arXiv:2301.05003v1 [math.FA] 12 Jan 2023

秩一扰动与范数达到算子

´MINGU JUNG、GONZALO MARTINEZ-CERVANTES 和
ABRAHAM RUEDAZOCA

Abstract. 本文的主要目标是证明：对于每个（自反的）无限维巴拿赫空间 X，都存在一个自反巴拿赫空间 Y以及 $T, R \in \mathcal{L}(X,Y)$，使得 R 是一个秩一算子，$\|T+R\| > \|T\|$ 但 $T+R$ 不达到其范数。这回答了 S. Dantas 和前两位作者提出的一个问题。此外，受文献中由 V.A. Khatskevich、M.I. Ostrovskii 和 V.S. Shulman 引入的 V-性质与由 R.M. Aron、D. Garc´ıa、D. Pellegrino 和 E.V. Teixeira 引入的弱极大化性质之间所呈现的平行关系启发，我们还研究了这两种性质与算子的范数达到扰动之间的关系。

1. Introduction

给定实巴拿赫空间 X 和 Y，我们用 $\mathcal{L}(X,Y)$（分别地，$\mathcal{K}(X,Y)$）表示从X 到 Y的所有（有界线性）算子（分别地，紧算子）所组成的空间。当 $X = Y$时，我们简单记作 $\mathcal{L}(X)$（分别地，$\mathcal{K}(X)$）。通常，记号 B_X 和 S_X 分别表示 X 的闭单位球和 X的单位球面。

J. Lindenstrauss 的一个著名结果表明，如果 X 是自反的，那么对于每个巴拿赫空间 Y，每个算子 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$都可以由范数达到算子逼近。回顾一下，若某个 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$满足：对于某个 $x \in B_X$，有 $\|T\| = \|T(x)\|$，则称该算子为范数达到算子。事实上，J. Lin- denstrauss 证明存在一个紧算子 $K \in \mathcal{K}(X,Y)$，使得 $\|K\|$ 任意小，并且 $T+K$ 达到其范数（见 [8]中的定理 1 及其后评注），因此每个算子都可以由其自身的范数达到紧扰动逼近。

经典巴拿赫空间对往往满足更强的条件。具体来说，J. Kover [7] 证明，对于希尔伯特空间 H，如果算子 $T \in \mathcal{L}(H)$ 的一个紧扰动的范数严格大于 T的范数，那么该扰动就达到其范数；也就是说，如果 $\|T+K\| > \|T\|$ 其中$K \in \mathcal{K}(H)$，那么 $T+K$ 达到其范数。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 46B10, 46B20, 46B28.
Key words and phrases. 范数达到算子；紧扰动；自反性；弱极大化性质； V-对。

在继续介绍相关文献之前，我们先约定如下记号：若一对巴拿赫空间 (X, Y) 满足紧扰动性质（简称 CPP），则对任意 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 和 $K \in \mathcal{K}(X, Y)$，不等式 $\|T + K\| > \|T\|$ 意味着 $T + K$ 是范数达到的。注意，空间对 (X, Y) 具有 CPP，必然意味着定义域空间 X 是自反的。若空间对 (X, X) 具有 CPP，我们就说 X 具有 CPP。根据这一记号，Kover 的结果无非是说，每个希尔伯特空间都具有 CPP。

一大类具有 CPP 的巴拿赫空间对是 V-对。该类由文献 [6, 11] 引入并得到深入研究：若存在一个范数为一的算子 $S \in \mathcal{L}(Y, X)$，使得 TS 的谱半径与 $\|T\|$ 相同，则称有界线性算子 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为 V-算子。若 $\mathcal{L}(X, Y)$ 中的每个算子都是 V-算子，则称这一对 (X, Y) 为 V-对，或称其具有 V-性质。若 $X = Y$，则称 X 为 V-空间，或称其具有 V-性质。文献 [6, 的命题 5] 证明了，具有严格奇异隆起的算子是 V- 算子，当且仅当它能达到范数。因此，每个 V-对都满足 CPP。此外，定理 [6, 1] 将 Kover 的上述结果推广到了任意有限维空间序列 (X_n) 和 $1 < p < \infty$ 所对应的 $\ell_p(X_n)$。

