}_{\alpha-1}$。

注意，$\mathbf{u}$ 将 Θ 切分为一个子图 Θ_1，或两个子图 Θ_1 和 Θ_2，它们继承秩为 $\alpha-1$ 的边界标记。根据复杂度 $c(*)$ 的定义，我们立即可知，在这两种情形下，$c(\Theta) = \sum_i c(\Theta_i)$。由于 $\mathbf{u}$ 与 Θ 的一条边的子路径不同伦，对于每个 Θ_i，我们都有 $c(\Theta_i) \geq 0$。我们根据以下两种情形改变集合 $\{\Pi_i\}$：

情形 1：$\mathbf{u}$ 将 Θ 切分为两个子图 Θ_1 和 Θ_2，其中至少一个（设为 Θ_1）满足 $c(\Theta_1) = 0$。那么 Θ_1 是一个有两座桥的单连通子图，因此是 Δ 的一个邻接子图。注意，若对于 Θ_1 和 Θ_2 两者都有 $c(\Theta_1) = c(\Theta_2) = 0$，那么 Δ 不含秩为 α 的胞腔，且本身就是一个邻接子图。于是我们可以取 $\{\Pi_i\} = \{\Delta\}$。我们假设情况并非如此。

令 $\mathbf{v}$ 为 Θ_1的另一条桥。若 $\mathbf{u}$ 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的一条桥，则我们只需将 Θ_1 加入集合 $\{\Pi_i\}$。否则，$\mathbf{v}^{-1}$ 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 中的一条键，它出现在某个 Π_i的边界环上；于是我们将 Θ_1 附加到 Π_i 上（见图 6。注意，Θ_1 至少一条边的标签是

非空的（将定义 6.1 的条件 (iv) 应用于 Θ 和 u 即可得出）。因此，执行此操作后， L 严格减小，而 N 保持不变。

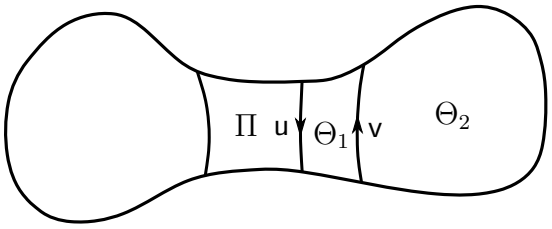

图 6。

情形 2：情形 1 不成立。我们细化 Δ，使 u“分叉”为两条路径 u′ 和 u″（图 7），并得到一个位于 u′ 与 u″之间、属于 Δ 的“退化”邻接子图 Π。然后，我们将 Π 添加到集合 $\{\Pi_i\}$中。此操作严格增大 N，且不改变 L。

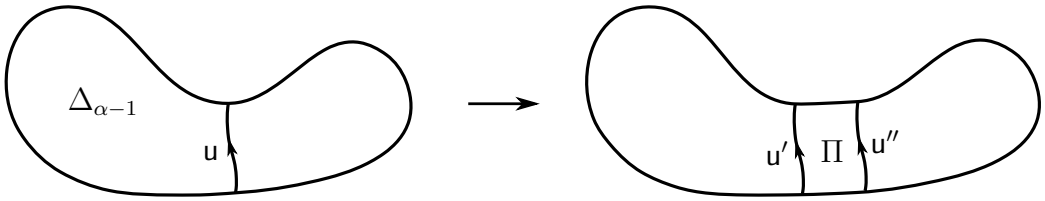

图 7。

从空集 Π_i（其中包含邻接子图）开始，我们递归地执行上述过程。每一步中，我们要么减小 L 而不改变 N，要么增大 N而不改变 L。此外，每次至多存在一个满足 $c(\Theta) \le 0$ 的连通分支 Θ（属于$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$），并且只有当初始图 Δ满足 $c(\Delta_{\alpha-1}) \le 0$ 时，该连通分支才存在。由引理 6.10， N 有上界，因此该过程在有限步后终止。根据构造，终止时，$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_i \Pi_i$ 的所有连通分支都变小。

□

6.12.定义。 我们称满足命题 6.11 结论的集合 $\{\Pi_i\}$ 为 Δ' 的紧致邻接子图集。

7. 图的全局界

7.1. 设 Δ 是秩为 $\alpha \ge 1$ 的图， $\{\Pi_j\}$ 是 Δ 的一个互不相交的邻接子图集。我们将 Δ 铺砌为三类子图：秩为 α 的胞腔、邻接子图 Π_i 以及补集 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup \Pi_i$ 的连通分支。我们分别将这些子图称为指标为 *2*、*1* 和 *0* 的瓦片，也称其为内部瓦片。我们还将 Δ 的外部二维胞腔视为指标为 2 的瓦片，因此加入这些额外瓦片后，我们得到对 2-球面的一个铺砌。所有瓦片的边界环都自然带有划分为子路径的划分（允许子路径为整个回路），这些子路径称为铺砌边，其精确定义如下（见图 8）：

- 每个邻接子图 Π_i 的边界环 $\delta\Pi_i$ 被划分为 P ·u· Q ·v，其中 P 和 Q 是邻接弧；因此 $\delta\Pi_i$ 由四条铺砌边组成。

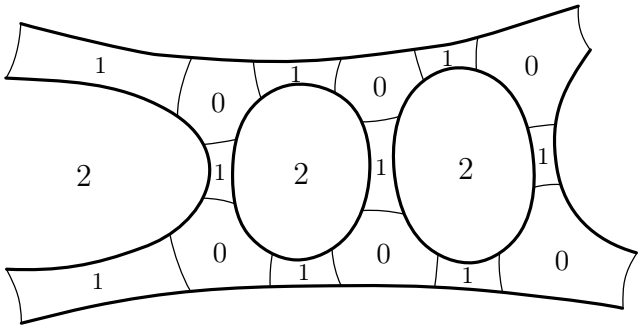

图 8。

- $\Delta_{\alpha-1}-\bigcup_i \Pi_i$ 的一个连通分支 Θ 具有秩为 $\alpha-1$ 的诱导边界标记（在这种情况下，铺砌边可以是 Θ 的循环边）。
- 秩为 α 的胞腔的边界环要么没有非平凡划分（此时将其视为循环铺砌边），要么被划分成交替乘积，由子图 Π_i 的邻接弧和路径 S 组成，其中 S^{-1} 是 $\Delta_{\alpha-1}-\bigcup_i \Pi_i$ 的一个连通分支的边。
- 外部胞腔的边界环 $\mathbf{L}$ 的划分定义如下：我们取由 $\Delta_{\alpha-1}$ 的秩为 $\alpha-1$ 的边界标记所诱导的 $\mathbf{L}$ 的划分，并进一步将秩为 $\alpha-1$ 的边细分成交替乘积，由子图 Π_i 的邻接弧和路径 S 组成，其中 S^{-1} 是 $\Delta_{\alpha-1}-\bigcup_i \Pi_i$的一个连通分支的边。

请注意，我们将铺砌边视为路径，也就是说，它们带有方向。根据构造，所有铺砌边的集合在取逆下封闭，并且每条铺砌边都以唯一的方式出现在某个瓦片的边界环中。

7.2. **定义**。令 $\mathcal{S}$ 为与 $\{\Pi_i\}$相关联的铺砌边集合。对于每个瓦片 T，我们用 $\mathcal{S}(T)$ 表示出现在 T 的边界回路中的铺砌边集合。

一对 $(\Delta,\{\Pi_i\})$ 上的离散联络 是一个函数 $w\colon \mathcal{S}\to\mathbb{R}$，满足对于任意 s，$w(\mathsf{s}^{-1})=-w(\mathsf{s})$。给定 w，我们定义每个内部瓦片 T的曲率 $\kappa(T)$：

$$\kappa(T)=(-1)^{\mathrm{index}(T)}\chi(T)+\sum_{\mathsf{s}\in\mathcal{S}(T)} w(\mathsf{s}).$$

（注意，只有当 T的指标为 0 时，不等式 $\chi(T)\neq 1$才可能成立。）对于外部瓦片 T，根据定义，

$$\kappa(T)=\sum_{\mathsf{s}\in\mathcal{S}(T)} w(\mathsf{s}).$$

根据定义， Δ 的总曲率 $\kappa(\Delta)$ 等于 Δ所有内部瓦片曲率之和。 Δ 外部瓦片的总曲率即沿着边界的曲率 Δ，记为 $\kappa(\partial\Delta)$。

7.3. **命题** （高斯–博内定理的离散版本）。 对于任意秩为 $\alpha\geq 1$ 的图 Δ 以及 Δ的任意一组互不相交的邻接子图 $\{\Pi_i\}$，

$$\kappa(\Delta)+\kappa(\partial\Delta)=\chi(\Delta).$$

特别地，如果任意内部瓦片 T 的 $\kappa(T)$ 都为非正，那么 $\kappa(\partial\Delta)\geq\chi(\Delta)$。

证明。设 Δ 的秩 α 的胞腔数为 t。由引理 6.10 的第二个等式可得

$$\sum_T (-1)^{\mathrm{index}(T)}\chi(T) = \chi(\Delta_{\alpha-1}) + t = \chi(\Delta)$$

其中求和遍及 Δ 的所有内部瓦片 T。在 $\kappa(\Delta)+\kappa(\partial\Delta)$ 的展开中，由于假设 $w(\mathsf{s}^{-1}) = -w(\mathsf{s})$，所有被加项 $w(\mathsf{s})$ 都会抵消。□

7.4. **命题**（单元数的界）。设 Δ 是秩为 $\alpha \geq 1$ 且满足 $c(\Delta_{\alpha-1}) > 0$ 的约化图。记

$$\nu = \frac{\zeta}{1-2\zeta} = \frac{1}{18}, \quad \theta = \frac{1}{6}(5-22\nu) = \frac{17}{27}. \tag{7-1}$$

设 $\mathcal{T}$ 是 Δ 的一个紧邻接子图集。我们假设满足以下附加条件：

$(*)$ Δ 中秩为 α 的每个胞腔至多有一个与 Δ 的边相邻接的子图 $\Pi \in \mathcal{T}$。令 Δ 中秩为 α 的胞腔数为 M。那么

$$\theta M \leq \frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) - \chi(\Delta). \tag{7-2}$$

为证明此结论，我们在有序对 $(\Delta, \{\Pi_i\})$ 上定义一个离散联络 w。注意，根据定义 7.2，$w(\mathsf{S}^{-1}) = -w(\mathsf{S})$，因此定义 $w(\mathsf{S})$ 就会自动定义 $w(\mathsf{S}^{-1})$。

回想一下，$\Delta_{\alpha-1}$ 的边分为三类：Δ的边、原生秩为 α 的桥的中心弧，以及秩为 α的胞腔的边界回路。如果 S 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的一条边，或是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的一条边的子路径，那么我们分别将 S 指定为 I、II 或 III 型。

在定义 w之前，我们对 Δ 执行以下“清理”过程：若 $\Delta_{\alpha-1}$的一座桥出现在某个邻接子图 Π_i 的边界上，则我们将 Π_i 从 Δ 上切下，并将 Π_i 边界上的键作为所得 $\Delta_{\alpha-1}$的一座新桥。因此我们可以假设

(**) $\Delta_{\alpha-1}$ 的每座桥都出现在一块指标为 0 的瓦片的边界上（即$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$的一个连通分支）。

定义 w 如下：

(i) 设 Θ 是$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$的一个连通分支。对于出现在 Θ边界上的每条秩为$\alpha-1$ 的键或桥 u，定义

$$w(\mathsf{u}) = -\frac{1}{3}(1+\nu).$$

对于 Θ 的每条边 S，

$$w(\mathsf{S}) = \zeta\theta|\mathsf{S}|_{\alpha-1}.$$

(ii) 设 $\Pi \in \mathcal{T}$，并令 $\delta\Pi = \mathsf{P}\mathsf{u}_1\mathsf{Q}\mathsf{u}_2$ 如定义 6.5 所述。由 **(**)**，对于每个 $i=1$，铺砌边 u_i^{-1} 出现在 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的某个连通分支的边界上。由 **(i)**，我们已经有

$$w(\mathsf{u}_i) = -w(\mathsf{u}_i^{-1}) = \frac{1}{3}(1+\nu).$$

我们定义 $w(\mathsf{P})$（ $w(\mathsf{Q})$ 的定义类似）：

$$w(\mathsf{P}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathsf{P} \text{ has type I or II} \\ \frac{1}{3}(1-2\nu) & \text{if } \mathsf{P} \text{ has type III and } \mathsf{Q} \text{ has type I} \\ \frac{1}{6}(1-2\nu) & \text{if } \mathsf{P} \text{ has type III and } \mathsf{Q} \text{ has type II or III} \end{cases} \tag{7-3}$$

(iii) 设 D 是 α 的一个胞腔，其秩为 Δ，S 是出现在 δD 中的一条铺砌边。w(S) 的值已由 (i) 和 (ii) 定义。我们有：

- 若 S^{-1} 是 D 的一个邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 与 $\Delta_{\alpha-1}$ 中一条 I 型或 II 型边的邻接弧，则 $w(\mathsf{S}) = -\frac{1}{3}(1-2\nu)$。
- 若 S^{-1} 是 D 的一个邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 与 $\Delta_{\alpha-1}$ 中一条 III 型边的邻接弧，则 $w(\mathsf{S}) = -\frac{1}{6}(1-2\nu)$。
- 若 S^{-1} 出现在 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的某个连通分支的边界上，则$w(\mathsf{S}) = -\zeta\theta|\mathsf{S}|_{\alpha-1}$。

我们为任意内部瓦片的曲率给出一个上界。对于邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$，由 (ii) 可立即得到 $\kappa(\Pi) \le 0$。

设 Θ 是 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$的一个连通分支。我们有

$$\kappa(\Theta) = \chi(\Theta) - \frac{1}{3}(1+\nu)b(\Theta) + \zeta\theta \sum_{\mathsf{S}} |\mathsf{S}|_{\alpha-1}$$

其中求和遍历 Θ的各边 S。

若 $\alpha = 1$，则 $\sum |\mathsf{S}|_{\alpha-1} = 0$ （命题 6.4(iii)）。若 $\alpha \ge 2$，则由命题 7.8$_{\alpha-1}$,

$$\theta \sum |\mathsf{S}|_{\alpha-1} \le \frac{2}{3}(1+\nu)b(\Theta) - \chi(\Theta)$$

利用 $c(\Theta) > 0$ 这一事实，很容易验证，在两种情况下都有 $\kappa(\Theta) \le 0$ 以及 $\alpha = 1$ 和$\alpha \ge 2$。（临界情形是 $b(\Theta) = 3$ 且 $\chi(\Theta) = 1$；此时，根据 ν的定义 (7-1)，若$\alpha = 1$，则有 $\kappa(\Theta) = -\nu$；若 $\alpha \ge 2$，则有 $\kappa(\Theta) = 0$。）

最后，设 D 是 Δ中秩为 α 的一个胞腔。我们证明 $\kappa(\mathsf{D}) \le -\theta$。由 (*)，D 至多有一个与 $\Delta_{\alpha-1}$ 的 I 型边相邻接的子图。我们先考虑 D 有一个这样的子图的情形。设 r 是 D 与 II 型和 III 型边相邻接的子图数量。D 的其余 $r+1$ 条子路径 $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \ldots \mathsf{S}_{r+1}$ 是铺砌边，其中 S_i^{-1} 属于 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$的各连通分支的边界回路；因此我们有

$$\kappa(\mathsf{D}) \le 1 - \frac{1}{3}(1-2\nu) - r\left(\frac{1}{6}(1-2\nu)\right) - \zeta\theta \sum_{i=1}^{r+1} |\mathsf{S}_i|_{\alpha-1}.$$

根据 2.8 中的条件（S1）以及引理 6.6、6.8,

$$\sum_{i=1}^{r+1} |\mathsf{S}_i|_{\alpha-1} \ge (1 - \rho - r\lambda)\Omega = (9-r)\lambda\Omega.$$

因此

$$\kappa(\mathsf{D}) \le \frac{2}{3}(1+\nu) - r\left(\frac{1}{6}(1-2\nu)\right) - \zeta\theta\lambda\Omega \max(0,\ 9-r). \tag{7-4}$$

如果 $r \geq 9$，那么（7-4）右侧 r 前的系数为负。如果 $r \leq 9$，那么该系数为

$$-\frac{1}{6}(1-2\nu)+\zeta\theta\lambda\Omega$$

根据第二个不等式 (2-3)，我们有 $\zeta\theta\lambda\Omega \geq 20\zeta\theta = \theta > \frac{1}{6}$，因此它为正。因此，式 (7-4) 中的表达式在 $r = 9$ 时取最大值。将 $r = 9$ 代入 (7-4) 的右侧，我们得到表达式

$$\frac{2}{3}(1+\nu)-\frac{9}{6}(1-2\nu)$$

根据 (7-1)，它等于 $-\theta$。这表明 $\kappa(\mathsf{D}) \leq -\theta$。

假设 D 没有与 I 型边相邻的子图。与上文一样，设 r 为 D 中与 II 型和 III 型边相邻的子图数量，而 $\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2$、.....、$\mathsf{S}_r$ 为 D 中剩余的 r 条铺砌边，其中 S_i^{-1} 属于 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$各连通分支的边界回路。此时，我们用以下表达式代替 (7-4)：

$$\kappa(\mathsf{D}) \leq 1 - r\left(\frac{1}{6}(1-2\nu)\right) - \zeta\theta N \max(0,\ 1-r\lambda). \tag{7-5}$$

如果我们允许 r 变为 b 若为非负实数，则右侧的最大值为

$$1 - r\lambda = 0.$$

将 $r = \frac{1}{\lambda}$ 代入（7-5）的左侧，我们得到表达式 n

$$1 - \frac{1-2\nu}{6\lambda}$$

这小于 $-\theta$，因为 $\lambda \leq \frac{1}{24}$。

最后，我们计算 $\kappa(\partial\Delta)$ 的一个上界。对于出现在 Δ 的某个外部胞腔的边界环中的铺砌边 S（该回路具有形式 L^{-1}，其中 L 是 Δ 的一个边界环），有三种可能：S^{-1} 是子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 的一条邻接弧；S^{-1} 是 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的某个连通分支的一条边；或者 S^{-1} 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的一座桥。在前两种情况下，根据（ii）或（i），我们分别有 $w(\mathsf{S}) \leq 0$。如果 S^{-1} 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 的一座桥，那么由 (**)，S^{-1} 也是 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的某个连通分支的一座桥，并且由（i），

$$w(\mathsf{S}) = \frac{1}{3}(1+\nu).$$

注意，Δ 的每个桥至多产生两个 $\Delta_{\alpha-1}$的桥。因此 $b(\Delta_{\alpha-1}) \leq 2b(\Delta)$。我们得到

$$\kappa(\partial\Delta) \leq \frac{1}{3}(1+\nu)b(\Delta_{\alpha-1}) \leq \frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) \tag{7-6}$$

应用命题 7.3 可得

$$\frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) - \theta M \geq \chi(\Delta)$$

正如所需。命题 7.4 的证明至此完成。

7.5. **引理**。设 Δ 是一个秩为 $\alpha \geq 1$的约化圆盘图。若 Δ 只有一条（循环或非循环）边，则 Δ 不含秩为 α的胞腔。

证明。设 Δ 是一个秩为 α 且只有一条边的约化圆盘图，即 Δ 属于单边形或零边形类型。假设 Δ 有一个秩为 α的胞腔。我们选取这样的 Δ，使其秩为 α的胞腔数量 M 非零且尽可能小。于是有 $\chi(\Delta_{\alpha-1}) \leq 0$，从而 $c(\Delta_{\alpha-1}) > 0$。我们可以假设为 Δ 指定了一个由邻接子图组成的紧集 $\mathcal{T}$。若 Δ 的每个秩为 α的胞腔至多有一个邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 通向 Δ 的边，则应用命题 7.4 可得

$$\theta M \leq \frac{2}{3}(1+\nu) - 1 < 0.$$

因此，Δ 有一个秩为 α 的胞腔 D，它有两个邻接子图 Π_1、$\Pi_2 \in \mathcal{T}$ 与 Δ的一边相邻。并集 $\mathrm{D} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 从 Δ 中截出一个秩为 α 的圆盘图 Δ'，它只有一条边和一座桥（图 9）。假设 Δ 是约化的，这意味着 Δ' 也是

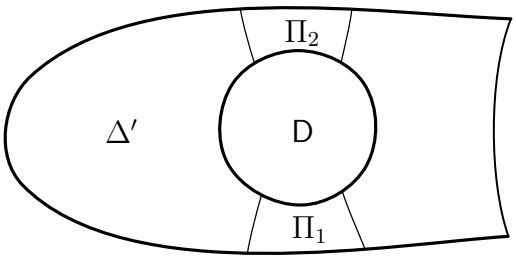

图 9。

约化的。根据 Δ的选取，Δ' 没有秩为 α的胞腔。于是，对于$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的某个连通分支 Θ，有 $c(\Theta) = 0$，这与紧集 $\mathcal{T}$ 由 Δ 的邻接子图组成这一选取相矛盾（定义 6.12）。□

7.6. **命题**。如果非空字 X 在 G_α 中是约化的，那么 $X \neq 1$ 属于 G_α。

证明。令 $\alpha \geq 1$。设 X 在 G_α 中是约化的，且 $X = 1$ 属于 G_α。考虑一个秩为 α 的约化圆盘图 Δ，其一条边标记为 X，一座桥标记为空词。引理 7.5 表明 Δ 没有秩为 α的胞腔，因此有 $X = 1$ 属于 $G_{\alpha-1}$。由于$\mathcal{R}_\alpha \subseteq \mathcal{R}_{\alpha-1}$，通过归纳法可得 $X = 1$ 属于自由群 G_0。由于 X 是自由约化的（定义 2.5），我们得出 X 为空。□

7.7.**引理**。设 Δ 是一个秩为 $\alpha \geq 1$ 的约化图，且 u 是 Δ中的一条简单路径，与 Δ的一条边的子路径 S 端点相对同伦。此外，假设u的标签在 $G_{\alpha-1}$ 中等于 $\mathcal{H}_{\alpha-1}$中的一个字。那么，Δ 中以Su^{-1} 为边界环的子图不含秩为 α的胞腔。

证明。令 Δ' 为 Δ 的子图，其边界环为 Su^{-1}，并令 $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ 为满足 label (u) $= w$ in $G_{\alpha-1}$ 的一个字。我们在 Δ' 上附加一个关于 $G_{\alpha-1}$ 的表示、边界环为 uw^{-1} 的图 Θ，其中 label (w) $= w$。我们将 $\Delta' \cup \Theta$ 视为一个秩为 α、具有一条边 S 和一座桥 w^{-1} 的图。注意，$\Delta' \cup \Theta$ 中端点位于 Δ' 的任意简单路径，都端点相对同伦于 Δ' 中的一条简单路径。此外，即使将 $\Delta' \cup \Theta$ 细化为图 Σ，并在 Σ 中取 Δ' 的一个细化而非 Δ'，这一结论仍然成立。这意味着 $\Delta' \cup \Theta$ 是一个秩为 α 的约化图。因此，根据引理 7.5，$\Delta' \cup \Theta$ 不含秩为 α 的胞腔。□

7.8.**命题** （小图的边界估计（原始形式））。 令 Δ 为一个秩为 $\alpha \geq 1$ 的小图。假设 Δ 不是双边形类型，且 $c(\Delta_{\alpha-1}) > 0$。那么

$$\theta \sum_{S} |S|_{\alpha} \leq \frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) - \chi(\Delta) \tag{7-7}$$

其中，求和遍及 Δ 的所有边 S 。

证明。 我们将 Δ 约化，并赋予它一个紧集 $\mathcal{T}$，其中包含邻接子图。按照命题 7.4 的证明，我们将 $\Delta_{\alpha-1}$ 的 I 型、II 型和 III 型边的子路径进行分类，并对 $\mathcal{T}$ 作几点观察。

断言 *1*： $\Delta_{\alpha-1}$ 的两个（不一定不同的）*I* 型边之间不存在邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 。

假设 Π 是这样一个邻接子图。设 $\delta\Pi = Pu_1Qu_2$ ，其中 P 和 Q 是 Π 的邻接弧。根据定义 6.5，至少有一个 u_i，不妨设为 u_1，，是 $\Delta_{\alpha-1}$ 中的一条键（否则 $\Pi = \Delta_{\alpha-1}$ ，这与假设 $c(\Delta_{\alpha-1}) > 0$ 矛盾）。对照定义 6.1 可知，u_1 也是 Δ 中的一条键（定义 6.1 的条件 (iii) 由引理 7.7 保证成立）。这与 Δ 很小的假设矛盾。

断言 *2*：通过对 Δ 作非本质改变，我们可以假设命题 *7.4* 的条件 *(*)* 成立，即 Δ 中秩为 α 的每个胞腔至多有一个邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 与 $\Delta_{\alpha-1}$ 的 *I* 型边相邻。

假设一个秩为 α 的胞腔 D 有两个邻接子图 $\Pi_i \in \mathcal{T}$ （$i = 1, 2$）与 I 型边 S_i 相邻。设 P_i 是 Π_i 的邻接弧，它出现在 S_i 中。$D \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 的边界环具有如下形式：$P_1u_1P_2u_2$ ，其中 u_i 的标签属于 $\mathcal{H}_{\alpha}$。由于 Δ 很小，因此对于每条路径 u_i，定义 6.1 的条件 (iii) 或 (iv) 至少有一个不成立。如果 $S_1 = S_2$ ，且某个 u_i （因而 u_1 和 u_2 都）与 S_1 的某条子路径端点相对同伦，那么 $D \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 切出 Δ 的一个约化圆盘子图 Δ'，其桥为 u_1^{-1} 或 u_2^{-1}。由引理 7.5， Δ' 不含秩为 α 的胞腔。因此，或者 Δ' 是 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{T}} \Pi$ 的一个连通分支，或者 Δ' 包含 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi \in \mathcal{T}} \Pi$ 的一个连通分支 Θ，且 $c(\Theta) = 0$。这与紧集 $\mathcal{T}$ （由 Δ 的邻接子图组成）的选取相矛盾。

假设定义 6.1 的条件 (iv) 对 u_1 和 u_2均不成立。那么，经过对 Π_1 和 Π_2重新编号，可令 $D \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 截去一个单连通子图 Δ'，其边界环为 $u_1^{-1}T_1vT_2$ ，其中 P_1T_1 是 S_1, 的一个末段，v 是 Δ的桥，T_2P_2 是 S_2 的一个起始段，并且 P_1T_1 和 T_2P_2 的标签为空，见图 10a。在这种情况下，我们从 Δ 中截去子图 $D \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \Delta'$。该操作不会改变 (7-7) 中 $\sum |S|_{\alpha}$、 $b(\Delta)$ 和 $\chi(\Delta)$ 的值，并保持 Δ 很小这一假设。此外，对于修改后的 Δ ，我们还有 $c(\Delta_{\alpha-1}) > 0$ （否则 Δ 将是一个单边形类型，这与引理 7.5 矛盾）。

断言 *3*：经过对 Δ 的非本质改变，我们可以假设 $\Delta_{\alpha-1}$的 *I* 型边与 *II* 型边之间不存在接触子图 $\Pi \in \mathcal{T}$。

假设 $\Pi \in \mathcal{T}$ 是 I 型边与 II 型边之间的邻接子图。设 $\delta\Pi = Pu_1Qu_2$ ，其中 P 位于 Δ 的一条边 S 上，而 Q 位于桥 $v = v_1Rv_2$ 的中心弧 R 上。注意，在由路径 u_1, u_2 和 v 构成的图中，P 的任一端点都可以通过一条标记为 $\mathcal{H}_{\alpha}$ 中某个字的路径与 v 的任一端点相连，见

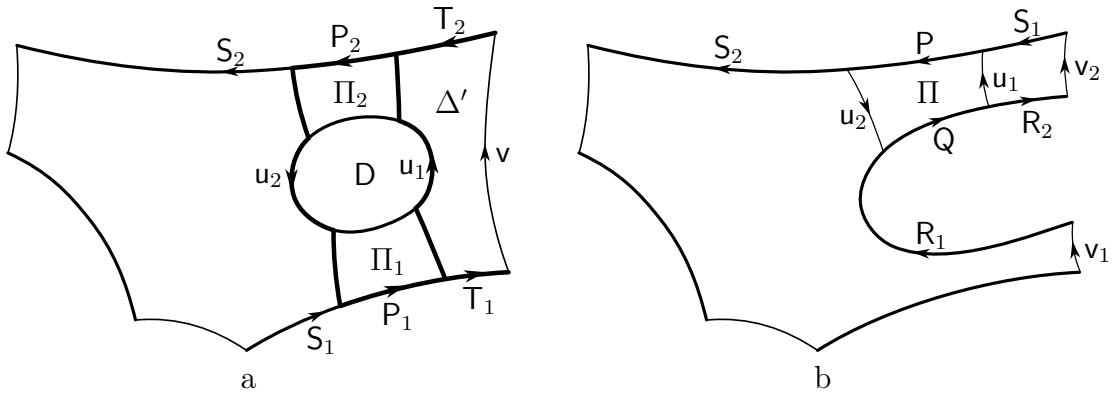

图10。

图10b。由于 Δ 很小，这很容易推出 v 和 S 在 Δ 的边界上相邻。不失一般性，利用对称性，假设 vS 出现在 Δ 的一个边界环中。因此，$\mathsf{R} = \mathsf{R}_1\mathsf{Q}\mathsf{R}_2$，且 $\mathsf{S} = \mathsf{S}_1\mathsf{P}\mathsf{S}_2$。注意，标签 $(\mathsf{S}_1\mathsf{P})$ 为空（否则，$\mathsf{v}_1\mathsf{R}_1\mathsf{u}_1^{-1}$ 在细化后会在 Δ 中给出一个键），而标签 $(\mathsf{Q}\mathsf{R}_2)$ 非空（因为 u_1 在 $\Delta_{\alpha-1}$ 中是一个键）。我们切去 Δ 中由 $\mathsf{Q}\mathsf{R}_2\mathsf{v}_2\mathsf{S}_1\mathsf{P}\mathsf{u}_1$ 所围成的子图。与前一个断言的证明一样，此操作不会改变 (7-7) 中各项的值，也不会改变 $c(\Delta_{\alpha-1})$ 的值，并且仍满足 Δ 很小这一假设。另一方面，我们减小了 $\Delta_{\alpha-1}$ 中各边标签的总长度。断言得证。

现在，我们通过修改命题 7.4 的证明中定义的函数 w，来定义 $(\Delta, \mathcal{T})$ 上的离散联络 w^*。新函数 w^* 仅在邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$ 的邻接弧上与 w 不同，具体如下。设 $\delta\Pi = \mathsf{P}\mathsf{u}_1\mathsf{Q}\mathsf{u}_2$，其中 P 和 Q 是 Π 的邻接弧。根据断言 1 和 3，若 P 是 I 型，则 Q 必为 III 型。我们不采用 (7-3)，而是定义

$$w^*(\mathsf{P}) = \begin{cases} \theta & \text{if P has type I} \\ \frac{1}{3}(1-2\nu) - \theta & \text{if P has type III and Q has type I} \\ \frac{1}{6}(1-2\nu) & \text{in all other cases} \end{cases}$$

对于邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$，我们立即有 $\kappa^*(\Pi) \le 0$，其中 κ^* 表示由 w^* 定义的曲率函数。若 Θ 是 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的一个连通分支，则 $\kappa^*(\Theta) = \kappa(\Theta) \le 0$。设 D 是 Δ 中秩为 α 的一个胞腔。根据断言 2

$$\kappa^*(\mathsf{D}) \le \kappa(\mathsf{D}) + \theta \le 0.$$

我们给出 $\kappa^*(\partial\Delta)$ 的一个界。令 t 为所有位于 I 型边与 III 型边之间的邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$的数量。那么

$$\begin{aligned} \kappa^*(\partial\Delta) &\le \frac{1}{3}(1+\nu)b(\Delta_{\alpha-1}) - \theta t - \zeta\theta \sum_{\mathsf{S}\in\mathrm{sides}(\Theta)} |\mathsf{S}|_{\alpha-1} \\ &\le \frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) - \theta \sum_{\mathsf{S}\in\mathrm{sides}(\Delta)} |\mathsf{S}|_{\alpha} \end{aligned}$$

其中 Θ 遍历 $\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$的所有连通分支。应用命题 7.3，我们得到

$$\frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) - \theta \sum_{\mathsf{S}\in\text{sides}(\Delta)} |\mathsf{S}|_\alpha \geq \chi(\Delta)$$

如所需。 □

下面我们将经常以稍加简化的形式使用命题 7.8。我们再引入一个数值参数

$$\eta = \frac{1+2\nu}{\theta} = \frac{30}{17}.$$

7.9. 命题 （小图的边界边，简化形式）。 若 Δ 是秩为 α 且复杂度为正的小图，则

$$\sum_{\mathsf{S}\in\,\text{sides}(\Delta)} |\mathsf{S}|_\alpha \leq \eta\, c(\Delta). \tag{7-8}$$

证明。由命题 6.4(iii)，我们可以假设 $\alpha \geq 1$。只需注意，若$c(\Delta) \geq 1$，则

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{2}{3}(1+\nu)b(\Delta) - \chi(\Delta)\right) \leq \eta\, c(\Delta).$$

（临界情形是 $b(\Delta) = 3$ 且 $\chi(\Delta) = 1$。在这种情形下，等式成立。） □

7.10.**引理**。 设 Δ 是秩为 $\alpha \geq 1$ 的约化图， $\mathcal{T}$ 是 Δ的紧邻接子图集。设D 是 Δ中秩为 α 的一个胞腔。则以下结论成立。

(i)设 Π_1 和 Π_2 是 $\Delta_{\alpha-1}$的一条边S 与D 的两个邻接子图。那么，由 δD、 Π_1、Π_2 和S 围成的 Δ 的子图 Θ （若S 是循环边，则有两个这样的子图）不是单连通的（见图 ***11a***）。(ii) 设 Π 是D 与其自身的一个邻接子图。那么，由 δD 和 Π 围成的 Δ 的子图 Θ'（见图 ***11b***）不是单连通的。(iii) 若 Δ 是单连通的，则秩为 α 的任一胞腔与 $\Delta_{\alpha-1}$ 的每条边至多有一个邻接子图，且与其自身没有邻接子图。

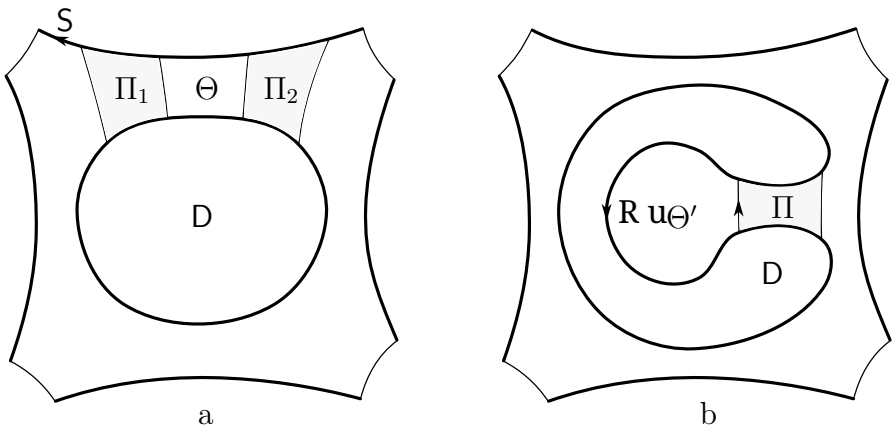

图11。

证明。 (i) 假设 Θ 是单连通的。我们将 Θ 视为秩为 α 且只有一条边的图，该边是 S 的子路径。 Δ 是约化的这一假设意味着 Θ 是约化的。根据引理 7，5 Θ没有秩为 α的胞腔。由此，我们与为 Δ的邻接子图选取紧集 $\mathcal{T}$ 这一选择相矛盾。

(ii) 假设 Θ' 是单连通的。设 $\partial\Theta' =$Ru，其中 R^{-1} 出现在 D 的边界环中，而 u^{-1} 是 $\Delta_{\alpha-1}$ 中出现在 $\partial\Pi$ 中的键。我们将 Θ' 视为一个秩为 α 的图，其中一条边 S 标记为空词，且有一座桥 Ru（严格来说，为符合 5.1 中的定义，我们必须取一份 Θ' 的副本并进行细化，使 S 成为一条非空路径）。由引理 7.5 Θ'，其中没有秩为 α 的胞腔，因此我们得到矛盾，因为在这种情况下，由于定义 6.1 的条件 (iii)，u^{-1} 不可能是 $\Delta_{\alpha-1}$ 中的一条键。

(iii) 由 (i) 和 (ii) 得出。 □

7.11.**命题** （小复杂度的图是单层的）。 设 Δ 是一个秩为 $\alpha \geq 1$ 的约化图，且设 $\mathcal{T}$ 是 Δ 的一个紧邻接子图集。

(i) 如果 Δ 是双边形类型的圆盘图，那么 Δ 中秩为 α 的每个胞腔都分别与 Δ的两条边有一个邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$。(ii) 如果 Δ 是三边形或四边形类型的圆盘图，那么 Δ 中秩为 α 的每个胞腔都至少与 Δ的两条边有邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$。(iii) 如果 Δ 是有两条循环边的环形图，那么 Δ 中秩为 α 的每个胞腔都分别与 Δ的每条边有一个邻接子图 $\Pi \in \mathcal{T}$。(iv) 如果 Δ 是有一条循环边和一条非循环边的环形图，那么 Δ 中秩为 α 的每个胞腔D 至少有两个邻接子图 $\Pi, \Pi' \in \mathcal{T}$ 与 Δ的边相接。这里允许 Π 和 Π' 都是 D 与 Δ的非循环边之间的邻接子图。

证明。 设 Δ 是一个秩为 α、属于 (i)–(iv) 中所列类型的约化图。若秩为 α 的胞腔 D 满足相应陈述 (i)–(iv) 的结论，则称 Δ 中的 D 为正则胞腔，否则称为例外胞腔。我们需要证明 Δ 不含例外胞腔。注意，由引理 7.10 可知，例外胞腔至多有一个邻接子图与 Δ 的边相邻，也就是说，这种胞腔满足命题 7.4 的条件 (*)。我们对 Δ 中秩为 α 的胞腔数 M 作归纳。

(i) 设 Δ 为双边形类型，即一个有两条边的圆盘图。若 Δ 中没有秩为 α 的正则胞腔，但至少有一个例外胞腔，则应用命题 7.4 会得到矛盾。

假设 D 是 Δ 中的一个正则胞腔。设 Π_i ($i = 1, 2$) 为 D 与 X_i 的邻接子图。$\mathrm{D} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 在 Δ 中的补集由两个连通分支 Δ_1 和 Δ_2 组成，它们均为双边形类型，且带有秩为 α 的诱导边界标记（见图 12a）。包含在 Δ_i 中的子图集合 $\Pi \in \mathcal{T}$ 是 Δ_i 的一个紧邻接子图集。其中每个子图 Δ_i 的秩为 α 的胞腔数都更少，因此由归纳法可得该结论。

(ii) 设 Δ 属于三边形类型或四边形类型。假设 Δ 有一个正则胞腔 D。令 Π_i ($i =$1, 2) 为 D 与 Δ 的边相邻接的子图。Δ–D$\cup\Pi_1\cup\Pi_2$ 的补集由两个连通分支 Δ_1 和 Δ_2 组成，它们带有秩为 α 的诱导边界标记（图 12b），使它们成为秩为 α 的图。若 Δ 属于三边形类型，则 Δ_1 和 Δ_2 分别属于三边形类型和双边形类型。若 Δ 属于四边形类型，则 Δ_1 和 Δ_2 要么分别属于四边形类型和双边形类型，要么 Δ_i 都属于三边形类型。于是我们可以引用 (i) 和归纳假设。

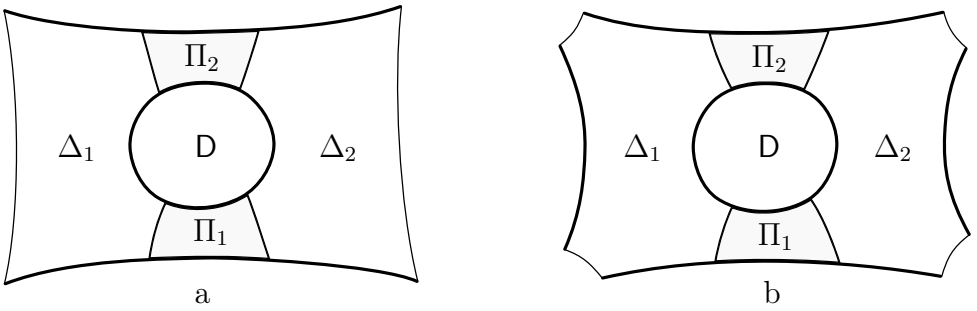

图12。

假设 Δ 中秩为 α 的所有胞腔都是例外的。那么根据命题 7.4

$$\theta M \le \frac{8}{3}(1+\nu) - 1 \tag{7-9}$$

这意味着 $M \le 2$。按照命题 7.4 的证明，我们计算出 M 的一个更好的界，并得出 $M = 0$。

假设 $M \ge 1$，并令 D 为 Δ 中秩为 α 的一个胞腔。考虑在命题 7.4 的证明中定义于（Δ, $\Im$）上的离散联络 w。D 的 κ 的一个上界由（7-4）给出。（7-4）的右侧是关于 r 的线性表达式；正如我们在命题 7.4 的证明中所见，在 $r \le 9$ 的情形下，r 前的系数为正。为求得这个上界的取值，我们计算 r 的最大可能值。注意，由引理 7.10 可知，D 与自身没有邻接子图，与 Δ 中另一个秩为 α 的胞腔至多有一个邻接子图（如果该胞腔存在），而 D 与 II 型边的邻接子图数至多为 4；因此 $r \le 5$。于是，（7-4）右侧的最大值在 $r = 5$ 时取得。将 $r = 5$ 代入（7-4），并利用（2-3），得到

$$\begin{aligned}\kappa(\mathsf{D}) &\le \frac{2}{3}(1+\nu) - \frac{5}{6}(1-2\nu) - 4\zeta\theta\lambda\Omega \\ &\le -\frac{1}{6} + \frac{7}{3}\nu - 4\theta = -\frac{138}{54}.\end{aligned}$$

由 (7-6)

$$\kappa(\partial\Delta) \le \frac{8}{3}(1+\nu) = \frac{152}{54}.$$

命题 7.3 给出

$$1 = \kappa(\Delta) + \kappa(\partial\Delta) \le \frac{14}{54}.$$

矛盾表明假设 $M \ge 1$ 不可能成立。

(iii)：与（ii）的证明类似，首先假设 Δ 有一个秩为 α 的正则胞腔 D，它通过两个邻接子图 Π_1 和 Π_2 与 Δ的边相邻。根据引理 7.10(i)，它们是与 Δ 的不同边相邻的邻接子图。于是补集 Δ –(D $\cup\, \Pi_1 \cup \Pi_2$) 是一个双边形类型的图，结论由 (i) 直接得出。

如果 Δ 的所有秩为 α 的胞腔都是例外胞腔，并且至少有一个秩为 α 的胞腔，那么应用命题 7.4 会立即导出矛盾。

(iv)：假设 Δ 有一个秩为 α 的正则胞腔 D，它与 Δ的边之间有两个邻接子图 $\Pi_i (i = 1, 2)$。根据 Π_1 和 Π_2是否分别邻接于 Δ 的不同边，分为两种情况（见图 13）。在第一种情况下，

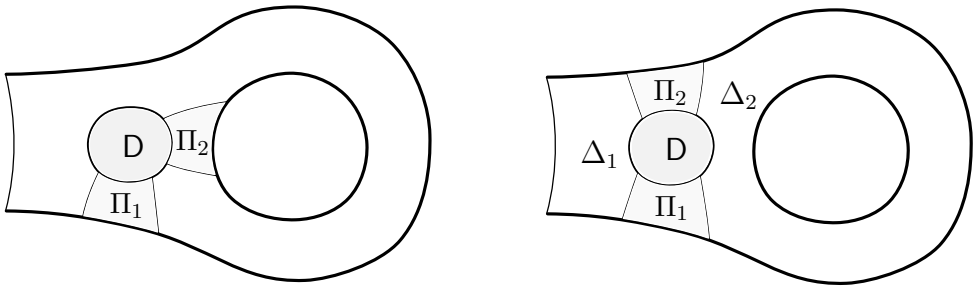

图 13。

补集 $\Delta - (\mathsf{D} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2)$ 是一个三边形类型图，结论由已证明的部分 (ii) 得出。在第二种情况下，$\Delta - (\mathsf{D} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2)$ 由一个单连通分支 Δ_1 和一个只有一条非循环边的环形分支 Δ_2 组成。对于 Δ_1 中秩为 α 的胞腔，结论由 (i) 得出；对于 Δ_2 中秩为 α 的胞腔，由于 Δ_2 中秩为 α 的胞腔数严格少于 Δ，因此可以应用归纳法。

如果所有秩为 α 的 Δ 的胞腔都是例外的，那么应用命题 7.4 得到 $M = 0$。□

7.12.**命题** (小型三边形或四边形类型图)。设 Δ 是一个秩为 α、类型为三边形或四边形且边为 S_i $(1 \le i \le k,\ k = 3$ 或 $k = 4)$的小图。那么

$$\sum_{i=1}^{3} |\mathsf{S}_i|_\alpha \le 4\zeta\eta \quad or \quad \sum_{i=1}^{4} |\mathsf{S}_i|_\alpha \le 6\zeta\eta$$

分别适用于三边形和四边形的情形。

证明。由命题 6.4(iii)，我们可以假设 $\alpha \ge 1$。

我们假设 Δ 是约化的，并给定了一个由邻接子图组成的紧集 $\mathcal{T}$。沿用命题 7.8 证明中的论证，我们可以假设该证明中的断言 1–3 在此情形下成立。由断言 2 和命题 7.11(ii)，Δ 不含秩为 α的胞腔。由断言 1 和 3，$\mathcal{T}$ 仅在 $\Delta_{\alpha-1}$ 的边之间具有 II 型邻接子图。因此，Δ 的任意一条边都完全落在$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$的某个连通分支 Θ 的边界环中。由引理 6.10，$\sum_\Theta c(\Theta) = c(\Delta_{\alpha-1})$。对$\Delta_{\alpha-1} - \bigcup_{\Pi\in\mathcal{T}} \Pi$ 的连通分支 Θ 应用命题 $7.9_{\alpha-1}$，我们得到

$$\sum_i |\mathsf{S}_i|_{\alpha-1} \le \eta c(\Delta_{\alpha-1}) \le (b(\Delta_{\alpha-1}) - 2)\eta$$

由 4.14(iii) 可得所需的不等式。□

7.13. **命题** (小复杂度图中的胞腔). 设 Δ 是秩为 $\alpha \ge 1$ 的约化图，其类型为命题 *7.11* 所列类型之一。设 $\mathcal{T}$ 是 Δ 上的一个紧邻接子图集，且 D 是 Δ 中秩为 α 的一个胞腔。设 P_i, $i = 1, 2, \ldots, r$ 是图 D 中出现的、从 D 到 Δ 的边的邻接子图所对应的邻接弧。那么：

(i) 若 Δ 有 b 角形类型，或者是一个有两条循环边的环形图，则 $r = 2$ 和

$$\mu(\mathsf{P}_1) + \mu(\mathsf{P}_2) \ge 1 - 2\lambda - 16\zeta\eta\omega.$$

(ii) 如果 Δ 具有三边形类型，则 $2 \le k \le 3$ 和

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(\mathsf{P}_i) \ge 1 - 3\lambda - 24\zeta\eta\omega.$$

(iii) 若 Δ 是一个具有一条循环边和一条非循环边的环形图，则 $2 \le k \le 3$ 和

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(\mathsf{P}_i) \ge 1 - 4\lambda - 24\zeta\eta\omega.$$

证明。假设 C 是 Δ中秩为 α 的另一个胞腔。由命题 7.11，C 至少有两个邻接子图 Π_1、Π_2 与 Δ的边相邻。令 Δ' 为 $\Delta - \mathsf{C} - \Pi_1 - \Pi_2$中包含 D 的连通分支。于是 Δ'继承了 Δ 的秩为 α的边界标记和紧邻接子图集。还要注意，Δ' 也是秩为 α 的、属于 (i)–(iii) 中某一种类型的图；此外，它与 (i)—(iii) 中的类型相同，或者复杂度更低。在这种情况下，通过归纳法，该命题可化归为单元数更少且秩为 α的图的情形。

剩下的情形是 D 为 Δ中一个秩为 α 的单个胞腔。(i) 中的等式 $r = 2$以及 (ii)、(iii) 中的界 $2 \le r \le 3$ 由引理 7.10 得出。结合引理 6.6、6.8，命题 7.9、7.12 对 α 给出的界 $= \alpha - 1$ 以及不等式 (4-2)，经过简单分析可知，$\sum_i \mu(\mathsf{P}_i)$ 下界的最坏情形如图 14 所示。我们

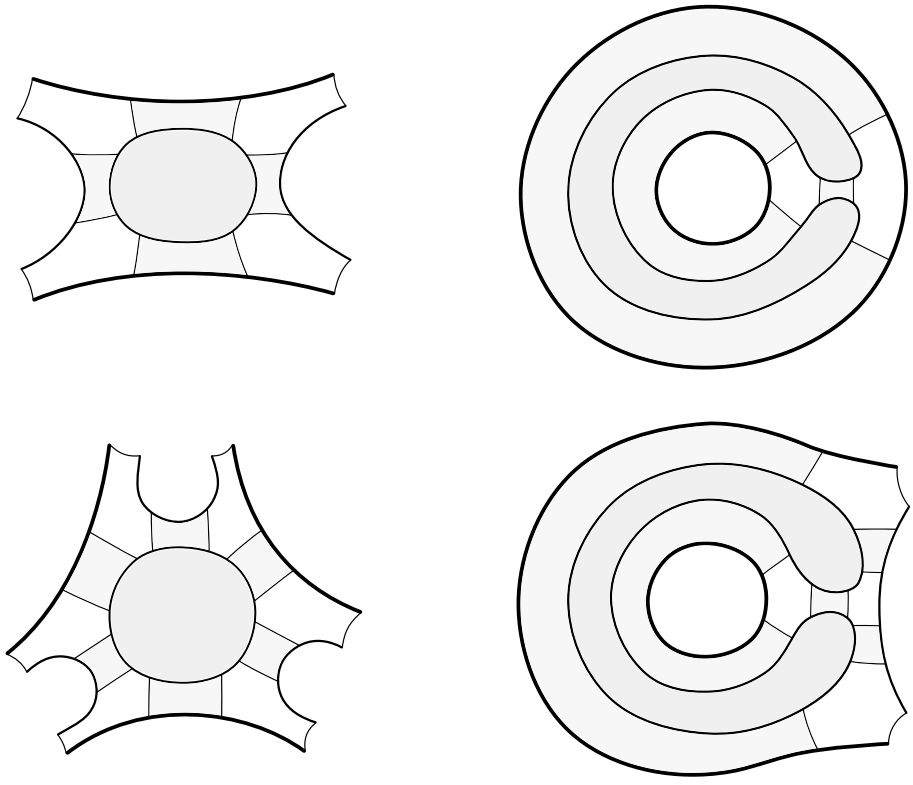

图 14。

然后得到 (i)–(iii) 中相应的不等式。 □

8. 片段

在本节中，我们建立秩为 $\alpha \geq 1$ 的片段的若干性质。其中大多数性质都是利用 $G_{\alpha-1}$ 中的关系得到证明的。从这一点开始，对于秩为 $\beta < \alpha$ 的情形，我们将广泛使用后续第 9–13 节中的陈述。我们还将主要作用场景切换到凯莱图 $\Gamma_{\alpha-1}$ 和 Γ_α。

本节中的所有陈述均在假设 $\alpha \geq 1$下表述并证明。

以下观察是由以下事实得出的： G_α 的分级表示是规范化的、满足条件（S3），且 $G_{\alpha-1}$ 的非挠元的中心化子是循环的（命题 13.$8_{\alpha-1}$）。回顾一下，若两个周期线 L_1 和 L_2 位于 $\Gamma_{\alpha-1}$中，且 $s_{P_1,\mathsf{L}_1} = s_{P_2,\mathsf{L}_2}$，则称它们平行，其中 P_i 是 L_i 的周期（见 4.2）。

8.1.**引理**。若L_1 和L_2 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的两条平行周期线，且它们的周期是秩为 α 的关系词，那么$\mathsf{L}_1 =\mathsf{L}_2$。

证明。设 L_i $(i = 1, 2)$ 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的两条平行周期线，其周期 R_i 是秩为 α的关系词。对 R_i 进行循环移位后，不妨设 $R_i \in \mathcal{X}_\alpha^{\pm 1}$，其中 $\mathcal{X}_\alpha$ 是表示（2-1）中秩为 α 的定义关系词集合。设 v_i 是 L_i 上的一个顶点，使得 L_i 的标签以 R_i开头，起点为 v_i。令 $g = \mathsf{v}_1^{-1}\mathsf{v}_2 \in G_\alpha$ （回顾一下，我们将 Γ_α 的顶点与 G_α的元素等同）。由于 L_1 和 L_2 平行，因此有 $gR_2g^{-1} = R_1$。根据（S3），有 R_1, $R_2 \in \mathcal{X}_\alpha$或 $R_1^{-1}, R_2^{-1} \in \mathcal{X}_\alpha$，因此根据定义 2.10，可得 $R_1 = R_2$和$R_1 = R_0^t$，其中 R_0 是 R_1的根。由于 R_1 的中心化子是循环的，因此对于某个整数 k，有 $g = R_0^k$。这意味着 $\mathsf{L}_1 =\mathsf{L}_2$。□

8.2. **推论** （凯莱图中的小消去）。 设L_1 和L_2 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的周期线，其周期分别为 R_1 和 R_2，其中 R_i 均为秩为 α的关系词。假设L_1 和L_2 有相近子路径S_1 和S_2，且满足 $|\mathsf{S}_1|_{\alpha-1} \geq \lambda|R_1|_{\alpha-1}$。那么$\mathsf{L}_1 =\mathsf{L}_2$。

证明。 若 $|\mathsf{S}_i| \leq |R_i|$ 对 $i = 1$成立，则该结论直接由 4.12 中的条件（S2- Cayley）推出。设 $|\mathsf{S}_1| > |R_1|$ 或 $|\mathsf{S}_2| > |R_2|$。 利用命题 9.$21_{\alpha-1}$ 和条件（S1），我们可在 S_1和 S_2 中找到相近子路径 S_1'和 S_2'，使得 $|\mathsf{S}_i| \leq |R_i|$，$i = 1$，2，且 $|\mathsf{S}_j|_{\alpha-1} \geq \lambda|R_j|_{\alpha-1}$对 $j = 1$ 或 $j = 2$成立。这就将该结论归结为前一种情形。□

8.3.**命题**。秩为 α 的关系词在 $G_{\alpha-1}$ 中是强循环约化的 .

证明。设 R 是秩为 α 的关系词。假设某个幂 R^t 在 $G_{\alpha-1}$ 中不是约化的。根据定义 2.5，对于某个 $1 \leq \beta \leq \alpha - 1$，存在 R^t 的一个子词 S，它在 $G_{\beta-1}$ 中与一个秩为 β 的片段 P 接近，且满足 $\mu(P) > \rho$。由于 R 在 $G_{\alpha-1}$ 中是循环约化的，我们有 $|S| > |R|$。于是，根据 2.6 中的定义，我们有 $|R^\circ|_\beta \leq 1$，因此

$$|R^\circ|_{\alpha-1} \leq \zeta^{\alpha-\beta-1}|R^\circ|_\beta \leq 1$$

这与 (S1) 和 (2-3) 矛盾。 □

8.4. $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的秩为 α 的片段路径是由秩为 α 的片段标记的一条路径 F。我们假设 F 有一个关联的 R-周期线段 P，且 $R \in \mathcal{X}_\alpha$ 与 F 接近。我们称 P 为 F 的基。

注意，这与 2.6 中的定义一致。若 F 是秩为 α、关联三元组为 (P, u, v) 的片段，且 F 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条路径，其标签为 $(\mathsf{F}) = F$，那么标签为 $(\mathsf{uPv}) = uPv$ 的回路 $\mathsf{F}^{-1}\mathsf{uPv}$ 为 F 给出一个基 P。反之，若 F 是 $\Gamma_{\alpha-1}$中秩为 α、基为 P 的片段，则选取回路 $\mathsf{F}^{-1}\mathsf{uPv}$，使其标签分别为 label(u)、label(v) $\in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，并记 $F, P,$

u 及 v 为相应的标签，我们便得到一个秩为 α 、关联三元组为 (P,u,v) 的片段 F 。

¯如果通过将 $\beta \geq \alpha$ 中秩为 α 、以¯为基的片段 F 映射到 Γ_β 中而得到路径 F 和 P，那么根据定义，我们将 F 视为 Γ_β 中秩为 α 、以 P 为基的片段。

为方便起见，我们将在 Γ_β中用“片段”一词同时指片段词和片段路径。

回顾一下，根据 4.2 中的约定， Γ_β 中秩为 α 的片段 F 的基 P 具有关联关系词 R ，其秩为 α ，以及唯一的无限 R-周期延拓 L。如果 $\beta = \alpha - 1$，则 L 是一条双无限路径（根据命题 8.3，它是简单的），我们称之为 F 的 基轴。如果 $\beta > \alpha$ ，则 L 绕着一个标记为 R 的关系子环延伸，我们称之为 F 的 基关系子环。

8.5. 我们描述一种度量秩为 α 的片段的方法。如果 P 是字 R^k 的子词，其中 R 是秩为 α 的关系词，那么我们定义

$$\mu(P) = \frac{|P|_{\alpha-1}}{|R^\circ|_{\alpha-1}}. \tag{8-1}$$

注意，这与 4.11 中对集合 S 中秩为 α 的片的函数 $\mu(S)$ 的定义一致。若 F 是一个秩为 $\alpha \geq 1$ 的片段，则 F 的大小 $\mu_{\mathrm{f}}(F)$ 定义为 $\mu(P)$，其中 P 是 R^k 的关联子词，而 R 是秩为 α 的关联关系词。因此，例如， $\mu_{\mathrm{f}}(F) = \frac{1}{2}$ 意味着 F 的秩大约接近其秩为 α 的关联关系词的一半。

若 F 是 Γ_β 中秩为 α 的片段，则我们令 μ_{f}(F) $= \mu_{\mathrm{f}}$(label (F))。这意味着 μ_{f}(F) 由以下公式给出：

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{F}) = \frac{|\mathsf{P}|_{\alpha-1}}{|R^\circ|_{\alpha-1}}.$$

其中 P 是 F 的基，且 R 是与 P 关联的关系词。

利用命题 $9.21_{<\alpha}$ ，我们可以很容易地将 2.5 中“约化的 G_α 字”的定义改写如下：字 X 在 G_α 中是约化的，当且仅当 X 是自由约化的，并且不含任何满足 $\mu_{\mathrm{f}}(F) > \rho$ 的秩为 $1 \leq \beta \leq \alpha$ 的片段 F。

8.6. 定义。 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的两个秩为 α 的片段 F 和 G 若其基轴平行，则称它们相容。注意，根据引理 8.1，秩为 α 的片段的基轴平行，当且仅当它们重合。

在 $\beta \geq \alpha$的情形下，定义 Γ_β 中两个秩为 α 的片段 F 和 G 相容，当且仅当它们在 $\Gamma_{\alpha-1}$中有相容提升；等价地，F 和 G 具有相同的基关系子环。

将相容关系扩展到秩为 0 的片段会很方便。回想一下，根据 2.6 中的定义，秩为 0 的片段是 $\mathcal{A}^{\pm 1}$中的字母。因此， Γ_β 中秩为 0 的片段是长度为 1 的路径。根据定义， Γ_β 中秩为 0 的片段 F 和 G 相容，当且仅当 F = G。

我们将片段相容性记作 F $\sim$ G。注意，实际上我们有一个带有两个参数 $\alpha \geq 0$ 和 $\beta \geq \max(0, \alpha - 1)$ 的关系族：秩为 α 的 Γ_β 中片段的相容性。 β 和 α 的取值总会由上下文明确。下面我们还将使用秩为 α 的 Γ_β 中片段集合上的“模反演相容性”关系，记作 F $\sim$G$^{\pm 1}$ ，表示 F $\sim$G 或 F $\sim$ G^{-1}。显然，这两者都是等价关系。

8.7. **命题 (**前一秩双边形中的片段稳定性)。 设 $\alpha \geq 1$。设 X 和 Y 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的约化近路径。设 K 是 X 中秩为 α 的一个片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) \geq 2.3\omega.$ 。那么存在 Y 中秩为 α 的一个片段 M，使得 $\mathsf{M} \sim \mathsf{K}$，并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 2.6\omega.$$

证明。 设 P 是 K 的基。由 (4-2) 和命题 $\mathbf{10}.16_{\alpha-1}$ 我们有 $\mathsf{P} = \mathsf{z}_1\mathsf{P}'\mathsf{z}_2$，其中 P′ 与 Y 的一个子路径 M 接近，且 $|\mathsf{z}_i|_{\alpha-1} < 1.3$ $(i = 1, 2)$。于是 M 是一个秩为 α、基为 P′的片段，因此 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}) = \mu(\mathsf{P}')$。由 (4-2)

$$\mu(\mathsf{z}_1) + \mu(\mathsf{z}_2) < 2.6\omega$$

因此

$$\mu(\mathsf{P}') > \mu(\mathsf{P}) - 2.6\omega = \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 2.6\omega.$$

□

8.8. **命题 (**前一秩三边形中的片段稳定性)。 设 $\mathsf{X}^{-1}{*}\mathsf{Y}_1{*}\mathsf{Y}_2{*}$ 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一个粗三边形。设 K 是 X 中一个秩为 α 的片段，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) \geq 2.5\omega$. 那么以下陈述中至少有一个成立：

- 对于 $i = 1$ 或 $i = 2$，存在一个片段 M_i，它是 Y_i 中秩为 α 的片段，满足 $\mathsf{M}_i \sim \mathsf{K}$ 并且
$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_i) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 2.8\omega.$$
- 对于 每个 $i = 1{,}2$，存在一个秩为M_i α 的片段，位于Y_i 中，使得$\mathsf{M}_i \sim \mathsf{K}$ 一个 d
$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_1) + \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_2) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 3\omega.$$

证明。 这与命题 $\mathbf{10}.18_{\alpha-1}$ 的证明类似。□

8.9. 命题（前一秩共轭关系中的片段稳定性）。设X 是中的一个循环约化字。设 Y 是中的一个约化字， $u \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$且 $Yu = z^{-1}Xz$ 在中，对某个 z。我们用两条直线表示该共轭关系$\bar{}$. . . $Y_{-1}u_{-1}Y_0u_0Y_1u_1 \ldots$ 和 $X = \ldots X_{-1}X_0X_1 \ldots$，它们位于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中，其中标签 $(X_i) = X$，标签 $(Y_i) = Y^{-}$，标签 $(u_i) = u$ （见 *4.3*）。设 K 是 X 中秩为 α 的一个片段，满足 $|K| \leq |X|$ 且$\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 2.5\omega$。那么以下陈述至少有一个成立：

- 对于某个 i，在 Y_i 中存在一个秩为 α 的片段 M，使得 $\mathsf{M} \sim \mathsf{K}$，并且
$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 2.9\omega.$$
- 对于某个 i，分别在 Y_i 和 Y_{i+1} 中存在秩为 α 的片段 M_1 和 M_2，使得 $\mathsf{M}_i \sim \mathsf{K}$ ($i = 1{,}2$)，并且
$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_1) + \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_2) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 3\omega.$$

证明。 由命题 $\mathbf{10}.19_{\alpha-1}$ 得出。 □

8.10.**命题 (**包含蕴含相容性)。 设 K 和 M 是秩为 α 的片段，属于 Γ_β, $\beta \geq \alpha - 1$。假设 <*style id='K* 包含于 M 且 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) \geq \lambda + 2.6\omega$。那么 $\mathsf{K} \sim \mathsf{M}$。

证明。 首先考虑 $\beta = \alpha - 1$ 的情形。设 P 和 Q 分别是 K 和 M 的基。由命题 $\mathbf{10}.16_{\alpha-1}$, 存在 P′ 的相近子路径和 Q′ 的相近子路径，使得 $\mu(\mathsf{P}') \geq \lambda$。于是由推论 8.2，P 和 Q 具有相同的无限周期延拓，因此可得 K 与 M 相容。

~ ~ ~若 $\beta \geq \alpha$，则我们考虑 K 和 M 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的提升 K 和 M，使得 K 包含于~M，并应用已证明的部分。□

8.11. 命题（片段的划分）。设 K 是秩为 α 的片段，且 Γ_β, $\beta \geq \alpha - 1$。若 $K = K_1K_2$，则要么 K_1，要么 K_2 包含一个秩为 α 的片段 F，使得 $F \sim K$ 且 $\mu_{\mathrm{f}}(F) > \mu_{\mathrm{f}}(K) - \zeta\omega$；要么 K 可表示为 $K = F_1uF_2$，其中 F_i 是秩为 α 的片段，F_1 是 K 的起始段，F_2 是 K 的末段，$F_1 \sim F_2 \sim K$，并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{F}_1) + \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{F}_2) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - \zeta\omega.$$

证明。若 $\alpha = 1$，则 u 可以取为空，结论显然成立。若 $\beta = \alpha - 1 \geq 1$，则结论由命题 $9.21_{\alpha-1}$ 得出。$\beta > \alpha - 1$ 的情形可由 $\beta = \alpha - 1$ 的情形推出。□

由命题 8.10 和 8.11 可立即得到：

8.12. 命题（重叠片段）。设 X 是 Γ_β, $\beta \geq \alpha - 1$ 中的一条约化路径。设 K 和 M 是 X 中秩为 α 的不相容片段。假设 $K \leq M$ 且 $\mu_{\mathrm{f}}(K)\ \mu_{\mathrm{f}}(M) \geq \lambda + 2.7\omega$。那么，存在 K 的一个起始段 K_1，它与 M 不相交；也存在 M 的一个末段 M_1，它与 K 不相交；并且 K_1 和 M_1 是秩为 α 的片段，$K_1 \sim K$，$M_1 \sim M$，$\mu_{\mathrm{f}}(K) - \mu_{\mathrm{f}}(K_1) < \lambda + 2.7\omega$，且 $\mu_{\mathrm{f}}(M) - \mu_{\mathrm{f}}(M_1) < \lambda + 2.7\omega$。

8.13. 命题（片段的并）。设 X 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条约化路径，且 $K_i\ (i = 1, 2)$ 是 X 中秩为 α 的相容片段。假设对于 $i = 1$ 或 $i = 2$，$\mu_{\mathrm{f}}(K_i) \geq 5.7\omega$。那么，$K_1$ 与 K_2 的并是一个秩为 α 且具有相同基轴的片段。此外，若 K_1 与 K_2 不相交，则 $\mu_{\mathrm{f}}(K_1 \cup K_2) \geq \mu_{\mathrm{f}}(K_1) + \mu_{\mathrm{f}}(K_2) - 5.7\omega$。

证明。根据引理 8.1，K_1 和 K_2 有一个公共基轴。如果某个 K_i包含在另一个之中，那么无需证明。否则，结论可由命题 $10.21_{\alpha-1}$直接推出。□

8.14. 推论（相容性保持顺序）。设 X 是 $\Gamma_{\alpha-1}$中的一条约化路径，K_i、$M_i(i = 1, 2)$ 是 X 中秩为 α 的片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K_i)\ \mu_{\mathrm{f}}(M_i) \geq \lambda + 2.6\omega$。假设 $K_1 \sim K_2, M_1 \sim M_2$ 且 $K_1 \not\sim M_1$。那么，$K_1 < M_1$ 当且仅当 $K_2 < M_2$。

证明。根据命题 8.10，对于每个 $i = 1$，2，K_i 和 M_i 都不能包含在对方之中，因此要么 $\mathrm{K}_i < \mathrm{M}_i$，要么 $\mathrm{M}_i < \mathrm{K}_i$。只需证明 $\mathrm{K}_1 = \mathrm{K}_2$的情形。例如，假设 $\mathrm{M}_1 < \mathrm{K}_1 < \mathrm{M}_2$。那么根据命题 8.13，$\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2$ 是秩为 α 的片段，且 $\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2 \not\sim \mathrm{K}_1$，这与命题 8.10矛盾。□

8.15.**命题** (无逆兼容性)。设 K 和 M 是约化路径 X 中秩为 α 的片段，其中 $\Gamma_{\alpha-1}$。令 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K})\ \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}) \geq 5.7\omega$。则 $\mathsf{K} \not\sim \mathsf{M}^{-1}$。

证明。由引理 8.1 和命题 $10.21_{\alpha-1}$ 得出。□

8.16. **命题**。设 K 是 Γ_α 中秩为 β 的片段，其中 $1 \leq \beta \leq \alpha$。

(i) 设R 为K 的基环，其标签为秩为 β 的关系词 R，且 R_0 是 R的根。则子群 $\{g \in G_\alpha \mid g\mathsf{K} \sim \mathsf{K}\}$ 是有限循环群，并与 $\langle R_0 \rangle$共轭。(ii) 设 X 是表示 G_α 中一个元素的字，该元素不与 R_0的幂共轭。设X 是 Γ_α 中的一条 X-周期线，标签为 X^∞。则$s_{X,\bar{X}}$ K $\not\sim$ K.(iii) 在*(ii)*的假设下，若K 是X 的子路径，且 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) \geq 2\lambda + 5.3\omega$，则 $|\mathsf{K}| < 2|X|$。

证明。 (i) 由引理 8.1$_\beta$ 可知， gK $\sim$ K 当且仅当 gR $=$ R。由于 label(R) $=$ R_0^t且 R_0 是非幂，K 在 G_α 中的稳定子是一个与 $\langle R_0\rangle$共轭的子群。

(ii) 立即由 (i) 得出。

(iii) 如果路径 μ_{f}(K) $\geq 2\lambda+5.3\omega$ 且 |K| $\geq 2|X|$，那么利用命题 8.11$_\beta$和 8.10$_\beta$，我们可以得出：要么 s_X^{-1}, xK $\sim$K，要么 s_X, x̄K $\sim$K，这与 (ii) 矛盾。□

9. 图分析的后果

沿用 4.16 中引入的术语， Γ_α 中的一个粗 r边形是如下形式的回路

$$\mathsf{P} = \mathsf{X}_1\mathsf{u}_1\mathsf{X}_2\mathsf{u}_2, \ldots, \mathsf{X}_r\mathsf{u}_r$$

其中路径 X_i 是约化的，而 u_i 是秩为 α 的桥。

假设 P 的每个桥 u_i 都附有一个秩为 α 的伴随桥划分（见 4.13），并考虑用圆盘图 Δ 对 P 进行填充 ϕ: $\Delta^{(1)} \to \Gamma_\alpha$ ；该圆盘图位于 G_α 的表示 ˜ ˜ ˜ ˜之上，即 Δ 的边界环为 X_1˜u$_1$X$_2$˜u2, . . . , X$_r$˜u$_r$，其中 $\phi(\mathsf{X}_i) = \mathsf{X}_i$，且 ϕ(˜u$_i$) $=$ u$_i$。我们˜可以假设 Δ 带有一个秩为 α 、边为 X_i 、桥为 ˜u$_i$ 的边界标记（见 5.1），并且每个 ˜u$_i$ 都带有一个秩为 α的诱导桥划分。对 Δ 应用 5.4 中描述的约化过程后，我们得到一个约化图。注意，在此过程中， Δ 的桥 ˜u$_i$可能会因切换而改变。为保持等式 ϕ(˜u$_i$) $=$ u$_i$ ，我们必须对桥 u$_i$ 进行适当的切换（见 4.13）。因此我们得到：

9.1. **命题** (用图填充粗多边形)。 设 $\alpha \geq 1$ 和 P $=$ X$_1$u$_1$X$_2$u2, . . . , X$_r$u$_r$是 Γ_α 中的一个粗 r边形，且所有桥 u$_i$ 均带有固定的桥划分。那么，经过可能的桥切换 u$_i$后，存在一个秩为 α 的约化圆盘图 Δ ，以 P 为其填充。

9.2. **定义**。 P 的 α-面积记作 Area$_\alpha$(P)，是命题 9.1 中所述填充图 Δ 内秩为 α 的胞腔数。为避免正确性问题，我们形式上假定 Area$_\alpha$(P) 是相对于特定的 Δ 选择而定义的。

Γ_α 中 Δ 内秩为 α 的胞腔边界环路 $\phi(\delta$D) 的像是 P 的一个活化关系子环路，对应于某个特定选择 Δ。因此，Area$_\alpha$(P) 就是 P 的活化关系子环路数。宽泛地说，我们也将逆环路 $\phi(\delta$D)$^{-1}$ 称为 P 的一个活化关系子环路。

9.3. 注。 面积$_\alpha$(X$_1$u$_1$X$_2$u$_2$, . . ., X$_r$u$_r$) $= 0$等价于断言：X$_1$u$_1$X$_2$u$_2$, . . . , X$_r$u$_r$ 在可能对桥u$_i$进行切换之后可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。

9.4. 作为粗多边形的一种特殊情况，考虑 Γ_α、 $\alpha \geq 1$ 中的粗双边形 X^{-1}uYv。对桥 u 和 v 进行切换后，不妨假设存在一个秩为 α 的约化图 Δ ，它通过映射 ϕ: $\Delta^{(1)} \to \Gamma_\alpha$ 填充 X^{-1}uYv。还可以假设为 Δ 配备了一个紧集 ℑ˜ ˜ ˜，其中包含邻接子图。Δ 的边界环形式为 X^{-1}˜uY˜v，其边 X^{-1}˜ 和 Y 分别映射到 X^{-1} 和 Y 上。根据命题 7.11(i)， Δ 中秩为 α 的每个胞腔，都分别与边 X^{-1} 和 Y 有一个邻接子图。秩为 α 的胞腔的边界环及这些邻接子图的桥构成一个映射到 Γ_α 中的图，如图 15 所示。设 R$_i$ 为 Γ_α 中秩为 α 的胞腔的边界环的像，并设 K$_i$、M$_i$、Q$_i$ 和 S$_i$ 分别为 X、Y 和 R$_i$ 的子路径；它们是图中所示的、秩为 α 的胞腔与 X^{-1} 和 Y 的邻接子图中相应邻接弧 ˜ ˜的像。根据 8.4 中的定义，K$_i$ 和 M$_i$ 是秩为 α 的片段

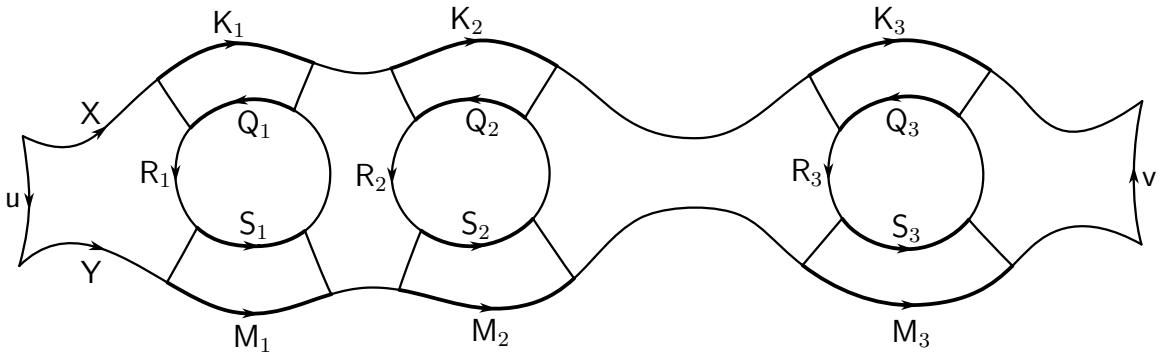

图 15。

其基分别为 Q_i^{-1} 和 S_i，基关系子环分别为 R_i^{-1} 和 R_i。我们称 K_i 和 M_i 为粗双边形 $X^{-1}uYv$ 中秩为 α 的活跃片段。

因此，若 $\mathrm{Area}_\alpha(X^{-1}uYv) = t$，则在路径 X 和 Y 中，各恰有 t 个秩为 α 的不相交活跃片段。再次注意，活化关系子环的集合和活跃片段的集合在形式上取决于特定 Δ 和 $\mathcal{T}$ 的选择。

9.5. 如上所述，设 $P = X^{-1}uYv$ 是 Γ_α 中的一个粗双边形，且 Δ 是一个秩为 α 的约化图，其中 $\delta\Delta = \tilde{X}^{-1}\tilde{u}\tilde{Y}\tilde{v}$ 通过映射 $\phi\colon \Delta^{(1)} \to \Gamma_\alpha$ 填充 P（我们假定，如有需要，已对 u 和 v 应用了切换操作）。我们假定 Δ 有一个由 $\mathcal{T}$ 个邻接子图组成的紧集。设 $R = \phi(\delta D)$ 是 P 的一个活化关系子环，且 $Q^{-1}w_1K^{-1}w_2$ 和 $S^{-1}w_3Mw_4$ 分别是图 16 所示的、位于 $\mathcal{T}$ 中胞腔 D 与边 $\tilde{X}^{-1}$ 和 $\tilde{Y}$ 相邻的子图边界环的像。则图中所示的两个回路 P_1 和 P_2 可视为 Γ_α 中的粗双边形，其边是 X 和 Y 的子路径。它们是

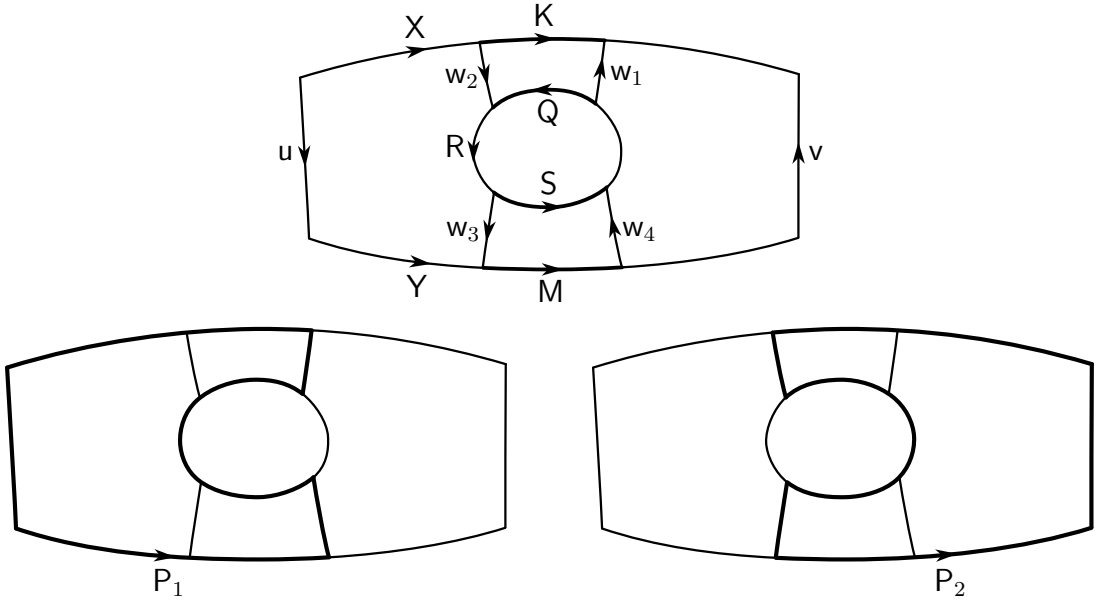

图16。

由 Δ 的约化子图填充，因此我们有 $\mathrm{Area}_\alpha(P_1) + \mathrm{Area}_\alpha(P_2) = \mathrm{Area}_\alpha(P) - 1$。我们将在归纳论证中使用这一简单观察。

9.6. 类似地，设 $P = X_1u_1X_2u_2X_3u_3$ 是 Γ_α 中的一个粗三边形。在可能对桥 u_i 进行切换后，我们可以找到一个秩为 α 的约化图 Δ，其边界环为 $X_1\tilde{}u_1X_2\tilde{}u_2X_3\tilde{}u_3$，并通过映射 $\phi\colon \Delta^{(1)} \to \Gamma_\alpha$ 将 P 填充，其中 $\phi(\tilde{}X_i) = X_i$，且 $\phi(\tilde{}u_i) = u_i$。我们还可以假设 Δ 有一个邻接子图的紧集 $\mathcal{T}$。根据命题 7.11(ii)，Δ 中秩为 α 的每个胞腔 $\tilde{}$ 在 $\mathcal{T}$ 中都与至少两条边 X_i 存在邻接子图。这意味着，对于 P 的任意活化关系子环 R，都有两个或三个秩为 α、基环为 R 的片段 K_i ($i = 1, 2$ 或 $i = 1, 2, 3$)，它们分别出现在不同的路径 X_j 中。与双边形的情形类似，我们称它们为 P 的秩为 α 的活跃片段。

与双边形的情形一样，对于 P 的任意活化关系子环 R，我们可以分别考虑一个粗双边形 P_1和一个粗三边形 P_2，如图 17 所示，其中 $\mathrm{Area}_\alpha(P_1) + \mathrm{Area}_\alpha(P_2) = \mathrm{Area}_\alpha(P) - 1$。

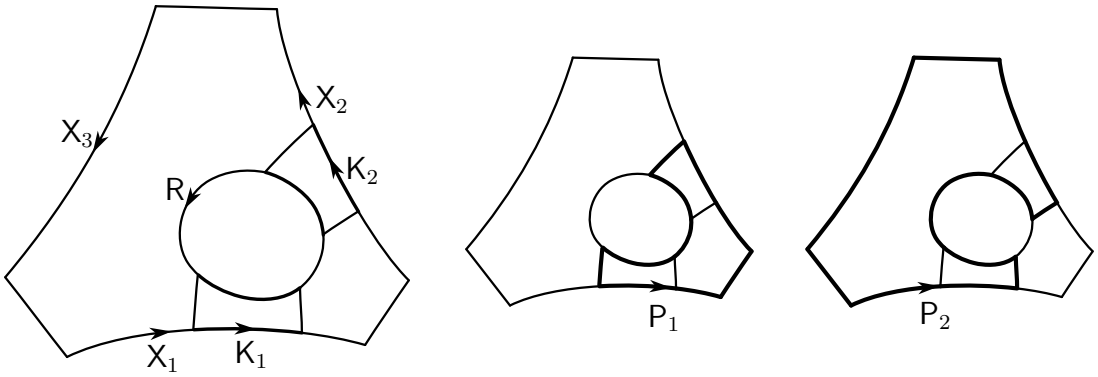

图 17。

9.7. **命题**（双边形中的活跃片段）。设 $P = X^{-1}uYv$ 是 Γ_α 中的一个粗双边形，$\alpha \geq 1$。

(i)设 K 和M 分别是 P 在 X 和Y中的秩为 α 的活跃片段，且具有互为逆元的基活跃关系子回路。则$K \sim M^{-1}$,

$$\mu_{\mathrm{f}}(K) + \mu_{\mathrm{f}}(M) > 1 - 2\lambda - 1.5\omega$$

and

$$\mu_{\mathrm{f}}(K), \mu_{\mathrm{f}}(M) > 7\lambda - 1.5\omega.$$

(ii) ^{L} 设K 和K′ 是 X中两个不同的秩为 α 的活跃片段。则$K \not\sim K'$.

证明。(i)：由构造可直接得出 $K \sim M^{-1}$。第一个不等式由命题 7.13(i) 得出。由于 X 和 Y 是约化的，我们有 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \leq \rho$ and $\mu_{\mathrm{f}}(M) \leq \rho$，这给出了 $\mu_{\mathrm{f}}(K)$ 和 $\mu_{\mathrm{f}}(M)$ 的下界。

(ii)：假设 $K \sim K'$。设 M 和 M′ 是 Y 中对应的秩为 α 的活跃片段。由 (i)，我们有 $M \sim M'$。于是，根据命题 8.13 以及 (i) 中的第一个不等式，

$$\mu_{\mathrm{f}}(K \cup K') + \mu_{\mathrm{f}}(M \cup M') \geq 2 - 4\lambda - 17.4\omega > 2\rho$$

这与 X 和 Y 是约化的这一假设矛盾。 □

我们引入记号，表示 (i) 中活跃片段大小的下界：

$$\xi_0 = 7\lambda - 1.5\omega.$$

9.8. **定义**。 我们称 Γ_α 中的路径 X 和 Y 秩接近 $\beta \le \alpha$，如果存在秩为 β 的桥 u 和 v，使得 $X^{-1}uYv$ 是一个可提升到 Γ_β的回路。（因此，对于 Γ_α 中的路径，“接近”与“秩接近 α”含义相同。）

9.9. 注。 如果 X 和 Y 的标签是自由约化字，那么 X 和 Y 秩接近 0，当且仅当 X =Y。

9.10. **命题** （提升的双边形）。 设 $0 \le \beta < \alpha$ 和 $X^{-1}uYv$ 是 Γ_α 中的一个粗双边形，其中u 和 v 是秩为 β的桥。假设对于区间 $\beta+1 \le \gamma \le \alpha$ 中的所有 γ，X或Y 都没有包含秩为 γ 且满足 μ_f（K） $\ge \xi_0$的片段 K 。那么 $X^{-1}uYv$ 可以提升到 Γ_β，因此，X 和Y 秩接近 β。

证明。 这是命题 9.7 和注记 9.3 的推论。 □

9.11. 命题（无活性关系词）。设 $\alpha \ge 1$，$X^{-1}uYv$ 是 Γ_α 中的一个粗双边形，且 $Area_\alpha(X^{-1}uYv) = 0$。假设 $|X|_\alpha > 2 + 6\zeta^2\eta$。那么 X 和 Y 可分别表示为 $X = w_1X_1w_2$ 和 $Y = z_1Y_1z_2$，其中 X_1 和 Y_1 秩接近 $\alpha-1$，且 $|w_i|_\alpha$、$|z_i|_\alpha \le 1+4\zeta^2\eta (i = 1, 2)$。

证明。由注记 9.3 可假设 $X^{-1}uYv$ 提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。为简化记号，假设 $X^{-1}uYv$ 已经在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中。令 $u = u_1Pu_2$，$v = v_1Qv_2$，其中 u_i、v_i 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，而 P、Q 是由秩为 α 的片段标记的路径。我们将命题 9.19(ii)$_{\alpha-1}$ 应用于粗四边形 $X^{-1}u_1Pu_2Yv_1Qv_2$。注意，若 P 或 Q 的某个子路径与 X 的某个子路径 S 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中接近，则 $|S|_\alpha \le 1$。由于 $|X|_\alpha > 2 + 6\zeta^2\eta$，我们无法得到命题 9.19(ii)$_{\alpha-1}$ 结论中的第一种情形。因此，第二种情形成立：有 $X = X_1z_1X_2z_2X_3$，其中 X_1 接近 P 的起始段，X_2 接近 Y 的某个子路径，X_3 接近 Q 的末段，且 $|z_i|_{\alpha-1} \le 4\zeta\eta (i = 1, 2)$。于是 $|X_1z_1|_\alpha \le 1+4\zeta^2\eta$，$|z_2X_3|_\alpha \le 1+4\zeta^2\eta$，从而得到所需的界。□

9.12. 推论（无活跃片段）。设 X 和 Y 是 Γ_α，$\alpha \ge 1$ 中相近的约化路径。假设 X 或 Y 不含秩为 α 且满足 $\mu_f(K) \ge \xi_0$ 的片段 K。另假设$|X|_\alpha > 2 + 6\zeta^2\eta$。那么 X 和 Y 可以表示为 $X = w_1X_1w_2$ 以及 $Y = z_1Y_1z_2$，其中 X_1和 Y_1 在秩上 $\alpha-1$ 且 $|w_i|_\alpha, |z_i|_\alpha \le 1 + 4\zeta^2\eta (i = 1, 2)$。

9.13. 推论（无活跃片段，迭代情形）。设 X 和 Y 是 Γ_α 中相近的约化路径。令 $0 \le \beta < \alpha$，并假设对于区间 $\beta+1 \le \gamma \le \alpha$ 中的所有 γ，X 或 Y 均不含秩为 γ 且满足 $\mu_f(K) \ge \xi_0$ 的片段 K。令 $|X|_\alpha \ge 2 + 3\zeta$。那么 X 和 Y 可以表示为 $X = w_1X_1w_2$ 以及 $Y = z_1Y_1z_2$，其中 X_1 和 Y_1 在秩上 β 且 $|w_i|_\alpha < 1 + 5\zeta^2\eta (i = 1, 2)$。

9.14.**命题**。 设 X 是 G_α 中等于 *1* 的非空自由约化字。那么 X 有一个子词 P，它是秩为 β 的片段，其中 $1 \le \beta \le \alpha$ 且 $\mu(P) > 136\omega$。

证明。 根据命题 7.6， X 在 G_α 中不是约化的，因此包含一个秩为 β 的片段 K，其中 $1 \le \beta \le \alpha$ 且 μ_f（K） $\ge \rho$。设 $\beta \ge 1$ 为满足以下条件的最小秩： X 包含一个秩为 β 的片段 K，且 μ_f（K） $\ge \xi_0$。若 $\beta = 1$，则根据（4-1）， K 已经是一个秩为1的片段，且μ（K） $\ge \xi_0 > 138\omega$。设 $\beta > 1$。令 K 为 $\Gamma_{\beta-1}$ 中的一个片段，其标签 (K) $= K$，并令 S 为 K 的一个基。根据推论 9.13$_{\beta-1}$，我们有 $S = w_1Pw_2$，其中 $|w_i|_{\beta-1} < 1.03$ （$i = 1, 2$），且$P =$label(P) 出现在 K中。根据（4-1）， μ（P） $\ge \xi_0 - 2.06\omega = 7\lambda - 3.56\omega > 136\omega$。□

9.15.**命题 (**三边形中的活跃片段)。 设 P $= X_1u_1X_2u_2X_3u_3$ 为 Γ_α中的一个粗三边形，设R 为P 的一个活化关系子环路，并设K_i *(*$i = 1$，2 或 $i = 1$，2，3*)*为秩为 α 且基环为R的活跃片段。那么，对于所有 i， j，都有$K_i \sim Kj$，

$$\sum_i \mu_{\mathrm{f}}(K_i) > 1 - 3\lambda - 2.2\omega$$

and

$$\mu_{\mathrm{f}}(K_i) > 3\lambda - 1.1\omega \quad \textit{for at least two indices } i.$$

证明。由构造可知 $K_i \sim Kj$ 。第一个不等式由命题 7.13(ii)得出。由于 X_i 在 G_α 中是约化的，我们有 $\mu(K_i) \leq \rho = 1 - 9\lambda$。这推出第二个不等式。□

9.16. **命题 (**共轭关系中没有活跃片段)。 设 X 和 Y 是分别在 G_α、 $\alpha \geq 1$中循环约化的字。设 $X = Z^{-1}YZ$ 属于 G_α，其中 Z。假设 X 的任意循环移位都不包含秩为 α 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K)$ $\geq \xi_0$ 的片段 K 。那么存在一个字 Z_1，使得 $Z_1 = Z$ 属于 G_α 且 $X = Z_1^{-1}YZ_1$ 属于 $G_{\alpha-1}$。

证明。 设 Δ_0 是一个秩为 α 且边界标记为 $X^{-1}Z^{-1}YZ$的圆盘图。我们通过将 Δ_0 上标记为 Z^{-1} 和 Z的两条边界线段粘合，构造一个环形图 Δ_1 。可以为图 Δ_1 赋予一个秩为 α 的边界标记，其中有两条循环边 X^{-1} 和 Y。我们用 Z 表示 Δ 中标签为 (Z) $= Z$ 、连接 Y 和 X 的起始顶点的路径。设Δ_2 是由 Δ_1 经过约化过程得到的秩为 α 的约化图。根据 5.7 中的注， Δ_1 和 Δ_2 具有相同的框架类型。由引理 4.8 可知，存在一条路径 Z_1 ，位于 Δ_2 中，连接边界回路 Y_1 和 X_1^{-1}的起始顶点，且满足标签 $(X_1) = X$、标签$(Y_1) = Y$，以及 $Z_1 = Z$属于 G_α，其中 $Z_1 =$标签 (Z_1)。由命题 7.13(i)， Δ_2 没有秩为 α的胞腔。因此 $X = Z_1^{-1}YZ_1$ 属于 $G_{\alpha-1}$。 □

9.17. 命题（共轭关系中无活跃片段，迭代情形）。设 X 和 Y是 G_α中表示共轭元素的 G_α 字，且均为循环约化的， $\alpha \geq 1$。令$\beta \leq \alpha$。假设字 X 或 Y 中至少有一个满足：其任意循环移位都不含有秩为 γ的片段 K，其中 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq \xi_0$且 $\beta < \gamma \leq \alpha$。设 $X = \ldots X_{-1}X_0X_1\ldots$和 $Y = \ldots Y_{-1}Y_0Y_1\ldots$是 Γ_α 中的平行周期线，其标签分别为 $(X_i) = X$和$(Y_i) = Y$，表示该共轭关系。那么，X 和 Y 上存在一些顶点，由一条秩为 β的桥连接。

此外，对于 X 的任意子路径Z ，存在一个回路$S^{-1}uTv$ ，它可以提升到 Γ_β ，使得 S 和T 分别是X 和Y 的子路径，u 和v 是秩为 β 的桥，并且Z 包含于S中。

证明。 由于 X 和 Y 平行，若 X 上的顶点 a 与 Y 上的顶点 b 由一条标记为 Z 的路径相连，那么对它们的所有平移 s_X^k，xa 和 s_Y^k，yb 也同样如此。于是第二个陈述由第一个陈述推出。

设 Δ 是一个秩为 α 、边界回路为 X^{-1} 和 Y 的环形图，且 $\phi\colon \tilde{\Delta}^{(1)} \to \Gamma_\alpha^{\sim}$ 是从 Δ 的万有覆盖 Δ 的 1-骨架到 $\Gamma_\alpha^{\sim}$ 的组合连续映射，分别将 X 的提升 X 和 Y 的提升 Y 映到 X 和 Y。我们可以假设 Δ 是约化的，并且具有一个紧邻接子图集。如果 $\beta = \alpha$ ，且 Δ 有一个秩为 α 的胞腔，那么结论由命题 7.11(iii) 得出。如果 Δ 没有秩为 α 的胞腔，那么我们可以将 X 和 Y 提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$ ，并对 α 使用归纳法。如果 $\beta < \alpha$ ，并且字 X 或 Y 中至少有一个不存在