不久前，R.M. Aron、D. Garc´ıa、D. Pellegrino 和 E.V. Teixeira [1]引入了另一种相关性质，即所谓的弱极大化性质。若一对巴拿赫空间 (X, Y) 满足如下条件，则称其具有弱极大化性质（简称 WMP）：从 X 到 Y 的每个算子，只要存在一个非弱零的极大化序列，就是范数达到的。注意，根据 [1, 命题 2.2] （另见 [12, 定理 1]），对于 $1 < p < \infty$、$1 \leqslant q < \infty$以及任意指标集 Γ_1、Γ_2，这对空间 $(\ell_p(\Gamma_1)\ \ell_q(\Gamma_2))$ 具有 WMP。此外，WMP 蕴含 CPP（ [1, 命题 2.4], ），这改进了 Kover 先前的结果。尽管存在具有 CPP 但不满足 WMP 的巴拿赫空间对（见 [2, 命题 3.6]），但对于一对自反巴拿赫空间，CPP 是否蕴含 WMP，似乎仍是一个开放问题（ [2, 问题 4.4]）。关于 WMP 的更多结果以及具有该性质的空间对的更多例子，请参阅 [2, 4]。

鉴于上述结果，自然会让人想知道每个自反巴拿赫空间 X 是否都具有 CPP。然而， [11, 定理 2] 中隐含地证明了，对于每个无限维巴拿赫空间 X，都存在一个等价范数 $|||\cdot|||$ 和一个秩一算子 $R\colon\ X \longrightarrow X$ 满足 $|||I + R||| > |||I|||$，但 $I + R$ 在 $\mathcal{L}((X, |||\cdot|||))$ 中无法达到其范数。特别地，$(X, |||\cdot|||)$ 不满足 CPP（参见命题 3.1）。

注意，如果巴拿赫空间 X 满足其中每个算子都在 $\mathcal{L}(X)$ 中范数达到，那么 X 显然具有 CPP。换言之，如果 X 不具有 CPP，那么在 X上存在一个范数不达到的算子。由 [11], 中刚提到的结果可知，对于任意无限维巴拿赫~空间 X，都存在一种对 X 的重新赋范 X，使得并非其中每个算子都

$\sim\mathcal{L}(X)$ 都范数达到。事实上，是否存在一个自反的无限维巴拿赫空间 X，使得其中每个算子都在 $\mathcal{L}(X)$ 中范数达到，似乎仍是一个开放问题（例如参见 [6, 问题 8]）。

本文的主要目标是证明，对于每个无限维空间 X，都存在一个自反巴拿赫空间 Y，使得数对 (X,Y) 不满足 CPP。具体而言，本文的主要定理如下。

定理 1.1. 设 X 是一个无限维自反巴拿赫空间。则存在一个自反巴拿赫空间 Y 以及 $T,R\in\mathcal{L}(X,Y)$，其中 R 是一个秩一算子，使得 $\|T+R\|>\|T\|$，但 $T+R$ 不达到其范数。特别地，数对 (X,Y) 不满足 CPP。

第 2 节旨在证明定理 1.1。我们最初受到 WMP 和 V-性质研究的启发，进而提出定理 1.1。文献中揭示了这两种性质之间深刻的平行关系；参见 [2, 4] 和 [6, 11]。然而，据我们所知，人们尚不清楚这两个概念之间的关联，而且常常一个性质相关的问题若尚未解决，另一个性质相关的问题也同样悬而未决。在 [2,问题 4.3] 中，提出了这样的问题：若一个自反巴拿赫空间 X 满足对于每个巴拿赫空间 Y，数对 (X,Y) 都具有 WMP，那么 X 是否必为有限维。我们想指出，据我们所知，若将 WMP 换成 CPP，同样的问题此前也悬而未决。