包含秩为 α 的片段 K 的循环移位，且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K) > \xi_0$，那么根据命题 7.13(i)，$\Delta$ 没有秩为 α 的胞腔，因此结论再次由归纳法得出。□

9.18. 命题（小粗多边形）。设 $P = X_1 * X_2 * \dots X_r *$ 是 r 中的一个粗 Γ_α-边形，其中 $r \geq 3$ 和 X_i 是 P 的边。假设不存在位于不同路径 X_i 和 X_j 上的近邻顶点对，但以下顶点对除外：$\{\tau(X_i)\ \iota(X_{i+1})\}$ 和 $\{\tau(X_r)\ \iota(X_1)\}$。则

$$\sum_i |X_i|_\alpha \leq (r-2)\eta.$$

如果 $r = 3$ 或 $r = 4$，那么我们有一个更强的界

$$\sum_i |X_i|_\alpha \leq 2(r-1)\zeta\eta.$$

证明。考虑 P 的一个填充 ϕ：由秩为 α 的约化圆盘图 Δ 给出的 $\Delta^{(1)} \to \Gamma_\alpha$。令 $\delta\Delta = X_1 u_1 X_2 u_2 \dots X_r u_r$，其中 u_i 是桥，X_i 是 Δ 的边，并且有 $\phi(X_i) = X_i$。该命题的假设意味着 Δ 很小。于是结论由命题 7.9 和 7.12 得出。□

9.19. 命题（薄三边形与四边形）。

（i）设 $X^{-1} * Y_1 * Y_2 *$ 是 Γ_α 中的一个粗三边形。那么 X 可表示为 $X = X_1 z X_2$，其中 X_1 靠近 Y_1，的起始段，X_2 靠近 Y_2 的末段，且 $|z|_\alpha \leq 4\zeta\eta$。（ii）设 $X^{-1} * Y_1 * Y_2 * Y_3 *$ 是 Γ_α 中的一个粗四边形。那么以下可能性至少有一种成立：

- X 可表示为 $X = X_1 z X_2$，其中 X_1 靠近 Y_1 的起始段，X_2 靠近 Y_3 的末段，且 $|z|_\alpha \leq 6\zeta\eta$；或者
- X 可表示为 $X = X_1 z_1 X_2 z_2 X_3$，其中 X_1 靠近 Y_1 的起始段，X_2 靠近 Y_2 的子路径，X_3 靠近 Y_3 的末段，且 $|z_i|_\alpha \leq 4\zeta\eta$（$i = 1, 2$）。

证明。(i) 我们可以将 $X_1 = X_1 z X_2, Y_i = Y_{i1} w_i Y_{i2}$ $(i = 1,2)$ 表示为具有近邻点对 (X_1, Y_{11})、(Y_{12}, Y_{21}^{-1}) 和 (Y_{22}, X_2) 的形式，其中位于不同路径 z、w_1 和 w_2 上的顶点，除适当的端点外，均不相邻（图 18a）。然后对 $z^{-1} * w_1 * w_2 *$ 应用命题 9.18，即可得到该结论。

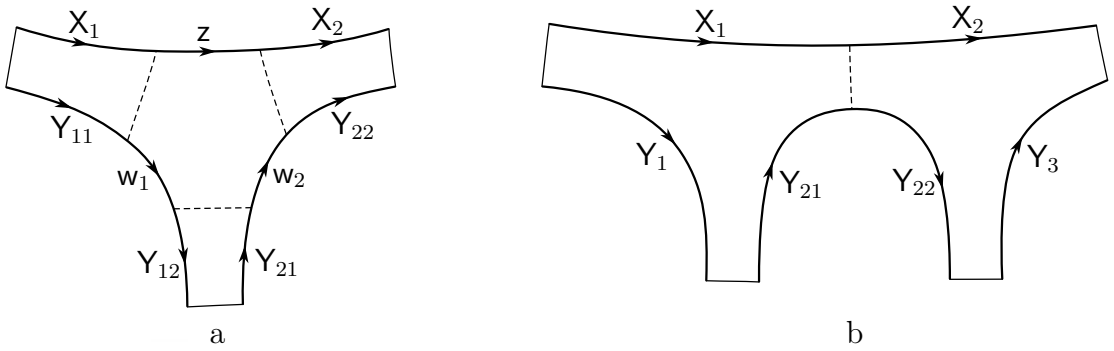

图1 8。

（ii）如果 Y_1 和 Y_3 上存在一对近邻顶点，则由（i）可得该命题的第一种情况。如果 X 上以及 Y_2 上各存在一对近邻顶点，则将 X 和 Y_2 表示为 $X = X_1 X_2$, $Y_2 = Y_{21} Y_{22}$，其中 $\tau(X_1)$ 和 $\tau(Y_{21})$ 是近邻顶点，并对

$X_1^{-1}*Y_1*Y_{21}*$ 和 $X_2^{-1}*Y_{22}*Y_3*$ （图18b）应用（i）。于是我们得到该命题的第二种情况。否则，我们采用类似于（i）中证明的论证，得到第一种情况。□

9.20.**命题** (小循环单面)。设 X 是 G_α 中循环约化的字，且 X 在 G_α 中与一个字共轭，其中 Yu ， Y 在 G_α 中约化， u 是秩为 α 的桥。设 $X = \prod_{i\in\mathbb{Z}} X_i$ 和 $\prod_{i\in\mathbb{Z}} Y_i u_i$ 是 Γ_α 中表示该共轭关系的直线。假设 X_0 上没有顶点与 Y_i 上的顶点相近。那么 $|X|_\alpha \le \eta$。

证明。设 Δ 是秩为 α 的环形图，其边界环 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}^{-1}\hat{u}^{-1}$ 表示该共轭关系。我们把 Δ 看作具有循环边 $\hat{X}$、非循环边 $\hat{Y}^{-1}$ 和桥 $\hat{u}^{-1}$。切换 $\hat{u}^{-1}$ 后，不妨设 Δ 是约化的。假设蕴含 Δ 在任何细化之后都不可能有一条连接 $\hat{X}$ 与 $\hat{Y}^{-1}$ 的键。设 Δ 有一条键 v （可能是在细化之后），连接同一边 $\hat{Y}^{-1}$ 上的两个顶点。那么 v 从 Δ 中截出一个边界环为 $Z_1\hat{u}^{-1}Z_2v^{\pm1}$ 的单连通子图 Σ，其中 $\hat{Y}^{-1} = Z_2WZ_1$，某个 W。根据定义 6.1，字 label (Z_i) $(i = 1, 2)$ 中至少有一个非空。从 Δ 中移除 Σ，得到图 Δ'，其两边的总标签$\hat{}$更短。因此，由归纳法可设 Δ' 是小的。于是，由命题 7.9， $|X|_\alpha = |X|_\alpha \le \eta$。□

9.21. 命题（近邻伴随）。设 X 和 Y 是 $\Gamma_\alpha, \alpha \ge 1$ 中相近的约化路径。那么 X 和 Y 可表示为 $X = U_1U_2 \ldots U_k$ 以及 $Y = V_1V_2 \ldots V_k$ （U_i 和 V_i可以为空），其中每个 U_i 的起始顶点都接近 V_i 的起始顶点，并且对所有 i， $|U_i|_\alpha$、 $|V_i|_\alpha \le \zeta$。

证明。注意到，引理的陈述在情形 $\alpha = 0$ with $|U_i|_0, |V_i|_0 = 1$ 下成立。因此，我们可以引用秩 $\alpha-1$ with 界 $|U_i|_{\alpha-1}, |V_i|_{\alpha-1} \le 1$ 中的引理陈述，这些界推出 $|U_i|_\alpha, |V_i|_\alpha \le \zeta$。还要注意，如果 $X = X_1X_2 \ldots X_r$ and $Y = Y_1Y_2 \ldots Y_r$，其中对于每个 i， X_i and Y_i 均相近，那么对于每一对 (X_i, Y_i) 的引理陈述会推出 X 和 Y 的引理陈述。根据 9.5，我们将 X 和 Y 表示为 $X = X_1X_2 \ldots X_r$ and $Y = Y_1Y_2 \ldots Y_r$，其中各对 (X_i, Y_i) 交替满足以下条件（1）或（2）：（1）对于某些秩为 α 的桥 u_i and v_i，回路 X_i^{-1} $u_iY_iv_i$ lifts to $\Gamma_{\alpha-1}$；或（2）存在回路 $X_i^{-1}w_{i1}R_iw_{i2}$ and $Y_iw_{i3}S_iw_{i4}$，它们可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，使得 S_i and R_i 出现在一个秩为 α 的关系环中，并且 w_{ij} 是秩为 $\alpha - 1$ 的桥（见图19）。不妨假设各对 (X_1, Y_1) 和 (X_r, Y_r) 满足（2），并且在情形（2）中，X、Y 的子路径 $X\,\alpha = 0\,, Y\,|$ 以及相应关系环的 $S_i|_0, R\,|$ 均无法延伸。我们对每一对 $(X_i|_0 = 1, Y\,\alpha-1\,)$ 证明该陈述。

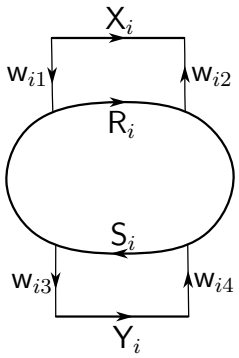

图19。43

的情形（2）中，X、Y 的子路径 X_i, Y_i 以及相应关系环的 S_i, R_i 均无法延伸。我们对每一对 (X_i,Y_i) 证明该陈述。

情形（*1*）：省略指标 i对于 X_i 和 Y_i，假设回路 $X^{-1}w_1Pw_2Yw_3Qw_4$提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，其中 w_i 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，P 和 Q 的标签是秩为 α 的片段。在不改变记号的前提下，我们假设 $X^{-1}w_1Pw_2Yw_3Qw_4$ 已经处于 $\Gamma_{\alpha-1}$。根据情形（2）中对 X_i、Y_i、S_i 和 R_i 的极大选择，除适当的端点外，(X, P)、(X, Q)、(Y, P) 和 (Y, Q) 这些顶点对上均不存在近邻顶点（即，对于 (X, P)，除 ι(X) 和 ι(P) 外，其他顶点对亦然）。根据顶点对 (P, Q) 和 (X, Y) 上是否存在近邻顶点，我们如图20所示分为 (a)–(c) 三种情形。在情形 (a) 中，由于

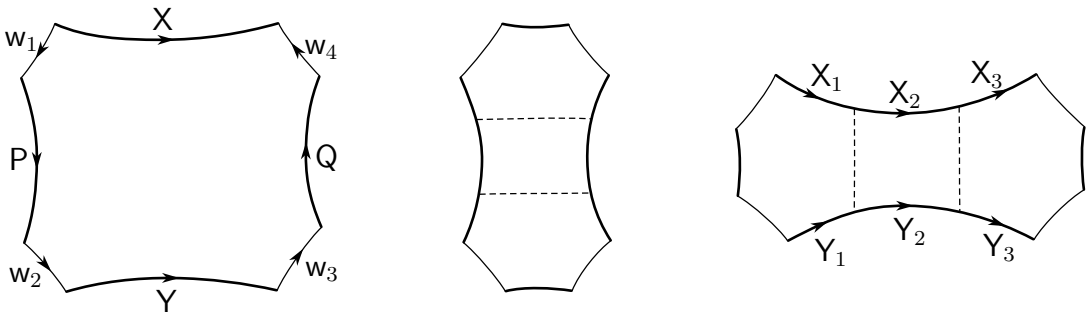

图20。

命题 $9.18_{\alpha-1}$。情形（b）中，取 P 和 Q 的相近子路径的极大配对，由命题 $9.18_{\alpha-1}$，再次得到 $|X|_\alpha, |Y|_\alpha \le 4\zeta^2\eta < \zeta$。情形（c）中，我们有 $X = X_1X_2X_3$ 和 $Y = Y_1Y_2Y_3$，其中 X_2 和 Y_2 相近。取尽可能大的 X_2 和 Y_2，由命题 $9.18_{\alpha-1}$，得到$|X_i|_\alpha, |Y_i|_\alpha \le 4\zeta^2\eta$，其中 $i = 1, 3$。对于 X_2 和 Y_2，我们可以应用 $\alpha := \alpha - 1$ 的陈述。

情形（2）：第二种情形中，根据引理关于 $\alpha := \alpha - 1$ 的陈述，我们有 $X = U_1U_2 \dots U_k$ 和 $Y = W_1W_2 \dots W_l$，其中 $|U_i|_\alpha, |W_i|_\alpha \le \zeta$，每个 U_i 的起始顶点都可以通过秩为 $\alpha-1$ 的桥与 R 上的一个顶点相连，而每个 W_i 的起始顶点都可以通过秩为 $\alpha-1$ 的桥与 S 上的一个顶点相连。于是，每个 ι(U_i) 都与ι(Y) 相近，每个 ι(W_i) 都与 τ(X) 相近。我们取 $X = U_1U_2 \dots U_{k+l}$ 和 $Y = V_1V_2 \dots V_{k+l}$，其中 $U_{k+1}, \dots, U_{k+l}, V1, \dots, V_k$ 为空，且对于 $k+1 \le j \le k+l$，$V_j = W_{j-k}$。□

9.22. 引理。设 *X* 是一条约化路径，*R* 是 α 在 Γ_α, $\alpha \ge 1$中的一个秩为 α 的关系环。设 $u_i(i = 1, 2)$ 是一条由 $\mathcal{H}_{\alpha-1}$ 中的一个字标记、连接 *X* 上的顶点 a_i 和 *R* 上的顶点 b_i 的路径。设 *Y* 是 $X^{\pm1}$ 的子路径，从 a_1 起始，到 a_2, 末段；并设 $R = R_1R_2$，其中 R_i 从 b_i 起始（图*21*）。那么，两个回路 $Yu_2R_1^{-1}u_1^{-1}$或 $Yu_2R_2u_1^{-1}$ 中必有一个提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。

证明。我们用秩为 α 的圆盘图 Δ 填充回路 $Yu_2R_1^{-1}u_1^{-1}$，其边界环为 $\bar{Y}\bar{u}_2S\bar{u}_1^{-1}$，其中 label(S) = label ($R_1^{-1}$)。我们取 $\bar{Y}$ 作为一条边，并取 $\bar{u}_2S\bar{u}_1^{-1}$ 作为 Δ 的一座桥，其桥划分为 $\bar{u}_2 \cdot S \cdot \bar{u}_1^{-1}$。然后，我们应用约化过程，使 Δ 变为约化的。约化后，我们得到 label (S) = label (R_1^{-1}) 或 label (S) = label (R_2)。由引理 7.5，Δ 不含秩为 α 的胞腔。视具体情形而定，这意味着 $Yu_2R_1^{-1}u_1^{-1}$ 或 $Yu_2R_2u_1^{-1}$ 提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。□

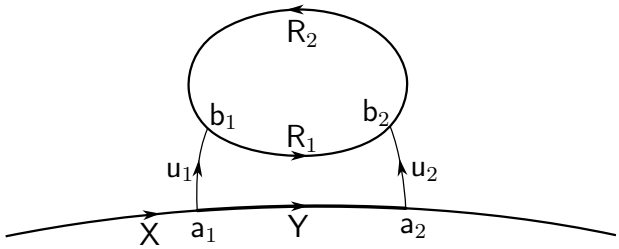

图21。

9.23.**命题**（相容性提升）。设 $1 \leq \beta \leq \alpha$。设 K 和 M 是秩为ˆ ˆˆ β、出现在 Γ_α 中一条约化路径 X 上的片段。设 X 是 X 在 $\Gamma_{\beta-1}$ 中的一个提升，并且 K 和Mˆ 是 X 中分别投影到 K 和 M 上的子路径。那么，K ∼M 蕴含ˆK ∼ ˆM，且 K ∼M^{-1} 蕴含 ˆK ∼ ˆ M^{-1}。

证明。假设 K ∼ M^{ε}，其中 $\varepsilon = \pm 1$。设 R 为 K 和 M^{ε}的公共基环。ˆ引理9.22表明，R 可提升为一条直线 R，而该直线是ˆˆˆˆ K 和 M^{ε}的公共基轴。这意味着 K ∼M^{ε}。□

9.24. **推论**。设 $1 \leq \beta \leq \alpha$。命题 *8.13*、推论 *8.14* 和命题 *8.15* 中的陈述对 G_α 中约化路径 X 内秩为 β 的片段成立。

更确切地说，设 X 是 Γ_α 中的一条约化路径。则以下陈述成立 $e.$

(i) 设 $K_i (i = 1, 2)$ 是 *X* 中秩为 β 的片段，$K_1 \sim K_2$ 且 $\mu_{\mathrm{f}}(K_i) \geq 5.7\omega$，其中 $i = 1$或 $i = 2$。则 $K_1 \cup K_2$ 是一个秩为 β 的片段，且 $K_1 \cup K_2 \sim K_1$。若 K_1 和 K_2 不相交，则 $\mu_{\mathrm{f}}(K_1 \cup K_2) \geq \mu_{\mathrm{f}}(K_1) + \mu_{\mathrm{f}}(K_2) - 5.7\omega$。*(ii)* 设 K_i、$M_i (i = 1, 2)$ 是 *X* 中秩为 β 的片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K_i)$ $\mu_{\mathrm{f}}(M_i) \geq \gamma + 2.6\omega$。假设 $K_1 \sim K_2$, $M_1 \sim M_2$ 且 $K_1 \not\sim M_1$。则 $K_1 < M_1$ 当且仅当 $K_2 < M_2$。*(iii)* 若 *K* 和 *M* 是 *X* 中秩为 β 的片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K)$ $\mu_{\mathrm{f}}(M) \geq 5.7\omega$，则 $K \not\sim M^{-1}$。

10. 稳定性

设 F_A 是一个以 A 为基的自由群，并设 $X^{-1}Y_1Y_2 \ldots Y_{k+1} = 1$ 是 F_A 中的一个关系，其中X、Y_1、.....、 Y_k 是生成元 A上的自由约化字。那么，对于 X 中的任意一个字母 $a^{\varepsilon} \in A^{\pm 1}$，在某个 Y_i 中都有且仅有一个相同的字母 a^{ε}，它与 $a^{-\varepsilon}$ 在 $X^{-1}Y_1Y_2 \ldots Y_{k+1}$中发生抵消。本节的主要目标是为 G_α中的关系建立这一陈述的类比形式。字母 a^{ε} 所扮演的角色将由秩为 α 的片段承担；我们不考虑关系 $X^{-1}Y_1Y_2 \ldots Y_{k+1} = 1$，而是考察 Γ_α中的粗多边形 $X^{-1}*Y_1* \ldots Y_k*$（就我们的考察而言，只需考虑 $k = 1$、2、3 三种情形）。被抵消字母之间的对应将由等价关系“K ∼$L^{\pm 1}$”来承担。

群 G_α 的情形与自由群 F_A 的情形有两个本质区别。其一是“渐隐效应”：Y_i 中的片段可以比 X 中的初始片段“大小更小”。另一差异是，粗多边形的桥可能导致稳定性方面的例外（为描述这类情况，我们引入了同秩 β 的片段与桥之间的一种特殊关系，见定义 10.4）。

我们先给出一个命题，说明接近性如何在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 的粗四边形中传递。这本质上是归纳假设的推论。

10.1. 定义（一致接近）。对于 $\alpha \geq 1$，如果以下条件至少有一个成立，我们就称顶点 $a_1, a_2, \ldots, a_r$（属于 Γ_α）一致接近：

- 它们两两秩接近 $\alpha - 1$；或
- 存在一个秩为 α 的关系子环 R，使得每个 a_i 都与 R 上的某个顶点秩接近 $\alpha - 1$。

我们还考虑以下情形 $\alpha = 0$：若 a_1, a_2，...，a_r 属于 Γ_0，则称这些顶点一致接近，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_r$。

注意，一致接近的顶点两两接近。若 $r = 2$，则一致接近与接近等价。

10.2. 引理。设 $\alpha \geq 1$、X 和 Y 是 $\Gamma_{\alpha-1}$中的相近约化路径，并设 $S^{-1}*T_1*T_2*T_3*$是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一个粗四边形，其中 Y 是 S 的子路径。假设 $|X|_{\alpha-1} \geq 5.2$。那么，X 可以表示为 $z_0X_1z_1 \ldots X_rz_r$ $(1 \leq r \leq 3)$，其中 X_i 与某个 T_{j_i}中的子路径 W_i 相近，$j_1 < \cdots < j_r$ 并且

$$\sum_i |X_i|_{\alpha-1} > |X|_{\alpha-1} - 5.8. \tag{10-1}$$

此外：

(i) 如果 $r = 3$，那么我们有一个更强的界

$$\sum_i |X_i|_{\alpha-1} > |X|_{\alpha-1} - 3.4.$$

(ii) 存在一条子路径 Y_1，它属于 Y，使得起始顶点 $\iota(X_1)$、$\iota(Y_1)$ 和 $\iota(W_1)$ 一致接近；终止顶点 $\iota(X_r)$、$\iota(Y_1)$ 和 $\iota(W_r)$也同样如此。

证明。如果 $\alpha = 1$，则该陈述显然成立（见下文注 10.3）。令 $\alpha > 1$。令 Z 为一条连接 $\iota(S)$ 和 $\tau(T_2)$ 的约化路径，该路径由命题 $11.1_{\alpha-1}$ 保证存在（见图 22）。我们先将命题 $10.18_{\alpha-1}$ 应用于粗三边形 $S^{-1}*Z*T_3*$，然后可能再应用于

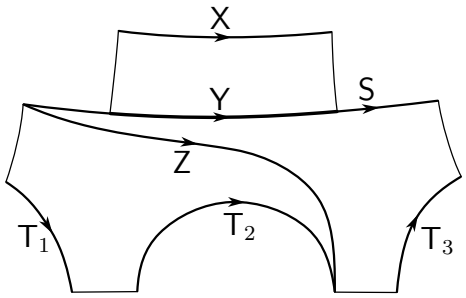

图 22。

粗三边形 $Z^{-1}*T_1*T_2$。由于 $|X|_{\alpha-1} \geq 5.2$，应用命题 $10.18_{\alpha-1}$ 后，我们发现：或者 X 的一个子路径 X_3 与 T_3 的一个子路径接近，或者 X 的一个子路径 X' 与 Z 的一个子路径接近，且 $|X'|_{\alpha-1} > |X|_{\alpha-1} - 2.75 > 2.45$。后一种情况下，第二次应用 $10.18_{\alpha-1}$ 得到剩余的 X_1 和/或 X_2。如果 $r < 3$，那么对于界 (10-1)，最坏的情况是两次应用 $10.18_{\alpha-1}$ 后得到两个 X_i。在这些情况下，一次是 $10.18_{\alpha-1}$ 的情形 (iii)，另一次是情形 (i) 或 (ii)。

因此 $\sum_i |X_i|_{\alpha-1} > |X|_{\alpha-1} - 3 - 2.75$。陈述 (ii) 由命题 $10.18_{\alpha-1}$ 的相应部分得出。

假设 $r = 3$ 因此 $X = z_0X_1z_1X_2z_2X_3z_3$，其中每个 X_i 都接近于 T_i 的一个子路径。根据命题 $10.18_{\alpha-1}$，我们有 $|z_0|_{\alpha-1}$、$|z_3|_{\alpha-1} < 1.3$。然后利用命题 $9.19(i)_{\alpha-1}$，我们延拓所有 X_i，得到 $|z_1|_{\alpha-1}$、$|z_2|_{\alpha-1} \le 4\zeta\eta < 0.4$。这证明了 (i)。□

10.3. 注。如果 $\alpha = 1$，那么引理 10.2 的假设表明 $X = Y$ 且 $S^{-1}T_1T_2T_3$ 是自由群 G_0 的凯莱图 Γ_0 中的一个回路。于是，该引理的结论无需假设 $|X|_{\alpha-1} \ge 5.2$ 即可成立。此外，在结论中我们有 $\sum_i |X_i|_{\alpha-1} = |X|_{\alpha-1}$。

10.4. **定义**（独立性）。设 $1 \le \beta \le \alpha$, K 是 Γ_α 中的一个秩为 β 的片段，u 是 Γ_α中的一个秩为 β 的桥。回想一下，K 是相对于其关联的秩为 β 的基环 R 来考虑的。若 label(u) $\in \mathcal{H}_{\beta-1}$，或者 u 具有一个秩为 β 的桥划分 $u = v \cdot S \cdot w$，其中 S 出现在一个秩为 β 的关系子环 L 中，且 $L \ne R^{\pm 1}$，则称 K独立于 u。

由定义可知，若 K 独立于 u 且 $M \sim K^{\pm 1}$，则 M 也独立于 u。

10.5. 命题（双边形中的非活跃片段）。设 $\alpha \ge 1$, $X^{-1}uYv$ 是 Γ_α 中的一个粗双边形，且 $X = F_0K_1F_1 \dots K_rF_r$，其中 K_i 是关联的秩为 α 的活跃片段。设 K 是 X 中一个秩为 α 的片段，且 $\mu_f(K) \ge 2\lambda + 5.8\omega$。假设对所有 i，$K \not\sim K_i$，并且 K 独立于 u 和 v。那么 Y 中存在一个秩为 α 的片段 M，使得 $M \sim K$，并且

$$\mu_f(M) \ge \mu_f(K) - 2\lambda - 3.4\omega.$$

证明。由命题 8.10 可知，K 是路径 $F_0K_1, K_1F_1K_2$、.....、K_rF_r 中某一条的子路径。我们考虑 K 是某个 $K_iF_iK_{i+1}$ 的子路径的情形（K 是 F_0K_1 或 K_rF_r 的子路径的情形类似；另见证明末尾的注）。令 $Y = H_0M_0H_1 \dots M_rH_r$，其中 M_i 是 Y 中秩为 α 的相应活跃片段。

如我们从 9.4 中所见，存在一个回路 $T = (K_iF_iK_{i+1})^{-1}w_1S_1w_2H_iw_3S_2w_4$，它可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，其中 w_j 是秩为 $\alpha - 1$ 的桥，而 S_1 和 S_2 分别出现在 K_i 和 K_{i+1} 的基环中（见图 23）。滥用记号，我们假设 T 已经

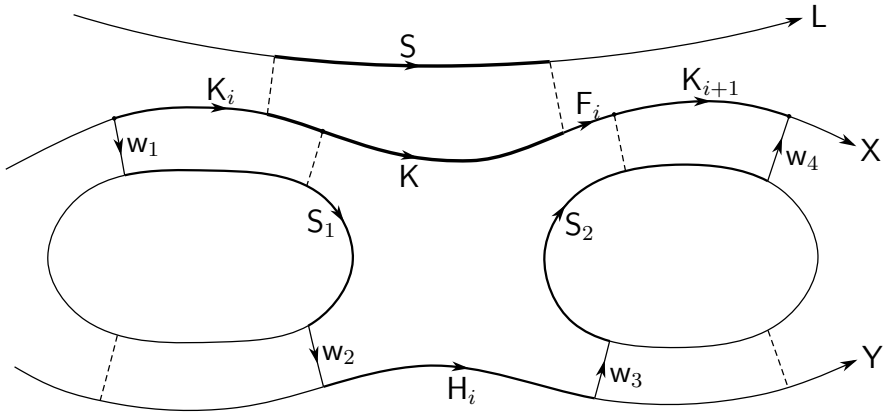

图 23.47

位于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中。于是，与其说是基环，不如说 S_1 和 S_2 分别出现在 K_i 和 K_{i+1}的基轴 L_1 和 L_2 中。

令 L 为 K 的基轴，S 为 K 的基（按定义，S 包含于 L）。假设 $K \not\sim K_i$ and $K \not\sim K_{i+1}$ 蕴含 $L \neq L_i$ $(i = 1, 2)$。由推论 8.2，若 S 的子路径 P 与 S_i 的某个子路径接近，则 $\mu(P) < \lambda$。于是，由引理 10.2，我们找到 S 的一个子路径 Q，它与 H_i 的某个子路径 M 接近，并满足

$$\mu(Q) > \mu(S) - 2\lambda - 3.4\omega.$$

那么，M 是一个秩为 α 、基为 Q 的片段。显然，M 满足该命题的结论。

若 K 是 F_0K_1 或 K_rF_r 的子路径，则可采用类似的论证。例如，假设 K 是 F_0K_1 的子路径。与上文一样，我们假设所有路径都处于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中，且不改变其记号。令 L 为 K 的一条基轴。根据假设，要么 $\mathrm{label}(u) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，要么 $u = u_1Vu_2$，其中 V 出现在一条直线 L_1 上，该直线标记为关系词 R 的秩为 α 的无限幂 R^∞，且 L_1 与 L 不同。当 $\mathrm{label}(u) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ 时，我们应用命题 $10.18_{\alpha-1}$。否则，论证与 K 是 $K_iF_iK_{i+1}$ 的子路径时相同。K 是 K_rF_r 的子路径时，情形类似。

最后，还有一种“退化”情形：当 $\mathrm{Area}_\alpha(X^{-1}uYv) = 0$ 且 u 和 v 都是秩为 $\alpha - 1$ 的桥时。在这种情况下，结论可直接由命题 8.7 得出。□

10.6. **命题** (双边形中的片段稳定性)。 设 $\alpha \geq 1$、$X^{-1}uYv$ 是 Γ_α 中的一个粗双边形，且 K 是 X 中秩为 α 的片段，其中 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 2\lambda + 5.8\omega$。假设 K 独立于 u 和 v。那么，存在 Y 中秩为 α 的片段 M，使得 $M \sim K^{\pm 1}$ 并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(M) \geq \min\{\mu_{\mathrm{f}}(K) - 2\lambda - 3.4\omega,\ \xi_0\}$$

证明。 令 $X = F_0K_1F_1 \dots K_rF_r$，$Y = H_0M_0H_1 \dots M_rH_r$，其中 K_i 和 M_i 是秩为 α 的相应活跃片段。若对于某个 i，有 $K \sim K_i$，那么根据命题 9.7，可取 $M = M_i$。否则，我们应用命题 10.5。□

10.7.**命题** (三边形中的片段稳定性)。 设 $\alpha \geq 1$, $X^{-1}u_1Y_1u_2Y_2u_3$ 是 Γ_α 中的一个粗三边形，并设K 是X 中秩为 α 的一个片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 3\lambda + 10\omega$。假设K 独立于任意一个$u_i$。那么，在$Y_1$ 或Y_2 中存在一个秩为 α 的片段M，使得$M \sim K^{\pm 1}$ 并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(M) > \min\left\{3\lambda - 1.1\omega,\ \frac{1}{2}(\mu_{\mathrm{f}}(K) - 3\lambda - 6.8\omega)\right\}.$$

证明。证明思路与命题 10.5 的证明相同。为避免复杂的记号，我们按照 9.6 中所述，对 $P = X^{-1}u_1Y_1u_2Y_2u_3$ 的 α-面积进行归纳。设 R 是 P 中一个秩为 α 的活化关系子环路。如 9.6 中所述，存在两个或三个秩为 α 、以 R 为基环的片段 N_i ($i = 1, 2$ 或 $i = 1, 2, 3$)，它们分别出现在不同的路径 X^{-1}、Y_1 或 Y_2中。由命题 9.15，可假设对于 $i = 1$，2，有$\mu_{\mathrm{f}}(N_i) \geq 3\lambda - 1.1\omega$。若 $K \sim N_1^{\pm 1}$，则我们取出现在 Y_1 或 Y_2中的那个 N_i作为所需的 M。设 $K \not\sim N_1^{\pm 1}$。

如果 N_1 和 N_2 出现在 Y_1 和 Y_2 中，那么我们可以用一个面积更小的粗三边形替换 P，并使用归纳法（见图24a）。（在这种情况下，u_2 被一个新的桥 u_2' 替换，而假设 $K \not\sim N_1^{\pm 1}$ 意味着 K 独立于 u_2'。）否则，假设 N_1 出现在 X^{-1} 中，且 N_2 出现在 Y_1 中（N_2 出现在 Y_2 中的情形是对称的）。

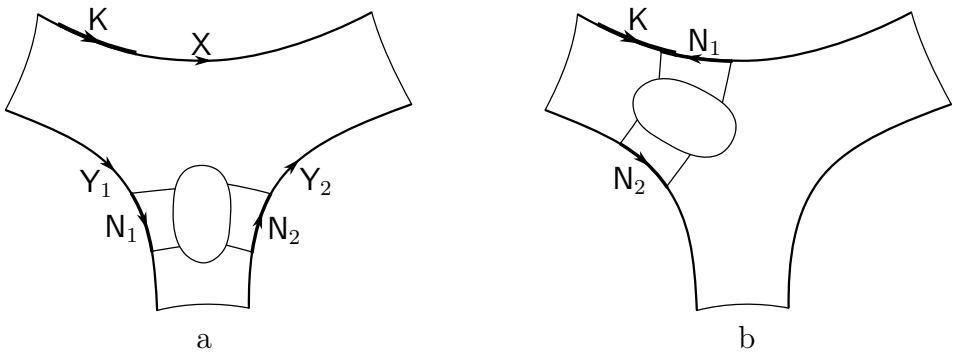

图 24。

由于 $\mathrm{K} \not\sim \mathrm{N}_1^{-1}$，我们有 $\mathrm{K} < \mathrm{N}_1^{-1}$ 或 $\mathrm{K} > \mathrm{N}_1^{-1}$。在第一种情形下，我们将命题归约为图24b所示的粗双边形情形，并应用命题 10.5。在第二种情形下，结论由归纳假设得出。

接下来考虑面积$\alpha(\mathrm{P}) = 0$的情形。于是回路 P 可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，并且我们假设 P 已经处于 $\Gamma_{\alpha-1}$中。令 L 为 K 的基轴，S 为 K 的基。由于 K 独立于 u_i（当在 Γ_α中观察时），我们有 $\mathrm{label}(\mathrm{u}_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，或者 $\mathrm{u}_i = \mathrm{v}_i\mathrm{Q}_i\mathrm{w}_i$，其中 $\mathrm{label}(\mathrm{v}_i)$，$\mathrm{label}(\mathrm{w}_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 Q_i出现在直线 L_i 上，该直线由关系词 R_i 的无限幂 R_i^∞ 标记，其秩为 α，使得 $\mathrm{L}_i \neq \mathrm{L}$。我们得到一个粗糙的 r边形，其边为 X^{-1}、Y_1, Y_2和 Q_i，其中 $3 \le r \le 6$（见图 25）。我们考虑“最坏”的情形 $r = 6$（其他情形类似，必要时应用命题 $10.18_{\alpha-1}$ 或 $8.7_{\alpha-1}$）。令 Z 为一个

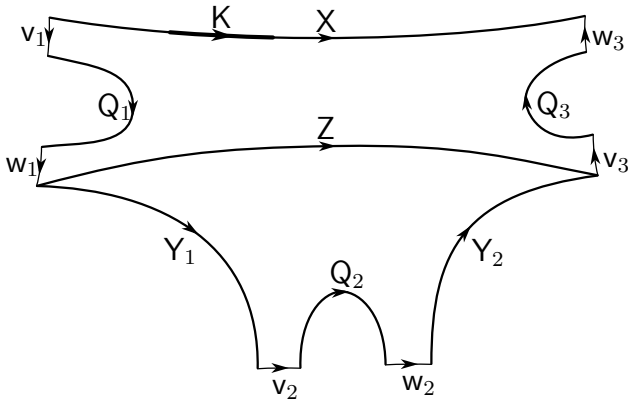

图 25。

由命题 $11.1_{\alpha-1}$ 得到的连接 $\tau(\mathrm{u}_1)$ 与 $\iota(\mathrm{u}_3)$ 的约化路径。根据推论 8.2，如果 S 的一个子路径 P 与 Q_i 的一个子路径接近，那么 $\mu(\mathrm{P}) < \lambda$。然后，对粗四边形 $\mathrm{X}^{-1}\mathrm{v}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{w}_1\mathrm{Z}\mathrm{v}_3\mathrm{Q}_3\mathrm{w}_3$ 和 $\mathrm{Z}^{-1}\mathrm{Y}_1\mathrm{v}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{w}_2\mathrm{Y}_2$ 两次应用引理 10.2，即可轻易得到该结论。□

10.8. **引理**。设 $\alpha \ge 1$, X 是秩为 $1 \le \beta < \alpha$ 的片段或秩为 $\beta < \alpha$ 的片段。那么 X 不包含秩为 α 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \ge 3.2\omega$ 的片段 K。

特别地，任何秩为 α 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \ge 3.2\omega$ 的片段 K 都是非空词（否则它会出现在秩为 *0* 的片段中）。

证明。我们考虑 X 是秩为 $\beta < \alpha$ 的片段的情形。用 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条路径 X 表示 X。假设 X 包含一个秩为 α 的片段 K，且 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}) \ge 3.2\omega$。

设 S 是 K 的一个基，满足 $|S|_{\alpha-1} \geq 3.2$。由引理 10.8$_{\leq\alpha-1}$ 和推论 9.13 可得 $S = w_1 S_1 w_2$，且 $K = z_1 K_1 z_2$，其中 S_1 和 K_1 的秩接近 $\max(0, \beta-1)$，并且 $|S_1|_{\alpha-1} > |S|_{\alpha-1} - 2 - 10\zeta^2\eta > 1.15$。若 $\beta = 0$，我们已经得到矛盾，因为在这种情况下 $|K_1| \leq 1$，但 $|S_1| \geq |S_1|_{\alpha-1} > 1$。设 $\beta \geq 1$。不妨改变记号，假设 X、K_1 和 S_1 提升到 $\Gamma_{\beta-1}$。设 T 是 X 的一个基。由命题 10.16$_{\beta-1}$，T 的一个子路径 T_1 与 S 的一个子路径 S_2 秩接近，且 $|S_2|_{\alpha-1} > |S_1|_{\alpha-1} - 2.6\zeta > 1$。于是 S_2 是一个秩为 β、基为 T_1 的片段，因此应有 $|S_2|_{\alpha-1} \leq 1$，矛盾。

当 X 是秩为 α 的片段时，采用类似的论证，但跳过命题 10.16$_{\beta-1}$的应用。□

10.9. **引理.** 设 $\alpha \geq 1$ 和 X 是 $G_{\alpha-1}$中的循环约化字。假设 X 的一个循环移位包含秩为 α 的片段 K，且 $\mu_f(K) \geq 6.5\omega$。那么 X 在 $G_{\alpha-1}$中是强循环约化的。

证明. 设 F 是字 X^t中秩为 $1 \leq \beta \leq \alpha-1$ 的片段。假设 $|F| > |X|$。利用命题 8.11，将 K 表示为 $K = K_1 u K_2$，其中 $\mu_f(K_1)\ \mu_f(K_2) > 3.2\omega$。由于$|K| \leq |X|$，$F$ 应包含 K_1 或 K_2的一个平移。但由引理 10.8可知这是不可能的。因此 $|F| \leq |X|$，于是 $\mu_f(F) \leq \rho$，因为 X在 $G_{\alpha-1}$中是循环约化的。这表明任意幂 X^t 在 $G_{\alpha-1}$中都是约化的，即 X 在 $G_{\alpha-1}$中是强循环约化的。□

10.10. **命题**（共轭关系中循环边的片段稳定性）。设 $\alpha \geq 1$、X 和 Y 是在 G_α 中循环约化且代表 G_α 的共轭元素¯ ¯的字。设 $X = \prod_{i\in\mathbb{Z}} X_i$ 和 $Y = \prod_{i\in\mathbb{Z}} Y_i$ 是 Γ_α 中表示共轭¯关系的平行直线。设 K 是 X 中秩为 α 的片段，满足 $\mu_f(K) \geq 2\lambda + 5.8\omega$ 且 $|K| \leq |X|$。那么，在 ¯Y 中存在一个秩为 α 的片段 M，使得 $M \sim K^{\pm 1}$ 且

$$\mu_f(M) \geq \min\{\mu_f(K) - 2\lambda - 3.4\omega,\ \xi_0\}$$

证明。由引理 10.9 X 在 $G_{\alpha-1}$ 中是强循环约化的。我们断言，Y 的某个循环移位也包含一个秩为 α 的片段 F，满足 $\mu_f(F) \geq 6.5$，因此 Y 在 $G_{\alpha-1}$ 中也是强循环约化的。事实上，由命题 9.17，取 $\beta := \alpha - 1$，我们可以假设对于 X 和 Y 的某些循环移位 X' 和 Y'，有 $Y' = w^{-1}X'w$ 在 $G_{\alpha-1}$ 中，其中 $w \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$。由此，利用命题 8.11 和 8.7，可轻易得出 F 的存在性。

考虑一张秩为 α 的图 Δ，边界回路为 X。Δ 的约化万有覆盖，并令 ϕ: $\tilde{\Delta}$ → Γ_α 为一个组合连续映射，它将 ^X 和 ^Y 的提升分别映到¯ ¯X 和 Y。

假设 Δ 中的某个提升为由命题 7.13(i)$_\beta$ 给出的胞腔 D。则 $\partial(\phi(D))$ 和 $\partial(\phi(D))^{-1}$ 分别是 ¯X 和 ¯Y 中秩为 α 的片段 N_i $(i = 1, 2)$ 的基环，且满足 $\mu_f(N_1) + \mu_f(N_2) \geq 1 - 2\lambda - 1.5\omega$。由于 X和 Y在 G_α 中是循环约化的，我们有 $\mu_f(N_i) \leq \rho$，因而 $\mu_f(N_i) \geq 1 - \rho - 2\lambda - 1.5\omega = \xi_0$。根据构造，我们有 $N_1 \sim N_2^{-1}$。由于 ¯X 和 ¯Y 平行，对于任意 $k \in \mathbb{Z}$，都有 s_X^k,¯XN¹ ∼ s_Y^k,¯YN$_2^{-1}$。若 K ∼ s_X^k,¯XN$_1$ 对某个 k 成立，则可以取 s_Y^k,¯YN$_2$ 作为 M。否则，我们有 s_X^k,¯X,N$_1$ < K < s_X^{k+1} ,XN$_1$，其中某个 k 成立；其余论证与命题 10.5 的证明相同。

现在假设 Δ 没有秩为 α的胞腔。我们可以假设 Δ 是某个 $\beta \leq \alpha-1$ 的秩为 β 的约化图，并且在 $\beta \geq 1$的情况下，Δ 至少有一个秩为 β的胞腔。如果 $\beta = 0$¯ ¯，那么 X =Y，无需证明。令 $\beta \geq 1$。在改变记号后，我们假设¯ ¯ ¯K、X 和 Y 被提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。命题 7.13(i)$_\beta$ 意味着 X 上存在某个顶点 a

以及 $\bar{Y}$ 上的顶点 b，它们由一条秩为 β的桥连接。对于任意平移$s^i_{X,}\ \bar{}$xa 和$s^i_{Y,}\ \bar{}$yb，这也成立。于是由命题 8.7 得出结论（这里我们用到 X 和 Y 在 $G_{\alpha-1}$中是强循环约化的）。□

10.11. **引理**。设 $\alpha \geq 1$ 和 S 是 $G_{\alpha-1}$中的循环约化字。假设 S 在 $G_{\alpha-1}$ 中共轭于一个字 $T_1v_1T_2v_2$，其中 T_i 在 $G_{\alpha-1}$ 中约化，且 v_i 是秩为 α的桥。设 $\bar{}$S = $\prod_{i\in\mathbb{Z}}$S$_i$ 和 $\prod_{i\in\mathbb{Z}}$ T$_1^{(i)}$ v$_1^{(i)}$ T$_2^{(i)}$ v$_2^{(i)}$ 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中表示该共轭关系的平行直线。记 U$_{2i}$ =T$_1^{(i)}$ 和 U$_{2i+1}$ = T$_2^{(i)}$ 。

假设与Γ_α|Y| 中的一条约化路径X 则X 可表示为X$_0$z$_1$X$_1$z$_2$X$_2$ 接近。X$_r$z$_r$ $(1 \leq r \bar{} \leq 4)$，其中每个X$_i$ 都接近某个U$_{j_i}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $j_r - j_1 \leq 3$ 的子路径，并且

$$\sum_i |\mathsf{X}_i|_{\alpha-1} \geq |\mathsf{X}|_{\alpha-1} - 9.$$

证明。令 Z 是 $G_{\alpha-1}$ 中约化的字，使得 $Z = T_1v_1T_2$ 属于 $G_{\alpha-1}$。我们用标记为 Z$_i$ 的路径连接 ι(T$_1^{(i)}$) 和τ(T$_2^{(i)}$)。由于 |X|$_{\alpha-1} \geq 8$，应用命题 10.19$_{\alpha-1}$ 得到 X = w$_1$X′w$_2$ 或 X =w$_1$X′w$_2$X″w$_3$；相应地，X′ 接近某个 Z$_i$ 的子路径，且 |X′|$_{\alpha-1} \geq$ |X|$_{\alpha-1}$ − 2.9；或者对于某个 i，X′ 接近 Z$_i$ 的子路径，X″ 接近 Z$_{i+1}$ 的子路径，且 |X′|$_{\alpha-1}$ + |X″|$_{\alpha-1} \geq$ |X |$_{\alpha-1}$ − 3。接着，应用一次或两次命题 10.18$_{\alpha-1}$ 即可得到所需的 X$_i$。□

10.12. 命题（具有非循环边的共轭关系中的片段稳定性）。设$\alpha \geq 1$ 和 X 是 G_α中的循环约化字。假设 X 在 G_α 中与$\bar{}$共轭，其中 Yu 是一个字，Y在 G_α 中是约化的，且 u 是秩为 α的桥。设 $X = \prod_{i\in\mathbb{Z}} X_i$ 和$\prod_{i\in\mathbb{Z}} Y_iu_i$ 是 Γ_α 中表示该共轭关系的平行直线。设 K 是 X 中秩为 α 的$\bar{}$片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 3\lambda + 9\omega$ 以及 $|K| \leq |X|$。假设 K 独立于任意桥 u_i。则在某个 Y_k 中存在一个秩为 α 的片段 M，使得 $M \sim K^{\pm1}$，并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}) > \min\left\{\frac{5}{2}\lambda - 1.1\omega,\ \frac{1}{2}(\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 3\lambda - 6.8\omega)\right\}.$$

证明。设 Δ 是一个秩为 α 的环形图，其边界回路为 ˆX^{-1} 和 ˆYˆu，表示该共轭关系。设 $\tilde{\Delta}$ 是 Δ 的万有覆盖，并且存在 ϕ： $\tilde{\Delta}^{(1)} \to \Gamma_\alpha$ 一个组合˜ ˜ ˆ ˆ连续映射，将 X、Y 和 ˆu 的提升 X$_i$、Y$_i$ 和 ˜u$_i$ 分别映射到 X$_i$、Y$_i$ 和 u$_i$。经过对 ˆu 的切换，不妨设 Δ 是约化的，并且具有一个由 $\mathcal{T}$ 邻接子图组成的紧集。

$\bar{}$情形 1： Δ 没有秩为 α 的胞腔。于是平行直线 X = $\prod_{i\in\mathbb{Z}}$X$_i$ 和 $\prod_{i\in\mathbb{Z}}$Y$_i$u$_i$ 可以被$\bar{}$提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$；我们假设它们以及 X 的子路径 K 已经被提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。如果$u \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$ 那么该陈述由命题 10.19$_{\alpha-1}$得出，因此我们假设 $u \notin \mathcal{H}_{\alpha-1}$。令 L 为 K 的基轴，S 为 K 的基。由于 K 独立于 u$_i$ （当视为 Γ_α 中的对象时），我们有 u$_i$ = w$_1^{(i)}$ Q$_i$w$_2^{(i)}$，其中标签(w$_j^{(i)}$) $\in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 Q$_i$ 出现在直线 L$_i$ 中，该直线由关系词 R_i 的秩为 α 的无限幂 R_i^∞标记，并且 L$_i$ ≠L。根据推论 8.2，若 S 的子路径 P 接近 Q 的某个子路径 $_i$，则 μ(P) $< \lambda$。应用引理 10.11，我们 $\bar{}$得出：要么存在某个 Y$_k$ 中的秩为 α 的片段 M，使得 M ∼K 且μ_{f}(M) $> \mu_{\mathrm{f}}$(K) $- 2\lambda - 9\omega$；要么存在某个 Y$_k$和 Y$_{k+1}$中的秩为 α的片段 M$_1$和 M$_2$，使得 M$_1$ ∼M$_2$ ∼ K，并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_1) + \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_2) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 2\lambda - 9\omega.$$

在后一种情形下，至少有一个 M_i 满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_i) > \frac{1}{2}(\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) - 2\lambda - 9\omega)$，我们可以取其在 Γ_α 中的像作为所需的 M。

情形 2： Δ 至少有一个秩为 α 的胞腔。设 D 为这样的胞腔，并设 D 是 Δ 中 $\tilde{\mathsf{D}}$ 的一个提升。由命题 7.11(iv)和引理 7.10(i)，D 有两个或三个邻接子图 $\Pi_i \in \mathcal{T}$ 分别连接到 Δ 的边，至多两个连接到 $\hat{\mathsf{Y}}$，至多一个连接到 $\hat{\mathsf{X}}^{-1}$。由命题 7.13(iii)，$\mathcal{N}_\phi(\delta\mathsf{D})$ 是两个或三个片段 N_i ($i = 1, 2$ 或 $i = 1, 2, 3$) 的基环；这些片段的秩为 α，分别位于路径 $\bar{\mathsf{X}}^{-1}$、Y_j 和 Y_{j+1} 中的两个或三个路径上，其中 j，且

$$\sum_i \mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{N}_i) > 1 - 4\lambda - 2.2\omega. \tag{10-2}$$

由于对于每个 i 都有 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{N}_i) \le \rho$，因此至少有两个指标 i 满足

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{N}_i) > \frac{1}{2}(1 - 4\lambda - 2.2\omega - \rho) = \frac{5}{2}\lambda - 1.1\rho.$$

注意，所有 N_i 都是两两相容的。如果 $\mathsf{K} \sim \mathsf{N}_1^{\pm 1}$，那么对于所要求的 M，我们可以取出现在 Y_i 或 Y_{j+1} 中且具有更大 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{N}_i)$ 的那个 N_i。因此，可以假设对于所有秩为 α 的 Δ 的胞腔 D 的所有提升 $\tilde{\mathsf{D}}$ 所产生的所有 N_i，均有 $\mathsf{K} \not\sim \mathsf{N}_i^{\pm 1}$。

$\hat{}$ 假设 D 有两个与 Y 相邻的子图 $\Pi_i \in \mathcal{T}$ ($i = 1, 2$)，即相应的秩为 α 的片段 N_1 和 N_2 分别出现在 Y_k 和 Y_{k+1} 中。然后我们从 Δ 中切除子图 $\Delta \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 及剩余的单连通分支。这会将 Δ 替换为一个新图 Δ'，其秩为 α 的胞腔数更少；将 Y_i 替换为 Y_i 的一个子路径；将桥 u_i 替换为另一座桥 u'_i。并且，对于由 D 的所有提升 D 所产生的 $\mathsf{N}_i^{\pm 1}$（其中 $\mathsf{N}_i^{\tilde{}}$），$\mathsf{K} \not\sim \mathsf{N}_i^{\pm 1}$ 这一假设意味着 K 独立于所有新的桥 u'_i。在这种情况下，我们可以对 Δ 中秩为 α 的胞腔数应用归纳法。

现在我们可以假设，Δ 中每个秩为 α 的胞腔 D 恰有两个与 Δ 的边相邻的子图 $\Pi_i \in \mathcal{T}$，其中一个与 $\hat{\mathsf{X}}^{-1}$ 相邻，另一个与 $\hat{\mathsf{Y}}$ 相邻。这意味着 D 的每个提升都会产生两个片段 N_i，一个位于 $\bar{\mathsf{X}}^{-1}$ 中，另一个位于某个 Y_j 中。令 $\{\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \dots, \mathsf{D}_k\}$ 为 Δ 中所有秩为 α 的胞腔的集合。对于 D_i 的每个提升 $\tilde{\mathsf{D}}_i^{(j)}$ ($t \in \mathbb{Z}$)，分别用 $\mathsf{N}_{i\,1}^{(j)}$, 和 $\mathsf{N}_{i\,2}^{(j)}$, 表示相应的秩为 α、分别出现在 $\bar{\mathsf{X}}^{-1}$ 和 Y_j 中的片段（$\mathsf{N}_{i\,2}^{(j)}$, 出现在 Y_j 中这一要求唯一确定了提升 $\tilde{\mathsf{D}}_i^{(j)}$ 及片段 $\mathsf{N}_{i\,1}^{(j)}$,）。注意，(10-2) 意味着

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{N}_{i,k}^{(j)}) > 1 - 4\lambda - 2.2\omega - \rho = 5\lambda - 2.2\omega.$$

我们将胞腔 D_i 排序，使其在 Y_j 中按 $\mathsf{N}_{i\,2}^{(j)}$, 排列为 $\mathsf{N}_1^{(j)}$, $_2 \ll \cdots \ll \mathsf{N}_{k\,2}^{(j)}$, 。因此，在 $\bar{\mathsf{X}}^{-1}$ 中有 $\cdots \mathsf{N}_1^{(j)}$, $_1 \ll \cdots \ll \mathsf{N}_k^{(j)}$, $_1 \ll \mathsf{N}_1^{(j+1)}$, $_1 \ll \cdots \ll \mathsf{N}_k^{(j+1)}$, $_1 \cdots$（图26）。根据

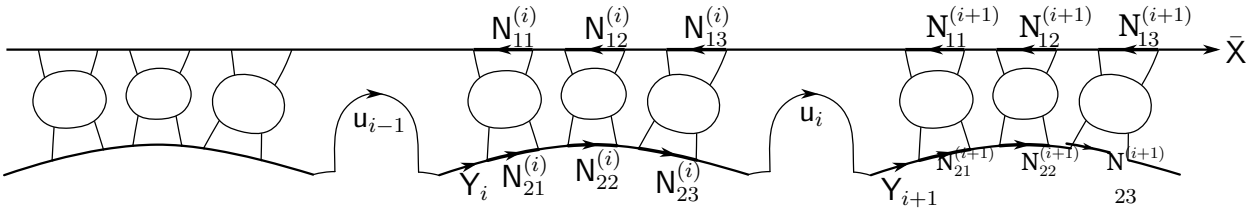

图26。

上述假设下，我们有 $\mathsf{K} \not\sim \mathsf{N}_i^{(j)}$, $_1{}^{-1}$ 对于所有 i, j。因此，根据命题 8.10，我们有以下两种情况之一：

$N_i^{(j)}, 1^{-1} < K < N_{i+1}^{(j)}, 1^{-1}$ 对于某个 i, j 或者 $N_k^{(j)}, 1^{-1} < K < N_1^{(j+1)}, 1^{-1}$ 对于某个 i。在上述每种情况下，我们都可以通过采用命题 10.5 或命题 10.7 证明中的相应部分，找到所需的 M。□

我们将使用以下观察结果。

10.13.**引理**。(i) 设 K 是 Γ_α 中秩为 $1 \le \beta \le \alpha$ 的一个片段。设 M 是另一个秩为 β 的片段，满足 $K \sim M^{\pm 1}$；或者是一个秩为 β 的桥，且K 与 M不独立。那么K 的任一端点都可以通过一条秩为 β 的桥w 与M 的任一端点相连。

此外，可以选择w 使其具有以下性质。若N 是另一个秩为 β 的片段，满足 $N \not\sim M^{\pm 1}$，则 N 与w独立。

(ii) 设 $K_1, K_2, \ldots, K_r$ 是 Γ_α 中秩为 $\beta \le \alpha$ 的片段，且对所有 i 都有 $K_1 \sim K_i^{\pm 1}$。那么所有 K_i 的端点都一致接近。

证明。由 8.4 和定义 10.4 中的定义可得。□

10.14. **引理**。设 (X_i, Y_i) $(i = 1,2)$ 是 Γ_α 中两对相近的约化路径，其中 X_1^- 和 X_2 是约化路径X的子路径。假设对于 X_1 与 X_2 的公共子路径Z，有 $|Z|_\alpha \ge 2.2$。那么存在三元组 a_i $(i = 1, 2,3)$，其顶点分别位于Z、Y_1 和 Y_2 上，且这些顶点一致接近。

证明。若 $\alpha = 0$，则无事可证。令 $\alpha \ge 1$。令 $X_i^{-1} u_i Y_i v_i$ $(i = 1,2)$ 为一个粗双边形，其中 u_i 和 v_i 是秩为 α 的桥。

情形 1：若 $\text{Area}_\alpha(X_i^{-1} u_i Y_i v_i) = 0$，对于两者 $i = 1$，2。应用命题 9.11，可找到回路 $X_i'^{-1} u_i' Y_i' v_i'$，它们可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，其中 X_i' 和 Y_i' 分别是 X_i 和 Y_i 的子路径。对于 X_1' 和 Z_2' 的公共部分 Z′，有 $|Z'|_\alpha \ge |Z|_\alpha - 2.04 \ge 0.16$，因此 $|Z'|_{\alpha-1} \ge 3.2$。由归纳法即可得出结论。

情形 2：若 $\text{Area}_\alpha(X_i^{-1} u_i Y_i v_i) > 0$，对于 $i = 1$ 或 $i = 2$。不失一般性，假设 K 和 M 分别是 X_1 和 Y_1，中秩为 α 的活跃片段，且 $K \sim M^{-1}$。令 $X_1 = S_1 K S_2$，$Y_1 = T_1 M T_2$。若 $S_1 K$ 包含 Z，则缩短 X_1 和 Y_1，用 $S_1 K$ 和 T_1 替换它们，从而按 9.5 中所述减小 $\text{Area}_\alpha(X_1^{-1} u_1 Y_1 v_1)$。类似地，若 KS_2 包含 Z，则可用 KS_2 和 T_2 替换 X_1 和 Y_1。因此，可以假设 K 包含于 Z 中。取 $a_1 = \iota(K)$ 和 $a_2 = \iota(M)$。若 K 与 u_2 或 v_2 不独立，则对于 a_3，分别可取 $\iota(Y_2)$ 或 $\tau(Y_2)$。否则，根据命题 10.6，Y_2 中存在一个秩为 α 的片段 N，使得 $N \sim K^{\pm 1}$，于是可取 $a_3 = \iota(N)$。□

10.15. 引理。设 *(S, T)* 和 *(X, Y)* 是 Γ_α 中相近的约化路径对，其中 *Y* 是 *S* 的末段，且终止顶点 τ*(X)*、τ*(Y)*、$= \tau$*(S)* 和 τ*(T)* 一致接近。那么，存在三元组 a_i *(*$i = 1, 2, 3$*)*，其顶点分别在 *X*、*Y* 和 *T* 上且一致接近，使得 a_1 截出 *X* 的一个起始段 X_1，满足 $|X_1|_\alpha < 1.3$；并且 a_2 截出 *Y* 的一个起始段 Y_1，满足 $|Y_1|_\alpha < 1.15$。

证明。不妨设 $\alpha \ge 1$。我们对 $|X| + |Y| + |T|$ 使用归纳法。若 $|X|_\alpha < 1.3$ 且 $|Y|_\alpha < 1.2$，则无需证明。我们假设 $|X|_\alpha \ge 1.3$ 或 $|Y|_\alpha \ge 1.15$。只需找到一个三元组 a_i $(i = 1, 2, 3)$，其顶点分别在 X、Y 和 T 上且一致接近，并且至少有一个 a_i 截出相应路径 X、Y 或 T 的一个真起始段。

设 $X^{-1} u_1 Y u_2$ 和 $S^{-1} v_1 T v_2$ 是 Γ_α 中的粗双边形，其中 u_i 和 v_i 是秩为 α 的桥。情况 1：面积$_\alpha(X^{-1} u_1 Y u_2)$ =面积$_\alpha(S^{-1} v_1 T v_2) = 0$。我们假设 u_2 和 v_2 是根据以下条件定义的：τ(X)、τ(Y) 和 τ(T) 一致接近；也就是说，u_2 和 v_2 要么是

秩为 $\alpha-1$ 的桥，要么具有如下形式：$u_2=w_1P_1w_2$ 和 $v_2=w_3P_2w_4$，其中 w_i 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，$P_i^{\pm1}$ 是秩为 α 的关系子环 R 的子路径。我们考虑第二种情况（u_2 和 v_2 是秩为 $\alpha-1$ 的桥的情况可用类似方法处理）。

在不改变记号的情况下，我们假设回路 $X^{-1}u_1Yu_2$ 和 $S^{-1}v_1Tv_2$ 提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，因此，引入的所有路径都在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中（唯一的变化是，$P_i^{\pm1\sim}$变成一条 R-周期线 R 的子路径，其中 R 是秩为 α的关系词）。在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中选取 $a_i(i=1,2,3)$ 后，我们转而考察它们在 Γ_α中的像。

情形1a： $|X|_\alpha\geq 1.3$。若 X 上的顶点 $b_1\neq\tau$与 P_1上的顶点 b_2秩接近 $\alpha-1$，那么我们可以取 $a_1:=b_1$, $a_2:=\tau(Y)$ 和 $a_3:=\tau(T)$。我们假设不存在这样的 b_1 和 b_2。于是，应用命题 9.19(ii)$_{\alpha-1}$ 可知，$X=z_1X'z_2$，其中 X′ 与 Y 的一个子路径 Y′接近，$|z_1|_\alpha\leq 1+4\zeta^2\eta$、$|z_2|_\alpha\leq 4\zeta^2\eta$，因此 $|X'|_\alpha\geq 0.3-8\zeta^2\eta$。

首先假设 $\alpha\geq 2$。根据命题 9.21$_{\alpha-1}$，从末段缩短 X′，我们可以假设 z_1X' 是 X 的真起始段（并且 X′ 仍然接近 Y 的一个子路径 Y′）。对于缩短后的 X′，有 $|X'|_\alpha>0.3-8\zeta^2\eta-\zeta^2>0.26$，这意味着 $|X'|_{\alpha-1}\geq\frac{1}{\zeta}|X'|_\alpha>5.2$。令 $v_1=w_5Qw_6$，其中 w_5,w_6 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，而 Q 的标签是一个秩为 α 的片段。应用引理 10.2，得到一组三个一致接近的顶点 a_i $(i=1,2,3)$，其中 a_1 位于 X′ 上，a_2 位于 Y′ 上，而 a_3 位于 Q 或 T 上。如果 a_3 位于 Q 上，则将其替换为 $\iota(T)$。在 $\alpha=1$ 的情况下，我们将 X′ 缩短一条边；对于新的 X′，有$|X'|_\alpha>0.3-8\zeta^2\eta-\zeta>0$。由于注 10.3，我们仍然可以应用引理 10.2，因此论证保持不变。

情形 1b： $|Y|_\alpha\geq 1.15$。与情形 1 类似，我们可以假设 Y 上不存在秩与 P_1 或 P_2上的顶点接近的顶点 $b\neq\tau(Y)$（因而 S 上也不存在，因为 $|Y|_{\alpha-1}\geq\frac{1.15}{\zeta}=23$）。应用命题 9.19(ii)$_{\alpha-1}$，我们将 Y 和 S 表示为 $Y=z_1Y'z_2$, $S=z_3S'z_4$，其中 Y′ 与 X 的一个子路径 X′ 在秩上 $\alpha-1$接近，S′ 与 T 的一个子路径 T′ 接近，并且 $|z_1|_\alpha$、$|z_3|_\alpha<1+4\zeta^2\eta$、$|z_2|_\alpha$、$|z_4|_\alpha<4\zeta^2\eta$。在情形 $\alpha=1$中，X′、Y′、S′ 和 T′ 有一个公共子路径 Z，其大小为 $|Z|_\alpha\geq|Y|_\alpha-1-8\zeta^2\eta>0$，且对所有 a_i，我们都可以取 $\iota(Z)$。在情形 $\alpha\geq 2$中，根据命题 9.21$_{\alpha-1}$，从末段缩短 Y′ 后，我们可以假设 z_1Y' 是 Y 的一个真起始段。令 Z 为 Y′ 和 S′的公共子路径。我们有$|Z|_\alpha>|Y|_\alpha-1-8\zeta^2\eta-\zeta^2>0.11$，因此 $|Z|_{\alpha-1}>2.2$。于是结论由引理 10.14$_{\alpha-1}$得出。

情形 2：面积$_\alpha(S^{-1}v_1Tv_2)>0$。设 K 和 M 分别是 S 和 T 中秩为 α 的活跃片段，且 $K\sim M^{-1}$。设 $S=G_1KG_2$，$T=H_1MH_2$。注意，根据引理 10.8，$|K|$、$|M|>0$。若 K 不包含于 Y，则我们分别用 KG_2 和 H_2 替换 S 和 T，并使用归纳法。假设 K 包含于 Y。我们首先取 $a_2:=\iota(K)$，$a_3:=\iota(M)$。若 M 在 u_1 上或从 u_2 出发并非独立，则我们分别取 $a_1:=\iota(X)$ 或 $a_1:=\tau(X)$。否则，根据命题 10.6，X 中存在一个秩为 α 的片段 N，使得 $N\sim M^{\pm1}$。在这种情况下，根据引理 10.13(ii)，我们取 $a_1:=\iota(N)$。

情形 3：面积$_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2)>0$。设 K 和 M 分别是 X 和 Y 中秩为 α 的活跃片段，且 $K\sim M^{-1}$。接着取 $a_1:=\iota(K)$、$a_2:=\iota(M)$。根据 M 是否与 v_1 或 v_2 不独立，我们使用命题 10.6 和引理 10.13(ii)，类似情形 2 求得 a_3。□

10.16. **命题**(双边形中的接近性转移)。设(X,Y) 和(S,T) 是 Γ_α 中的两对相近的约化路径，其中Y 是S的子路径。假设 $|X|_\alpha\geq 2.3$。那么$X=z_1X'z_2$，其中X′ 与T 的某个子路径W 相近，且 $|z_i|_\alpha<1.3$ $(i=1,2)$。

此外，我们有 $Y = t_1 Y' t_2$，其中 $|t_1|_\alpha$、$|t_2|_\alpha < 1.15$，并且三元组 *(ι(X') ι(Y') ι(W))* 和 *(τ(X') τ(Y') τ(W))* 一致接近。

证明。我们可以假设 $\alpha \geq 1$。设 $X^{-1}u_1Yu_2$ 和 $S^{-1}v_1Tv_2$ 是 Γ_α 中的粗双边形，其中 u_i 和 v_i 是秩为 α 的桥。由引理 10.15，只需在 X、Y 和 T 上分别找到一组三个一致接近的顶点 a_i ($i = 1, 2, 3$)。通过命题 10.6 进行简单分析可知，当 $\mathrm{Area}_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2) > 0$ 或 $\mathrm{Area}_\alpha(S^{-1}v_1Tv_2) > 0$ 时，如何做到这一点。下面考虑 $\mathrm{Area}_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2) = \mathrm{Area}_\alpha(S^{-1}v_1Tv_2) = 0$ 的情形。设 $v_i = v_{i1}R_iv_{i2}$ ($i = 1, 2$)，其中 v_{ij} 是秩为 $\alpha - 1$ 的桥，R_i 标记为秩为 α 的片段。由命题 9.11，存在 $X = w_1X_1w_2$，使得 X_1 的端点与 Y 的一个子路径 Y_1 的端点可分别通过秩为 $\alpha - 1$ 的桥 u_1' 和 u_2' 相连，从而回路 $X_1^{-1}u_1'Y_1u_2'$ 可提升至 $\Gamma_{\alpha-1}$ 和 $|w_i|_\alpha \leq 1 + 4\zeta^2\eta$ ($i = 1, 2$)。在不改变记号的情况下，我们假设回路 $X_1^{-1}u_1'Y_1u_2'$ 和 $S^{-1}v_1Tv_2$ 已经提升至 $\Gamma_{\alpha-1}$（且 Y_1 仍是 S 的一个子路径）。我们有

$$|X_1|_\alpha \geq |X|_\alpha - |w_1|_\alpha - |w_2|_\alpha > 0.3 - 8\zeta^2\eta > 0.26$$

并且因此，$|X_1|_{\alpha-1} > 5.2$。根据引理 10.2，存在一组三个一致接近的顶点：b_1 位于 X 上，b_2 位于 Y 上，b_3 位于路径 R_1, T 或 R_2 上。对于 a_1 和 a_2，我们取 b_1 和 b_2 在 Γ_α 中的像。根据 b_3 的位置，我们取 ι(T)、b_3 或 τ(T) 的像作为 a_3，如图 27 所示。□

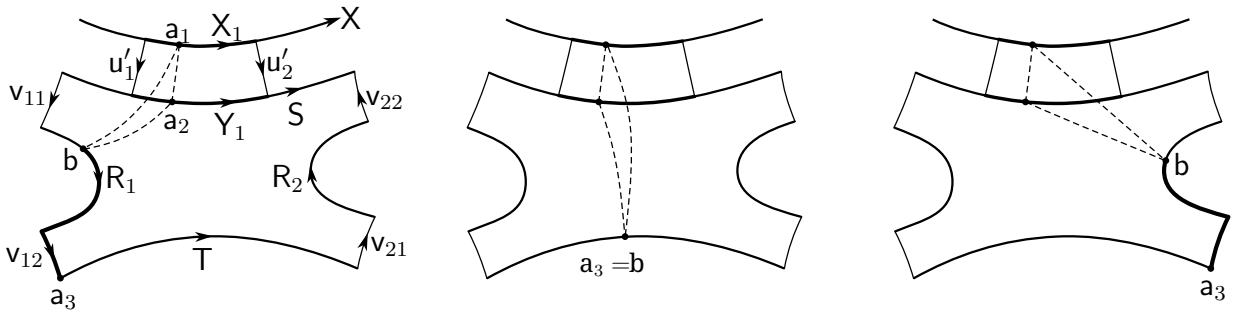

图 27。

10.17. **引理**。设 (X,Y) 是 Γ_α 中一对相近的约化路径，并设 $S^{-1}*T_1*T_2*$ 是 Γ_α 中的一个粗三边形，其中 Y 是 S 的末段，且终止顶点 τ(X)、τ(Y) 和 $\tau(T_2)$ 一致接近。那么以下情况之一成立：

(i) 存在一个三元组 a_i ($i = 1, 2, 3$)，其顶点分别在 *X*、*Y* 和 T_1 上且一致接近，使得 a_1 从 *X* 中截出一个起始段 X_1，其中 $|X_1|_\alpha < 1.3$；*(ii)* 存在一个三元组 a_i ($i = 1, 2, 3$)，其顶点分别在 *X*、*Y* 和 T_2 上且一致接近，使得 a_1 从 *X* 中截出一个起始段 X_1，其中 $|X_1|_\alpha \leq 1.45$。

证明。我们可以假设 $\alpha \geq 1$。我们采用引理 10.15 证明中的相同策略，并对 $|X| + |Y| + |T_2|$ 作归纳。根据引理 10.15，只需证明：若 $|X| \geq 1.45$，则存在一个三元组 a_i，其顶点分别在 X、Y 和某个 T_i 上且一致接近，使得 a_1 或 a_2 从相应的路径 X 或 Y 中截出一个真起始段。

设 u_i ($i = 1,2$) 和 v_j ($j = 1,2,3$) 是 Γ_α 中秩为 α 的桥，使得 $u_1Xu_2Y^{-1}$ 是一个粗双边形，而 $S^{-1}v_1T_1v_2T_2v_3$ 是一个粗三边形。

情形 1：面积$_\alpha$(X^{-1}u$_1$Yu$_2$) = 面积$_\alpha$(S^{-1}v$_1$T$_1$v$_2$T$_2$v$_3$) = 0。我们假设 u$_2$ 和 v$_3$ 是根据 τ(X)、τ(Y) 和 τ(T$_2$) 一致接近这一条件定义的；也就是说，u$_2$ 和 v$_3$ 要么是秩为 $\alpha-1$ 的桥，要么具有 u$_2$ = u$_{21}$Qu$_{22}$ 和 v$_3$ = v$_{31}$P$_3$v$_{32}$ 的形式，其中 u$_{2i}$、v$_{3i}$ 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，Q$^{\pm1}$、P$_3^{\pm1}$ 是秩为 α 的关系子环 R 的子路径。我们考虑第二种情形（第一种情形的论证类似）。设 v$_i$ = v$_{i1}$P$_i$v$_{i2}$($i=1,2$)，其中 v$_{ij}$ 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，label(P$_i$) 是秩为 α 的片段。

我们可以假设，除 τ(X) 外，X 上没有顶点与 R 上的某个顶点秩接近 $\alpha-1$（否则，可以像引理 10.15 的证明中那样，将这些顶点取作 a$_1$ 和 a$_2$）。由注记 9.3 可知，我们可以假设回路 X^{-1}u$_1$Yu$_2$ 和 S^{-1}v$_1$T$_1$v$_2$T$_2$v$_3$ 可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$。滥用记号，我们假设它们已经位于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中。应用命题 9.19(ii)$_{\alpha-1}$ 可得 X = w$_1$X′w$_2$，其中 X′ 与 Y 的一个子路径 Y′ 接近，|w$_1$|$_\alpha \le 1+4\eta\zeta^2$，|w$_2$|$_\alpha \le 4\eta\zeta^2$，因此 |X′|$_\alpha \ge 0.45-8\eta\zeta^2$。

与引理 10.15 的证明一样，这里的证明在 $\alpha\ge 2$ 和 $\alpha\ge 1$ 两种情形下略有不同。在 $\alpha\ge 2$ 的情形下，根据命题 9.21$_{\alpha-1}$ 从末段缩短 X′ 后，我们可以假设 w$_1$X′ 是 X 的一个真起始段，并有一个新的界 |X′|$_\alpha > 0.45-8\eta\zeta^2-\zeta^2 > 0.41$，由此可得|X′|$_{\alpha-1} > 8.2$。如果 X′、Y′ 和某个 P$_i$ 上存在一组三个一致接近的顶点，那么结论成立。我们假设不存在这样的三元组。令 S$_1$ 为连接 ι(T$_1$) 与τ(T$_2$) 的一条约化路径（见图 28）。由引理 10.2 可得 X′ = z$_1$X″z$_2$，其中 X″ 与一个子路径接近

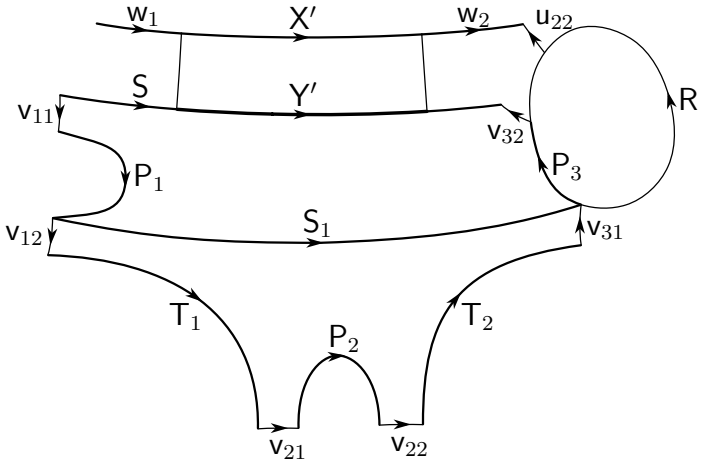

图 28。

S$_1$ 的。此外，引理指出，在 X′、Y′ 和 S$_1$ 上存在一组三个一致接近的顶点，然后应用引理 10.17$_{\alpha-1}$，我们可以假设 $|z_i|_{\alpha-1} < 1.45$。于是

$$|X''|_{\alpha-1} \ge |X'|_{\alpha-1} - |z_1|_{\alpha-1} - |z_2|_{\alpha-1} > 5.3.$$

再次应用引理 10.2，可得一组三个一致接近的顶点 b$_i$ ($i=1,2,3$)，其中 b$_1$ 位于 X′ 上，b$_2$ 位于 Y′ 上，而 b$_3$ 位于 T$_1$ 或 T$_2$ 上。对于 a$_i$，我们取 b$_i$ 在 Γ_α 中的像。

在 $\alpha=1$ 的情形下，论证类似（参见引理 10.15 证明中的情形 1a），应用引理 10.2 时无需对 |X″|$_{\alpha-1}$ 给出下界。

情形 2：r = 面积$_\alpha$(S^{-1}v$_1$T$_1$v$_2$T$_2$v$_3$) > 0。设 L 是 S^{-1}v$_1$T$_1$v$_2$T$_2$v$_3$和 K$_i$ ($i=1,2$ 或 $i=1,2,3$) 的一个活化关系子环，其中 K 是秩为 α 、出现在 S、T$_1$ 或 T$_2$中的相应活跃片段。如果某个 K$_i$ 出现在 T$_1$ 中，且某个 K$_j$ 出现在 T$_2$ 中，那么我们就可以缩短 T$_1$

并按 9.6 中所述递减 T_2 r 。当某个 K_i 出现在 S 中且不包含于 Y 时，类似的归纳论证同样适用。因此，我们可以假设只有 K_1 和 K_2，K_1 包含于 Y，且 K_2 出现在 T_1 或 T_2中。根据命题 9.15，$\mu_{\mathrm{f}}(K_i) \geq 3\lambda - 1.1\omega$。其余论证与引理 10.15 证明中的情形 2 相同。

情形 3：面积$_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2) > 0$。设 K 和 M 分别是 X 和 Y 中秩为 α 的活跃片段，且 $K \sim M^{-1}$。取 $a_1 := \iota(K)$、$a_2 := \iota(M)$，并根据以下情形定义 a_3：

- 若 M 与 v_1 不独立，则 $a_3 := \iota(T_1)$;
- 若 M 与 v_2 不独立，则 $a_3 := \tau(T_1)$;
- 若 M 与 v_3 不独立，则 $a_3 := \tau(T_2)$;
- 否则，由命题 10.7 应用于 M 可知，存在一个位于 T_1 或 T_2 中的秩为 α 的片段 N，使得 $M \sim N^{\pm 1}$。于是 $a_3 := \iota(N)$。

□

10.18. **命题** (三边形中的接近性转移)。 设 (X,Y) 是 Γ_α中的一对相近的约化路径，且 $S^{-1}*T_1*T_2*$ 是 Γ_α 中的一个粗三边形，其中Y 是S的子路径。假设 $|X|_\alpha \geq 2.45$。那么X 可以表示为以下三种情形之一：

(i) $X = z_1X_1z_2$，其中 X_1 接近 T_1 的一条子路径 W_1，且 $|z_1|_\alpha < 1.3$、$|z_2|_\alpha < 1.45$。*(ii)* $X = z_1X_2z_2$，其中 X_2 接近 T_2 的一条子路径 W_2，且 $|z_1|_\alpha < 1.45$、$|z_2|_\alpha < 1.3$。*(iii)* $X = z_1X_1z_3X_2z_2$，其中 X_i 接近 T_i *(*$i = 1, 2$*)*的一条子路径 W_i，$|z_1|_\alpha$、$|z_2|_\alpha < 1.3$，且 $|z_3|_\alpha < 0.4$。

此外，我们可以假设存在 *Y* 的一条子路径 *Y′*，使得三元组 *(*$\iota(X_p)$ $\iota(Y')$ $\iota(W_p)$*)* 和 *(*$\tau(X_q)$ $\tau(Y')$ $\tau(W_q)$*)* 一致接近，其中 p 和 q 分别是 *(i)–(iii)* 中 X_i 的最小和最大指标，即 *(i)* 中的 $p = q = 1$、*(ii)* 中的 $p = q = 2$，以及 *(iii)* 中的 $p = 1$、$q = 2$。

证明。设 u_i ($i = 1, 2$) 和 v_j ($j = 1, 2, 3$) 是秩为 α 的桥，使得 $u_1Xu_2Y^{-1}$ 是一个粗双边形，而 $S^{-1}v_1T_1v_2T_2v_3$ 是一个粗三边形。根据引理 10.15 和 10.17，在 X、Y 和某个 T_i 上找到一组三元组 a_i ($i = 1, 2, 3$)，其顶点一致接近，即可得到命题的结论，但 (iii) 中的界 $|z_3|_\alpha < 0.4$ 除外。后者由命题 9.19(i) 得出。按照引理 10.17 证明中情形 2 和 3 的方法作简单分析，可知当 Area$_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2) > 0$ 或 Area$_\alpha(S^{-1}v_1Tv_2T_2v_3) > 0$ 时，如何找到顶点 a_i。接下来考虑 Area$_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2)$ = Area$_\alpha(S^{-1}v_1Tv_2T_2v_3) = 0$ 的情形。设 $v_i = w_{i1}R_iw_{i2}$($i = 1, 2, 3$)，其中标签 $(w_{ij}) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 R_i 的标签是一个秩为 α 的片段。由命题 9.11 可知，$X = w_1X_1w_2$，其中 X_1 的端点与 Y 的一个子路径 Y_1 的端点可由秩为 $\alpha - 1$ 的桥 u_1' 和 u_2' 连接，并且回路 $X_1u_1'Y_1^{-1}u_2'^{-1}$ 可提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$ 和 $|w_i|_\alpha \leq 1 + 4\zeta^2\eta$($i = 1, 2$)。不改变记号，我们假设回路 $X_1^{-1}u_1'Y_1u_2'$ 和 $S^{-1}v_1Tv_2$ 已经位于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中（且 Y_1 仍是 S 的一个子路径）。我们有

$$|X_1|_\alpha \geq |X|_\alpha - |w_1|_\alpha - |w_2|_\alpha > 0.41$$

因此，$|X_1|_{\alpha-1} > 8.2$。然后，我们像引理 10.17 的证明中那样，应用引理 $10.17_{\alpha-1}$ 和 10.2，得到 a_i。□

10.19. **命题** （共轭关系中的接近性转移）。 设 S 是在 G_α 中循环约化的字。假设 S 在 G_α 中共轭于一个字 Tv，其中 $T \in \mathcal{R}_\alpha$ 且 $v \in \mathcal{H}_\alpha$。 设 $S = \prod_{i\in\mathbb{Z}} S_i$ 和 $\prod_{i\in\mathbb{Z}} T_iv_i$ 是 Γ_α 中代表该共轭关系的直线。

¯设 Γ_α 中的一条约化路径 X 接近 S 的一个子路径 Y，且 $|Y| \le |S|$。令$|X|_\alpha \ge 2.45$。那么以下情况之一成立：

(i) X 可以表示为 $X = z_1X_1z_2$，其中 X_1 与 T_i 的一个子路径 W_1 接近，适用于某个 i 和 $|z_1|_\omega, |z_2|_\alpha < 1.45$。*(ii)* X 可以表示为 $X = z_1X_1z_3X_2z_2$，其中对于某个 i，X_1 与 T_i 的一个子路径 W_1 接近，X_2 与 T_{i+1} 的一个子路径 W_2 接近，$|z_1|_\omega, |z_2|_\alpha < 1.3$，且 $|z_3|_\alpha \le 0.4$。

此外，我们可以假设存在 Y′ 的一个子路径 Y，使得三元组 $(\iota(X_1)\ \iota(Y')\ \iota(W_1))$ 和 $(\tau(X_q)\ \tau(Y')\ \tau(W_q))$一致接近，其中 $q = 1$ 对应 *(i)*，$q = 2$ 对应 *(ii)*。

证明。只需在 X、Y 和某个 T_i 上找到一个一致接近的顶点三元组 a_i $(i = 1, 2, 3)$，然后使用引理 10.17 或 10.15。设 $X^{-1}u_1Yu_2$ 是一个粗双边形，其中 u_1 和 u_2 是秩为 α 的桥。若 $\mathrm{Area}_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2) > 0$，则可利用命题 10.12 和引理 10.13(ii) 达成目标。假设 $\mathrm{Area}_\alpha(X^{-1}u_1Yu_2) = 0$。

设 Δ 是秩为 α、边界回路为 $\hat{}S^{-1}$ 和 $\hat{}T\hat{}v$、表示该共轭关系的环形图。设 $\tilde{\Delta}$ 是 Δ 的万有覆盖，且 $\phi\colon\ \tilde{\Delta}^{(1)} \to \Gamma_\alpha$ 是组合的 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 连续映射，分别将提升 S_i、T_i 和 $\tilde{}v_i$ 映射到 S_i、T_i 和 v_i。假设 Δ 是约化的，且具有一个紧邻接子图集。设 r 是 α 秩的胞腔在 Δ中的单元数。

假设 $r > 0$，并令 D 为 Δ 中秩为 α 的胞腔。根据命题 7.11(iv) 和引理 $\hat{}$ 7.10(i)，D 有两个或三个邻接子图 $\Pi_i \in \mathcal{T}$ 与 Δ 的边相接，与 T 至多有两个，与 $\hat{}S^{-1}$ 至多有一个。若 D 与 $\hat{}T$ 之间有两个邻接子图 Π_i（$i = 1, 2$），则我们考虑一个新的环形图 Δ'：从 Δ 中切去 $D \cup \Pi_1 \cup \Pi_2$ 以及剩余的单连通分支，并考虑新的字 T' 和 v'，其中 T' 是 T 的子词。在这种情况下，由于对 r使用归纳法，结论成立。

现在我们可以假设，D 有一个邻接子图通向 $\hat{}S^{-1}$，另一个通向 $\hat{}T$。令 $\tilde{D}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$ 表示 D 在 Δ 中的提升。对 D_i 进行适当编号后，每个关系环$\phi(\delta\tilde{}D_i)$ 都是片段 K_i（位于 $\bar{}S^{-1}$ 中）和片段 M_i（位于 T_i 中）的基环。由命题 7.13(iii)，

$$\mu_f(K_i^{-1}) + \mu_f(M_i) > 1 - 4\lambda - 2.2\omega.$$

由于 T 在 G_α 中是约化的，我们有 $\mu_f(M_i) \le \rho$，因此

$$\mu_f(K_i^{-1}) > 5\lambda - 2.2\omega.$$

如果没有任何一个 K_i^{-1} 包含于 Y 中，那么我们可以应用命题 10.18。否则，我们采用与引理 10.15 证明中情形 2 类似的论证。

现在假设 Δ 没有秩为 α的胞腔。不改变记号，我们假设¯平行线 $S = \prod_{i\in\mathbb{Z}} S_i, \prod_{i\in\mathbb{Z}} T_iv_i$ 以及路径 X 和 Y 提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$，使得 Y 仍是 S 的一个子路径。令 $v = w_1Rw_2$，其中 $w_i \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 R 是秩为 α的片段。相应地，我们将 v_i表示为 $v_i = w_1^{(i)}\, R_i w_2^{(i)}$。令 Z 为 $G_{\alpha-1}$ 中约化的一个字，使得 $Z = Tw_1R$，并令 Z_i $(i \in \mathbb{Z})$ 为 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中适当的路径，其标签为$(Z_i) = Z$（图 29）。由于 $|X|_\alpha \ge 2.45$，我们有 $|X|_{\alpha-1} \ge \frac{1}{\zeta}|X|_\alpha \ge 49$。根据命题 $10.19_{\alpha-1}$，X 的一个子路径 X′（满足 $|X'|_{\alpha-1} > 23$）与某个 Z_i的子路径接近。然后利用命题 $10.18_{\alpha-1}$，我们找到 X′、Y 和 T_i 或 R_i 上的一组三个一致接近的顶点 b_i。如果 b_3 位于 T_i 上，那么对于所需的 a_i，我们取 b_i 在 Γ_α 中的像。如果 b_3 位于 R_i 上，那么对于 a_i $(i = 1, 2, 3)$，我们分别取 b_1, b_2 和 $\tau(T_i)$的像。□

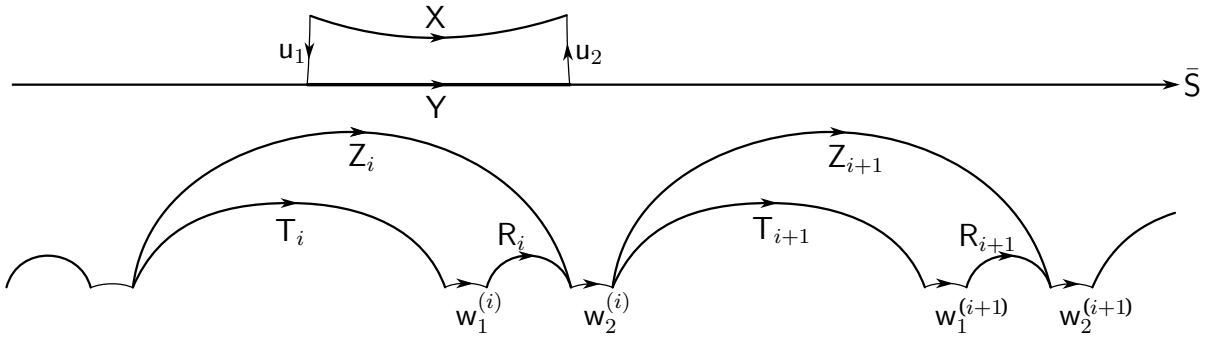

图 29。

10.20. 引理。设 $1 \le \beta \le \alpha$ 和 X 是 Γ_α中的一条约化路径。设 K_1 和 K_2 是 X 中秩为 β 的片段，并且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K_i) \ge \lambda + 2.6\omega\ (i = 1, 2)$、$K_1 < K_2$ 和 $K_1 \not\sim K_2$。如果一条秩为 β 的桥从 $\iota(X)$起始或终止，那么 K_2 独立于 u。类似地，如果一条秩为 β的桥从 $\tau(X)$起始或终止，那么 K_1 独立于 u。

证明。 我们考虑 $\iota(u) = \iota(X)$ 的情形（其他情形类似）。假设 K_2 与 u 不独立。由定义 10.4，$u = vSw$，其中 S 出现在秩为 β 的关系环 R 中，v 和 w 是秩为 $\beta - 1$ 的桥，并且 $R^{\pm 1}$ 是 K 的基关系环。设 $\tilde{R}$ 和 $\tilde{X}$ 是 R 和 X 在 $\Gamma_{\beta-1}$ 中的提升，使得 $\tilde{R}^{\pm 1}$ 是 $\tilde{K}_2$ 的基轴。引理9.22 蕴含 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$，X 的起始顶点靠近 R 上的一个顶点。然后利用命题 $10.21_{\alpha-1}$，我们 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$得出，X 的起始线段 X_1K_2 是一个秩为 α、基轴为 R 的片段。由于$\tilde{\ }$ $\tilde{K}_1$ 包含于 $X_1K_{2,}$，命题 8.10 得出 $K_1 \sim K_{2,}$，这构成矛盾。□

10.21.**命题** (接近性保持阶)。 设 X_1X_2 和 Y_1Y_2 是 Γ_α中的约化路径，且X_i 与Y_i 的端点在阶上彼此接近，如图*30*所示。那么 $|X_1|_\alpha, |Y_2|_\alpha < 5$。7。

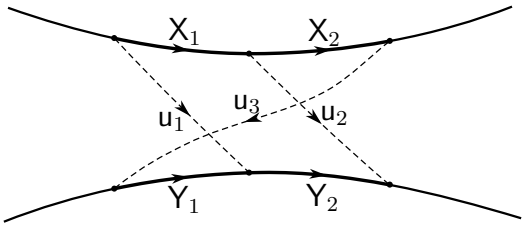

图 30。

证明。 不妨设 $\alpha \ge 1$。由对称性，只需证明 $|X_1|_\alpha < 5.7$。将连接 X_i 与 Y_i 端点、秩为 α 的 u_i $(i = 1, 2, 3)$ 条桥记作如图 30 所示。

断言 *1*：面积$_\alpha(X_1^{-1}u_1Y_2u_2^{-1}) \le 1$。

断言 *1* 的证明。 假设 $\mathrm{Area}_\alpha(X_1^{-1}u_1Y_2u_2^{-1}) \ge 2$。设 K_i 和 M_i $(i = 1, 2)$ 分别是 X_1 和 Y_2, 中秩为 α 的活跃片段，且 $K_1 < K_2$，$K_i \sim M_i^{-1}$。由命题9.7(ii)和引理10.20，K_2 独立于 u_1。同理，M_2 以及 K_2,独立于 u_3。将命题9.7和10.5应用于 $(X_1X_2)^{-1}u_1Y_1^{-1}u_3^{-1}$，可得

Y_1 中存在一个秩为 α 的片段 N，使得 N $\sim K_2^{\pm 1}$且 μ_{f}(N) $\geq 5\lambda - 4.9\omega$。这与推论 9.24(ii),(iii)矛盾。□

断言 *2*：若 面积$_\alpha(X_1^{-1}u_1Y_2u_2^{-1}) = 0$且 标签 (u_1)，标签 $(u_2) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$则 $|X_1|_\alpha < 1 + 6.1\zeta$。