特别地，定理 1.1 对 [2, 问题 4.3] 给出了肯定的回答，并揭示了 WMP 与 V-性质之间的另一种共同表现。

注意到，WMP 和 V-性质蕴含 CPP。我们知道，WMP（因而 CPP）并不蕴含 V-性质（当 $1<p<q<\infty$ 时，数对 (ℓ_p,ℓ_q) 具有 WMP，但它不是一个 V-数对）。然而，我们不知道 V-性质是否蕴含 WMP。这种情况也促使我们研究上述所有性质。在第 3 节中，我们首先从 Ostrovskii 的论证 [11] 注意到，CPP 仍然是一个相当严格的性质：若无限维巴拿赫空间 X 具有 CPP，那么当 X 具有对称基时，它必须与某个 $1<p<\infty$ 等距同构于 ℓ_p（命题 3.1）。此外，我们看到，巴拿赫空间 X 与 Y 之间存在不达到范数的算子，会产生不满足 CPP 的巴拿赫空间对（命题 3.2）；因此，只要 $p>2$ 或 $q<2$，数对 $(L_p[0,1],L_q[0,1])$ 就不满足 CPP（推论 3.6）。我们还在命题 3.9 中推广了这样一个事实：当 $1<p<\infty$ 和 $1\leqslant q<\infty$ 时，数对 (ℓ_p,ℓ_q) 具有 WMP。最后，我们证明，若 Y 具有 Dunford-Pettis 性质，则数对 (X,Y) 具有 V-性质，当且仅当从 X 到 Y 的每个算子都达到范数（命题 3.10）；这涵盖了前文中的一些结果。

2. Proof of Theorem 1.1

正如我们在引言中所指出的，本节旨在证明定理 1.1。为此，我们将首先考虑由所有有界序列构成的巴拿赫空间 ℓ_∞，而不是自反空间。

定理 2.1. 设 X 是一个自反巴拿赫空间。若有序对 (X, ℓ_∞) 具有 CPP，则 X 是有限维的。也就是说，若 X 是无限维的，则存在 $S, R \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$，其中 R 是一个秩一算子，满足 $\|S + R\| > \|S\|$，但 $S + R$ 不达到其范数。

为了证明，我们需要一个关于 Fr´echet 可微点的几何性质引理。回顾一下，若点 $x \in S_X$ 是 X 的 Fr´echet 可微点，即范数 $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ 在 x 处 Fr´echet 可微。关于巴拿赫空间中的 Fr´echet 可微性背景，请参见 [3, 第 8] 章。

引理 2.2. 设 X 是一个巴拿赫空间。设 $x \in S_X$ 是 X 的 Fr´echet 可微点，且 (x_n) 是 B_X 中的一列点，满足 $\|x - x_n\| \to 2$。那么 $\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\| < 2$。

证明。由于 x是 Fr´echet 可微点，根据什穆利安引理 [3,引理 8.4]，存在 $f \in S_{X^*}$ 满足 $f(x) = 1$，并具有如下性质：对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得若 $g \in B_{X^*}$ 且$g(x) > 1 - \delta$，则 $\|g - f\| < \varepsilon$。

反设 $\limsup_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$。取一个子序列$(x_{n_k})$，使得 $\|x + x_{n_k}\| \to 2$。

固定 $\varepsilon > 0$，并取上文与 f 相对应的 $\delta > 0$，我们可以假设它满足 $\varepsilon < 1 - \delta$（注意，若 δ满足上述条件，则任意 $\delta' < \delta$也满足该条件）。

作为 $\|x - x_{n_k}\| \to 2$，我们可以选取 $k \in \mathbb{N}$使得 $\|x \pm x_{n_k}\| > 2 - \delta$。找出 $f^{\pm} \in B_{X^*}$使得 $f^{\pm}(x \pm x_{n_k}) > 2 - \delta$。这意味着 $f^{\pm}(x) > 1 - \delta$并且 $\pm f^{\pm}(x_{n_k}) > 1 - \delta$。