断言 2 的证明。若 $r =$ 面积$_\alpha(X_2u_3Y_1Y_2u_2^{-1}) > 0$，则可将命题化简为秩更小的 r 情形，如 9.4 节所述。因此可假设面积$_\alpha(X_2u_3Y_1Y_2u_2^{-1}) = 0$。那么回路 $X_1^{-1}u_1Y_2u_2^{-1}$和 $X_2u_3Y_1Y_2u_2^{-1}$可以提升到 $\Gamma_{\alpha-1}$ （可能需要切换 u_3）。为简化记号，我们假设这些回路已经位于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中。设 $u_3 = v_1Qv_2$，其中标签 $(v_i) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且标签(Q)是秩为.....的片段 α。我们在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中得到一个粗三边形，其边为 X_1X_2, Q 和 Y_1, ，见图 31。应用命题 9.19(i)$_{\alpha-1}$ 和 10.21$_{\alpha-1}$，得到

$$|X_1X_2|_\alpha < 1 + 4\zeta^2\eta + 5.7\zeta < 1 + 6.1\zeta.$$

□

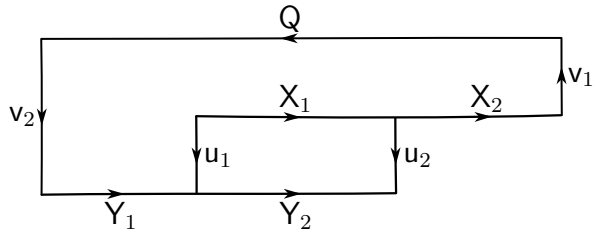

图 31。

证明的其余部分：若 Area$_\alpha(X_1^{-1}u_1Y_2u_2^{-1}) = 0$，则结论由断言 2 和命题 9.11 得出。由断言 1，只需考虑 Area$_\alpha(X_1^{-1}u_1Y_2u_2^{-1}) = 1$ 的情形。于是 X_1 可表示为 $R_1S_1R_2S_2R_3$ （见图 32），其中每个 R_i 都是秩为 α 的片段，并且由断言 2 和命题 9.19(ii)$_{\alpha-1}$，每个 S_i 都满足 $|S_i|_\alpha < 1 + 6.1\zeta + 8\zeta^2\eta$。因此我们得到

$$|X_1|_\alpha < 3 + 2(1 + 6.1\zeta + 8\zeta^2\eta) < 5.7.$$

证明完成。 □

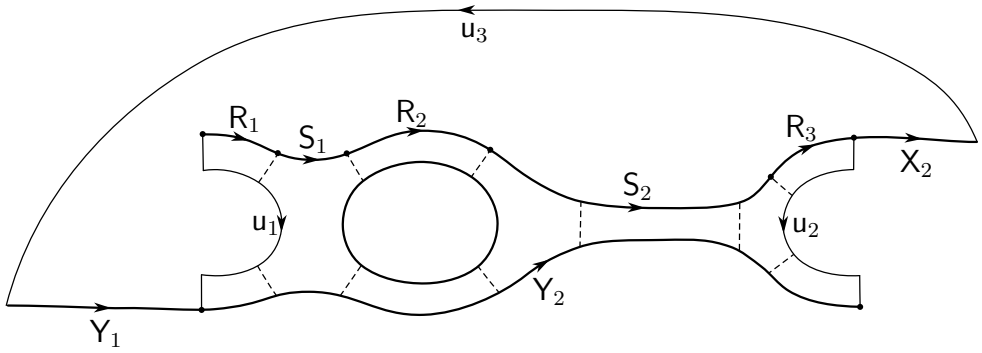

图 32。

本节末尾，我们将在一个更一般的框架下，针对秩为区间 $0 \leq \beta \leq \alpha$ 内任意秩 β 的片段，陈述若干关于片段稳定性的命题。

10.22. 命题。设 S 和 T 是 Γ_α 中相近的约化路径。设 $0 \le \beta < \alpha$，并设 X 和 Y 是 Γ_α 中秩接近 β 的约化路径，且 Y 是 S 的一个子路径。假设 $|X|_\alpha \ge 2.3$，并且 Y 不包含秩为 γ 且满足 $\beta < \gamma \le \alpha$ 和 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \ge \xi_0$ 的片段 K。那么，X 可以表示为 $X = w_1X'w_2$，其中 X' 与 T 的某个子路径秩接近，且 $|w_i|_\alpha < 1.2\ (i = 1,2)$。

证明。设 $S^{-1}u_1Tu_2$ 和 $X^{-1}v_1Yv_2$ 为对应的粗双边形。若 $\mathrm{Area}_\alpha(S^{-1}u_1Tu_2) > 0$，则根据 9.5 中的论证，我们可以将命题归结为一对新的 (S, T) 以及一个粗双边形 $S^{-1}u_1Tu_2$，其 $\mathrm{Area}_\alpha(S^{-1}u_1Tu_2)$ 的值更小。因此，我们可以假设 $\mathrm{Area}_\alpha(S^{-1}u_1Tu_2) = 0$。不改变记号，我们假设两个回路 $S^{-1}u_1Tu_2$和 $X^{-1}v_1Yv_2$都在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中。令 $u_i = u_{i1}P_iu_{i2}$，其中 $\mathrm{label}(u_{ij}) \in \mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 $\mathrm{label}(P_i)$ 是一个秩为 α 的片段。注意，若子路径 X' 与 P_1 或 P_2 的某个子路径秩接近，则 $|X'|_\alpha \le 1$。由于 $|X|_\alpha \ge 2.3$，应用引理 10.2，我们可以找到 X 的一个子路径，它与 T 的某个子路径接近。考虑如下情形：$X = z_0X_1z_1X_2z_2X_3z_3$，其中 X_i $(i = 1, 2, 3)$ 分别与 P_1,T 和 P_2 的子路径接近（引理 10.2 中的其他情形会给出关于 $|X_2|_\alpha$ 的更好下界）。根据引理 10.15，我们可以假设 $|z_0|_{\alpha-1}$、$|z_3|_{\alpha-1} < 1.3$；根据命题 $9.19(i)_{\alpha-1}$，我们可以假设 $|z_1|_{\alpha-1}$、$|z_2|_{\alpha-1} < 0.4$。我们有 $|X_1|_\alpha$、$|X_3|_\alpha \le 1$，因此 $|X_2|_\alpha > 2.3-2-3\zeta = 0.15$，从而 $|X_2|_{\alpha-1} > 3$。于是，根据推论 $9.13_{\alpha-1}$，有 $X_2 = t_1X't_2$，其中 X' 与 T 的某个子路径秩接近，且 $|t_i|_{\alpha-1} < 1.03$。我们有 $X = z_1X_1z_2t_1X't_2z_3X_3z_4$，其中 $|z_1X_1z_2t_1|_\alpha < 1 + 2.73\zeta < 1.2$，并且对于 $|t_2z_3X_3z_4|_\alpha$，也有类似的界。□

10.23. **命题**。设 X 和 Y 是 Γ_α 中的约化路径。设 $1 \le \beta \le \alpha$，并假设 X 或 Y 中至少有一个不含满足 $\beta < \gamma \le \alpha$ 和 $\mu_{\mathrm{f}}(N) \ge \xi_0$ 的秩为 γ 的片段 N。

设 K_i $(i = 1,2)$ 是 X 中秩为 β 的片段，满足 $K_1 \not\sim K_2$ 且 $K_1 < K_2$。假设以下条件至少有一个成立：

(*) 存在 Y 中秩为 β 的片段 M_i $(i = 1, 2)$，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(M_i) \ge \lambda + 2.7\omega$、$K_i \sim M_i^{\pm 1}$ 且 $M_1 < M_2$；或者(**) X 和Y 的秩接近 β。

那么以下结论成立：

(i) 设 N 是 X 中秩为 β 的片段，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(N) \ge 2\lambda + 9.1\omega$，且对于 $i = 1,2$，有 $K_1 < N < K_2$ 且 $N \not\sim K_i$。那么存在 Y 中秩为 β 的片段 N'，使得$N' \sim N^{\pm 1}$；在条件 *(*)* 下，$M_1 < N' < M_2$，并且

$$\mu_{\mathrm{f}}(N') \ge \min\{\mu_{\mathrm{f}}(N_i) - 2\lambda - 3.4\omega,\ \xi_0\} \tag{10-3}$$

在情形（*）中，若M_1 与M_2 不相交，则可假设$M_1 \ll N' \ll M_2$。若 $\mu_{\mathrm{f}}(N) \ge 4\lambda + 9\omega$，则属于这种情形（也就是说，$M_1$ 与M_2 必定不相交）。

（*ii*）假设 $\mu_{\mathrm{f}}(K_i) \ge 2\lambda + 9.1\omega$，且在情形（*）中，$\mu_{\mathrm{f}}(M_i) \ge 2\lambda + 9.1\omega$。设 $K_i'(i = 1, 2)$ 是 X 中另一对秩为 β 的片段，M_i' $(i = 1, 2)$ 是 Y 中另一对秩为 β 的片段，并且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K_i')$ $\mu_{\mathrm{f}}(M_i') \ge 2\lambda + 9.1\omega$、$K_i' \sim M_i'^{\pm 1}(i = 1, 2)$ 和 $K_1' \not\sim K_2'$。那么，$K_1' < K_2'$ 当且仅当 $M_1' < M_2'$。

此外，如果我们删去所有针对秩为 β 的片段、形式为 $\mu_{\mathrm{f}}(\cdot) \ge \ldots$ 的条件，那么命题的结论在 $\beta = 0$ 的情况下也成立。

证明。若 $\beta = 0$，则由命题 9.10 可得 $M_i = K_i$ $(i = 1, 2)$, $M_1 \cup M_2 = K_1 \cup K_2$ 在情况 (*) 下，以及 $X = Y$ 在情况 (**) 下。于是结论显然成立。我们假设 $\beta \ge 1$。

(i)：假设 (*) 成立。首先假设 M_1 和 M_2 不相交。令 $X_1 = K_1 \cup K_2$ 和 Y_1 为 Y 在 M_1 和 M_2，之间的子路径，即 $Y = *M_1Y_1M_2*$。由引理 10.13(i)

和命题 9.10，我们得到一个回路 $X_1^{-1}uY_1v$，它可以提升到 Γ_β，其中 u 和 v 是秩为 β 的桥。不失一般性，我们假设 $X_1^{-1}uY_1v$ 已经在 Γ_β 中。再次由引理 10.13(i)$_\beta$，N 独立于 u 和 v。由命题 10.6$_\beta$，存在 Y_1 中的 N′ 满足 (10-3)，使得 $N' \sim N^{\pm 1}$，即我们得到所需的 $M_1 \ll N' \ll M_2$。

假设 M_1 和 M_2 有非空交集。由命题 8.12$_\beta$，存在秩为 β 的片段 M_1' 和 M_2'，使得 $M_i' \sim M_i$，M_1' 是 M_1 的一个起始段，且与 M_2 不相交；M_2' 是 M_2 的一个末段，且与 M_1 不相交。令 $Y_2 = M_1 \cup M_2$。按照上面的论证，用 Y_2 替代 Y_1，用 M_1' 替代 M_1，可得 Y_2 中有一个与 M_2 不相交的 N_1，满足 $\mu_f(N_1) > 5.7\omega$ 且 $N_1 \sim N^{\pm 1}$。同理，用 Y_2 替代 Y_1，用 M_2' 替代 M_2，可得 Y_2 中有一个与 M_1 不相交的 N_2，满足 $\mu_f(N_2) > 5.7\omega$ 且 $N_2 \sim N^{\pm 1}$。于是由推论 9.24(i)、(iii)，可取 $N' = N_1 \cup N_2$。

若 $\mu_f(N) \geq 4\lambda + 9\omega$，则 $\mu_f(N') > 2\lambda + 5.6\omega$，并利用命题 8.11$_\beta$和 8.10$_\beta$，我们得出 M_1 和 M_2 不能共同覆盖 N′，即 $M_1 \ll M_2$。

在情况 (**) 下，我们已有一个回路 $X^{-1}uYv$，其中 u 和 v 是秩为 β的桥。我们将其提升到 Γ_β，然后应用引理 10.20$_\beta$，可知 N 的提升独立于 u 和 v 的提升。接着应用命题 10.6$_\beta$，即可得到所需的 N′。

(ii)：借助命题 *9.24(ii)* 和 *8.*10$_\beta$ 进行简单分析可知，只需证明以下结论：设 *X* 和 *Y* 是 Γ_α中的约化路径。设 K_i *(*$i = 1, 2, 3$*)* 是 *X* 中秩为 β 的片段，M_i *(*$i = 1, 2, 3$*)* 是 *Y* 中秩为 β 的片段，$\mu_f(K_i)$ $\mu_f(M_i) \geq \lambda + 9.1\omega$，对所有 i，$K_i \sim M_i^{\pm 1}$，且当 $i \neq j$ 时 $K_i \not\sim K_j$。若 $K_1 < K_2 < K_3$ 且 $M_1 < M_3$，则 $M_1 < M_2 < M_3$。

假设情况并非如此，也就是说，我们有 $K_1 < K_2 < K_3$, $M_1 < M_3$，且 $M_2 < M_1$ 或 $M_3 < M_2$。由 (i)，Y 中存在一个秩为 α 的片段 N，使得 $K_2 \sim N^{\pm 1}$且 $M_1 < N < M_3$。于是由命题 9.24(i) 和 8.10$_\beta$，可得 $M_1 \sim N$ 或 $M_3 \sim N$，这就产生了矛盾。□

10.24.**命题**。设 X 和 Y 是 G_α中强循环约化的字，表示$^{-}$ $^{-}$ G_α中的共轭元素。设 X 和 Y 是 Γ_α 中表示共轭关系的直线。设 $1 \leq \beta \leq \alpha$。假设字 X 或 Y 至少有一个满足以下性质：它的任何循环移位都不含有秩为 γ 且满足 $\mu_f(K) > \xi_0$ 和 $\beta < \gamma \leq \alpha$的片段 K。设 $^{-}$ $^{-}$X $= \ldots X_{-1}X_0X_1 \ldots$ 以及 $Y = \ldots Y_{-1}Y_0Y_1 \ldots$ 是 Γ_α 中表示共轭关系的直线。

$^{-}$(i) 那么，对于 $\mu_f(K) \geq 2\lambda + 9.1\omega$ 的 X 中秩为 β 的任意片段K，存在 Y 中秩为 β 的片段M，使得 $M \sim K^{\pm 1}$ 并且

$$\mu_f(M) \geq \min\{\mu_f(K) - 2\lambda - 3.4\omega,\ \xi_0\}$$

(ii) 若 X 和 Y 在 G_α 中是强循环约化的，则 $^{-}$ $^{-}$中 *X* 与 *Y* 的秩为 β 的片段之间的对应按以下意义保持顺序：若$^{-}$$K_i$ *(*$i = 1, 2$*)* 是 *X* 中秩为 β 的片段，M_i *(*$i = 1, 2$*)* 是 $^{-}$*Y* 中秩为 β 的片段，$\mu_f(K_i)$ $\mu_f(M_i) \geq 2\lambda + 9.1\omega$，$K_i \sim M_i^{\pm 1}$ *(*$i = 1, 2$*)* 且 $K_1 \not\sim K_2$。那么，当且仅当 $M_1 < M_2$ 时，$K_1 < K_2$。

此外，在情形 $\beta = 0$ 下，命题的陈述也成立，只要我们去掉秩为 β的片段所满足的所有形如 $\mu_f(\cdot) \geq \ldots$ 的条件。

$^{-}$证明。由命题 9.17，X 的每个子路径都可以延伸为一个与 Y 的某个子路径秩接近的路径。于是，(i) 由命题 8.16(ii) 和命题 10.23(i)（取 $K_1 = s_{X^{-}}^{-1}, xK$ 和 $K_2 = s_{X,\bar{x}}K$）得出。陈述 (ii) 由命题 10.23(ii) 得出。在$\beta = 0$ 的情形下，应用命题 9.17 后，该陈述显然成立。□

11. 约化代表

本节的主要目标是证明， G_α 中的任意元素都可以表示为一个约化词，并证明这一陈述的循环版本（命题 11.5）。

11.1.**命题 (**约化代表**)**。 G_α 的每个元素都可以表示为 G_α 字中的一个约化形式，其中不含阶为 $1 \le \beta \le \alpha$ 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{F}) \ge \frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega$的片段 F 。

11.2. **引理**。 **</style}设和**$\mathbf{X}^{-1}*\mathsf{Y}_1*\mathsf{Y}_2*\cdots*\mathsf{Y}_m*$ 是 $\Gamma_{\alpha-1}$中的一个粗$(m+1)$-边形。假设存在指标 $1 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le m\,(k \ge 1)$ *</style}*使得

$$t_1 \le 3, \quad t_k \ge m-2, \quad t_j - t_{j-1} \le 2 \text{ for all } j$$

and

$$|\mathsf{Y}_{t_j}|_{\alpha-1} > 4\eta \quad \text{for all } j.$$

进一步假设，以下各对中均不存在近邻顶点：*(*Y_i*,* Y_{i+1}*)*、*(*Y_1, Y_{t_1}*)*、*(*Y_{t_j}*,* Y_{t_j+1}*)*、*(*Y_{t_k}*,* Y_m*)*，但适当的端点除外（即除 τ*(*Y_i*)*和 ι*(*Y_{i+1}*)*外）。那么，每条路径Y_{t_j} 上都有一个顶点与X上的顶点a_j 相近，并且这些顶点a_j 在X上按从起始段到末段的（非严格）顺序排列。

证明。 我们首先断言，对于 $j - i > 1$，成对的（Y_i，Y_j）中不存在近邻顶点。假设存在。我们选择这样一对，使其 $j - i$ 尽可能小。于是，Y_i 的末段 Y'_i、路径 Y_{i+1}、……、Y_{j-1}，以及 Y_j 的起始段 Y'_j，构成一个粗略的 r-边形，且$r = j - i + 1 \ge 3$。应用命题 9.$18_{\alpha-1}$，可得

$$\sum_{k=i+1}^{j-1} |\mathsf{Y}_i|_{\alpha-1} \le (r-2)\eta.$$

另一方面，由引理的假设可知，在 Y_{i+1}、……、Y_{j-1} 中，至少有 min(1, $_{1\,2}(r-3)$) 条路径 Y_{t_k}，因此

$$\sum_{k=i+1}^{j-1} |\mathsf{Y}_i|_{\alpha-1} > 4\eta \min\left(1, \frac{1}{2}(r-3)\right).$$

由于不等式右边至少为 $(r-2)\eta$，我们得到矛盾。这就证明了该断言。

如有必要，将 Y_1 和 X 缩短后，我们可以假设 Y_1 和 X 上除了 ($\iota(\mathsf{Y}_1)$ ι(X)) 之外，不存在成对的近邻顶点。同样，我们可以假设 Y_m 和 X 上除了 ($\tau(\mathsf{Y}_m)$ τ(X)) 之外，不存在成对的近邻顶点。现在我们断言，对于某个 $2 \le i \le m-1$，Y_i 和 X 上存在一对近邻顶点。事实上，否则我们可以对整个粗略的 $(m+1)$-边形 $\mathsf{X}^{-1}*\mathsf{Y}_1*\mathsf{Y}_2*\cdots*\mathsf{Y}_m*$ 应用命题 9.$18_{\alpha-1}$，并得到矛盾，因为 $4k\eta \ge (m-1)\eta$。

设 (b, c) 是 X 和 Y_{i_0} 上的一对近邻顶点，其中 $2 \le i_0 \le m-1$。令 b 将 X 分成 $\mathsf{X}_1\mathsf{X}_2$，c 将 Y_{i_0} 分成 $\mathsf{Z}_1\mathsf{Z}_2$。如果区间 $2 \le t_j \le i_0 - 1$ 中至少有一个指标 t_j，那么引理的条件对粗略的 (i_0+1)-边形 $\mathsf{X}_1^{-1}*\mathsf{Y}_1*\ldots\mathsf{Y}_{i_0-1}*\mathsf{Z}_1*$ 成立。由归纳法可知，每个满足 $t_j < i_0$ 的 Y_{t_j} 都有一个顶点与 X 上的顶点 a_j 相近，并且顶点 a_j 按适当的顺序出现在 X 中。同理，对于每条满足 $t_j > i_0$ 的路径 Y_{t_j}，也可得出相同结论。这就推出了对所有 Y_{t_j}，结论均成立。□

11.3.**引理**。 设 X 是在 $G_{\alpha-1}$ 中约化的字。假设对于 X 中秩为 α 的任意片段 K，我们有

$$\mu_{\mathrm{f}}(K) \leq 1 - 3\lambda - 5\omega.$$

于是存在一个字 Y 等于 X 在 G_α 中，该字在 $G_{\alpha-1}$ 中是约化的，并且对于 Y 中秩为 α 的任意片段 M，都有

$$\mu_{\mathrm{f}}(M) < \frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega.$$

特别地， Y在 G_α 中是约化的（注意，根据 (2-3) 和 (4-1)， $\frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega < \rho = 1 - 9\lambda$。）

证明。我们将 X 表示为一条约化路径X 在 $\Gamma_{\alpha-1}$中。记

$$t = \frac{1}{2} + 11\omega.$$

设 $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_r$ 是 X 中秩为 α 且满足$\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i) \geq t$的两两不相容片段的极大集。我们假设每个 K_i在其由 X 中出现的秩为 α 的相容片段组成的等价类中具有极大大小 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i)$。利用命题 8.12，我们从起始段开始缩短每个 K_i^{-} $^{-}$，得到一个秩为 α 的片段 K_i ，使得 K_i 彼此不相交；我们有 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i) > \mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i) - \lambda - 2.7\omega$。令

$$\mathrm{X} = \mathrm{S}_0\bar{\mathrm{K}}_1\mathrm{S}_1 \ldots \bar{\mathrm{K}}_r\mathrm{S}_r.$$

令 P_i 为 $^{-}\mathrm{K}_i$ 的一个基；对于每个 i，我们有一个粗双边形 $^{-}\mathrm{K}_i^{-1}\ \mathrm{u}_i\mathrm{P}_i\mathrm{v}_i$ ，其桥为 u_i 和 v_i。令 $P_i = \mathrm{label}(\mathrm{P}_i)$， $P_iQ_i^{-1}$ 为秩 α 的关联关系词。我们考虑 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条路径

$$\mathrm{Z} = \mathrm{S}_0^*\mathrm{u}_1^*\mathrm{Q}_1\mathrm{v}_1^*\mathrm{S}_1^* \ldots \mathrm{u}_r^*\mathrm{Q}_r\mathrm{v}_r^*\mathrm{S}_r^*$$

其中，S_i^*、u_i^* 和 v_i^* 的标签分别等于 S_i、u_i 和 v_i 的对应标签，并且 label $(\mathrm{Q}_i) = Q_i$。注意，label(Z) $= X$ 在 G_α 中。我们执行以下过程：

(i) 如果 Q_i 和 S_i^* 上的一对顶点彼此接近，且不同于 $(\tau(\mathrm{Q}_i)\ \iota(\mathrm{S}_i^*))$，那么我们选取一条秩为 $\alpha - 1$ 的桥 w 连接这两个顶点，用 w 替换 v_i^*，并从末段缩短 Q_i 、从起始段缩短 S_i^* ；类似地，如果 Q_i 和 S_{i-1}^* 上的一对顶点彼此接近，且不同于 $(\iota(\mathrm{Q}_i)\ \tau(\mathrm{S}_{i-1}^*))$，那么我们选取一条秩为 $\alpha - 1$ 的桥 w 连接它们，用 w 替换 u_i^*，从起始段缩短 Q_i、从末段缩短 S_{i-1}^*；我们递归地应用该操作，直至无法继续；

(ii) 如果 Q_i 上的一个顶点靠近 Q_{i+1}^* 上的一个顶点，那么我们选择一条秩为 $\alpha - 1$、连接这两个顶点的桥 w，从末段缩短 Q_i ，并从末段缩短 Q_{i+1} ，然后用 w 将它们连接起来（因此 S_i^* 被消除，且 $\mathrm{v}_i^*\mathrm{S}_i^*\mathrm{u}_i^*$ 被一条秩为 $\alpha - 1$ 的桥 w 所替代）；我们递归地应用该操作，直到无法继续为止；

经过该过程，我们得到一条路径

$$\mathrm{Z}_1 = \mathrm{T}_0\mathrm{U}_0\mathrm{R}_1\mathrm{U}_1 \ldots \mathrm{R}_r\mathrm{U}_r\mathrm{T}_r$$

其中，对于每个 i，R_i 是 Q_i 的一个子路径，而 U_i 要么是一条秩为 $\alpha - 1$ 的桥，要么具有 $\mathrm{w}_i\mathrm{T}_i\mathrm{z}_i$ 的形式，其中 T_i 是 S_i^* 的一个子路径，w_i 和 z_i 是秩为 $\alpha - 1$ 的桥。令 Y 为一条与 Z_1 具有相同端点的约化路径。我们的目标是证明，Y 的标签 Y 满足该引理的要求，即，对于 Y 中任意秩为 α 的片段 N，都有$\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{N}) < \frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega$。

我们计算 $\mu(\mathrm{R}_i)$的一个下界。固定 i ，并令 $\mathrm{Q}_i = \mathrm{Q}'\mathrm{R}_i\mathrm{Q}''$。在过程的第 (i) 步中，我们不会将 Q_i 缩短得超过这样的程度：否则会在 X 中得到一个秩为 α 、其基是真扩张 P_i的片段，因此我们得到 $\mu(\mathrm{Q}_i)$ $\geq 1 - \mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i) \geq 3\lambda + 5\omega$。在第 (ii) 步

我们从 Q_i 的两边各缩短不到 $\lambda+0.4\omega$（这由命题 9.19(i)$_{\alpha-1}$、命题 8.15 和推论 8.2 得出）。这意味着 $\mu(R_i) > \lambda+4\omega$，尤其是 $|R_i|_{\alpha-1} > 4\eta$。

我们将引理 11.2 应用于 $X := Y$，其中 R_i 和 T_i 分别扮演 Y_i's 的角色，而 R_i 取作 Y_{t_i}。该引理表明，每条路径 R_i 都有一个顶点靠近 Y 上的某个顶点，并且 Y 上这些顶点的阶恰当。我们可以写成

$$Y = V_0 M_1 V_1 \dots M_r V_r$$

其中每个 M_i 都靠近 Q_i 的一条子路径（此时每个 M_i 都是空的，因为它由 Y 上的一个顶点表示）。延长 M_i's，使它们成为极大的，从而 W_i 上除 $\iota(V_i)$ 以外的任何顶点都不靠近 Q_i 上的顶点，并且 V_i 上除 $\tau(V_i)$ 以外的任何顶点都不靠近 Q_{i+1} 上的顶点。除 Z 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的位置外，我们可以假设它从 $\iota(X)$ 起始。将图 33a 所示的两个图合并并映射到 Γ_α，得到如图 33b 所示的图。这个图类似于由单层图示得到的图（如图中所示——

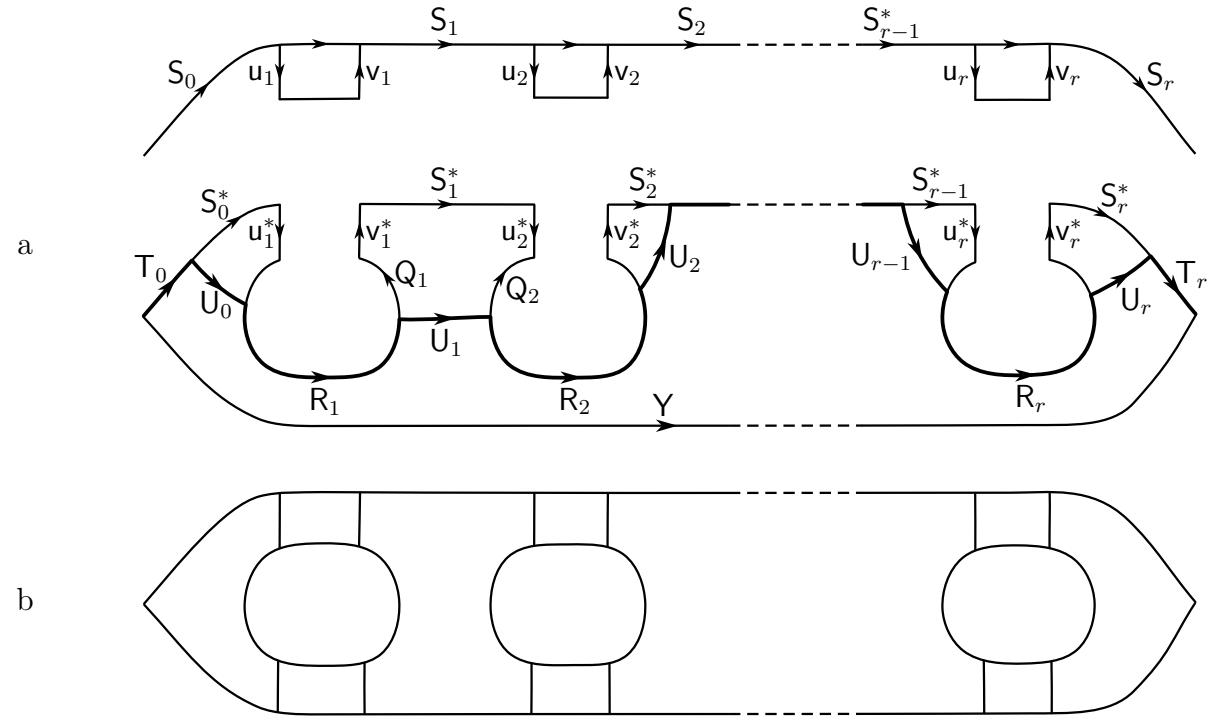

图 33。

图 15）。利用命题 9.19$_{\alpha-1}$、命题 8.15 和推论 8.2˜ ¯进行简单分析可知，M_i 以及 K_i 的某个扩张 K_i 满足命题 9.7 中的界，即

$$\mu_f(M_i) + \mu_f(\tilde{K}_i) > 1 - 2\lambda - 1.5\omega.$$

˜由于 $\mu_f(K_i) \le \mu_f(K_i) \le 1 - 3\lambda - 5\omega$，我们得到对所有 i,

$$\mu_f(M_i) > \lambda + 3.5\omega.$$

设 N 是 Y 中秩为 α 的片段。根据命题 8.10，我们有 $N \sim M_i$ 或 $N \subseteq M_i \cup M_{i+1}$，其中某个 i。当 $N \subseteq M_i \cup M_{i+1}$、$N \not\sim M_i$ 且 $N \not\sim M_{i+1}$ 时，我们可以应用命题 10.5 的证明中的论证，并在 X 中找到一个片段 N′，使得

$$\mu_f(N') > \mu_f(N) - 2\lambda - 3.4\omega.$$

我们还有 $N' \not\sim K_i, K_{i+1}$，因此对于所有 j，都有 $N' \not\sim K_j$。根据 K_i 的选取，我们有 $\mu_f(K') < t$，因此

$$\mu_f(N) < t + 2\lambda + 3.4\omega < \frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega.$$

假设对于某个 i，$N \sim M_i$。令 Q 和 P 分别为 N 和 K_i 的基。Γ_α 中 $\bar{Q}^{-1}$ 和 $\bar{P}$ 的像是某个关系子环的子路径，且至多有两个重叠部分。我们通过求出每个重叠部分大小的上界，来给出 $\mu(Q) + \mu(P)$ 的上界。例如，假设 P 在 Γ_α 中的像的末段与 $\bar{Q}^{-1}$ 的像的起始段重叠。改变 Z 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的位置后，我们可以假设 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}^{-1}$ 已经在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中沿着一条大小相同的子路径 W 重叠。

我们考虑 $i < r$ 这一情形（见图 34；$i = r$ 的情形类似，但对 $\mu(W)$ 有更好的上界）。我们将命题 $9.19(ii)_{\alpha-1}$ 应用于一个粗四边形，其一条边为 W，

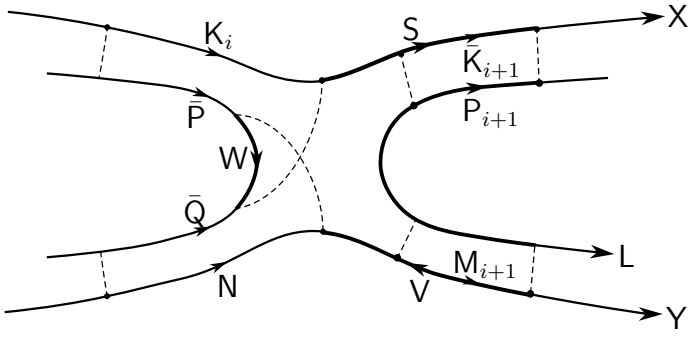

图 34。

其他边分别为 S_i 和 K_{i+1} 的末段 S、$M_{i+1}^{-1}V_i^{-1}$ 的起始段 V，以及 K_{i+1}^{-1} 和 N_{i+1} 的公共基轴 L 的一个子路径。最坏情况下，我们有 $W = W_1 z_1 W_2 z_2 W_3$，其中 W_1 与 V^{-1} 的一个子路径相近，W_2 与 L^{-1} 的一个子路径相近，W_3 与 S^{-1} 的一个子路径相近，并且 $|z_i|_{\alpha-1} \le 4\eta\zeta$。命题 $10.21_{\alpha-1}$ 意味着 $|W_1|_{\alpha-1} < 5.7$ 和 $|W_3|_{\alpha-1} < 5.7$。由于 $K_i \not\sim K_{i+1}$，我们得到 $\mu(W_2) < \lambda$。因此

$$\mu(W) < \lambda + 2\omega(5.7 + 4\eta\zeta) < \lambda + 13\omega.$$

我们得到

$$\mu_f(N) + \mu_f(K_i) < 1 + 2\lambda + 26\omega.$$

由于 $\mu_f(K_i) \ge t$，这就给出了所需的界 $\mu_f(N) < \frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega$。 □

11.4.**引理**。设 $\alpha \ge 1$ 和 X 是 G_α 中的约化字，$a \in \mathcal{A}^{\pm 1}$ 是 G_α 的生成元中的一个字母。设 Y 是 $G_{\alpha-1}$ 中的约化字，且 $Y = Xa$ 在 $G_{\alpha-1}$ 中。那么 Y 没有秩为 α 且满足 $\mu_f(K) \ge \rho + 6.2\omega$ 的片段 K。

证明。由引理 10.8 和命题8.8可得。 □

命题 *11.1* 的证明。若 $\alpha = 0$，则显然成立。在 $\alpha \geq 1$ 的情况下，由引理 11.3 和引理 11.4 经归纳法可得命题 11.1，因为 $\rho + 6.2\omega < 1 - 3\lambda - 5\omega$. □

现在转向命题 11.1 的循环类比：

11.5.**命题 (**循环约化代表)。 G_α 中的每个有限阶元素都共轭于一个形如 R_0^k 的循环约化词，其中 R_0 是秩为 β 的关系词的根， $1 \leq \beta \leq \alpha$。

G_α 中的每个无限阶元素都共轭于 G_α中的一个强循环约化词。

11.6.**引理 (**引理 11.2 的循环版本)。 设 X 是在 $G_{\alpha-1}$ 中循环约化的一个字，它表示 $G_{\alpha-1}$ 中的一个无限阶元素。设 $m \geq 2$, $Y_1, \ldots, Y_m$ 是在$G_{\alpha-1}$, $u_1, \ldots, u_m$ 中约化的字， u_m 是秩为 $\alpha-1$ 的桥，并且 X 在 $G_{\alpha-1}$ 中与 $Y_1 u_1 \ldots Y_m u_m$ 共轭。设$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{Y}_1^{(i)} \mathsf{u}_1^{(i)} \ldots \mathsf{Y}_m^{(i)} \mathsf{u}_m^{(i)}$ 和 $\bar{}\mathsf{X} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{X}^{(i)}$ 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的直线，分别标记为 $(Y_1 u_1 \ldots Y_m u_m)^\infty$ 和 X^∞，并表示该共轭关系。

假设存在指标 $1 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k \leq m$ $(k \geq 1)$ 使得

$$m + t_1 - t_m \leq 2, \quad t_j - t_{j-1} \leq 2 \quad \textit{for all } j,$$

and

$$|Y_{t_j}|_{\alpha-1} > 4\eta \quad \textit{for all } j.$$

假设以下各对中不存在近邻顶点：$(Y_i^{(0)}, Y_{i+1}^{(0)})$、$(Y_m^{(0)}, Y_1^{(1)})$、$(Y_{t_j}^{(0)}, Y_{t_j+1}^{(0)})$、$(Y_{t_k}^{(0)}, Y_{t_1}^{(1)})$，但允许适当的端点（即，除去各对 $(\tau(Y_i^{(0)}) \iota(Y_{i+1}^{(0)}))$ 和 $(\tau(Y_m^{(0)}) \iota(Y_1^{(1)}))$）。那么，每条路径 $Y_{t_j}^{(0)}$， $j = 1, \ldots, k$ 上都有一个顶点与 $\bar{}X$ 上的某个顶点 a^j 相邻，且这些顶点 a^j 的（非严格）顺序与 $Y_j^{(0)}$ 的顺序对应（并且 a_k 非严格地位于 $s_{X,\bar{X}} a_0$ 之前）。

证明。 证明过程在适当修改后沿用引理 11.2 的证明。

断言 *1*：成对的 $(\mathsf{Y}_i^{(0)}, \mathsf{Y}_j^{(0)})$ 其中 $j - i > 1$，以及 $(\mathsf{Y}_i^{(0)}, \mathsf{Y}_j^{(1)})$ 其中$j + m - i > 1$，不存在近邻顶点。

证明重复了引理 11.2 证明中的论证。

断言 *2*：对于某个 i，在数对 $(\mathsf{Y}_i^{(0)}, \bar{}\mathsf{X})$中存在近邻顶点。

假设这不成立。考虑一个秩为 $\alpha - 1$ 的环形图 Δ，其边界回路为 $\hat{}\mathsf{X}^{-1}$ 和 $\hat{}\mathsf{Y}_1\hat{}\mathsf{u}_1 \ldots \hat{}\mathsf{Y}_m\hat{}\mathsf{u}_m$，以及一个组合连续映射 $\phi\colon \tilde{\Delta} \to \Gamma_{\alpha-1}$，使得$\phi$ 将 $\tilde{\Delta}$ 的边界映射到 $\bar{}\mathsf{X}^{-1}$ 和 $\prod_i \mathsf{Y}_1^{(i)} \mathsf{u}_1^{(i)} \ldots \mathsf{Y}_m^{(i)} \mathsf{u}_m^{(i)}$。该假设、断言 1 和引理的假设推出 Δ 很小。应用命题 $7.9_{\alpha-1}$ 可得

$$\sum_i |Y_i|_{\alpha-1} \leq \eta m.$$

另一方面，由引理的假设可得 $\sum_i |Y_i|_{\alpha-1} \geq 4k\eta > \eta m$，这就产生了矛盾。由此断言得证。

根据断言 2，不失一般性地假设存在一个顶点 b 位于 $\mathsf{Y}_1^{(0)}$ 上，它与顶点 c 位于 $\bar{}\mathsf{X}$上很接近。令 b 将 $\mathsf{Y}_1^{(0)}$ 分成$\mathsf{Y}_1^{(0)} = \mathsf{Z}_1\mathsf{Z}_2$ 并且在对 X进行循环移位后，假设67

使 $\mathsf{X}^{(0)}$ sta 从 c 开始。现在我们可以直接将引理 11.2 应用于粗略的 $(m+2)$-go n

$$(\mathsf{X}^{(0)})^{-1} * \mathsf{Z}_2 \mathsf{u}_1^{(0)} \mathsf{Y}_2^{(0)} \dots \mathsf{u}_{m-1}^{(0)} \mathsf{Y}_m^{(0)} \mathsf{u}_m^{(0)} \mathsf{Z}_1 *$$

并得到所需的结论。 □

11.7.**引理**（引理 11.3 的循环版本）。设 X 是 $G_{\alpha-1}$ 中一个强循环约化的字。假设 X 在 G_α 中不共轭于秩为 $\beta \le \alpha$ 的关系词之根的某个幂。再假设，对于 X 的一个循环移位中的任意秩为 α 的片段 K，我们有

$$\mu_{\mathrm{f}}(K) \le 1 - 4\lambda - 8\omega.$$

那么存在一个字 Z，它在 G_α 中与 X 共轭，在 $G_{\alpha-1}$ 中强循环约化，并且没有任何幂 Z^k 含有一个秩为 α 的片段 L，满足

$$\mu_{\mathrm{f}}(L) < \frac{1}{2} + 2\lambda + 15\omega.$$

特别地，Z 在 G_α 中强循环约化。

¯证明。一般思路与引理 11.3 的证明相同。设 $\mathsf{X} = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathsf{X}_i$ 是¯一条以 X^∞ 为标签的直线 $\Gamma_{\alpha-1}$。首先注意，对于 X 中任意秩为 α 的片段 K，我们有s_X, x̄K $\not\sim$ K，这由命题 8.16(ii) 得出。根据命题 8.10 和 8.11，存在 K′ 的一个起始段，它是一个秩为 α 的片段，满足 μ_{f}(K′) $> \mu_{\mathrm{f}}$(K) $-\lambda - 3\omega$，并且 |K′| $\le |X|$,¯，即 label(K′) 出现在 X 的一个循环移位中。于是，引理的假设意味着 X 不含有任何秩为 α 且满足 μ_{f}(K) $\ge 1 - 3\lambda - 5\omega$ 的片段 K。

记 $t = \frac{1}{2} + 11\omega$。我们可以假设，X 中至少有一个秩为 α¯的片段 K，满足 μ_{f}(K) $\ge t$（否则我们可以取 $Z := X$）。我们选取一个极大集 K$_1$,¯.....、K$_r$，其中包含 X 中秩为 α、满足 μ_{f}(K$_i$) $\ge t$ 的两两不相容片段，使得 K$_1 < \dots <$ K$_r < s_X$、x̄K$_1$ 且 K$_r \not\sim s_X$、x̄K$_1$（选定 K$_1$ 后，我们使用命题 8.16(ii) 得到 s_X 、 x̄K$_1 \not\sim$ K$_1$）。我们假设每个 K$_i$ 在其相容的秩为 α 的 X 中片段所属的类里，大小 μ_{f}(K$_i$) 极大。利用命题 8.12，我们从起始段缩短每个 K$_i$，得到一个秩为 α 的片段 K$_i$，使得所有 K$_i$ 两两不相交，且 |K$_1 \cup$K$_r$| $\le |X|$；我们有 ¯μ_{f}(K$_i$) $> \mu_{\mathrm{f}}$(K$_i$) $-\lambda - 2.7\omega$。对 X 作循环移位（并相应地改变所有 X$_i$）后，我们还可以假设

$$\mathsf{X}_0 = \bar{\mathsf{K}}_1 \mathsf{S}_1 \dots \bar{\mathsf{K}}_r \mathsf{S}_r.$$

令 P$_i$ 为 ¯K$_i$ 和 ¯K$_i^{-1}$ u$_i$P$_i$v$_i$ 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条回路的基，桥为 u$_i$ 和 v$_i$。记S_i =标签 (S$_i$)、P_i =标签 (P$_i$)、 u_i =标签 (u$_i$)、 v_i =标签(v$_i$)，并令 $P_iQ_i^{-1}$为秩为 α 的关联关系词。令

$$Z = u_1 Q_1 v_1 S_1 u_2 Q_1 v_2 S_2 \dots u_r Q_r v_r S_r.$$

令 Y 为 $G_{\alpha-1}$ 中一个强循环约化的字，且在 $G_{\alpha-1}$ 中与 Z 共轭。我们证明 Y 满足引理的要求。注意， Y，因此 Z 在 G_α中与 X 共轭。

我们使用一个类似于引理 11.3 的证明中所述过程的过程来变换 Z。在任意时刻，我们都会得到一个形如以下形式的字 Z_1

$$Z_1 = R_1 U_1 \dots R_r U_r,$$

共轭于 Z 在 $G_{\alpha-1}$ 其中每个 R_i 都是 Q_i 且每个 U_i 要么是秩为 $\alpha - 1$ 的桥，要么具有 $w_i T_i z_i$ 的形式，其中 w_i， z_i 是秩为 $\alpha - 1$ 的桥，并且 T_i 是 S_i的子词。起始段中，我们有 $R_i = Q_i$ 和 $U_i = v_i S_i u_{i+1}$（此处及下文 $i + 1$ 取68

模 r）。变换过程由以下步骤组成，并递归执行，直至无法继续为止。

(i) 假设 U_i 具有上述形式 $w_iT_iz_i$。如果 $R_i = R'R''$, $T_i = T'T''$，其中 $|R''| + |T'| > 0$，且 $R''w_iT'$ 在 $G_{\alpha-1}$ 中等于一个秩为 $\alpha-1$ 的桥 w，则分别将 R_i, w_i 和 T_i 替换为 R', w 和 T''；同样，如果 $T_i = T'T''$, $R_{i+1} = R'R''$，其中 $|T''| + |R'| > 0$，且 $T''z_iR'$ 在 $G_{\alpha-1}$ 中等于一个秩为 $\alpha-1$ 的桥 w，则分别将 T_i, z_i 和 R_{i+1} 替换为 T', w 和 R''。
(ii) 如果 $R_i = R'R''$ 和 $R_{i+1} = R^*R^{**}$，其中 $|R''| + |R^*| > 0$，且 $R''U_iR^*$ 在 $G_{\alpha-1}$ 中等于一个秩为 $\alpha-1$ 的桥 w，则分别将 R_i, U_i 和 R_{i+1} 替换为 R', w 和 R^{**}。

与引理 11.3 的证明类似，执行该过程后，我们得到 $|R_i|_{\alpha-1} > 4\eta$ 对所有 i 均成立。

设 $\bar{\mathsf{Z}} = \prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathsf{Z}^{(i)}$ 是 $G_{\alpha-1}$ 中一条标记为 Z^∞ 的直线，并令 $\mathsf{Q}_j^{(i)}$ 表示 $\mathsf{Z}^{(i)}$ 中适当的、标记为 Q_j 的子路径。我们可以在直线 $\bar{\mathsf{Z}}$ 上而非字 Z 上实施上述过程，方法是改为对适当的路径进行相应修改，而不是修改字（对于 (i) 或 (ii) 中的每次字的修改，都有无穷多次由 s_X、$\bar{\mathsf{x}}$ 平移得到的路径修改与之对应）。因此，我们得到一条直线 $\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathsf{Z}_1^{(i)}$，使得 $\mathsf{Z}_1^{(i)}$ 的相应子路径 $\mathsf{R}_j^{(i)}$ 也是 $\mathsf{Q}_j^{(i)}$ 的子路径。另令 $\mathsf{T}_j^{(i)}$ 表示 $\mathsf{Z}_1^{(i)}$ 中适当的、标记为 T_j 的子路径。设 $\bar{\mathsf{Y}} = \prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathsf{Y}^{(i)}$ 是 $G_{\alpha-1}$ 中的一条直线，使得 Z 和 Y 分别与共轭字 Z 和 Y 相关联。我们将引理 11.6 用于 $\bar{\mathsf{X}} := \bar{\mathsf{Y}}$，其中 $\mathsf{R}_j^{(i)}$ 和 $\mathsf{T}_j^{(i)}$ 扮演 $\mathsf{Y}_j^{(i)}$ 的角色，而 $\mathsf{R}_j^{(i)}$ 被取作 $\mathsf{Y}_{t_j}^{(i)}$。根据该引理，每条路径 $\mathsf{R}_j^{(0)}$ 都有一个顶点靠近 $\bar{\mathsf{Y}}$ 上的某个顶点；这些 $\bar{\mathsf{Y}}$ 上的顶点沿 Y 按指标 j 递增的顺序排列，并且第一个与最后一个顶点之间的 Y 线段长度不超过 $|Y|$。对 Y 作循环移位后，我们可以写成

$$\mathsf{Y}^{(0)} = \mathsf{W}_0\mathsf{M}_1\mathsf{W}_1\ldots\mathsf{M}_r\mathsf{W}_r$$

其中，每个 M_j 都与 $\mathsf{Q}_j^{(0)}$ 的某个子路径接近。取具有这些性质的极大 M_j，我们便可如引理 11.3 的证明中那样得到，

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{M}_i) > \lambda + 3.5\omega \quad \text{for all } j.$$

其余证明与引理 11.3 的证明类似。 □

11.8. **引理**。若 X 是 Γ_α 中的一条约化路径，且 X 的端点彼此接近，则 $|\mathsf{X}|_\alpha \le 1$。

证明。对于 $\alpha \ge 1$，这由引理9.22得出。 □

11.9.**引理**。若 P 是秩为 α 的片段，则对于 P 中任意秩为 α 的片段 K，我们有 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \le$ 极大 $\{\lambda, \mu(P) + 2\omega\}$。

证明。设 P 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一条路径，其标签为 $\mathrm{label}(\mathsf{P}) = P$，设 R 是秩为 α 的关联关系词，L 是沿 P 延伸、标签为 R^∞ 的直线。假设 K 是包含在 P 中的秩为 α 的片段。如果 K 的基轴不同于 L，那么根据推论 8.2，$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) < \lambda$。否则，$\mathsf{K}$ 的基 Q 包含在 L 中，且引理 $11.8_{\alpha-1}$ 意味着

$$\mu_{\mathrm{f}}(\mathsf{K}) = \mu(\mathsf{Q}) \le \mu(\mathsf{K}) + 2\omega \le \mu(\mathsf{P}) + 2\omega.$$

□

11.10. **命题**。 设 P 是一个秩为 $1 \le \beta \le \alpha$ 的片段，满足 $\mu(P) \le \rho - 2\omega$。那么， P在 G_α 中是约化的。如果 $R = QS$，其中 R 是秩为 β 的关系词，那么 Q 或 S 在 G_α中是约化的。

证明。 第一条结论由引理 10.8 和 11.9 得出。若 R 是秩为 β 且 $R = QS$ 的关系词，则由 4.14(ii)，有 $\mu(Q) \le \frac{1}{2} + \omega$ 或 $\mu(S) \le \frac{1}{2} + \omega$。只需指出 $\frac{1}{2} + \omega < \rho - 2\omega$。□

命题 11.5 的证明。设 X 是表示 G_α中一个元素的字。我们可以假设 X 在 G_α 中作为非循环字是约化的。我们在 X 中进行“粗略循环消去”：将 X 表示为 UX_1V，其中 VU 在 G_α 中等于一个秩为 α 的桥 u，且 X_1 的长度尽可能小。令 $u = v_1 P v_2$，其中 P 是一个秩为 α 的片段。我们可以假设 $\mu(P) \le \frac{1}{2} + \omega$。设 Y 是在 $G_{\alpha-1}$ 中循环约化且在 $G_{\alpha-1}$ 中与 $X_1 u$ 共轭的字。注意， $X_1 u$，因此 Y 与 X 在 G_α 中共轭。我们证明：要么 Y 在 $G_{\alpha-1}$ 中与一个秩为 $\beta \le \alpha$ 的关系词的根 R_0 的幂 R_0^t 共轭，要么 Y 的任何循环移位都不含有满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}) \ge \rho + 2\lambda + 16\omega$ 的秩为 α 的片段 K。在第一种情形下，由命题 11.10，我们可以假设 R_0^k 在 G_α 中循环约化，从而得到命题 11.5 的第一种情况。否则，根据命题 $11.5_{\alpha-1}$，我们可以假设 Y 在 $G_{\alpha-1}$ 中强循环约化。然后应用引理 11.7，找到一个在 G_α 中强循环约化且在 G_α 中与 Y 共轭的字 Z（注意 $\rho + 2\lambda + 16\omega < 1 - 4\lambda - 8\omega$），从而得到第二种情况。

令 $\bar{\mathrm{Y}} = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Y}_i$ 和 $\prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{X}_1^{(i)} \mathrm{v}_1^{(i)} \mathrm{P}_i \mathrm{v}_2^{(i)}$ 为表示该共轭关系的直线。我们观察到

(i) 在 P_i 中，任意秩为 α 、满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{N}) \ge \lambda$ 的片段 N 的基轴都是 P_i的无限周期延拓。特别地，若 P_i中有两个秩为 α 的片段N_1 和N_2，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{N}_j) \ge \lambda$，则$\mathrm{N}_1 \sim \mathrm{N}_2$。（这由推论 *8.2* 得出。）

现在来陈述一些由选取长度尽可能短的 X_1 所得到的结论：

(ii) 不存在秩为 α 、分别属于$\mathrm{X}_1^{(i)}$ 和$\mathrm{X}_1^{(i+1)}$ 的片段N_1 与N_2，使得$\mathrm{N}_1 \sim \mathrm{N}_2$ 且 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{N}_i) \ge 3.2\omega$。

事实上，假设这样的 N_1 和 N_2 确实存在。注意，由引理 10.8，N_1 和 N_2 都非空。根据引理 10.13(i)，N_1 和 N_2的像在 Γ_α 中的任意两个端点都彼此接近。于是，我们可以将 X_1 缩短为其子词 X_2，使得 $X_2 u'$ 在某个 G_α 中与 X共轭，这与 X_1 的选取相矛盾（见图 35a；图中 $\mathrm{N}_2 \ll s_{Y,\bar{\mathrm{Y}}} \mathrm{N}_1$ 位于 $\mathrm{X}_1^{(i+1)}$ 中，但在所有其他情形下，我们都可以轻易找到一条合适的路径 X_2，使得$|\mathrm{X}_2| < \mathrm{X}_1$，并取 $X_2 := \mathrm{label}(\mathrm{X}_2)$）。

(iii) 不存在秩为 α 、分别位于$\mathrm{X}_1^{(i)}$ 和P_i 或P_{i-1}中的片段N_1 和N_2，使得$\mathrm{N}_1 \sim \mathrm{N}_2$, $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{N}_1) \ge 3.2\omega$ 以及 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{N}_2) \ge \lambda$。(否则，利用 (i) 可将 X_1 缩短为 $X_2 :=$ 标签(X_2) 如图 35b 所示。)

设 Q 是 $G_{\alpha-1}$ 中的一个约化字，且在 $G_{\alpha-1}$ 中等于 $X_1 v_1 P$。我们用 Q_i 表示连接 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的 $\iota(\mathrm{X}_1^{(i)})$ 与 $\tau(\mathrm{P}_i)$ 的相应路径。利用 (iii)、命题 8.8 和引理 11.9，我们得出

(iv) Q_i 中不存在满足 $\ge \rho + \lambda + 6.2\omega$ 的秩为 α 的片段 M μ_{f}。

假设 K 是 Y 中秩为 α 的一个片段，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}) \ge \rho + 2\lambda + 16\omega$ 且 $|\mathrm{K}| \le |Y|$。根据 (iv) 和命题 8.9，存在某个 i，使得 Q_i 和 Q_{i+1} 中分别存在秩为 α 的片段 M_1 和 M_2

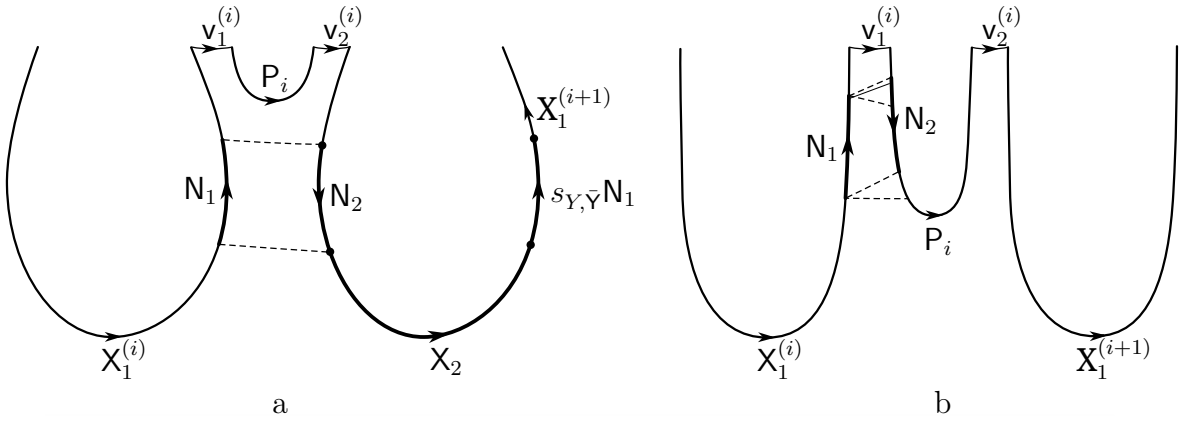

图35.

，分别满足 $M_j \sim K$ $(i = 1, 2)$ 和 $\mu_f(M_j) > \lambda + 6.8\omega$。根据命题8.8，存在一个秩为 α 的片段 N_1，使得 $M_1 \sim N_1$，且 N_1 或出现在 $X_1^{(i)}$ 中并满足 $\mu_f(N_1) > 3.2\omega$，或出现在 P_i 中并满足 $\mu_f(N_1) > \lambda$。类似地，存在一个秩为 α 的片段 N_2，使得 $M_2 \sim N_2$，且 N_2 或出现在 $X_1^{(i+1)}$ 中并满足 $\mu_f(N_2) > 3.2\omega$，或出现在 P_{i+1} 中并满足 $\mu_f(N_2) > \lambda$。如果 N_1 出现在 $X_1^{(i)}$ 中，且 N_2 出现在 $X_1^{(i+1)}$ 中，则会与 (ii) 矛盾。如果 N_1 出现在 P_i 中而 N_2 出现在 $X_1^{(i+1)}$ 中，或 N_1 出现在 $X_1^{(i)}$ 中而 N_2 出现在 P_{i+1} 中，则会与 (iii) 矛盾。最后，如果 N_1 出现在 P_i 中且 N_2 出现在 P_{i+1} 中，那么根据 (i)，有 $s_{Y,\bar{Y}}N_1 \sim N_2$，因此 $K \sim s_{Y,\bar{Y}}K$。由命题 $8.16(i)_{\alpha-1}$ 可知，这意味着 Y 在 $G_{\alpha-1}$ 中共轭于秩为 α 的关系词的根的某个幂。至此证明完成。□

11.11. **命题**。设 R 是秩为 $\beta \le \alpha$ 的关系词，并设 $R = R_0^n$，其中 R_0 是 R的根。那么 R_0 在 G_α中的阶为 n 。

证明。设 k 是 n的真因子。根据引理 10.8，R_0^k 不包含秩为 γ且满足 $\mu_f(K) \ge 3.2\omega$的片段 K，对所有 $\gamma = \beta + 1, \ldots, \alpha$均如此。根据命题 11.10_β，R_0^k 在 G_β 中是循环约化的，因此在秩为 α时也如此。因此 $R_0^k \ne 1$ 在 G_α中。□

11.12. **命题** (关系词根的共轭幂)。设 R 是秩为 $1 \le \beta \le \alpha$的关系词，并设 $R = R_0^n$，其中 R_0 是 R的根。若对某个 k有 $R_0^k = g^{-1}R_0^l g$ 在 G_α 中，$l \ne 0$ (模 n)，则 $g \in \langle R_0 \rangle$ 和 $k \equiv l$ (模 n)。

证明。根据命题 11.11，若 $R_0^k = g^{-1}R_0^l g$ in G_α and $g \in \langle R_0 \rangle$，则 $k \equiv l \pmod n$。剩下要证明的是，对于 $k, l \ne 0 \pmod n$，等式 $R_0^k = g^{-1}R_0^l g$ 蕴含 $g \in \langle R_0 \rangle$。

根据命题 11.10，我们可以假设 R_0^k 和 R_0^l 在 G_α 中是循环约化的。我们用一个字 Z 表示 g，并考虑一个秩为 α 的环形图 Δ，它有两条循环边 X_1 和 X_2，标签分别为 R_0^{-k} 和 R_0^l。该图由一个边界标记为 $R_0^{-k}Z^{-1}R_0^l Z$ 的圆盘图粘合两条标签为 Z^{-1} 和 Z 的边界线段而得。令 Z 为 Δ 中标签满足 label(Z) $= Z$ 的路径，它连接 X_2 和 X_1 的起始顶点。

我们对 Δ 应用约化过程 5.7。根据引理 4.8，可以将 Z 替换为一条新路径 Z_1，其端点相同，且满足 label $(Z_1) = Z$ in G_α（因此，label(Z_1) 表示 g in G_α）。我们还可以假设 Δ 有一个由邻接子图组成的紧集 $\mathcal{T}$。

情况 1：Δ 有一个秩为 α的胞腔 D。根据命题 7.13(i)，D 对 Δ的每条边 X_i 都有一个邻接子图 $\Pi_i \in \mathcal{T}$。此外，如果 $\delta\Pi_i = S_i u_i Q_i v_i$，其中 S_i^{-1} 是 D δ中出现的一条邻接弧，那么 $\mu(S_i) > \lambda$。由引理 10.8 可知，这意味着 $\beta = \alpha$。令 label$(\delta\Delta) = R'$

其中 R' 是秩为 α的关系词。考虑 Δ 的子图的万有覆盖映射后得到的直线 $\bar{\mathrm{X}}_1$、 $\bar{\mathrm{X}}_2$ 和 $\bar{\mathrm{R}}$，它们分别标记为 $R^{\pm\infty}$、 $R^{\pm\infty}$和 R'^{∞} ；该子图如图36$\bar{\ }$ $\bar{\ }$ $\bar{\ }$所示。由推论 8.2 可得 $\mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 = \mathrm{R}$。这意味着 label($\mathrm{Z}_1$) 等于

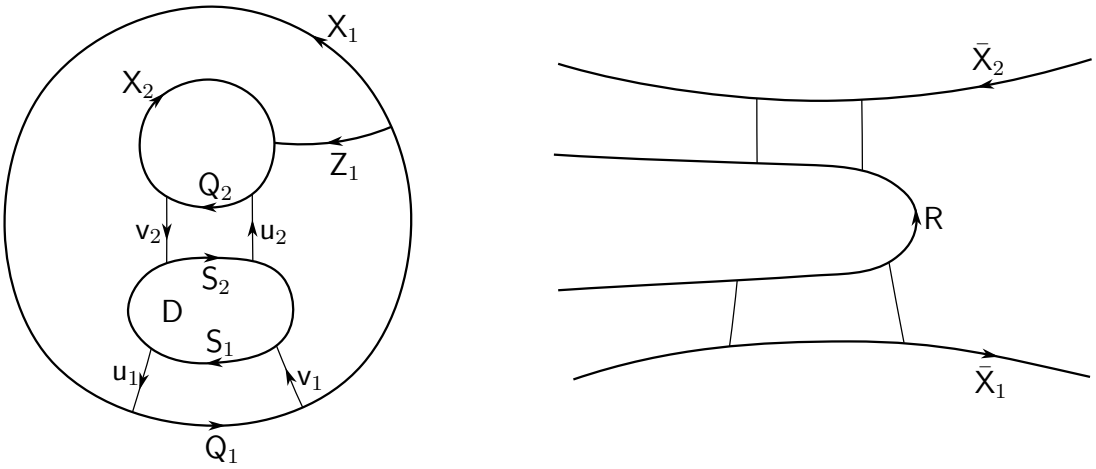

图36。

在 $G_{\alpha-1}$ 中取 R_0 的幂，符合要求。

情形 2： Δ 没有秩为 α 的胞腔。于是我们在 $G_{\alpha-1}$ 中有等式 $R_0^k = Z_1^{-1} R_0^l Z_1$ 。若$\beta < \alpha$ ，则该结论由命题 11.$12_{\alpha-1}$ 得出。令 $\beta = \alpha$。若 $kl > 0$ ，则该结论由命题 13.$8_{\alpha-1}$ 得出。若 $kl < 0$ ，则由推论 13.10(i)$_{\alpha-1}$ 可得 $R_0 = g^{-1} R_0^{-1} g$ ，这与关于 G_α 的表示的条件（S3）矛盾。□

11.13.**命题**。 G_α 中每个无限阶元素都具有如下形式： h^m ，其中 h 是非幂。

证明。我们只需在 $\alpha \geq 1$ 的情形下证明此结论。令 $g \in G_\alpha$ 为一个无限阶元素。只需为等式 $g = h^m$ 中的 $|m|$ 找到一个上界。经过共轭后，根据命题 11.5，我们可用 G_α 中的强循环约化字 X 和 Y 表示 g 和 h 。令 β 为满足以下条件的最大秩：存在 $1 \leq \beta \leq \alpha$ ，使得 X 的一个循环移位包含一个秩为 β 的片段 K ，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq \xi_0$。（若不存在这样的 K ，则根据命题 9.16 X ， Y^m 在自由群 G_0 中与 $|m| \leq |X|$ 共轭，进而 $|m| \leq |X|$。 ）利用命题10.24(i)和 8.16(ii)，我们在 X 的一个循环移位中找到 m 个两两不相容的秩为 β 的片段 M ，且 $\mu_{\mathrm{f}}(M) \geq \xi_0 - 2\lambda - 3.4\omega$。这又意味着 $|m| \leq |X|$。 □

12. Coarsely periodic words and segments over G_α

本节分析与 G_α 中的周期词“几何上接近”的字。在第12节和第13节中，我们使用以下数值参数记号：

$$\xi_1 = \xi_0 - 2.6\omega, \quad \xi_2 = \xi_1 - 2\lambda - 3.4\omega.$$

12.1. **定义**。 G_α 上的简单周期是一个强循环约化词，表示 G_α中的一个非幂元。

根据 2.5，如果 A 是 G_α 上的简单周期，那么任意字 A^n 在 G_α上都是约化的。命题 7.6 表明， A 在 G_α中具有无限阶。

12.2. **定义**。设 A 是 G_α上的简单周期。A 的活动秩 是满足以下条件的最大秩 β：一个 A-周期字包含一个秩为 $\beta \geq 1$ 的片段 K，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq \xi_1$；如果不存在这样的片段，则活动秩为 0。

12.3. 活动秩为 *0* 的情形。以下论证因简单周期在 β 上的活动秩 G_α 是正数还是0而有所不同。$\beta \geq 1$ 不过，区别仅在于，在 μ_{f}(F) 的情形下，我们会对秩为 β的片段 F 的大小 μ_{f}(F) 使用各种条件。第*12*节和第*13*节中的所有定义、陈述和证明，在简单周期在 G_α 上的活动秩 β 为 *0* 时仍然适用，只需忽略形如 $\mu_{\mathrm{f}}(\cdot) \geq \ldots$ 的、针对秩为 β 的片段的条件（即假定在 $\beta = 0$ 的情形下，这些条件在形式上都成立）。下文不再区分这一特殊情形 $\beta = 0$。

我们将使用以下记号。如果 K 和 M 是在 Γ_γ 中某条约化路径 X 上出现的、秩相同为 $0 \leq \beta \leq \alpha$ 的片段，那么 K . M 表示 K $<$ M 或 K $\sim$ M；类似地，K $\lesssim$ M 表示 K $<$ M 且 K $\not\sim$ M。注意，根据推论9.24(ii)，对于满足 μ_{f}(K) μ_{f}(L) $\geq \gamma + 2.6\omega$ 的秩为$\beta \geq 1$ 的片段 K、M，关系‘K . M’仅取决于它们关于相容性的等价类。因此，对于固定的 X 和 β，它在 X 中满足 μ_{f}(N) $\geq \gamma + 2.6\omega$ 的秩为 β 的片段 N 的‘$\sim$’等价类集合上诱导出线性序。（在 $\beta = 0$ 的情形下，关系 K . M 定义在长度为 1 的子路径上，表示 K $\ll$ M 或 K $=$ M。）

12.4. **定义**。设 A 是 G_α 上的一个简单周期，β 是 A的活动秩。若存在一条由 A-周期词标记的路径 P，以及 P 中秩为 β的片段 $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$ 和 S 中秩为 β 的片段 $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1$，使得 Γ_α 中的约化路径 S 是一个周期为 A 的粗略 A周期线段（简称粗略周期线段），则称之为：

- P 以 K_0 起始段开头，并以 K_1结尾；S 以 M_0 起始段开头，并以 M_1结尾；
- $\mathrm{K}_0 \sim \mathrm{M}_0^{\pm 1}$，$\mathrm{K}_1 \sim \mathrm{M}_1^{\pm 1}$且 $\mathrm{K}_0 \not\sim \mathrm{K}_1$；
- $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i) \geq \xi_1$, $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{M}_i) \geq \xi_2 (i = 0, 1)$;
- $s_{A,\ \mathrm{P}}\mathrm{K}_0 \,.\, \mathrm{K}_1$ （非正式地说，P“至少包含一个周期 A”）。

路径 P 是 S 的周期基。P 的无限 A-周期延拓是 S 的轴。

注意，S 的起始片段 M_0 和结束片段 M_1 是定义到相容为止的。

还要注意，由引理 10.13(i) 和命题 9.10 可知，P 与 S 秩接近 β。特别地，若 $\beta = 0$，则 P $=$ Q，因此 P 是一个 A-周期线段。

我们将假设，一个粗略 A-周期线段总是连同一个固定的关联轴一并考虑。（事实上，我们稍后会证明，粗略 A-周期线段的轴有唯一确定的方式，见推论 13.9。）注意，在这一假设下，S 的周期基 P 在将秩为 β 的起始片段和结束片段 K_0 及 K_1 替换为相容片段后，仍是定义良好的。

一个.....的标签 在 Γ_α 中粗略 A-周期线段是一个粗略 A<style id='6'}-周期字，取自 G_α。

注意，在 G_0 上，简单周期 A 是任何不是某个真幂的循环自由约化字。在 G_0 上的粗略 A-周期字，就是任何满足$|P| > |A|$的 A-周期字 P。

12.5. **定义**。我们按以下方式测量粗略 A-周期线段 S 的大小，它大致对应于周期 A 的数量。设 P 为 S 的周期基，且 $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$ 如定义 12.4 所示。于是我们记 ℓ_A(S) $= t$，其中 t 是满足 $s^t_{A,\mathrm{P}}\mathrm{K}_0 \lesssim \mathrm{K}_1$ 的极大整数。因此，我们总有 ℓ_A(S) ≥ 1。

由于我们考虑的是 S 的一个固定关联轴，数值 ℓ_A(S) 不依赖于周期基 P 的选取。

若 S 是 A 上的粗略周期词，则我们形式化地定义 $\ell_A(S)$ 为 ℓ_A(S) 可能达到的最大值，其中 S 是一个标记为 S 的粗略 A 周期线段。

12.6. 注。 (i) 由定义立即可知， t 也是满足 $K_0 \lesssim s_A^{-t},_P K_1$ 的最大整数。因此， $\ell_A(S) = \ell_{A^{-1}}(S^{-1})$。

(ii) 为了计算 $\ell_A(S)$，我们必须在 Γ_α 中取一条路径 S，使得 label(S) $= S$，然后为 S 选择一个周期基 P，使 ℓ_A(S) 尽可能大；由命题 13.7 可知，任意选择 P 实际上都会得到相同的 ℓ_A(S) 值。

12.7. 注。 通过更换周期基 P，我们总可以假设在定义 12.5 中，K_0 及其平移 $s^t_{A,P}K_0$ 都出现在 P 中。在这种情况下，我们有 $|P| \geq \ell_A(S)|A|$。

12.8.**定义**。 设 S_1 和 S_2 是 Γ_α 中粗略 A-周期线段 .

若 S_1 和 S_2 具有相同的轴，我们称它们相容；若它们共享一个公共周期基，则称它们强相容。

我们分别用记号 $S_1 \sim S_2$ 和 $S_1 \approx S_2$ 表示相容和强相容。

注意，在 $S_1 \approx S_2$ 的情况下，S_1 的任一周期基都是 S_2 的周期基，反之亦然。这由定义 12.4 可直接推出。

若 S_1 和 S_2 是 Γ_0 中粗略 A-周期线段，则 $S_1 \sim S_2$ 当且仅当它们有一个公共周期延拓；并且 $S_1 \approx S_2$ 当且仅当 $S_1 = S_2$。

12.9.**命题**。 设 S_1 和 S_2 是 Γ_α 中粗略 A-周期线段。

(i) 如果 $S_1 \approx S_2$，那么 $\ell_A(S_1) = \ell_A(S_2)$。 (*ii*) 设约化路径 X 中出现 S_1 和 S_2，且位于 Γ_α 中，并且 $S_1 \sim S_2$。那么，X 中 S_1 与 S_2 的并集是一个 A-粗略周期线段，其中 $S_1 \cup S_2$ 的一个周期基是 S_1 和 S_2 在它们共同的无限 A-周期延拓中的周期基的并集。

证明。 (i) 直接由定义 12.8 得出。

(ii) 由命题 10.23(ii) 得出。 □

12.10. 我们描述一个过程，用于将粗略 A-周期线段 S 缩短“给定数量 k 个周期”。设 $k \geq 1$ 和 $\ell_A(S) \geq k+1$。令 β 为 S 的活动秩，令 P 为 S 的一个周期基，并令 K_i 和 M_i ($i = 0, 1$) 分别为 P 和 S 中秩 β 的起始段和结束片段，如定义 13.3 所述。我们有 $K_0 < s^k_{A,P}K_0 \lesssim s_A^{-1}$，$PK_1 < K_1$，由命题 8.16(ii) 可得 $s^k_{A,P}K_0 \not\sim K_0$ 以及 $s^k_{A,P}K_0 \not\sim K_1$。由命题 10.23(i)，S 中存在一个秩为 β 的片段 N，使得 $\mu_f(N') \geq \xi_2$，并且 $s^k_{A,P}K_0 \sim N^{\pm 1}$。于是 $S_1 = N \cup M_1$ 是 S 的末段，它是一个粗略 A-周期线段，其周期基为 $P_1 = s^k_{A,P}K_0 \cup K_1$，且 $\ell_A(S_1) = \ell_A(S) - k$。我们注意到：

(i) 该操作的结果在严格相容性意义下有定义。(ii) 我们有 $P = XP_1$，其中 $|X| = k|A|$。(iii) 若 $k \geq 2$，则根据命题 10.23(i)，我们还可以在 S 中找到一个秩为 β 的片段 N'，使得 $\mu_f(N') \geq \xi_2$，且 $s_A^{k-1},_P K_0 \sim N'^{\pm 1}$，并且 N' 与 N 不相交。于是 $S = S_0 u S_1$，其中 $S_0 = M_0 \cup N'$ 是一个粗略 A-周期线段，其周期基为 $K_0 \cup s_A^{k-1},_P K_0$，且 $\ell_A(S_0) = k - 1$。

(iv) S_1 的起始位置仅取决于 S 的起始位置；更确切地说，若 S' 是 S 的一个起始段，且 S_1 和 S'_1 如上所述由 S 和 S' 得到，那么在 S'_1 的严格相容性意义下，S'_1 是 S_1 的一个起始段；若 $S \approx S'$，则 $S_1 \approx S'_1$。

12.11. **定义**。 若 S_1 由 S 按照 12.10 中的过程得到，则称 S_1是对 S 从起始段按 t 个周期进行缩短。以对称的方式，我们定义对 S 从末段按 t 个周期进行缩短。

若 $\ell_A(S) \geq 2t+1$ 且 S'是通过从两边应用该操作由 S 得到的，则 S' 是对 S 按 t 个周期进行截断。

12.12. **定义**。 我们定义与简单周期 A（位于 G_α上）相关联的两个数值参数：稳定大小 $[A]_\alpha$ 在 A 秩 α,

$$[A]_\alpha = \inf_{m \geq 1} \frac{|(A^m)^\circ|_\alpha}{m}$$

以及 稳定性减量 $h_\alpha(A)$:

$$h_\alpha(A) = \left\lceil \frac{1.2}{[A]_\alpha} \right\rceil + 1.$$

若 $\ell_A(S) \geq 2h_\alpha(A)+1$，则对 S 按 $h_\alpha(A)$ 个周期进行截断的结果是 S 的稳定部分。由断言 12.10(iv) 及其对称版本可知，函数‘$S \to S$ 的稳定部分’保持严格相容性：若 $S_1 \approx S_2$ 且 S_i^* 是 S_i 的稳定部分，则 $S_1^* \approx S_2^*$。

关于 $[A]_\alpha$ 和 $h_\alpha(A)$ 的基本事实如下所述。

12.13. **引理**。 如果 X 是一个 A-周期词，并且 $|X| \geq m|A|$，那么 $|X|_\alpha \geq m[A]_\alpha$。特别地，如果 $|X| \geq (h_\alpha(A) - 1)|A|$，那么 $|X|_\alpha \geq 1.2$。

证明。我们有

$$|X|_\alpha \geq |A_1^m|_\alpha \geq |(A^m)^\circ|_\alpha \geq m[A]_\alpha$$

其中，A_1 是 A 开始 X 处的循环移位。第二个陈述由第一个陈述推出。□

稳定部分的主要作用由下面的命题描述。

12.14.**命题** （粗周期词的稳定性）。 设S 是 Γ_α 中一个粗略 A-周期线段，满足 ℓ_A（S）$\geq 2h_\alpha(A)+1$，并设S^* 是S的稳定部分。如果X 和Y 是 Γ_α 中的相近的约化路径，且 S 是X 的子路径，那么Y 包含一个粗略 A-周期线段T，使得T $\approx S^*$。

证明。 设 P 和 P^* 分别是 S 和 S^* 的周期基。设 β 是 A 的活动秩，并设 K_i 和 M_i ($i = 0, 1$) 分别是 P 和 S 中秩为 β 的片段，这些片段由定义 13.3 分别应用于 P 和 S 得到。记 $t = h_\alpha(A)$。

设 X 和 Y 如命题所述。若 $\alpha = 0$，则 $X = Y$，无需证明。设 $\alpha > 0$。我们断言 $P = z_1 P' z_2$，其中 P' 在秩上与 Y 的某个子路径接近，且$|z_i|_\alpha < 1.2$。事实上，若 $\beta = \alpha$，则由命题 10.6 和引理 10.13(i) 易知 P 已经与 Y 的某个子路径接近。若 $\beta < \alpha$，则注意到，由活动秩的定义和命题 $8.7_{\leq\alpha}$，S 不包含任何秩为 γ、满足 $\beta < \gamma \leq \alpha$ 且 $\mu_f(K) \geq \xi_0$ 的片段 K。由此，断言可由命题 10.22 得出。

由引理 12.13，得 $|z_i| < (t-1)|A|$。这意味着 s_A^{t-1}，$\mathrm{P}K_0 \cup s_A^{-t+1}$，$\mathrm{P}K_1$ 包含在 P′ 中。注意，$P^* = s_{A,}^{t}\ \mathrm{P}K_0 \cup s_A^{-t},\ \mathrm{P}K_1$，其中 $\mu_f(K_0)\ \mu_f(K_1) \geq \xi_1$。于是，由命题 10.23(i)，我们找到一个子路径 T，它是一个粗略的 A-周期线段，其周期基为 P^*，因此有 $T \approx S^*$。□

我们在其他几种情况下也使用参数 $h_\alpha(A)$。

12.15.**命题**。设 P 是 Γ_α 中的一个周期线段，其在 G_α上具有简单周期 A。假设 $|P| \geq m|A|$，其中 $m \geq 2h_\alpha(A)+3$。设 X 是 Γ_α 中的一条约化路径，且P与X 秩接近。那么存在 P 的一个子路径P_1 以及X 的一个子路径 X_1，使得X_1 是一个粗略的 A-周期线段，其周期基为P_1，且 $\ell_A(X_1) = m - 2h_\alpha(A) - 2$。

证明。令 β 为 A的活动秩。利用推论 9.13 和引理 12.13，我们找到秩接近的子路径 P_2（属于 P）和 X_2（属于 X），满足 $|P_2| \geq m - 2h_\alpha(A) + 2$。根据命题 8.16(iii)，P 中任何秩为 β 且满足 $\mu_f(K) \geq 2\lambda + 5.3\omega$ 的片段 K 都满足 $|K| < 2|A|$；因此，根据定义 12.4，P 中存在一个秩为 β、满足 $\mu_f(K) \geq \xi_1$ 的片段 K。若 $\beta \geq 1$，则根据命题 8.12 从末段缩短 K；再利用命题 8.16(ii)，我们找到一个秩为 β 的片段 K_1，满足 $\mu_f(K_1) > \xi_1 - \lambda - 2.7\omega$，它是 K 的起始段且与 s_A,PK 不相交；于是 $|K_1| \leq |A|$。不妨设 K 出现在 P_2 中，且最接近 P_2的起始段。于是 P_2包含 $m-2h_\alpha(A)$ 个 K 的平移 s_A^i,PK，其中 $i = 0, \ldots, m-2h_\alpha(A)-1$，并且还包含 $s^{m-2h_\alpha(A)}$ A,P K_1。应用命题 10.23(i)，我们在 X_2 中找到若干秩为 β的片段 $M_i (i = 1, \ldots, m-2h_\alpha(A)-1)$，满足 $\mu_f(M_i) \geq \xi_2$，使得 s_A^i,PK $\sim M_i^{\pm 1}$。那么 $X_1 = M_1 \cup M_{m-2h_\alpha(A)-1}$ 是一个粗略的 A-周期线段，其周期基为 s_A,PK $\cup s^{m-2h_\alpha}$(A −1) ,P K，并且我们有 $\ell_A(X_1) = m - 2h_\alpha(A) - 2$。□
A

12.16.**命题**。设 S 是一个关于 G_α 的粗略 A-周期词，B 是关于 G_α 的简单周期，且与 A共轭。设 $\ell_A(S) \geq 2h_\alpha(A) + 3$。则 S 的一个子词 T 是关于 G_α 的粗略 B-周期词，并且 $\ell_B(T) \geq \ell_A(S) - 2h_\alpha(A) - 2$。

证明。我们用 Γ_α中的一个粗略 A-周期线段 S 表示 S。令 P 为 S 的周期基，令 L_1 为 S 的轴，令 L_2 为一条与 L_1平行的 B-周期线。分别将 β_1 和 β_2记为 A 和 B 的活动秩。

根据定义 12.2，L_1 或 L_2 不含满足$\beta_1 < \gamma \leq \alpha$且 $\mu_f(K) \geq \xi_1$的秩为 γ 的片段 K。令 K_0和 K_1为秩为 β_1且满足 $\mu_f(K_i) \geq \xi_1$的片段，分别作为 P 的起始段和末段。我们有 s^{ℓ_A}(S) A,L_1 $K_0 \lesssim K_1$。根据命题 10.24(i)，存在 L_2 中的秩为 β_1 的片段 M_0 和 M_1，满足 $\mu_f(M_i) \geq \xi_2$，使得 $K_i \sim M_i^{\pm 1}$。由于 L_1和 L_2 平行，我们有 s_A,$L_1 = s_B$,L_2，因此根据命题 10.24(ii)，s^{ℓ_A}(S) B,L_2 $M_0 \lesssim M_1$。于是，$Q = M_0 \cup s^{\ell_A}$(S) B,L_2 $M_0 \cup M_1$ 与 P 秩接近 β_1，$|Q| \geq \ell_A(S)$，结论由命题 12.15 得出。□

13. 重叠粗周期性

本节的主要结果是命题 13.4，它可以被视为周期词一个众所周知性质的类比：如果两个周期词有足够大的重叠，那么它们具有一个公周期。在接近性扮演重叠角色的更一般语境中，我们需要这样一个类比。作为主要技术工具，我们不使用重叠情形中字母的一致性，而是使用秩为 $\beta \leq$ 的片段对应关系

α 由命题 10.23 给出的严格接近的 β 线段中的 Γ_α。这一对应关系存在“渐隐效应”，因而造成了困难：从一条线段转到另一条线段时，片段大小可能会减小。为克服这一困难，我们使用一种特殊的组合论论证 [9,引理 6.4]。

13.1. **引理** (穿透引理，[9, 引理 6。4])。设 $S_0, S_1, \ldots, S_k$ 是有限个两两不相交的集合。假设下列断言成立：

(i) 每个 S_i 都带有预序，即赋予了一个传递关系‘$<_i$’。*(ii)* 在并集 $\bigcup_i S_i$ 上存在一个等价关系 $a \sim b$，使得对于同一集合 S_i 中任意的 a, b，要么有 $a <_i b$, $b <_i a$，要么有 $a \sim b$；换言之，在每个 S_i 上，等价类构成一个诱导的线性序。*(iii)* 我们假设该等价关系在相邻集合中保持预序：如果$a, b \in S_i$, $a', b' \in S_{i+1}$, $a \sim a'$ 且 $b \sim b'$，那么 $a <_i b \Leftrightarrow a' <_{i+1} b'$。如果 $c \in S_i$, $a, b \in S_j$ 且 $a \lesssim_j b$ （其中 $a \lesssim_j b$ 表示‘$a <_j b$ 或 $a \sim b$’），那么若存在 $c' \sim c$ 使得 $a \lesssim_j c' \lesssim_j b$，就称 c 穿透于 a 和 b 之间。*(iv)* $\bigcup_i S_i$ 中有一个由稳定元素构成的子集，满足以下性质：若$c \in S_i$ 是稳定的，且 $a \lesssim_i c \lesssim_i b$, $a', b' \in S_j$, $a' \lesssim_j b'$, $a \sim a'$，并且 $b \sim b'$，那么 c 穿透于 a' 和 b' 之间。*(v)* 对于每个 $i \leq k-1$，都存在稳定元素 $a_i, b_i \in S_i$ 和 $a_i', b_i' \in S_{i+1}$，使得$a_i \sim a_i'$, $b_i \sim b_i'$ 且 $a_i <_i b_i$。

最后，设 $c_0 \in S_0$ 稳定且 $a_0 \lesssim_0 c_0 \lesssim_0 b_0$。假设对于每个 $i = 1$、2、.....、$k-1$，c_0 都在 a_i 与 b_i 之间穿透。那么 c_0 会在 a_k 与 b_k 之间穿透。

下面的观察是 [9, 引理 6.2]的一个特例。

13.2. **引理**。设群 G 作用于集合 X。令 g，$h \in G$、x_0，x_1、.....、$x_t \in X$，并且对某个 r, $s \geq 0$，满足 最大公约数$(r, s) = 1$ 且 $r + s \leq t$,

$$gx_i = x_{i+r} \ (i = 0, 1, \ldots, t-r), \quad hx_i = x_{i+s} \ (i = 0, 1, \ldots, t-s).$$

假设 x_0 的稳定子 H 在 G 中是自正规的。那么，要么 g，$h \in H$ （因此 $x_0 = x_1 = \cdots = x_t$），要么存在 $d \in G$，使得 $g = d^r$ 且 $h = d^s$。

证明。对 $r+s$ 使用归纳法。可以假设 $r \leq s$。若 $r > 0$，则对于 $0 \leq i \leq t-s$，有 $g^{-1}hx_i = x_{i+s-r}$，结论由归纳假设推出，其中 h 对应 $= g^{-1}h$、s 对应 $= s-r$、t 对应 $= t-r$。否则，我们有 $r = 0$ 和 $s = 1$。于是 $h^{-1}ghx_0 = gx_0 = x_0$，并且由 H 的自正规性可知，要么 g、$h \in H$，要么 $g = 1$ （此时 $g = h^0$ 且 $h = h^1$）。□

13.3. **定义**。设 X 和 Y 是 Γ_α 中的约化路径。若存在 X 中秩为 β 的片段 $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1$，以及 Y 中秩为 β 的片段 $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1$，使得：

- $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i)\, \mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{M}_i) \geq \xi_2 (i = 0, 1)$.
- X 以 K_0 起始段开头，并以 K_1末段结尾；Y 以 M_0 起始段开头，并以 M_1末段结尾；
- $\mathrm{K}_0 \sim \mathrm{M}_0^{\pm 1}$、$\mathrm{K}_1 \sim \mathrm{M}_1^{\pm 1}$以及 $\mathrm{K}_0 \not\sim \mathrm{K}_1$。

根据引理 10.13(i)，秩严格接近的路径 β 也秩接近 β。严格接近的一个优点是，这种关系具有传递性（这可由定义 13.3 直接得出）。注意，根据定义 12.4，Γ_α 中的粗略周期线段 P 与其周期基 S 严格接近（而定义 12.4 中的条件略

强一些，因为 S 的起始片段和结束片段的大小有下界）。

13.4. 命题。设 A 是关于 G_α 的一个简单周期，β 是 A 的活动秩，而 $P_i(i=0,1)$ 是 Γ_α 中两个 A- 周期线段。设 $S_i(i=0,1)$ 是 Γ_α 中一条与 P_i 严格接近的约化路径。假设 S_0 包含于 S_1。还假设 P_0 至少包含一个周期 A，其含义是：P_0 中存在秩为 β 的片段 K 和 K'，使得 $\mu_{\mathrm{f}}(K)\ \mu_{\mathrm{f}}(K') \geq \xi_2$ 且 $K' \sim s_{A,\mathrm{P}_0}K$。则 P_0 和 P_1 有一个公共周期延拓。

证明。记作

$$\xi_3 = \xi_2 - 2\lambda - 3.4\omega = 3\lambda - 10.9\omega.$$

在整个证明中，“片段 M”指“秩为 β 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{M}) \geq \zeta_3$ 的片段 M”（或者在 $\beta=0$ 时简称“秩为 0 的片段 M”，见 12.3）。

设直线 L_i 是 P_i 的无限周期延拓，并设 g 是 G_α 的一个元素，使得 $\mathrm{L}_1 = g\mathrm{L}_0$，，因此 $s_{A,\ \mathrm{P}_1} = g s_{A,\ \mathrm{P}_0} g^{-1}$。我们的论证依赖于建立 P_i 和 S_i 中秩为 β 的片段之间的对应。为方便起见，我们将把四条路径 P_i 和 S_i 中秩为 β 的片段视为四个互不相交的集合；也就是说，我们将形式上考虑二元组 (M, X)，其中 $\mathrm{X} \in \{\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{S}_0,\mathrm{S}_1\}$，而 M 是 X 中出现的一个片段。我们称 M 为“属于 X 的片段”，或简称“X 中的片段”。

我们在 P_i 和 S_i中的片段上引入两种运算。设 M 和 N 是片段，且各自属于某个 P_i 或 S_i。

(i) 若 M 属于 P_i，N 属于 S_i，且 $\mathrm{M} \sim \mathrm{N}^{\pm 1}$，则 M 和 N 中的一个会跳跃到另一个。(ii) 在以下情形 (a)–(d) 中，M平移到 N：(a) M 和 N 属于同一个 P_i，且对某个 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{N} \sim s^k_{A,\mathrm{P}_i}\mathrm{M}$；或 (b) M 属于 P_0，，N 属于 P_1，且对某个 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{N} \sim g s^k_{A,\mathrm{P}_0}\mathrm{M}$；或 (c) M 属于 P_1，，N 属于 P_0，且对某个 $k \in \mathbb{Z}$，$\mathrm{N} \sim g^{-1} s^k_{A,\mathrm{P}_1}\mathrm{M}$。（换言之，在情形 (a)–(c) 中，若 M 和 N 在各自对应的周期线 L_i 上相对于周期 A 的位置相同（兼容性除外），则 M 平移到 N。）(d) “相同”情形：M ∼N，且它们分别属于某个 S_i 和 S_j。

注意，这两个运算是可逆的，并且在相容性意义下有定义。

设 K 和 K′是 P_0中的片段，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K})\ \mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}') \geq \xi_1$，且 $\mathrm{K}' \sim s_{A,\ \mathrm{P}_0}\mathrm{K}$，如命题中所假设。设 $\mathcal{M}$ 是一个由两两不相容片段组成的极大集，这些片段可从 K 出发，通过运算 (i) 和 (ii) 得到。由命题 8.10 可知，$\mathcal{M}$ 中的任意两个片段都不包含对方，因此 $\mathcal{M}$ 是一个有限集。

下面的断言是证明的关键步骤。

断言：在 $\mathcal{M}$ 内总是可以进行跳跃操作；也就是说，对于 $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ 属于 P_i 或 S_i 的任意情形，$i \in \{0,1\}$，存在一个秩为 α 的片段 N，它属于 S_i 或相应地属于 P_i，使得$\mathrm{M} \sim \mathrm{N}^{\pm 1}$。

断言的证明。假设给定了某个 $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$，并证明所需的 N 存在。证明将通过应用引理 13.1 来完成。我们先做必要的准备。

根据 $\mathcal{M}$ 的定义，存在一个由片段 $\mathrm{T}_j \in \mathcal{M}$ 构成的序列 $\mathrm{T}_0 = \mathrm{K}$、$\mathrm{T}_1$、.....、$\mathrm{T}_l = \mathrm{M}$，使得 T_{j+1} 由 T_j 通过运算 (i) 或 (ii) 之一得到。我们可以

假设该序列中没有连续两个平移（否则可以将它们合并为一次平移），也没有连续两个跳跃（否则它们会相互抵消）。为方便起见，还假设 $T_0 \to T_1$ 是一次平移（必要时插入一次平凡平移）。因此，对每个 i，T_{2j} 平移到 T_{2j+1}，而 T_{2j+1} 跳跃到 T_{2j+2}。我们可以假设最后一步 $T_{l-1} \to T_l$ 是一次平移，因此 $l = 2k-1$ 对某个 k 成立。

现在粗略地说，我们将所有片段 T_j 连同属于它们的相应路径 P_i或 S_i，移到相容意义下的同一位置。我们定义 Γ_α 中的一列路径 $Y_0, Y_1, \dots, Y_k$，以及 Y_j 中的一列片段 W_j，对应 $j = 0, 1, \dots, k-1$。对每个 j，我们都有 $W_j = f_j T_{2j+1}$，其中 $f_j \in G_\alpha$。Y_j 和 f_j 的定义如下。

记 $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (P_0, S_0, P_1, S_1)$，并令 $J(i)$ 表示这样一个指标：X_i中的一个片段跳跃到 $X^{J(i)}$中的一个片段（即 $(J(1)\ J(2)\ J(3)\ J(4)) = (2, 1, 4, 3)$）。另记 $I(j)$ 为使 T_{2j-1} 属于 $X^{I(j)}$的指标。因此，T_{2j} 属于 $X^{J(I(j))}$。

我们从 $Y_0 = X^{I(0)}$ 和 $W_0 = T_1$，开始，因此 $f_0 = 1$。假设 $j < k-1$、Y_j 和 f_j 已经定义。若 $T_{2j} \to T_{2j+1}$ 是由 (a)–(c) 给出的平移，则存在 $f_{j+1} \in G_\alpha$，使得 $f_{j+1}X^{I(j+1)}$ 和 $f_j X^{J(I(j))}$ 属于同一条 A-周期线，且 $f_{j+1}T_{2j+1} \sim f_j T_{2j}$。我们取 $Y_{j+1} = f_{j+1}X_{I(j+1)} \cup f_j X^{J(I(j))}$。否则，$T_{2j} \to T_{2j+1}$ 是由 (d) 给出的平移，即 $X^{J(I(j))}$ 或为 S_0，或为 S_1。此时我们取 $f_{j+1} = f_j$ 和 $Y_{j+1} = f_j S_1$。最后，定义 $Y_k = f_k X^{J(I(k-1))}$。对于所有 $j = 0$、1、.....、$k-2$，都有 $f_{j+1}T_{2j+2}^{\pm 1} \sim f_{j+1}T_{2j+1} \sim f_j T_{2j}$，因此 $W_0 \sim W_1^{\pm 1} \sim \cdots \sim W_{k-1}^{\pm 1}$。图37 展示了这一构造。