注意，一方面，$\|f^+ - f^-\| \geqslant (f^+ - f^-)(x_{n_k}) > 2(1 - \delta)$。另一方面，Smulyan 检验意味着 $\|f^+ - f^-\| < 2\varepsilon$，因此 $1 - \delta < \varepsilon$，矛盾。 ∎

定理 2.1 的证明。我们用反证法假设巴拿赫空间X 是无限维的。设 $x_0 \in S_X$ 是´的 Fréchet 可微点 B_X（这样的点存在，这是因为 X [3, 的自反性，推论 11.10]），并设 $x_0^* \in S_{X^*}$ 使得 $x_0^*(x_0) = 1$。

令 $Y := \ker(x_0^*)$。由于 Y 的余维为 1，我们得到 Y 是无限维的，因此约瑟夫森–尼森茨威格定理保证存在 S_{Y^*}中的弱*-零序列 (y_n^*)。对每个 $n \in \mathbb{N}$，根据哈恩–巴拿赫定理，取 y_n^* 的范数为 1 的延拓 $x_n^* \in S_{X^*}$。由于 $y_n^* \in S_{Y^*}$，我们可以找到 $x_n \in S_Y$，使得 $y_n^*(x_n) = 1$。特别地，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $x_n^*(x_n) = y_n^*(x_n) = 1$。

如果 $\|x_0 - x_n\| \to 2$，那么利用引理 2.2，我们有 $\limsup_{n\to\infty} \|x_0 + x_n\| < 2$.否则，取一个子序列后，我们可以假设 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 - x_n\| < 2$.因此，无论哪种情况，取一个子序列后，我们都可以假设 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 + x_n\| < 2$ 或 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 - x_n\| < 2$。取 $\epsilon \in \{-1, +1\}$，使得 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 + \epsilon x_n\| < 2$.

如有必要，再取一个子序列，我们可以假设 $(x_n^*(x_0))$ 收敛到某个 $\alpha \in \mathbb{R}$。由于 X 的每个元素都具有 $ax_0 + y$ 的形式，其中 $y \in Y = \ker(x_0^*)$，因此 $(x_n^* - \alpha x_0^*)$ 弱*-趋于零。

现在定义 $g_n := (1 - \epsilon\alpha)x_0^* + \epsilon x_n^*$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均如此。注意到

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} (1 - \epsilon\alpha)x_0^*(x_0) + \epsilon x_n^*(x_0) = 1 - \epsilon\alpha + \epsilon\alpha = 1.$$

此外，由于 $x_n \in Y = \ker(x_0^*)$，我们有 $x_0^*(x_n) = 0$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，因此

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\epsilon x_n) = \lim_{n\to\infty} (\epsilon(1 - \epsilon\alpha)x_0^*(x_n) + \epsilon^2 x_n^*(x_n)) = 1.$$

因此，

$$L := \limsup_{n\to\infty} \|g_n\| \geqslant \frac{\lim_{n\to\infty} g_n(x_0 + \epsilon x_n)}{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 + \epsilon x_n\|} = \frac{2}{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_0 + \epsilon x_n\|} > 1.$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，取 $v_n \in S_X$，使得 $g_n(v_n) > \|g_n\| - \frac{1}{n}$。取一个子序列 (g_{n_k})，满足 $\|g_{n_k}\| \to L$。注意，由于 $k \to \infty$，$g_{n_k}(v_{n_k}) \to L$。再取一个子序列，我们可以假设对每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $|g_{n_k}(v_{n_k}) - L| < \frac{1}{k}$。注意，对每个 $k \in \mathbb{N}$

$$L - \frac{1}{k} < g_{n_k}(v_{n_k}) \leqslant \|g_{n_k}\| \leqslant g_{n_k}(v_{n_k}) + \frac{1}{n_k} \leqslant g_{n_k}(v_{n_k}) + \frac{1}{k} < L + \frac{2}{k}.$$

这尤其表明 $\|g_{n_k}\| \neq 0$。对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\alpha_k := \|g_{n_k}\|^{-1}(L - \frac{1}{k})$；于是 $\alpha_k \in (0,1)$，并且由于 $k \to \infty$，有 $\alpha_k \to 1$。