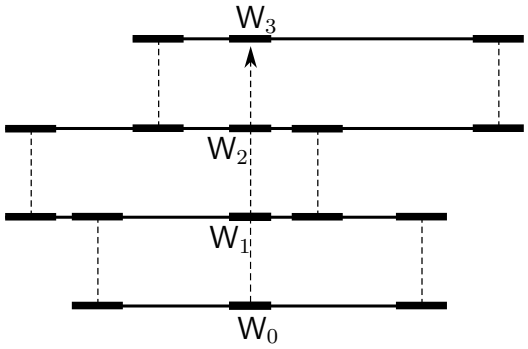

图37。

由对 (P_0, S_0) 和 (P_1, S_1) 的严格接近性可知，每个 $X_{i\pm 1}$ 都以一个片段 U_i 起始，并以一个片段 V_i 结束，使得 $\mu_f(U_i)\ \mu_f(V_i) \geq \xi_2$，$U_i \not\sim V_i$，且我们有 $U_i \sim U_{J\ i}()$ 和 $V_i \sim V_{J\ i}()$

现在我们应用引理 13.1，其中：

- S_j 是 S_j 中所有满足 $\mu_f(N) \geq \xi_3$ 的片段 N 的集合。
- $N \leq_i N'$ 定义为“$N \not\sim N'$ 且 $N < N'$ 在 S_j中”。
- N 与 $N' \in \bigcup_j S_j$ 的等价性定义为 $N \sim N'^{\pm 1}$。
- $N \in \bigcup_j S_j$ 称为稳定，当且仅当 $\mu_f(N) \geq \xi_2$。
- 对于 a_j, b_j, a'_j和 b'_j，我们分别取 U_i和 V_i的适当平移，即 $f_j U_{I(j)}$,$f_j V_{I(j)}$，$f_j U_{J(I(j))}$ 和 $f_j V_{J(I(j))}$。

引理 13.1 的条件 (i)–(v) 均已满足：在情形 $\beta \geq 1$ 下，由推论9.24(ii)可知条件 (i) 成立；由命题 8.10$_\beta$可知条件 (ii) 成立；条件 (iii) 和 (iv) 则由

结合不等式 $\xi_3 \geq 2\lambda + 9.1\omega$，由命题 10.23 可知条件 (iii) 和 (iv) 成立；最后，条件 (v) 根据构造立即成立。

对于引理 13.1 中的 c_0，我们取 T_1。注意，除相容性外，我们可以假设$\mu_f(T_1) \geq \xi_2$，因此 T_1 是稳定的。（根据构造，T_1 是将 $T_0 = K$ 平移到 $X^{I(0)}$ 得到的；如果 T_1 与 $X^{I(0)}$ 的起始段或结束片段相容，那么根据定义 13.3，我们可以假设 $\mu_f(T_1) \geq \xi_2$；否则，我们可以假设 T_1 是 K 的字面平移，进而有 $\mu_f(T_1) = \mu_f(K) \geq \xi_1$。）由于 $T_1 = W_0 \sim W_1^{\pm 1} \sim \cdots \sim W_{k-1}^{\pm 1}$，且每个 W_j都出现在 $f_j X^{I(j)}$中，因此 T_1在每一对 $f_j U^{I(j)}$与 $f_j V^{I(j)}$之间穿入，其中 $j =$为 0, 1, . . . , $k-1$。引理 13.1 的所有假设均已满足，应用该引理可得 $f_{k-1} X^{J(I(k-1))}$ 中的一个片段 W_k，使得 $W_k^{\pm 1} \sim W_{k-1} = f_{k-1} M$。于是，$M \to f_{k-1}^{-1} W_k$ 就是所需的跳跃。断言的证明至此完成。

我们完成该命题的证明。设 $K_0 = K$、K1、.....、$K_m \sim s_{A,P_0} K$ 为 $\mathcal{M}$ 中位于 K 与 $s_{A,P_0} K$ 之间的所有片段，按自然次序排列，即有 $K_0 < K_1 < \cdots < K_m$。设 M0、.....、$M_m \in \mathcal{M}$ 为 P_1 中的片段，使得对所有 i，$M_i \sim K_i^{\pm 1}$（每个 M_i 都由 K_i 经两次跳跃得到）。注意，根据命题 10.23，$M_0 < M_1 < \cdots < M_m$。由于 $\mathcal{M}$ 对平移封闭，M_0 与 $s_{A,P_1} M_0$ 之间的片段数，与 $\mathcal{M}$ 中 K 和 $s_{A,P_0} K$ 之间的片段数相同，即有 $M_m \sim s_{A,P_1} M_0$。这意味着 K_0 平移后得到某个 M_q，即对于某个 t，有 $M_q \sim g s_{A,P_0}^t K_0^{\pm 1}$，因此

$$M_{i+q} \sim g s_{A,P_0}^t K_i^{\pm 1} \text{ for } i = 0, 1, \ldots, m-q, \quad M_{i+q-m} \sim g s_{A,P_0}^{t-1} K_i^{\pm 1} \text{ for } i = m-q+1, \ldots, m.$$

注意，由于 $\mathcal{M}$ 由单个片段 K 生成，因此 gcd($m.q$) $= 1$。由命题 8.16(i)、11.12 和推论 9.24(iii)，子群 $\{g \in G_\alpha \mid gM_0 \sim M_0^{\pm 1}\}$ 在 G_α中是自正规的。现在应用引理 13.2，其中对 x_i，我们取在 Γ_α 中秩为 β 的片段集合里，M_i 在模反演相容性下的等价类。由该引理，$\langle g, s_{A,P_0} \rangle$ 是循环的。由于A 是非幂，我们得到 $g \in \langle s_{A,P_0} \rangle$，这意味着 $L_1 = L_2$。□

由命题 13.4 可立即得到：

13.5.**推论 (**重叠粗周期性)。 设S_0 和S_1 是 Γ_α 中具有相同简单周期 A 、关于 G_α的粗略周期线段。如果S_0 包含于S_1，那么$S_0 \sim S_1$。

13.6.**推论**。 设 S 和 T 是 Γ_α 中具有相同简单周期 A 的不相容粗周期线段，且它们出现在约化路径 X 中。令 $\ell_A(S) \geq 3$。假设 S_1 是由 S 从末段缩短 *2* 个周期得到的（若 S $<$ T），或由 S 从起始段缩短 *2* 个周期得到的（若 S $>$T）。那么 S_1 和 T 不相交。

证明。不失一般性，我们假设 S $<$ T，且 S_1 是由 S 从末段缩短 2 个周期得到的。由 12.10(iii)，我们有 $S = S_1 u S_2$，其中 S_2 是一个粗周期线段，且 $S_2 \sim S$。根据假设，我们有 $S_2 \not\sim T$，进而由推论 13.5，S_2 和 T 均不包含于对方之中。这意味着 S_1 和 T 不相交。□

13.7. 命题（具有一个周期的严格接近周期路径）。设 A 是 G_α 上的一个简单周期，且 β 是 A 的活动秩。设 P_0 和 P_1 是 Γ_α 中由周期为 A 的周期词标记、秩 β 严格接近的路径。假设 P_0 中存在秩为 β 的片段 K 和 K'，使得 $\mu_f(K)$ $\mu_f(K') \geq \xi_2$ 且 $s_{A,P_0} K \sim K'$。那么 P_0 和 P_1 有一个公共周期延拓。

证明。 这是命题 13.4 在 $S_0 = S_1 = P_1$ 下的一个特例。 □

13.8. **命题**。 设 $g \in G_\alpha$ 是一个无限阶非幂，且设 $h \in G_\alpha$。如果 $g^k = h^{-1}g^l h$ 对某个 k, $l > 0$ 成立，那么 $h \in \langle g \rangle$ 且 $k = l$。

证明。根据命题 11.5，经过共轭后，可以假设 g 由 G_α上的简单周期 A 表示。只需证明 $h \in \langle A \rangle$。

考虑 G_α 中的两条周期线 L_0 和 L_1，它们的周期为 A，并表示该共轭关系。当且仅当 $\mathrm{L}_0 = \mathrm{L}_1$时，我们有 $h \in \langle A \rangle$。令 A的活动秩为 β。根据命题 10.24，我们可以找到秩严格接近的 β 个子路径 P_i，它们位于 L_i 上，且具有任意给定的界$|\mathrm{P}_0| \geq t|A|$。于是结论由命题 13.7 得出。□

由此立即得到:

13.9. **推论**。 设 S_0 和 S_1 是 Γ_α 中的粗略 A-周期线段，且L_i $(i = 1,2)$ 是S_i的一条轴。若 $\mathrm{S}_0 \sim \mathrm{S}_1$，则$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_2$。

13.10. **推论**。 设 $g \in G_\alpha$ 是一个无限阶元素。则以下结论成立。

(i) g 具有唯一根；也就是说，存在唯一的非幂元 $g_0 \in G_\alpha$，使得对于某个 $t \geq 1$, 有 $g = g_0^t$。(ii) 如果 $h^r \in \langle g \rangle$ 且 $h^r \neq 1$，那么 $h \in \langle g_0 \rangle$，其中 g_0 是 g的根。(iii) 如果 g 与 g^{-1} 共轭，那么 g 是两个对合的乘积。

证明。 (i) 直接由命题 11.13 和命题 13.8 得出。

(ii) 由 (i) 和命题 13.8 得出，因为 $g_0^t = h^r$ 蕴含 $g_0^t = h^{-1}g_0^t h$。(iii) 假设 $g = h^{-1}g^{-1}h$。由 $g = h^{-2}gh^2$ 可得，根据 (ii)， $h^2 = 1$。类似地，我们有 $(hg)^2 = 1$，从而 $g = h \cdot hg$。□

13.11.**推论**。 假设每个秩为 $\beta \leq \alpha$ 的关系词 R 都具有如下形式： $R = R_0^n$，其中 R_0 是 R 的根，且 n 为奇数（不同关系词 R对应的n 可以不同）。那么 G_α 没有对合，并且 G_α 中的任何元素都不与其逆元共轭。

证明。 根据命题 11.5， G_α 的任意有限阶元素都共轭于秩为 $\beta \leq \alpha$ 的某个关系词 R 的根 R_0 的某个幂R_0^t。根据命题 11.11， R_0^t 的阶为奇数，因此不可能是一个对合。第二个结论由第一个结论和推论 13.10(iii) 得出。□

13.12.**引理**。 设 P 是 Γ_α 中一个具有简单周期 A （相对于 G_α）的 A-周期线段。设S 是 P 中一个具有另一简单周期 B （相对于 G_α）的粗略周期线段，并假设A 和 B 在 G_α中不共轭。那么以下结论成立。

(i) $\mathrm{S} \not\sim s_{A,\,\mathrm{P}}^t \mathrm{S}$，对任意 $t \neq 0$ 均成立。(ii) 若 $\ell_B(\mathrm{S}) \geq 3$，则 $|\mathrm{S}| < 2|A|$。

证明。 (i) 假设对某个 $t \neq 0$ 有 $\mathrm{S} \sim s_{A,\,\mathrm{P}}^t \mathrm{S}$。令 L_1 为 P 的无限周期延拓，L_2 为 K 的轴。根据推论 13.9，我们有 $\mathrm{L}_2 = s_{A,\,\mathrm{P}}^t \mathrm{L}_2$,，因此对于某个 $r \neq 0$，有 $s_{A,\,\mathrm{P}}^t = s_{B,\,\mathrm{Q}}^r$。由于 A 和 B 都是非幂，根据推论 13.10(ii)，对于 $\varepsilon = \pm 1$，有 $s_{A,\,\mathrm{P}}^{\varepsilon} = s_{B,\,\mathrm{Q}}$，因此 L_1^{ε} 和 L_2 平行。由 S 是 P 的子路径这一事实，根据命题 10.23（取 A 的活动秩作为 β），很容易推出 $\varepsilon = 1$。这与 A 和 B 在 G_α 中不共轭的假设矛盾。

(ii) 根据 12.10(iii)，我们将 S 表示为 $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 u \mathrm{S}_2$，其中 S_1 和 S_2 是周期为 B 和 $\ell_B(\mathrm{S}_1) \geq \ell_B(\mathrm{S}) - 2$ 的粗周期线段。根据 (i) 和推论 13.5， $s_A^{-1}{}_{,\,\mathrm{P}}\mathrm{S}$ 不包含 S_1，并且 $s_{A,\,\mathrm{P}}\mathrm{S}$ 不包含 S_2。这意味着 $|\mathrm{S}| < 2|A|$。□

13.13.**命题**。 设 P 和 Q 是 Γ_α 中具有相同简单周期 A（关于 G_α）的紧邻周期线段。若 $|\mathrm{P}| \geq (2h_\alpha(A)+1)|A|$（其中 $h_\alpha(A)$ 的定义见 *12.12*），则 P 和 Q 属于同一条 A-周期线。

证明。 由命题 12.15 和 13.7 可得。 □

我们通过陈述一些技术性结论来结束本节，这些结论将在构造伯恩赛德群的关系时用到。我们用记号 $\mathrm{S} \lessapprox \mathrm{T}$ 表示“$\mathrm{S} < \mathrm{T}$ 或 $\mathrm{S} \approx \mathrm{T}$”。

13.14.**引理**。 设 S 和 T 是约化路径 X 中出现的粗略 A-周期线段。假设 S 和 T 存在某些标签相同的周期基。若 S 包含于 T，则 $\mathrm{S} \approx \mathrm{T}$。

证明。假设 S 包含于 T。令 P_i $(i = 1, 2)$ 分别为 S 和 T 的周期基，且 $\mathrm{label}(\mathrm{P}_1) = \mathrm{label}(\mathrm{P}_2)$。令 β 为 A 的活动秩。由命题 13.4，P_1 和 P_2 有一个公周期延拓。令 K_i 和 M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ 为秩 β 的片段，满足 $\mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{K}_i)\ \mu_{\mathrm{f}}(\mathrm{M}_i) \geq \xi_2$，使得 $\mathrm{P}_1 = \mathrm{K}_0 \cup \mathrm{K}_1, \mathrm{P}_2 = \mathrm{K}_2 \cup \mathrm{K}_3, \mathrm{S} = \mathrm{M}_0 \cup \mathrm{M}_1, \mathrm{T} = \mathrm{M}_2 \cup \mathrm{M}_3$，且对所有 i，$\mathrm{K}_i \sim \mathrm{M}_i$。我们有 $\mathrm{M}_2 \lesssim \mathrm{M}_0 \lessapprox \mathrm{M}_1 \lesssim \mathrm{M}_3$，由命题 13.4 可推出 $\mathrm{K}_2 \lesssim \mathrm{K}_0$ 和 $\mathrm{K}_1 \lesssim \mathrm{K}_3$。现在根据 $\mathrm{label}(\mathrm{P}_1) = \mathrm{label}(\mathrm{P}_2)$，可得 $\mathrm{K}_2 \sim \mathrm{K}_0$ 和 $\mathrm{K}_1 \sim \mathrm{K}_3$，，即 $\mathrm{S} \approx \mathrm{T}$。□

13.15. 引理。设 X 和 Y 是 Γ_α 中相近的约化路径。设 S_0, S_1 是 X 中粗略地具有 A 周期的线段，T_0, T_1 是 Y 中粗略地具有 A 周期的线段，并且 $\ell(S_i) \geq 2h_\alpha(A)+1$，对于 $i = 0, 1$，有 $S_i \approx T_i$ 和 $S_0 \not\sim S_1$。那么，$S_0 < S_1$ 当且仅当 $T_0 < T_1$。

证明。 根据推论 13.5，S_0 和 S_1 均不包含于另一个之中，T_0 和 T_1 也同样如此。不妨设 $\mathrm{S}_0 < \mathrm{S}_1$ 且 $\mathrm{T}_1 < \mathrm{T}_0$。设 X_1 和 Y_1 分别为 X 和 Y 的起始线段，并分别以 S_1 和 S_2 结尾。根据命题 12.14，取 $\mathrm{X} := \mathrm{X}_1$ 和 $\mathrm{Y} := \mathrm{Y}_1$，存在 Y_1 中的 U，使得 $\mathrm{U} \approx \mathrm{S}_0^*$，其中 S_0^* 是 S_0 的稳定部分。于是 $\mathrm{U} \cup \mathrm{T}_0$ 是一个包含 T_1 的、粗略地具有 A 周期的线段，这与推论 13.5 矛盾。□

13.16. **引理**。 设X 和Y 是 Γ_α 中的约化路径。设X 中$\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1$ 是粗略 A-周期线段，且Y 中 $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1$ 是粗略 A-周期线段，使得$\mathrm{S}_0 \lessapprox \mathrm{S}_1$, $\mathrm{T}_0 \lessapprox \mathrm{T}_1$ 且$\mathrm{S}_i \approx \mathrm{T}_i$，$i = 0$，$1$。

> ***(i)*** 设 U 是 X 中的粗略 A-周期线段，满足 $S_0 \lessapprox U \lessapprox S1$, $\ell_A(U) \geq h_\alpha(A)+1$，且 U 是 X 中某个其他粗略 A-周期线段的稳定部分。那么 Y 中存在粗略 A-周期线段 V，使得 $T_0 \lessapprox V \lessapprox T_1$ 且 $U \approx V$。***(ii)*** 设 U_i $(i = 1, 2)$ 是 X 中的粗略 A-周期线段，V_i $(i = 1, 2)$ 是 Y 中的粗略 A- 周期线段，并且 $\ell_A(U_i) \geq 2h_\alpha(A)+1$ $(i = 1, 2)$，$S_0 \lessapprox U_i \lessapprox S_1$，$T_0 \lessapprox V_i \lessapprox T_1$ 且 $U_i \approx V_i$，其中 $i = 1, 2$。假设对于某个 $g \in G_\alpha$，$U_2 \approx gU_1$，即 U_1 和 U_2 具有标签相同的周期基。那么 $U_1 \lessapprox U_2$ 当且仅当 $V_1 \lessapprox V_2$。

证明。 令 β 为 A的活动秩。

(i)：令 U 为 $\bar{\ }$ $\bar{\ }$U 和 $\mathrm{U} = \mathrm{Z}_1\mathrm{U}\mathrm{Z}_2$ 的稳定部分。我们考虑几种情况。

$\bar{\ }$情形 1：对于 $i = 0$，$\mathrm{U} \not\sim \mathrm{S}_i$，1。因此根据推论 13.5，我们有 $\mathrm{S}_0 < \mathrm{U} < \mathrm{S}_1$。由于 $\mathrm{S}_0 \cup \mathrm{S}_1$ 和 $\mathrm{T}_0 \cup \mathrm{T}_1$ 很接近，根据命题 12.14，V 的存在性得证。

情形 2：关系 $\mathrm{U} \sim \mathrm{S}_i$ $(i = 0, 1)$ 中恰有一个成立。不失一般性，$\bar{\ }$假设 $\mathrm{U} \sim \mathrm{S}_0$ 且 $\mathrm{U} \not\sim \mathrm{S}_1$。由推论 13.5 可知 $\mathrm{U} < \mathrm{S}_1$。若 $\mathrm{U} \approx \mathrm{S}_0$，则无需证明。假设 $\mathrm{U} \not\approx \mathrm{S}_0$，因此 UZ_2 包含于 $\mathrm{S}_0 \cup \mathrm{S}_1$ 中。

根据稳定部分的构造，UZ$_2$ 是一个粗略的 A-周期线段，且 ℓ_A(UZ$_2$) $=\ell$(U) $+h_\alpha(A)$ $\geq 2h_\alpha(A)+1$。令 W 为 UZ$_2$ 的稳定部分。利用命题 12.14，取 X $:=$ S$_0\cup$S$_1$、Y $:=$ T$_0\cup$T$_1$，可得 T$_0\cup$T$_1$ 中存在一个粗略的 A-周期线段 W′，使得 W $\approx$W′。根据命题 12.9(ii),

S$_0\cup$U 是一个粗略 A-周期线段，并且由于 W′ $\sim$T$_0$, T$_0\cup$W′ 也是一个粗略 A-周期线段。根据 12.10(iv)（更严格地说，根据 12.10(iv) 的对称版本），W 是 U 的末段，这意味着 S$_0\cup$U $\approx$ T$_0\cup$ W′。

现在令 P 为 U 的一个周期基。根据稳定部分的构造，P 以一个秩为 β、满足 μ_{f}(N) $\geq\xi_1$ 的片段 N 起始。由于 P 包含在 T$_0\cup$W′ 的一个周期基中，根据命题 10.23，我们在 T$_0\cup$W′ 中找到一个秩为 β 的片段 N′，使得 μ_{f}(N′) $\geq\xi_2$ 且 N′ $\sim$ N。那么，所需的 V 可以取为 T$_0\cup$W′ 中以 N′ 起始的末段。

情形 3：U $\sim$S$_0$ $\sim$S$_1$。那么，U 的一个周期基 P 包含在 S$_0\cup$S$_1$ 的一个周期基中。根据稳定部分的构造，P 以秩为 β、满足 μ_{f}(N$_i$) $\geq\xi_1$ 的片段 N$_0$ 起始，并以片段 N$_1$ 结束。然后，利用命题 10.23，我们在 T$_0\cup$T$_1$ 中找到秩为 β 的片段 N$_i'$($i=0,1$)，使得 μ_{f}(N$_i'$) $\geq\xi_2$ 且 N$_i'$ $\sim$ N$_i$($i=1,2$)。我们可以取 V $=$N$_0'\cup$N$_1'$。

(ii)：我们考虑两种情形。

情形 1：U$_1\sim$U$_2$。设 P$_1$ 和 P$_2$ 分别是 U$_1$ 和 U$_2$ 的周期基，且满足 label(P$_1$) $=$ label(P$_2$)，并且二者具有一个公共周期延拓。由命题 10.23(ii) 很容易得到，U$_1$ $<$U$_2$ $\Leftrightarrow$ P$_1$ $<$ P$_2$ 且 U$_1$ $\approx$ U$_2$ $\Leftrightarrow$ P$_1$ $=$ P$_2$。由于 P$_i$ 也是 V$_i$ 的一个周期基，对 V$_i$ 也有类似结论，这显然蕴含所需的结论。

情形 2：U$_1\not\sim$ U$_2$。不失一般性，我们假设 U$_1$ $<$ U$_2$, V$_1$ $>$ V$_2$，从而得到矛盾。我们还可以假设 X $=$ S$_0\cup$S$_1$, Y $=$ T$_0\cup$T$_1$，因此 X 和 Y 的秩接近 α。设 U$_i^*$ 和 V$_i^*$ 分别是 U$_i$ 和 V$_i$ 的稳定部分。根据推论 13.6，U$_1$ 与 U$_2^*$ 不相交。设 X $=$X$_1$U$_1$X$_2$U$_2^*$X$_3$，且 Y $=$ Y$_1$V$_2^*$Y$_2$V$_1$Y$_3$。由命题 12.14（其中 X $=$ X$_1$U$_1$X$_2$ 且 Y: $=$ Y$_1$）, 存在 Y$_1$ 中的一个粗 A-周期线段 W，使得 W $\approx$ U$_1^*$。于是 W $\sim$ U$_1\sim$ V$_1$，并由命题 12.9(ii) 和推论 13.5 得到 U$_1\sim$W $\sim$W $\cup$V$_1\sim$ V$_2\sim$ U$_2$,，这就是所需的矛盾。□

14. 比较相近词的 α-长度

本节证明以下命题。

14.1. **命题**。设 $X,Y\in\mathcal{R}_\alpha$ 秩接近 α。则

$$|Y|_\alpha<1.3|X|_\alpha+2.2.$$

回顾一下，秩为 α 的片段词 F 是在固定的关联词 S、u、v 以及秩为 α 的关系词 R 下考察的，并满足：$F=uSv$ 属于 $G_{\alpha-1}$、u、$v\in\mathcal{H}_{\alpha-1}$，且 S 是某个 $k>0$ 的子词。如果 F 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中标记为 F 的路径，那么这就唯一确定了 F 的基 S。

设 F 和 G 是字 X 中秩为 α 的片段。设 X 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中标记为 X 的路径，F、G 是 X 中对应的子路径。如果 F $\sim$G，我们记作 $F\sim G$（因此，该关系是针对 X 中 F 和 G 的出现形式正式定义的）。

回顾一下，秩 α 中字 X 的大小 $|X|_\alpha$，是其秩为 α 的分段 $\mathcal{F}$ 的权重$_\alpha(\mathcal{F})$可能取到的最小值。α 中 X 的秩为 $\mathcal{F}$ 的分段 $\mathcal{F}$ 是一种划分$X=F_1\cdot F_2\cdots F_k$，其中 F_i是秩为 $\beta\leq\alpha$的片段中的一个非空子词。假设每个 F_i 都被赋予一个唯一的 β值，那么 $\mathcal{F}$ 在秩 α 下的权重定义为公式

$$\mathrm{weight}_\alpha(\mathcal{F})=m_\alpha+\zeta m_{\alpha-1}+\zeta^2m_{\alpha-2}+\cdots+\zeta^\alpha m_0$$

其中 m_β 是 $\mathcal{F}$中秩为 β 的片段的子词数量。

如果权重$_\alpha(\mathcal{F}) = |X|_\alpha$，我们就称 $\mathcal{F}$ 为 X 的极小分段。

我们称秩为 $\beta \geq 1$ 的片段的子词 F 为秩为 β的截断片段。我们将假设，对于秩为 α 的截断片段 F，存在一个与之关联的秩为 β的真正片段 F，使得 F是 F的子词。若 F 是 Γ_α中的一条路径，且 label(F) $= F^-$ $^-$，则存在与之关联的 Γ_α 中的片段 F，使得 F 是 F 的子路径。注意，秩为 1 的截断片段就是秩为 1 的片段。

我们以下述自然方式将相容关系扩展到字 X 中秩为 β 的截断片段。若 F 和 G 分别是 X 和 F 中秩为 β 的截断片段，且 G^- $^-$是它们在 Γ_α 中秩为 β 的关联片段，则 $F \sim G$ 当且仅当 $F \sim G$。

14.2. 设 $\mathcal{F} = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_k$ 是秩为 α 的字 X 的一种分段。设 F_i 是 $\mathcal{F}$ 中秩为 $\beta \geq 1$ 的一个截断片段。假设 F_i 可以在 X 中扩展为一个更大的、秩为 β 的截断片段 G，即

$$X = F_1 F_2 \ldots F_p' F_p'' \ldots F_i \ldots F_q' F_q'' \ldots F_k$$

其中 $F_p = F_p' F_p''$、$F_q = F_q' F_q''$ 和 $G = F_p'' \ldots F_i \ldots F_q'$（这里考虑情形 $1 < i < k$；情形 $i = 1$ 和 $i = k$ 仅在记号上有所不同）。于是我们可以构造一个新的、秩为 α 的分段 $\mathcal{F}'$:

$X = F_1 \cdots F_{p-1} \cdot [F_p'] \cdot G \cdot [F_q''] \cdot F_{q+1} \cdots F_k$，其中方括号表示若为空，则省略 F_p' 和 F_q''。我们称 $\mathcal{F}'$ 是由 $\mathcal{F}$ 通过将 F_i 扩展至 G 得到的。注意，若 $\mathcal{F}$ 是极小的，那么在情形 $i > 1$ 下，必有 $p = i - 1$，且 F_p' 非空；在情形 $i < k$ 下，必有 $q = i + 1$，且 F_q'' 非空。

14.3. **引理**。设 $\mathcal{F} = F_1 \cdot F_2 \cdot \ldots \cdot F_k$ 是字 $X \in \mathcal{R}_\alpha$ 的一个秩为 $\alpha \geq 1$ 的极小碎片化。

(i) 设 F_i 是 $\mathcal{F}$ 中秩为 α 的一个截断片段。那么 $|F_i|_{\alpha-1} \geq \frac{1}{\zeta}$ 和 $F_i = uFv$，其中 F 是秩为 α 的片段，$F_i \sim F$，$|u|_{\alpha-1}$，$|v|_{\alpha-1} < \zeta$，且 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中对应片段 *F* 的基 *P* 满足 $|P|_{\alpha-1} > 13$。*(ii)* 若 K 是 X 中秩为 α 的一个片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 3\lambda + 15\omega$，则对于某个 i，有 $F_i \sim K$。*(iii)* 设 $X = P_0 K_1 P_1 \ldots K_r P_r$，其中 K_i 是秩为 α 的片段，且对所有 i，$\mu_{\mathrm{f}}(K_i) \geq 3\lambda + 13\omega$。那么存在 X 的另一个秩为 α 的极小碎片化 $\mathcal{F}'$，使得每个 K_i 都包含在 $\mathcal{F}'$ 中秩为 α 的一个相容截断片段内。

证明。(i) 如果 $|F_i|_{\alpha-1} < \frac{1}{\zeta}$，那么我们可以用其秩为 $\alpha - 1$ 的分段替换 F_i，从而降低 $\mathcal{F}$ 的权重。根据命题 9.21$_{\alpha-1}$，在 $\alpha \geq 2$ 的情形下（在 $\alpha = 1$ 的情形下，我们取 u 和 v 为空），有 $F_i = uFv$，其中 F 是一个秩为 α 的片段，$F_i \sim F$ 且 $|u|_{\alpha-1}$，$|v|_{\alpha-1} < \zeta$。若 F 是 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中相应的秩为 α 的片段，且 P 是 F 的基，那么根据命题 14.1$_{\alpha-1}$

$$|\mathsf{P}|_{\alpha-1} > \frac{1}{1.3}\left(\frac{1}{\zeta} - 2\zeta - 2.2\right) > 13.$$

(ii) 设 K 是 X 中一个秩为 α 的片段，且 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 3\lambda + 15\omega$。我们假设不存在秩为 α 的截断片段 F_i 使得 $F_i \sim K$。

根据命题 8.10 和假设，如果 H 是 K 与某个秩为 α 的 F_i 的公共部分，那么 H 不含任何满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K') \geq \lambda + 2.6\omega$ 的秩为 α 的片段 K'。根据引理 10.8，如果 H 是 K 与某个秩为 $\beta < \alpha$ 的 F_i 的公共部分，那么 H 不含任何片段 K'，其秩为

rank α，且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K') \geq 3.2\omega$。特别地， K 不包含在任何 F_i 中。Let

$X = F_1F_2 \dots F'_pF''_p \dots F'_qF''_q \dots F_k$ 其中 $F_p = F'_pF''_p$、 $F_q = F'_qF''_q$、 $K = F''_pF_{p+1} \dots F'_q$。如果某个 F_i 包含于 K 且秩为 α，那么根据上面的注和 14.2, K 至多由三个 F_j 覆盖。在这种情况下，根据命题 8.11，我们有

$$\mu_{\mathrm{f}}(K) \leq 3(\lambda + 2.6\omega) + 2\zeta\omega < 3\lambda + 15\omega$$

这与假设矛盾。因此，每个包含于 K 的 F_i 的秩都是 $\beta < \alpha$。现在根据命题 8.11, $F_pF_{p+1} \dots F_q$ 包含一个秩为 α 的片段 K'，满足

$$\mu_{\mathrm{f}}(K') \geq \mu_{\mathrm{f}}(K) - 2(\lambda + 2.6\omega) - 2\zeta\omega > 29\omega.$$

对于 K' 的一个基 P，有 $|P|_{\alpha-1} > 29$；根据命题 $14.1_{\alpha-1}$，有 $|K'|_{\alpha-1} > 20$。这意味着 $\mathrm{weight}_\alpha(F_p \cdot F_{p+1} \cdot \ldots \cdot F_q) > 1$，并且我们由此得到与 $\mathcal{F}$ 的极小性矛盾，因为可以用一个秩为 α 的截断片段替换 $\mathcal{F}$ 中的 $F_pF_{p+1} \dots F_q$。证明至此完成。

(iii) 由 (ii)，对于每个 $i = 1, 2, \dots, r$，存在一个秩为 α 的截断片段 F_{t_i}，位于 $\mathcal{F}$ 中，使得 $K_i \sim F_{t_i}$。命题 8.13 很容易推出， $F_{t_i} \cup K_i$ 是一个秩为 α 的截断片段。因此，对于每个 $i = 1, 2, \dots, r$，我们将 $\mathcal{F}$ 中的 F_{t_i} 替换为 $F_{t_i} \cup K_i$。由于我们没有增加 $\mathcal{F}$ 的权重 α，所得的 X 的分段 $\mathcal{F}'$ 也是极小的。□

14.4. **引理**。设 $\alpha \geq 1$ 和 X， $Y \in \mathcal{R}_\alpha$ 秩接近 $\alpha - 1$。那么

$$|Y|_\alpha < 1.3|X|_\alpha + 2.2\zeta.$$

证明。设 $\mathcal{F}$ 是 X 的一个极小分段。我们用近路径 X 和 Y 表示 X 和 Y，它们位于 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中。于是 $\mathcal{F}$ 诱导出 X 的一个划分，记作 $\mathcal{F}$，划分为秩为 $\leq \alpha$ 的（路径）截断片段。

Let

$$\mathsf{X} = \mathsf{P}_0\mathsf{H}_1\mathsf{P}_1 \dots \mathsf{H}_r\mathsf{P}_r$$

其中，$\mathsf{H}1, \dots, \mathsf{H}_r$ 都是 $\mathcal{F}$中秩为 α 的截断片段。若 $r = 0$，则 $|X|_\alpha = \zeta|X|_{\alpha-1}$, $|Y|_\alpha \leq \zeta|X|_{\alpha-1}$，结论直接由命题 $14.1_{\alpha-1}$得出。我们假设$r > 0$。由引理 14.3(i)，对每个 i，都有 $\mathsf{H}_i = \mathsf{u}_i\mathsf{H}'_i\mathsf{v}_i$，其中 H'_i 是秩为 α的片段，$\mathsf{H}'_i \sim \mathsf{H}_i$, $|\mathsf{u}|_{\alpha-1}, |\mathsf{v}|_{\alpha-1} < \zeta$，且 H_i 的基 S_i 满足 $|\mathsf{S}_i|_{\alpha-1} > 13$。利用命题 $10.16_{\alpha-1}$，我们找到分别位于 X 和 Y 中、秩为 α 的片段 H''_i 和 G_i，使得 $\mathsf{H}'_i = \mathsf{w}_i\mathsf{H}''_i\mathsf{z}_i$, $|\mathsf{w}_i|_{\alpha-1}, |\mathsf{z}_i|_{\alpha-1} < 1.15$，$\mathsf{H}_i \sim \mathsf{H}''_i \sim \mathsf{G}_i$，并且 H''_i 和 G_i 秩接近 $\alpha - 1$。在每次应用命题 $10.16_{\alpha-1}$ 后，利用引理 $10.13(\mathrm{i})_{\alpha-1}$，我们可以假设 G_i 互不相交，即

$$\mathsf{Y} = \mathsf{Q}_0\mathsf{G}_1\mathsf{Q}_1 \dots \mathsf{G}_r\mathsf{Q}_r.$$

由命题 $14.1_{\alpha-1}$ 可得

$$\begin{gathered}
|\mathsf{Q}_0|_{\alpha-1} < 1.3|\mathsf{P}_0\mathsf{u}_1\mathsf{w}_1|_{\alpha-1} + 2.2, \\
|\mathsf{Q}_i|_{\alpha-1} < 1.3|\mathsf{z}_i\mathsf{v}_i\mathsf{P}_i\mathsf{u}_{i+1}\mathsf{w}_{i+1}|_{\alpha-1} + 2.2 \quad (i = 1, \dots, r-1), \\
|\mathsf{Q}_k|_{\alpha-1} < 1.3|\mathsf{z}_k\mathsf{v}_k\mathsf{P}_k|_{\alpha-1} + 2.2.
\end{gathered}$$

我们还有

$$|X|_\alpha = r + \zeta\sum_{i=1}^{r} |\mathsf{P}_i|_{\alpha-1} \quad \text{and} \quad |Y|_\alpha \leq r + \zeta\sum_{i=1}^{r} |\mathsf{Q}_i|_{\alpha-1}.$$

Then

$$\begin{aligned}|Y|_\alpha &< r + 1.3\zeta \sum_{i=1}^{r} |\mathsf{P}_i|_{\alpha-1} + 1.3r\zeta(2.3 + 2\zeta) + 2.2\zeta(r+1) \\ &= (1 + 1.3\zeta(4.5 + 2\zeta))r + 1.3\zeta \sum_{i=1}^{r} |\mathsf{P}_i|_{\alpha-1} + 2.2\zeta \\ &< 1.3|X|_\alpha + 2.2\zeta.\end{aligned}$$

□

命题 *14.1* 的证明。设 X、$Y \in \mathcal{R}_\alpha$ 秩接近 α。设 $\mathcal{F}$ 是 X的一个极小片段化。我们考虑 Γ_α 中分别标记为 X 和 Y的近路径 X 和 Y。于是 $\mathcal{F}$将 X 划分为秩为 $\leq \alpha$的（路径）截断片段，

$$\mathsf{X} = \mathsf{F}_1 \cdot \mathsf{F}_2 \cdot \ldots \cdot \mathsf{F}_k.$$

设 $\mathsf{X}^{-1}\mathsf{u}\mathsf{Y}\mathsf{v}$ 是一个粗双边形。我们固定 u 和 v 的一些桥划分。设 Δ 是一个秩为 α 、边界环为 $\tilde{\mathsf{X}}^{-1}\tilde{\mathsf{u}}\tilde{\mathsf{Y}}\tilde{\mathsf{v}}$ 的填充图。经过对 u 和 v 进行切换，我们可以假设 Δ 是约化的，并且有一个由邻接子图组成的紧集 $\mathcal{T}$。令 D_1、.....、D_r 为 Δ中所有秩为 α 的胞腔。在构造 $\mathcal{T}$ 的过程中，我们假设首先选取 D_i 到 X^{-1} 的邻接$\tilde{}$子图，并使其在 X^{-1}中出现的邻接线段尽可能长。令

$$\mathsf{X} = \mathsf{P}_0\mathsf{K}_1\mathsf{P}_1 \ldots \mathsf{K}_r\mathsf{P}_r \quad \text{and} \quad \mathsf{Y} = \mathsf{Q}_0\mathsf{M}_1\mathsf{Q}_1 \ldots \mathsf{M}_r\mathsf{Q}_r.$$

其中 K_i 和 M_i 是 X 和 Y 中相应的秩为 α 的活跃片段。根据我们构造 $\mathcal{T}$ 的方式，以及命题 $9.21_{\alpha-1}$，在 $\alpha \geq 2$ 的情形下，我们有如下结论：

(*)对于所有 i，片段 K_i 不能在 $\mathsf{P}_{i-1}\mathsf{K}_i\mathsf{P}_i$ 中延伸。特别地，如果 F 是一个秩为 α 、包含于 $\mathsf{P}_{i-1}\mathsf{K}_i\mathsf{P}_i$ 且包含K_i 的截断片段，那么 $\mathsf{F} = \mathsf{w}_1\mathsf{K}_i\mathsf{w}_2$，其中 $|\mathsf{w}_i|_{\alpha-1} < \zeta\ (i = 1,2)$

由引理 14.3(iii)，我们可以假设每个 K_i 都包含在一个秩为 α 的相容截断片段 F^{t_i} 中。令

$$\mathsf{X} = \mathsf{P}'_0\mathsf{F}_{t_1}\mathsf{P}'_1 \ldots \mathsf{F}_{t_r}\mathsf{P}'_r.$$

注意

$$|X|_\alpha = r + \sum_i |\mathsf{P}'_i|_\alpha \quad \text{and} \quad |Y|_\alpha \leq r + \sum_i |\mathsf{Q}_i|_\alpha.$$

由 (*),

$$|\mathsf{P}'_i|_\alpha \geq |\mathsf{P}_i|_\alpha - \zeta^2 \text{ for } i = 0, r, \quad |\mathsf{P}'_i|_\alpha \geq |\mathsf{P}_i|_\alpha - 2\zeta^2 \text{ for } 1 \leq i \leq r-1.$$

因此

$$|X|_\alpha \geq r + \sum_i |\mathsf{P}_i|_\alpha - 2r\zeta^2. \tag{14-1}$$

我们给出 $|\mathsf{Q}_i|_\alpha$ 关于 $|\mathsf{P}_i|_\alpha$ 的一个上界。首先考虑情形 $1 \leq i \leq r-1$。根据从 $\mathcal{T}$ 出发的邻接子图是否存在（见图 38），由 D_i 和 $\mathsf{D}_{i+1}\tilde{}$ $\tilde{}$围成的 Δ 的子图，以及 D_i 和 D_{i+1} 到 X^{-1} 和 Y 的邻接子图，共有三种可能。注意，根据定义 6.12，$\Delta - \cup_{\Pi\in\mathcal{T}}$ 的所有连通分支都是秩为 $\alpha - 1$ 的小图，因此我们可以使用命题 $7.12_{\alpha-1}$ 中的界。在情形（a）和（b）下，我们有 $|\mathsf{Q}_i|_\alpha \leq 6\zeta^2\eta < 0.6\zeta$ 和 $|\mathsf{Q}_i|_\alpha \leq 4\zeta^2\eta <$

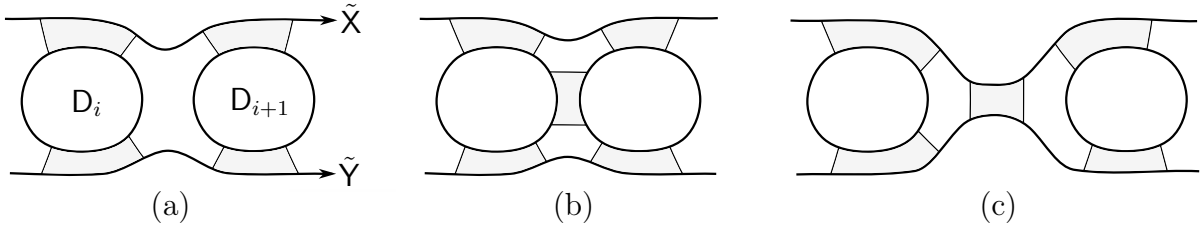

图 38。

0.4ζ 分别。假设情形（c）成立。那么 $P_i = u_1 S u_2$，且 $Q_i = v_1 T v_2$，其中 S 和 T 的秩接近 $\alpha - 1$，且 $|u_i|_\alpha$、$|v_i|_\alpha \le 4\zeta^2\eta < 0.4\zeta$。利用引理 14.4，我们得到

$$|Q_i|_\alpha < 1.3|P_i|_\alpha + 3\zeta$$

注意，该不等式在情形（a）和（b）中同样成立。

现在令 $i = 0$ 或 $i = r$。如果 $r > 0$，那么情形 $i = 0$ 与情形$1 \le i \le r-1$ 的区别在于，在 Y 与 ˜u 的中心弧之间还可以有一个额外的邻接子图（见图39）。于是我们有

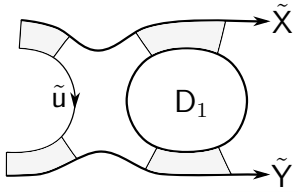

图39。

$$|Q_0|_\alpha < 1 + 1.3|P_0|_\alpha + 3\zeta$$

类似地,

$$|Q_r|_\alpha < 1 + 1.3|P_r|_\alpha + 3\zeta.$$

如果 $r = 0$，则我们只有一个界:

$$|Q_0|_\alpha < 2 + 1.3|P_0|_\alpha + 3\zeta.$$

综上，利用 (14-1) 可得

$$\begin{aligned} |Y|_\alpha &\le r + \gamma \sum_i |P_i|_\alpha + 2 + 3\zeta(r+1) \\ &= (1+3\zeta)r + 1.3\sum_i |P_i|_\alpha + 2 + 3\zeta \\ &< 1.3|X|_\alpha + 2.2. \end{aligned}$$

□

14.5.**推论。 </style]若 是秩为 的片段，且 (**$F) \ge t\omega$，则 $|F|_{\alpha-1} > \frac{1}{1.3}(t - 2.2)$。特别地，$|F| > \frac{1}{1.3}\zeta^{1-\alpha}(t - 2.2)$。

14.6. **推论。** 设 $Y = u_1X_1u_2X_2u_3$ 属于 Γ_α，其中 X_i，$Y \in \mathcal{R}_\alpha$ 且 $u_i \in \mathcal{H}_\alpha$。那么 $|Y|_\alpha \le 1.3(|X_1|_\alpha + |X_2|_\alpha) + 4.8$。

证明。 由命题 9.19(i) 和 14.1 得出。 □

以下两个陈述是在假设 G 的规范化表示 (2-1) 对所有 $\alpha \geq 1$ 都满足迭代小消去条件 (S0)–(S3) 的前提下证明的。因此，我们将假设从第 5 节开始的所有陈述对 α 的所有取值均成立。

14.7. **命题**。 设 W 是一个满足 $|W| \leq \alpha$ 的字，并设 $W = X$ 属于 G_α，其中 $X \in \mathcal{R}_\alpha$。那么，$|X|_\alpha < 0.3$, X 不包含秩为 $\beta > \alpha$ 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(F) \geq 3\omega$ 的片段 F，特别是 $X \in \cap_{\alpha \geq 1} \mathcal{R}_\alpha$。

由推论 14.5，只需证明 $|X|_\alpha < 0.3$。我们对 α 使用归纳法。若 $\alpha = 1$，则 X 是 W 的自由约化形式，且 $|X|_1 \leq \zeta|X| < 0.3$。设 $\alpha > 1$。设 $W = W_1 a$, $a \in \mathcal{A}^{\pm 1}$ 和 $W_1 = X_1$ 属于 $G_{\alpha-1}$，其中 $X_1 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$。由推论 14.5、归纳假设和命题 9.15，等式 $X = X_1 a$ 已在 $G_{\alpha-1}$ 中成立。由推论 14.$6_{\alpha-1}$

$$|X|_\alpha \leq \zeta|X|_{\alpha-1} \leq \zeta(1.3(0.3 + 0.3) + 4.8) < 0.3.$$

14.8.**推论**。 G 中的每个元素都可以表示为字 X，它在 G 中是约化的，并且对于某个 $\alpha \geq 1$，X 不含秩为 $\beta \geq \alpha$ 的片段 F，其中 $\mu_{\mathrm{f}}(F) \geq 3\omega$。

15. 伯恩赛德群的分级表示

本节将证明，对于充分大的奇数 n，伯恩赛德群 $B(m, n)$ 具有满足第 2 节中所阐述的迭代小消去条件的分级表示。

固定一个奇数 $n > 2000$。我们将构造如下形式的分级表示：

$$\langle \mathcal{A} \mid C^n = 1 \ (C \in \bigcup_{\alpha \geq 1} \mathcal{E}_\alpha) \rangle \tag{15-1}$$

其中所有秩为 α 的关系词都是 n 次幂。我们假设参数 λ 和 Ω 的取值如定理 3 所述，即：

$$\lambda = \frac{80}{n}, \quad \Omega = 0.25n.$$

我们还将使用以下额外参数：

$$p_0 = 39, \quad p_1 = p_0 + 26 = 65.$$

下面我们在假设对所有 $\beta \leq \alpha$ 都已定义集合 $\mathcal{E}_\beta$ 的前提下，定义集合 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$。我们固定秩 $\alpha \geq 0$ 的值，并假设表示（15-1）满足 2.8 和 2.9 中的小消去条件（S0）–（S3），且对于不超过 α 的所有秩值，均按照定义 2.10 的意义规范化。

因此，我们可以假设第 5–13 节中的所有陈述对于当前的 α 值及更低的值都成立。

根据命题 11.5 和 11.13，G_α 的每个无限阶元素都共轭于一个关于 G_α 的简单周期的幂。我们将把 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$ 定义为关于 G_α 的某个简单周期集合。这将自动推出条件（S0）：$\alpha := \alpha + 1$。

由于 n 是奇数，根据推论 13.11，我们还可得出 (S3) 对 $\alpha := \alpha + 1$ 成立。

在进入下一节的定义链之前，我们先对 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$ 表述以下两个条件 **(P1)** 和 **(P2)**（可以将它们视为秩 $\alpha := \alpha + 1$ 时 **(S1)** 和 **(S2)** 的“周期”版本）。

(P1) 对于每个 $A \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$、$[A]_\alpha \geq 0.25$。 **(P2)** 设 $\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$ 是 Γ_α 中的周期线，其周期分别为 A、$B \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$。假设 $\mathbf{L}_1$ 的一个子路径 P 与 $\mathbf{L}_2$ 的一个子路径 Q 接近，且 $|\mathrm{P}| \geq p_1|A|$。则 $\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$ 平行。

构造 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$ 的主要目标将是满足 **(P1)** 和 **(P2)**。注意，由于假设 $n > 2000$，**(P1)** 立即推出 $\alpha := \alpha + 1$ 的 **(S1)**。稍后我们将证明 **(P2)** 推出 $\text{(S2)}_{\alpha+1}$。（**(P2)** 与 $\text{(S2)}_{\alpha+1}$ 的区别在于，在 **(P2)** 中，我们按周期的数量来测度周期词，而在 $\text{(S2)}_{\alpha+1}$ 中，我们使用长度函数 $|\cdot|_\alpha$。适当的界将在命题 16.6 中给出。）

我们的第一步是定义一组在 G_α 上可能违反 **(P2)** 的简单周期（它们将在 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$ 的定义中被排除）。

15.1. 定义。若存在一个简单周期 B，它在 G_α 中不与 A 共轭，以及字 $P \in \mathrm{Per}(A)$ 和 $Q \in \mathrm{Per}(B)$，使得 P 和 Q 在 G_α 和 $|Q| \geq p_1|B|$ 中接近，则 A 上的简单周期是***0*** 级悬挂的 。

乍看之下，我们可以简单地通过从 G_α 上所有简单周期的集合中排除定义 15.1 中的周期 A 来定义 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$。然而，在这种情况下，我们无法保证 **(P1)** 中 $A \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$ 的 $[A]_\alpha$ 必要下界。粗略地说，我们需要断言，秩为 $\beta \leq \alpha$ 的片段只能覆盖周期为 $A \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$ 的周期词中“很小”的一部分；此外，当 β 减小时，我们需要对这部分的大小给出一个指数递减上界（参见 2.7 中函数 $|\cdot|_\alpha$ 的定义）。为此，我们扩大 $G_{\alpha+1}$ 上被排除的简单周期集合，加入这类可能“有问题”的示例。

15.2. 定义。若存在一个 G_α中与 A 不共轭的 B 阶数为 $m-1$ 的悬挂周期，以及一个具有 XQY 形式的约化 G_α 字，使得 $Q \in \mathrm{Per}(B)$、$|Q| \geq 4|B|$，且 XQY 在 G_α 中与一个$P \in$Per(A)的字接近，则称简单周期 A 在 G_α 上是第 $m \geq 1$ 阶悬置的。

15.3. 定义。令 $\mathcal{P}_\alpha$ 表示 G_α 上的所有简单周期的集合，$\mathcal{S}_\alpha$ 表示 G_α 上所有级别 $m \geq 0$的悬置简单周期的集合。对于 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$，我们取 $\mathcal{P}_\alpha \setminus \mathcal{S}_\alpha$ 中关于等价关系的等价类的任意一组代表元

$$A \sim B \Leftrightarrow A \text{ is conjugate to } B^{\pm 1} \text{ in } G_\alpha.$$

根据定义，$\mathcal{P}_\alpha \setminus \mathcal{S}_\alpha$ 中的 G_α 上任意简单周期在 $G_{\alpha+1}$中都具有有限阶。由于 $\mathcal{P}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{P}_\alpha$，可知 $G_{\alpha+1}$ 上的任意简单周期，特别是 $\beta \geq \alpha+1$ 对应的 $\mathcal{E}_\beta$ 中的任意字，都属于 $\mathcal{S}_\alpha$。因此，我们现在证明，秩为$\alpha+1$ 的片段无法覆盖一个具有 $G_{\alpha+1}$上简单周期 A 的大周期字。（诀窍就在这里：G_α 上级别为 $m \geq 1$ 的悬挂周期集合的定义满足未来 秩 $\alpha+1$的条件（P1）。）

15.4.注。根据构造，我们得到一个规范化表示（15-1）（见定义 2.10）。

15.5.**命题**。设 A 是 $G_{\alpha+1}$ 上的一个简单周期。如果一个 A-周期词 P 是秩为 $\alpha+1$ 的片段的子词，那么 $|P|<4|A|$。

证明。如上所述，$A\in\mathcal{S}_\alpha$。设 UPV 是一个秩为 $\alpha+1$ 的片段，其中 $P\in$Per(A)。那么，UPV 在 G_α 中接近一个字 $Q\in$Per(B)，其中 $B\in\mathcal{E}_{\alpha+1}$。由于 A 在 $G_{\alpha+1}$ 中是无限阶的，因此它不与 G_α 中的 B 共轭。在这种情况下，定义 15.2 表明，若 $|P|\geq 4|A|$，则 $B\in\mathcal{S}_\alpha$，这将与定义 15.3 矛盾。□

命题 15.5 中的 $\alpha:=\alpha-1$ 是证明 (P1) 的一个重要但不充分的要素。我们还需要确保：如果秩为 $\beta<\alpha$ 的片段的一个子词是某个 A-周期词的子词，且满足 $A\in\mathcal{E}_{\alpha+1}$，那么它相对于 $|A|$ 的长度会“随着 β 减小而呈指数级下降”。我们将在下一节通过证明粗略周期词具有某种层次包含性质，给出这一陈述的精确形式：在 G_α 上的粗略 A-周期词 S 含有 t 个两两不相交出现，每个出现都是 $G_{\alpha-1}$ 上的粗略周期词，且具有足够大的周期数；其中 t 大致等于 S 中 A 的周期数。

16. 粗周期词的层次包含

从这里开始，所有陈述均在如下假设下表述并证明：群 G 具有第 *15* 节中定义的特定表示（15-1）。本节的目标是证明关于 G_α 上悬挂周期的以下性质，并完成对表示（15-1）满足条件（S0）–（S3）这一事实的证明。与第 15 节一样，我们假定秩 $\alpha\geq 0$ 的值固定，并假定规范化表示（15-1）对不大于 α 的秩满足条件（S0）–（S3）；因此，对于不超过 α 的任意秩，我们都可以使用第 5–15 节中的所有陈述。

16.1.**命题**。设 A 是 G_α 上的悬挂周期。那么存在一个 G_α 上的简单周期 B，使得：

> ***(i)*** A 的一个循环移位包含一个 G_α 上粗略 B-周期词 T，且 $\ell_B(T)\geq p_0$。***(ii)*** 此外，这个子词 T 具有以下性质。设 ***S*** 是 Γ_α 中一个粗略 A-周期线段，且 ℓ_A***(S)*** ≥ 4。那么存在一个 A-周期基 ***P***（对应于 ***S***）、ℓ_A***(S)*** -3 个平移 ***T***、s_A***P T***, . . . , $s_A^{\ell(\mathsf{S})-4}$***P T***，它们是 ***P*** 中一个标签为 ***(T)*** $\equiv T$ 的粗略 B-周期线段 ***T*** 的平移；并且存在 ***S*** 中 ℓ_A***(S)***-3 个两两不相交的粗略 B-周期线段 V_i***(***$i=0$***, 1, . . . ,*** ℓ***(S)–4)***，使得对于所有 i，$V_i\approx s_A^i$***P T***。

我们从展示命题 16.$1_{\alpha-1}$ 如何在 $\alpha\geq 1$的情况下推出 (P1) 开始 .

16.2.**引理**。设 A 是 G_α 上的一个简单周期，并设 S 和 $\mathsf{V}_i\,(i=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ \ell_A(\mathsf{S})-4)$如命题 *16.*$1_{\alpha-1}$中所述。那么对于任意 i，$\mathsf{V}_i\cup\mathsf{V}_{i+4}$ 不包含在秩为 α的片段中。

证明。如命题 16.$1_{\alpha-1}$ 中所述，设 P 是 S 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中的一个 A-周期基，其中包含 $t-3$ 个平移 T、s_A、PT、. . .、s_A^{t-4}、PT，这里的 T 是一个具有另一周期 B 且满足 ℓ_B(T) $\geq p_0$ 的粗略周期线段。假设秩为 α 的片段 K 在 $\Gamma_{\alpha-1}$ 中包含 V_i 和 V_{i+4}。设 L 为 K 的基轴，则 L 是一条具有 $C\in\mathcal{E}_\alpha$ 的 C-周期直线。将 V_i^* 记为 V_i 的稳定部分，由命题 12.$14_{\alpha-1}$，可在 L 中找到 W 和 W′，使得 $\mathsf{W}\approx\mathsf{V}_i^*$ 且 $\mathsf{W}'\approx\mathsf{V}_{i+4}^*$。于是 $\mathsf{W}\cup\mathsf{W}'$ 与 s_A^i、$\mathsf{PT}^*\cup s_A^{i+4}$、$\mathsf{PT}^*$ 接近。由于 $A\in\mathcal{S}_{\alpha-1}$，根据定义 15.$2_{\alpha-1}$，这应当推出 $C\in\mathcal{S}_{\alpha-1}$，矛盾。□

16.3.**引理**。设 $\alpha \geq 1$。假设一个（线性或循环的）字 X 含有 r 个粗略 A-周期词 $U_i (i = 1, \ldots, r)$ 在 $G_{\alpha-1}$ 上的不相交出现，且 $\ell_A(U_i) \geq p_0$。则 $|X|_{\alpha-1} \geq 5r$。

证明。当 $\alpha = 1$ 时，结论显然成立。假设 $\alpha > 1$。

考虑 X 的一个秩为 $\alpha - 1$ 的分段 $\mathcal{F}$（定义 2.7）。设 $\mathcal{F}$ 中秩为 $\alpha-1$ 的片段的子词为 $S_1, \ldots, S_k$。根据命题 16.1$_{\alpha-1}$，每个 U_i 都包含 $p_0-3 = 36$ 个两两不相交的粗略 B- 周期词 $V_{i,j}$（$j = 1, \ldots, 36$），它们位于 $G_{\alpha-2}$ 上且具有 $\ell_B(V_{i,j}) \geq p_0$。我们可以假设 U_i 和 $V_{i,j}$ 按照从 X 中起始段到末段的自然次序编了指标。根据引理 16.2，每个 S_i 至多与 6 个连续的子词 $V_{i,j}, V_{i,j+1}, \ldots, V_{i,j+5}$ 相交。排除满足 $1 \leq j \leq 6$ 的 $V_{i,j}$ 后，我们得到每个 S_i 至多与其余 $V_{i,j}$ 中的 6 个相交。根据归纳法，我们得出

$$|X|_{\alpha-1} \geq k + 5\zeta \max\{0,\, 30r - 6k\}$$

固定 r 时，右侧的最小值在 $30r - 6k = 0$ 时取得。这给出了界 $|X|_{\alpha-1} \geq 5r$。□

我们证明 (P1) 的以下更强形式：

16.4.**命题**。对于任意简单周期 A，在 G_α 上我们有 $[A]_\alpha \geq 0.25$，因此，$h_\alpha(A) \leq 6$。

证明。如果 $\alpha = 0$，那么根据 $[\cdot]_0$ 的定义有 $[A]_0 \geq 1$。令 $\alpha \geq 1$。任取 $r \geq 1$。考虑循环词 $(A^r)^\circ$ 的一个秩为 α 的分段 $\mathcal{F}$。假设 $\mathcal{F}$ 由字 S_i、$i = 1$、2、……、N 组成，其中前 k 个是秩为 α 的片段的子词。由命题 15.5$_{\alpha-1}$，对于 $i = 1$、2、……、k，有 $|S_i| < 4|A|$。这意味着循环词 $(A^{r-4k})^\circ$ 可以划分为若干子词，而这些子词来自某个子集中的字；该子集包含剩余的 S_i、$i = k+1$、$k+2$、……、N。因此，

$$|(A^r)^\circ|_\alpha \geq k + \zeta |(A^{r-4k})^\circ|_{\alpha-1}.$$

命题 16.1$_{\alpha-1}$ 表明，$(A^{r-4k})^\circ$ 至少有 $r-4k$ 个不相交出现，其内容是定义在 $G_{\alpha-1}$ 上、具有 $\ell_B(K) \geq p_0$ 的粗略 B-周期词 K。于是由引理 16.3，

$$|(A^r)^\circ|_\alpha \geq k + 5\zeta(r - 4k) = 0.25r.$$

这对所有 $r \geq 1$ 都成立，因此由定义 12.12 可得 $[A]_\alpha \geq 0.25$，进而 $h_\alpha(A) \leq 6$。□

下面的引理是证明命题 16.1 的关键工具。粗略地说，它对应于如下陈述：“如果字 W 同时具有两个简单周期 A 和 B，且 $|W| \geq 2|A|$、$|W| \geq 2|B|$，那么 B 是 A 的一个循环移位”。

16.5. 引理. 设 L_0 和 L_1 是 Γ_α 中的周期线，其简单周期分别为 A 和 B，定义在 G_α 上。设 S 是 L_0 中的一个粗略 C-周期线段，其中 C 是定义在 G_α 上的另一个简单周期，$\ell_C(S) \geq 25$。假设存在粗略 C-周期线段 T_0, T_1, T_2，它们位于 L_1 中，并满足 $T_0 < T_1 < T_2$ 且 $T_i \approx s^i_A \llcorner_{L_0} S$，$i = 0, 1, 2$。

如果 $T_0 \lesssim s_B^{-1} \llcorner_{L_1} T_1$ 或 $s_B \llcorner_{L_1} T_1 \lesssim T_2$ 那么，实际上，$T_0 \approx s_B^{-1} \llcorner_{L_1} T_1$，$s_B \llcorner_{L_1} T_1 \approx T_2$，字 A 和 B 表示 G_α 的共轭元素，并且周期线 L_0 和 L_1 平行。

证明。记 $P_0 = S \cup s^2_A \llcorner_{L_0} S$ 和 $P_1 = T_0 \cup T_2$。令 S^* 和 T_i^* 为 S 和 T_i 的稳定部分。

关键论证与命题 13.4 的证明中的一个论证类似。记 $\mathcal{P}$ Γ_α 中所有粗略 C-周期线段 U 的集合，其中 $U \approx gS^*$，对某个 $g \in G_\alpha$ 均成立（即 U 和 S^* 的周期基具有相同的标签）。我们在粗略 C-周期线段 $U \in \mathcal{P}$ 的集合上引入平移和跳跃，这些线段出现在 P_0 或 P_1 中。与证明

命题 13.4 一样，考虑两组不相交的 $U \in \mathcal{P}$ 会很方便：它们分别出现在 P_0 和 P_1 中。（因此，形式上我们引入集合 $\mathcal{P}_i$ $(i = 0, 1)$，其中包含形如 (U, P_i) 的有序对，且 U 出现在 P_i 中；于是 $s_{A,\ \llcorner 0}^{i} S^*$ 属于 $\mathcal{P}_0$，而 T_i^* 属于 $\mathcal{P}_1$，其中 $i = 0$，1，2。对于粗略 C-周期线段 $U \in \mathcal{P}$，称“U 出现在 P_i 中”时，我们指的是对应的 $\mathcal{P}_i$ 元素。）设 U、$V \in \mathcal{P}$ 是粗略 C-周期线段，且各自出现在某个 P_i 中。

(i) 如果 U 和 V 出现在不同的路径 P_i 中，且 $U \approx V$，则 U 跳跃到 V。

(ii) 在以下情形中，U 平移到 V：U 和 V 出现在 P_0 中，且 $U \approx s_{A,\ \llcorner 0}^{k} V$，其中 $k \in \mathbb{Z}$；或者 U 和 V 出现在 P_1 中，且 $U \approx s_{B,\ \llcorner 1}^{k} V$，其中 $k \in \mathbb{Z}$。

令 $\mathcal{M}$ 为一组极大集合，其中的线段两两不（严格相容），且可从 S^* 经由这两种运算得到。引理 13.14 蕴含 $\mathcal{M}$ 是有限集。与命题 13.4 的证明相同，我们证明以下断言。

断言：在 $\mathcal{M}$ 内总是可以进行跳跃操作；也就是说，对于 $U \in \mathcal{M}$，其中 U 属于 P_i，$i \in \{0, 1\}$，存在 $V \in \mathcal{P}$，其中 V 属于 P_{1-i}，使得 $V \approx U$。

为证明该断言，我们将应用引理 13.1，并进行必要的准备工作。假设 $U \in \mathcal{M}$ 属于 P_0（另一种情形仅记号不同）。设 $V_0 = S^*, V_1, \ldots, V_l = U$ 是一列粗略 C-周期线段 $V_i \in \mathcal{M}$，使得 V_{i+1} 由 V_i 经由运算 (i) 或 (ii) 得到。我们可以假设 $V_{2j} \to V_{2j+1}$ 是平移，且 $V_{2j+1} \to V_{2j+2}$ 是跳跃，因此 $l = 2k-1$，其中 k。在此假设下，若 j 为偶数，则 $V_{2j} \to V_{2j+1}$ 是 P_0 内的平移；若 j 为奇数，则它是 P_1 内的平移。接着，我们定义一列路径 $Y_0, Y_1, \ldots, Y_k$，它们属于 Γ_α（Y_j 将是周期交替为 A 和 B 的周期线段）；并定义一列粗略 C-周期线段 $W_j \in \mathcal{P}$，它们属于 Y_j，其中 $j = 0, 1, \ldots, k-1$，使得 $W_0 = V_1$ 且 $W_i \approx W_0$ 对所有 i 均成立。对于每个 j，我们都有 $W_j = f_j V_{2j+1}$，其中 $f_j \in G_\alpha$。Y_j 和 f_j 的定义如下。

我们从 $Y_0 = P_0$ 和 $W_0 = V_1$，开始，因此 $f_0 = 1$。假设 $j < k-1$、Y_j 和 f_j 已经定义。对于偶数 j，V_{2j} 在 P_0，内平移到 V_{2j+1}，因此存在一个形如 $f_j s_A^t$、P_0 的 $f_{j+1} \in G_\alpha$，使得 $f_{j+1} V_{2j+1} \approx f_j V_{2j}$。于是，$f_i P_0$ 和 $f_{j+1} P_0$ 具有共同的 A-周期延拓，我们取 $Y_{j+1} = f_i P_0 \cup f_{j+1} P_0$。类似地，对于奇数 j，V_{2j} 在 P_1 内平移到 V_{2j+1}。我们取一个形如 $f_j s_B^t$、P_1 的 $f_{j+1} \in G_\alpha$，使得 $f_{j+1} V_{2j+1} \approx f_j V_{2j}$，并在 $f_i P_0$ 和 $f_{j+1} P_0$ 的共同 B-周期延拓内取 $Y_{j+1} = f_i P_0 \cup f_{j+1} P_0$。注意，$k$ 是奇数，因为假设 $V_{2k+1} = U$ 出现在 P_0 中。最后，我们令 $Y_k = f_{k-1} P_1$。

现在我们在以下情形中应用引理 13.1：

- S_j 是 Y_j 中所有粗略 C-周期线段 $V \in \mathcal{P}$ 的集合。
- S_j 按“$\lesssim$”预序。
- 等价关系为严格相容性。
- 若线段 $V \in \bigcup_j S_j$ 是 Y_j 中某个粗略 C-周期线段的稳定部分，则称 V 为稳定的。

- 对于 a_j、b_j、a'_j 和 b'_j，我们对 S^* 和 T_i^* 取适当的平移；具体而言，若 j 为偶数，则分别取 $f_j S^*$、$f_j s_{A,\ \llcorner 0}^{2} S^*$、$f_j T_0^*$ 和 $f_j T_2^*$；若 j 为奇数，则分别取 $f_j T_0^*$、$f_j T_2^*$、$f_j S^*$ 和 $f_j s_{A,\ \llcorner 0}^{2} S^*$。

- c_0 是 V_1。

注意，根据命题 16.4，我们有 $h_\alpha(C) \le 6$。因此，假设 $\ell_C(S) \ge 25$ implies$\ell_C(V) \ge 13 \ge 2h_\alpha(C)+1$ 对任意 $V \in \mathcal{P}$ 都成立。引理 13.1 的条件 (ii) 由引理 13.14 得证。引理 13.1 的条件 (iii) 和 (iv) 由引理 13.16 得证。由该引理，存在一个

粗略 C-周期的线段 $\mathsf{V}_k \in \mathcal{P}$ in $f_{k-1}\mathsf{P}_1$，使得 $\mathsf{V}_k \approx f_{k-1}\mathsf{U}$。这就得到了所需的跳跃 $\mathsf{U} \to f_{k-1}^{-1}\mathsf{V}_k$。断言得证。

令 r C $\in \mathcal{M}$ $\lessapprox$ $\gtrapprox$ 为粗略周期线段 V 的数量，使得且 s_{A,L_0} K V，K；并令 q C $\in \mathcal{M}$ $\lessapprox$ $\gtrapprox$ 为粗略周期线段 V 的数量，使得 T N s_{B,L_1} $\lessapprox$ $\gtrapprox$ r q C $\in \mathcal{M}$，T（换言之，和分别是一个周期 A 和一个周期 B 内粗略周期线段 V 的数量）。注意，$\gcd(r,q) = 1$，因为 $\mathcal{M}$ 由单个线段 S^* 生成。

我们首先假设 $\mathsf{T}_0 \lessapprox s_B^{-1}$，$\mathsf{L}_1\mathsf{T}_1$ 或 $s_{B,\mathsf{L}_1}\mathsf{T}_1 \lessapprox \mathsf{T}_2$。由于 $\mathcal{M}$ 对模等价平移‘≈’封闭，这些关系中的每一个都蕴含 $q \le r$，因而也蕴含另一个关系。令 $\mathsf{U}_0, \mathsf{U}_1, \ldots, \mathsf{U}_t$ 为 $\mathcal{M}$ 中属于 P_0 的所有粗略 C-周期线段，并按它们在 P_0 中的顺序排列（因此，U_i 构成了 $\mathcal{M}$ 中模‘≈’等价的粗略 C-周期线段的代表元集）。群 G_α 作用于集合 $\mathcal{P}/{\approx}$。由推论 13.9 可知，该作用是自由的。对于 U_i 的等价类 $[\mathsf{U}_i]$，我们有

$$s_{A,\mathsf{L}_0}[\mathsf{U}_i] = [\mathsf{U}_{i+r}],\ i = 0, 1, \ldots, t-r \quad s_{B,\mathsf{L}_1}[\mathsf{U}_i] = [\mathsf{U}_{i+q}],\ i = 0, 1, \ldots, t-q.$$

另请注意，$t \ge 2r + 1$。应用引理 13.2，我们得到 $s_{A,\mathsf{L}_0} = d^q$ 以及 $s_{B,\mathsf{L}_1} = d^r$，其中某个 $d \in G_\alpha$。由于 A 和 B 都是非幂，因此得到 $q = r = 1$，这立即推出命题的结论。

证明中还需考虑以下情形：$\mathsf{T}_0 \sim s_B^{-1}\mathsf{L}_1\mathsf{T}_1$ 以及 $s_{B,\mathsf{L}_1}\mathsf{T}_1 \sim \mathsf{T}_2$。我们考虑情形 $s_{B,\mathsf{L}_1}\mathsf{T}_1 \sim \mathsf{T}_2$（情形 $\mathsf{T}_0 \sim s_B^{-1}\mathsf{L}_1\mathsf{T}_1$ 与之对称）。根据已证明的部分，可以假设 $\mathsf{T}_2 \lessapprox s_{B,\mathsf{L}_1}\mathsf{T}_1$。我们证明该假设会导致矛盾。

我们有 $\mathsf{T}_0 \lessapprox s_B^{-1}\mathsf{L}_1\mathsf{T}_2 \lessapprox \mathsf{T}_1$,，因此存在 $\mathsf{T}_3 \in \mathcal{M}$，使得 $\mathsf{T}_3 \approx s_B^{-1}\mathsf{L}_1\mathsf{T}_2$。$\mathsf{T}_3$跳跃到 L_0 中的某个 $\mathsf{S}_3 \in \mathcal{M}$，使得 $\mathsf{S}_3 \sim$S且 $\mathsf{S}_3 \lessapprox \mathsf{S}$。随后 S_3 平移至 $\mathsf{S}_4 \approx s_{A,\mathsf{L}_0}\mathsf{S}_3$，并且有 $\mathsf{S}_4 \sim \mathsf{S}_2$ 以及 $\mathsf{S}_4 \lessapprox \mathsf{S}_2$。接着 S_4 跳跃到 L_1 中的某个 T_4，我们可以无限继续这一过程（见图 40）。□

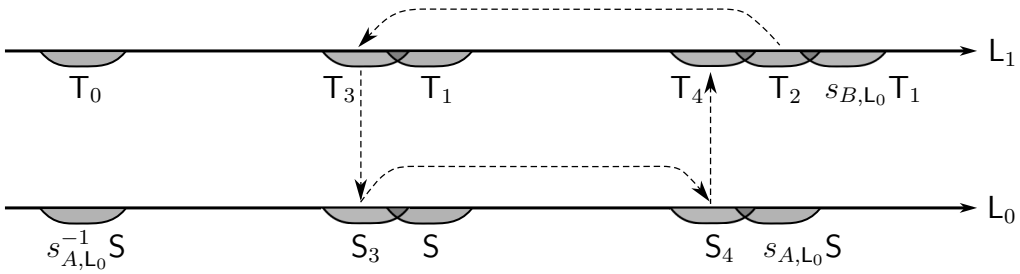

图 40。

命题 *16.1* 的证明。设 A 是一个位于 G_α之上的 m级悬挂周期，

先假设 $m = 0$。那么根据定义 15.1 和命题 12.15，G_α 中的一个 A-周期线段 ˆ ˆ R 包含一个粗略 B-周期线段 T，且 ℓ_B(T) $\ge p_1 - 2h_\alpha(B) - 2 \ge 51$ˆ ˆ ˆ，其中 B 在 G_α中不与 A 共轭。由引理 13.12 可得 T $\not\sim s_{A,\mathsf{R}}$T 且 |T| $< 2|A|$。ˆ 设 T 是 T 的稳定部分。由于根据定义 12.12 有 $h_\alpha(B) \ge 2$，由推论 13.6 可得 |T| $< |A|$。还要注意，ℓ_B(T) $\ge \ell_B$(T) $- 2h_\alpha(B) \ge p_0$。令 $T \coloneqq$ label(T)。我们证明 T 具有命题 16.1 中表述的所需性质 (ii)

设 S 是 Γ_α 中的粗略 A 周期线段，满足 ℓ_A(S) ≥ 4，并令 P 为 S 的一个周期基 ˆ。记 $t = \ell$(S)。由注 12.7 可假设 |P| $\ge t|A|$。通过放置 T

在 Γ_α 中，我们可以假设 P 包含 ˆT 的 $t-2$ 个平移：$s_{A,}$ ₚˆT，……，s_A^{t-3}，ₚˆT。利用引理 10.13(i)（它意味着严格相容的粗周期线段彼此接近）和命题 12.14，我们可在 S 中找到互不相交的 V_i $(i = 0, \ldots\ldots, t-3)$，使得 $V_i \approx s_{A,}^i$ ₚT。这就证明了 $m = 0$ 情形下的命题。

令 $m \geq 1$。证明分为两部分。首先，我们构造一个粗略B-周期线段 T，使其满足命题 16.1 的条件 (i)，然后证明 (ii)。

构造 T。根据定义 15.2，存在一列 $A_0, A_1, \ldots, A_m = A$，它们是 G_α 上的简单周期，其中 A_0 是 0 级悬挂的；对于每个 $i \leq m-1$ A_i，它都不与 A_{i+1} 共轭，并且在 G_α 中有约化的相近字 $X_iQ_iY_i$ 和 $P_{i+1} \in$Per(A_{i+1})，其中 $Q_i \in$ Per(A_i) 且 $|Q_i| \geq 4|A_i|$。对于每个 i，我们考虑对应的近路径 $X_iQ_iY_i$ 和 P_{i+1}，它们位于 Γ_α 中，并将它们放置成使 Q_i 和 P_i 具有共同的无限A_i-周期延拓 L_i。我们也将 Q_0 的无限 A_0-周期延拓记为 L_0。

如上所证，我们可以假设粗略 B-周期线段 T_0 的稳定部分 T_0^* 通过在 Q_0 上带有 $|T_0| < |A|$ 的稳定部分 T_0^* 在 L_0 中定位 T_0，不妨假设 Q_0 包含 T_0 的平移 $s_{A_0}^{-1}$,L_0T_0 和 s_{A_0},L_0T_0。下文中，如果 Z 是 Γ_α 中的一条粗略 B-周期线段，则 Z^* 表示 Z 的稳定部分。由引理 13.12，对任意 $t \neq 0$ 都有 $s_{A_0}^t$,$L_0T_0 \not\sim T_0$，从而 $s_{A_0}^{-1}$,$L_0T_0 \lesssim$ˆ$T_0 \lesssim s_{A_0}$,L_0T_0。由命题 12.14，存在 P_1 中的 $T_1, U_{1,1}$ 和 $W_{1,1}$，使得 $T_1 \approx T_0, U_{1,1} \approx s_{A_0}^{-1}$,$L_0T_0^*$ 和 $W_{1,1} \approx s_{A_0}$,$L_0T_0^*$。应用引理 16.5，取 $S := T_0^*$（注意 $\ell_B(T_0^*) \geq p_0 - 12 \geq 27$），得到 $s_{A_1}^{-1}$,$L_1T_1 \lesssim U_{1,1}$ 和 $W_{1,1} \lesssim s_{A_1}$,L_1T_1。特别地，我们有 $|T_1| \leq |A_1|$。在 $m = 1$ 的情况下，我们取 $T :=$ 标签(T_1)。

假设 $m \geq 2$。我们继续寻找粗略 B-周期线段 $T_i$in P_i 的过程。经过调整 Q_1 in L_1 的位置后，我们可以假设 Q_1 同时包含 $s_{A_1}^{-1}$,L_1T_1 和 s_{A_1},L_1T_1。利用命题 12.14，我们找到 $U_{2,2}$，$U_{2,1}$，$W_{2,1}$ 和 $W_{2,2}$ in P_2，使得 $U_{2,2} \approx s_{A_1}^{-1}$,$L_1T_1^*$, $U_{2,1} \approx U_1^*$,1, $W_{2,1} \approx W_1^*$,1 且 $W_{2,2} \approx s_{A_1}$,$L_1T_1^*$。由引理 13.15，$U_{2,2} \lesssim U_{2,1} \lesssim W_{2,1} \lesssim W_{2,2}$。我们有 $U_{2,1} \approx s_{A_0}^{-1}$,$L_0T_0^{**}$, $W_{2,1} \approx s_{A_0}$,$L_0T_0^{**}$，并再次利用命题 12.14，取 $X := s_{A_0}^{-1}$,$L_0T_0^{**} \cup s_{A_0}$,$L_0T_0^{**}$ 和 $Y :=$ $U_{2,1} \cup W_{2,1}$，从而找到 T_2in P_2，使得 $T_2 \approx T_0$。应用引理 16.5 得到 $s_{A_2}^{-1}$,$L_2T_2 \lesssim U_{2,2}$ 和 $W_{2,2} \lesssim s_{A_2}$,L_2T_2。特别地，$|T_2| \leq |A_2|$。

以类似的方式重复，我们在 P_m 中找到 $U_{m,m}$、$U_{m,m-1}$、$W_{m,m-1}$ 和 $W_{m,m}$，使得 $U_{m,m} \approx s_{A_{m-1}}^{-1}$、$L_{m-1}T_{m-1}^*$、$U_{m,m-1} \approx U_{m-1,m-1}^*$、$W_{m,m-1} \approx W_{m-1,m-1}^*$、$W_{m,m} \approx s_{A_{m-1}}$、$L_{m-1}T_{m-1}^*$ 以及 $U_{m,m} \lesssim U_{m,m-1} \lesssim W_{m,m-1} \lesssim W_{m,m}$。随后，我们依次找到 $U_{m,m-2}$、$W_{m,m-2}$、$U_{m,m-3}$、$W_{m,m-3}$、……、$U_{m,1}$、$W_{m,1}$，使得 $U_{m,i} \approx U_{i,i}^* \approx s_{A_{i-1}}^{-1}$、$L_{i-1}T_{i-1}^{**}$ 以及 $W_{m,i} \approx V_{i,i}^* \approx s_{A_{i-1}}$、$L_{i-1}T_{i-1}^{**}$。最后，我们在 P_m 中找到 T_m，使得 $T_m \approx T_0$。应用引理 16.5 得到 $s_{A_m}^{-1}$、$L_mT_m \lesssim U_{m,m}$ 以及 $W_{m,m} \lesssim s_{A_m}$、L_mT_m，这意味着 $|T_m| \leq |A_m|$。我们取$T :=$ label(T_m)。至此，构造完成。整个过程示意如图 41。注意，在 P_m 中我们有

$$s_{A_m,L_m}^{-1}T_m \lesssim U_{m,m} \lesssim U_{m,m-1} \lesssim \cdots \lesssim U_{m,1} \lesssim T_m \lesssim W_{m,1} \lesssim \cdots \lesssim W_{m,m} \lesssim s_{A_m,L_m}T_m.$$

（*ii*）的证明。设 S 是 A_m 中的粗略 Γ_α 周期线段，P 是 S 的一个周期基。记 $t = \ell_{A_m}(S)$。根据注 12.7，我们可以假设 $|P| \geq t|A|$，因此 P 包含 $t-1$ 一个粗略 B 周期线段 T 的平移 T、$s_{A,}$ ₚT、……、s_A^{t-2}，ₚT，其中 T 是上文构造的 T_m 的一个平移。根据命题 12.14，S 包含粗略 B 周期线段 Z_0, Z_1、……、Z_{t-2}，使得 $Z_i \approx s_{A,}^i$ ₚT*。此外，我们断言，对于 $1 \leq i \leq t-3$，存在 V_i

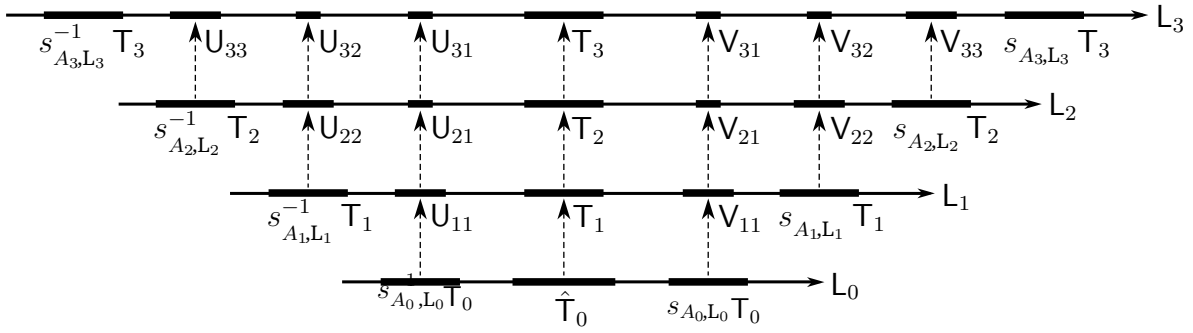

图 41.

在 S 中，使得 $\mathrm{V}_i \approx s^i_{A,}\ _{\mathrm{P}}\mathrm{T}$ 且 V_i 两两不相交。由于 $\ell_B(\mathrm{V}_i) = \ell_B(\mathrm{T}_m) \geq p_0$，这就完成了证明。

固定区间 $1 \leq i \leq t-3$ 内的一个指标 k。通过在 Γ_α 中适当放置 P 和 S，我们可以假设 P 和 P_m 具有共同的 A_m-周期延拓 L_m and$s^k_{A,\mathrm{P}}\mathrm{T} = \mathrm{T}_m$。由引理 16.5，$s^{-1}_{A_m,}\mathrm{L}_m\mathrm{T} \lesssim \mathrm{U}_{m,m}$ and $\mathrm{W}_{m,m} \lesssim s_{A_m,}\mathrm{L}_m\mathrm{T}$。然后按照上述过程，利用命题 12.14，依次找到配对 $(\mathrm{U}_i, \mathrm{W}_i)$，其中 $i = m, m-1, \ldots, 1$，使得 $\mathrm{Z}_{k-1} \lesssim \mathrm{U}_m \lesssim \mathrm{U}_{m-1} \lesssim \cdots \lesssim \mathrm{U}_1 \lesssim \mathrm{Z}_k \lesssim \mathrm{W}_1 \lesssim \cdots \lesssim \mathrm{W}_m \lesssim \mathrm{Z}_{k+1}$，且当 $i = m, m-1, \ldots, 1$ 时，$\mathrm{U}_i \approx \mathrm{U}^*_{i,i}$, $\mathrm{W}_i \approx \mathrm{W}^*_{i,i}$。然后再次利用命题 12.14，取 $\mathrm{X} := s^{-1}_{A_0,}\mathrm{L}_0\mathrm{T}^{**}_0 \cup s_{A_0,}\mathrm{L}_0\mathrm{T}^{**}_0$、$\mathrm{Y} := \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{W}_1$ 和 $\mathrm{S} = \hat{}\mathrm{T}_0$，得到 V_k，使得 $\mathrm{U}_1 \lesssim \mathrm{V}_k \lesssim \mathrm{W}_1$，且 $\mathrm{V}_k \approx \mathrm{T}_0 \approx s^k_{A,\mathrm{P}}\mathrm{T}$。证明完毕。□

16.6. **命题**。设 $A \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$ 和 $t \geq 1$ 为整数。设 P 为一个 A-周期词，且$|P| = t|A|$。那么

$$\frac{t}{n+t} < \mu(P) < \frac{t}{n-t} + \omega.$$

此外，对于 $t \geq 200$，我们还有

$$0.89\frac{t}{n} < \mu(P) < 1.12\frac{t}{n}.$$

证明。记 $N = |(A^n)^\circ|_\alpha$。回忆一下，$\mu(P) = |P|_\alpha/N$。对 A作循环移位后，不妨设 $P = A^t$。对于第一个不等式中 $\mu(P)$ 的下界，我们注意到，循环词 $(A^n)^\circ$ 可以由 $\lceil \frac{n}{t} \rceil$ 个 P的副本覆盖。由 4.14 可知，这意味着

$$N < \left(\frac{n}{t} + 1\right)|P|_\alpha$$

这等价于 $\frac{t}{n+t} < \mu(P)$。类似地，对于上界，我们注意到，可以将 $\lfloor \frac{n}{t} \rfloor$个互不相交的 P 副本放入 $(A^n)^\circ$中。再由 4.14 可得，

$$N \geq \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor (|P|_\alpha - 1) > \left(\frac{n}{t} - 1\right)(|P|_\alpha - 1)$$

由 (S1) 可得，其中 $\alpha := \alpha + 1$

$$\mu(P) < \frac{t}{n-t} + \frac{1}{N} \leq \frac{t}{n-t} + \omega.$$

如果 $t \geq 200$ 然后我们将 A^t 划分为 k 个子词 A^{t_i}，其中 $80 \leq t_i \leq 120$。我们有

$$\sum_i |A_{t_i}|_\alpha - (k-1) \leq |P|_\alpha \leq \sum_i |A_{t_i}|_\alpha.$$

并且根据已证明的关于 $\mu(A^{t_i})$ 的界，对每个 i，我们有

$$0.94\frac{t_i}{n} < \mu(A^{t_i}) < 1.07\frac{t_i}{n} + \frac{1}{N}.$$

Then

$$\mu(P) \geq \sum_i \mu(A^{t_i}) - \frac{k-1}{N} > 0.94\frac{t}{n} - \frac{k}{N}.$$

由命题 16.4，$N \geq 0.25n$。因此

$$\frac{k}{N} \leq \frac{t}{80}\left(\frac{n}{N}\right)\frac{1}{n} \leq 0.05\frac{t}{n}$$

于是我们得到所需的界 $\mu(P) > 0.89\frac{t}{n}$。类似地，对于 $\mu(P)$ 的上界，我们得到

$$\mu(P) \leq \sum_i \mu(A^{t_i}) < 1.07\frac{t}{n} + \frac{k}{N} \leq 1.12\frac{t}{n}.$$

□

16.7.**推论**。*(P2)* 蕴含 *(S2)*$_{\alpha+1}$。

证明。由命题 16.6，若 P 是 A^n 的一个子词，且 $A \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$，并且 $\mu(P) \geq \lambda$，则 $|P| \geq t|A|$，其中 t 满足

$$\frac{t}{n-t} \geq \lambda - \omega \geq \frac{1}{24} - \frac{1}{480}$$

因此 $t > 76$。由于 $76 > p_1$，所需的蕴含显而易见。 □

16.8.**命题**。表示 (15-1) 满足 *(P2)*，因此对于所有 $\alpha \geq 1$，均满足迭代小消去条件 *(S0)–(S3)*。

证明。事实上，设 $\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$ 是 Γ_α 中的周期线，其周期分别为 A、$B \in \mathcal{E}_{\alpha+1}$。设 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别是 $\mathbf{L}_1$ 和 $\mathbf{L}_2$, 的相近子路径，且 $|\mathbf{P}| \geq p_1|A|$。如果 A 在 G_α 中与 B 共轭，那么根据定义 15.3，$A = B$，结论由命题 13.13 得出。如果 A 在 G_α 中不与 B 共轭，那么 B 作为 G_α 上的简单周期，其 0 级被悬置，因此不可能属于 $\mathcal{E}_{\alpha+1}$。 □

从这一点起，我们可以假设第 5–16 节中的所有陈述对于秩 α的所有取值都成立。

16.9. **命题**。 G 中的每个元素都共轭于某个 $C \in \bigcup_{\alpha\geq 1} \mathcal{E}_\alpha$ 的一个幂。

证明。令 $g \in G$。若 g 有限阶，则根据命题 11.5，g 共轭于某个 $C \in \bigcup_{\alpha\geq 1} \mathcal{E}_\alpha$ 的一个幂。我们假设 g 无限阶，并导出矛盾。

由推论 14.8，我们将 g 表示为一个在 G 中约化的字 X，使得对于某个 $\alpha \geq 1$，X不含秩为 $\beta \geq \alpha$ 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(F) \geq 3\omega$ 的片段 F。根据我们的假设，对于 $\beta \geq \alpha$，X 在所有 G_β 中都具有无限阶。由命题 11.13 和 11.5，X 在 G_α 中共轭于形如 A^t 的一个字，其中 A 是关于 G_α 的简单周期。利用命题 7.13(iii)，我们得出结论：X 在 $G_{\alpha-1}$ 中已经共轭于 A^t。接着应用命题 8.9，取

$\beta := \alpha$、$\alpha+1$，.....我们看到，A 的任何循环移位都不含秩为 $\beta \geq \alpha$ 且满足 $\mu_{\mathrm{f}}(K) \geq 9\omega$ 的片段 K，并且对于所有 $\beta > \alpha$，A 在 G_β 中都是循环约化的。此外，由命题 8.16(iii) 和 8.11，对于所有 $\beta > \alpha$，A 在 G_β 中都是强循环约化的。

假设对于某个 $\beta \geq \alpha$，A 在 G_β 中与一个简单周期在 G_β上的幂 B^r 共轭。由命题 9.16，A 和 B^r 在 G_α中已经共轭。由于 A 在 G_α中是非幂，因此我们有 $r = 1$，进而由命题 11.13 和 11.5，A 在 G_β中是非幂。我们证明了对于任意 $\beta \geq \alpha$，A 都是 G_β 上的简单周期。但这是不可能的，因为由命题 16.4，我们应有 $|A|_\beta \geq 0.25$，因而对于任意$\beta \geq \alpha$，都有 $|A| \geq 0.25\zeta^{-\beta}$。□

由此立即得到：

16.10.**推论**。 G 满足恒等式 $x^n = 1$，因此同构于自由伯恩赛德群 $B(m, n)$。

参考文献

[1]W. Burnside. 关于不连续群理论中的一个未决问题。《数学季刊》，33:230–238，1902 年。[2] R. Coulon. 关于无挠双曲群的伯恩赛德商群的几何。《国际代数与计算杂志》，24(3):251–345，2014 年。[3] T. Delzant 和 M. Gromov. Courbure m´esoscopique et th´eorie de la toute petite simplification. 《拓扑学杂志》，1:894–836，2008 年。[4] S. V. Ivanov. 充分大指数的自由伯恩赛德群。《国际代数与计算杂志》，4(1-2):1–308，1994 年。[5] S. V. Ivanov 和 A. Yu. Ol'shanskii. 双曲群及其有界指数商群。《美国数学会汇刊》，348:2091–2138，1996 年。[6] R. Lyndon 和 P. Schupp.《组合群论》。数学经典丛书。Springer，2001 年。[7] Jr M. Hall. 指数六的伯恩赛德问题的解。《伊利诺伊数学杂志》，2:764–786，1958 年。[8] С. И. Адян. 伯恩赛德问题与群恒等式。Наука，Москва，1975 年。英文译本：S. I. Adian，《伯恩赛德问题与群恒等式》，《数学与相关领域成果》，95，Springer-Verlag，柏林–纽约，1979 年，ISBN：3-540-08728-1。[9]И. Г. Лысёнок. 偶周期的无限伯恩赛德群。《俄罗斯科学院通报：数学辑》，60(3):3–224，1996 年。英文译本：I. G. Lysenok，《偶指数的无限伯恩赛德群》，《数学消息》，60:3（1996），453–654。[10]И. Г. Лысёнок. 一种基于离散曲率概念研究有限定义群的方法。《数学札记》，103(4):568–575，2018 年。英文译本：《数学札记》，103:4（2018），610–615。[11] П. С. Новиков 和 С. И. Адян. 关于无限周期群。I–III。《苏联科学院通报：数学辑》，32:212–244；251–524；709–731，1968 年。英文译本：P. S. Novikov 和 S. I. Adian，《无限周期群》，I–III，《苏联数学通报》2（1968），209–236；241–479；665–685。[12] А. Ю. Ольшанский. 关于诺维科夫–阿迪安定理。《数学文集》，118(160)(2(6)):203–235，1982 年。英文译本：A. Yu. Ol'shanskiĭ，《关于诺维科夫–阿迪安定理》，《苏联数学文集》46:2（1983），203–236。[13] А. Ю. Ольшанский. 群中定义关系的几何。Наука，Москва，1989 年。英文译本：A. Yu. Ol'shanskiĭ，《群中定义关系的几何》，Kluwer，1991 年。[14] И. Н. Санов. 指数 4 的伯恩赛德问题的解。《列宁格勒大学学术札记：数学科学辑》，10:166–170，1940 年。 [I. N. Sanov，《指数 4 的伯恩赛德问题的解》，《列宁格勒国立大学学术札记：数学辑》，1940 年，第 10 期，166–170]。[15] В. А. Тартаковский. 关于具有 k-约化基的群的恒等式问题的解，其中 $k > 6$。《苏联科学院通报：数学辑》，13(6):483–494，1949 年。 [V. A. Tartakovskii，《具有 k-约化基的群的字问题的解，其中 k > 6，《苏联科学院通报：数学辑》13:6（1949），483–494]。