通过方程定义 $T \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$

$$T(x) := (\alpha_k g_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$$

并注意到，由于对每个 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\alpha_k \|g_{n_k}\| = L - \frac{1}{k} < L$，因此 $\|T\| \leqslant L$。另一方面，注意到 $\|T(v_{n_k})\| \geqslant \alpha_k g_{n_k}(v_{n_k}) > \alpha_k(L - \frac{1}{k})$，这意味着 $\|T\| = L$。

我们断言，T 不能达到其范数。反设存在 $u_0 \in S_X$，使得 $\|T(u_0)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k g_{n_k}(u_0)| = L$。注意到

$$g_n = (1 - \epsilon\alpha)x_0^* + \epsilon x_n^* = x_0^* + \epsilon(x_n^* - \alpha x_0^*) \to x_0^*$$

在弱*-拓扑中，因为 $(x_n^* - \alpha x_0^*)$ 是弱*-零序列。因此 $g_n(u_0) \to x_0^*(u_0)$，并且由于 $|x_0^*(u_0)| \leqslant 1$，我们可以找到 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于 $k \geqslant k_0$，$|g_{n_k}(u_0)| < \frac{L+1}{2} < L$。这将意味着 $\|T\| = \max_{1\leqslant k\leqslant k_0-1} \{\alpha_k \|g_{n_k}(u_0)\|\} =$

L。然而，对于每个固定的 k， $\alpha_k\|g_{n_k}(u_0)\| \leqslant \alpha_k\|g_{n_k}\| = L - \frac{1}{k} < L$，这导致矛盾。

现在注意到

$$T(x) := (\alpha_k g_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}} = (\alpha_k(1-\epsilon\alpha)x_0^*(x) + \epsilon\alpha_k x_n^*(x))_{k\in\mathbb{N}} = R(x) + S(x),$$

其中 $S(x) = (\epsilon\alpha_k x_n^*(x))_{k\in\mathbb{N}}$且 $R(x) = (1-\epsilon\alpha)x_0^*(x)(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$是一个秩一算子，并且

$$\|S\| = 1 < \|S+R\| = \|T\| = L,$$

由此完成证明。 ∎

注记 2.3. 作为定理 2.1 的推论，若 X 是一个无限维自反巴拿赫空间，则有序对 (X, ℓ_∞) 既不具有 V-性质，也不具有 WMP。注意，定理 2.1 中的论证同样适用于有序对 (X, c)。也就是说，除非 X 是有限维的，否则 (X, c) 不具有 CPP。然而，对于任意自反巴拿赫空间，(X, c_0) 都具有 WMPX [2, 命题 3.6] ，尽管 c_0 和 c 同构。因此，CPP 不是一种同构性质。

现在证明，在定理 2.1 中，我们可以用一个合适的自反巴拿赫空间 Y 替换 ℓ_∞ 。

定理 1.1 的证明。由定理 2.1，存在 $T \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ 和 $K \in \mathcal{K}(X, \ell_\infty)$，使得 $\|T+K\| > \|T\| = 1$，而 $T+K$ 不达到其范数。实际上， K 可以选为一个秩一算子。考虑由以下公式给出的 $\widetilde{T}$和 $\widetilde{K}$，它们属于 $\mathcal{L}(X, \ell_\infty \oplus_\infty X)$:

$$\widetilde{T}(x) = (T(x), x), \quad \widetilde{K}(x) = (K(x), 0) \text{ for every } x \in X.$$

注意， $\|\widetilde{T}+\widetilde{K}\| = \|T+K\| > \|T\| = \|\widetilde{T}\|$, $\widetilde{K}$ 是一个秩一算子， 且 $\widetilde{T}+\widetilde{K}$ 不达到其范数。令 $Z := \text{span}\{\widetilde{T}(X) \cup \widetilde{K}(X)\} \subseteq \ell_\infty \oplus_\infty X$。注意到 $\widetilde{T}$ 具有闭值域，这意味着 $\widetilde{T}(X)$ 与 X的一个商空间同构；因此 $\widetilde{T}(X)$是自反的。由此可知， $Z = \text{span}\{\widetilde{T}(X) \cup \widetilde{K}(X)\} = \widetilde{T}(X) \oplus \widetilde{K}(X)$是一个自反巴拿赫空间，因为 $\widetilde{T}(X)$和 $\widetilde{K}(X)$ 都是自反的。将 $\widetilde{T}+\widetilde{K}$ 视为从 X到 Z的算子，我们得出结论：数对 (X, Z) 不满足 CPP。 ∎

3. WMP、V-性质与 CPP 之间的相互关系

本节旨在深入研究 WMP、 V-对和 CPP。正如引言中所述，众所周知，在上述所有性质中，CPP 是最弱的一种。然而，CPP 本身仍然限制性很强，下面的两个结果便说明了这一点。

值得一提的是，Ostrovskii [11, 定理 2] 证明，对于任意无限维巴拿赫空间 X，都存在一种对 X的重新赋范 $\widetilde{X}$ ，使得在 $\widetilde{X}$ 中存在一个到余维 1 子空间的投影，但该投影不达到其范数（特别是，其范数严格大于 1）。由此可得， $\widetilde{X}$ 不具有 CPP，因为存在一个

~定义在 X 上的秩一算子 Q，使得 $I_{\widetilde{X}} - Q$ 不达到其范数。他还证明，若 X 是具有对称基且满足V性质的巴拿赫空间，则 X 与某个 $1 < p < \infty$ [11, 等距同构 ℓ_p 3]定理。事实上，他的论证表明：若 X 是具有对称基且具有 CPP 的巴拿赫空间，则 X 与 ℓ_p等距同构。我们在下面的命题中总结这些评论。

命题 3.1. 设 X 是一个无限维巴拿赫空间。

~(1) 则存在 X 的一种重新赋范 X，使其不具有 CPP。(2) 若 X 具有对称基且具有 CPP，则对于某个 $1 < p < \infty$， X 与 ℓ_p 等距同构。

CPP 对一对空间 (X, Y) 施加的严格限制，在空间 X 和 Y 上还有另一种表现：由不达到范数的算子的存在性，我们总能找到一对不具有 CPP 的巴拿赫空间，具体如下。这是 [2, 主定理] 的一个类似结果。

命题 3.2. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，并假设存在一个不达到范数的算子 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$。那么，只要 $1 \leqslant q < p \leqslant \infty$，有序对 $(X \oplus_p \mathbb{R}, Y \oplus_q \mathbb{R})$ 就不具有 CPP。

证明。设 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 是一个不达到范数的算子，且 $\|T\| = 1$。~首先假设 $1 \leqslant q < p < \infty$。考虑由 ~$T(x, a) = (T(x), 0)$ 和 $R(x, a) = (0, a)$ 分别给出的 T, $R \in \mathcal{L}(X \oplus_p \mathbb{R}, Y \oplus_q \mathbb{R})$。显然， R是~紧的（实际上是有限秩的），并且 $\|T\| = \|T\|$。此外，根据 [2, 引理 2.1] 以及 [2, 主定理], 证明中的论证，我们有

$$\|\widetilde{T} + R\| = \sup\{((1 - t^p)^{q/p} + t^q)^{1/q} : t \in [0, 1]\} > 1 = \|\widetilde{T}\|,$$

其中使用了 $1 \leqslant q < p < \infty$ 这一假设。然而，不难~验证， $T + R$ 不具有范数达到性；因此，$(X \oplus_p \mathbb{R}, Y \oplus_q \mathbb{R})$ 这一对不满足 CPP。在 $p = \infty$ 的情况下，我们有 $\|\widetilde{T} + R\| = 2^{1/q} > 1 = \|T\|$，所以结论成立。 ∎

注3.3. 在相同假设下， [2, 主定理]指出，数对 $(X \oplus_\infty \mathbb{R}, Y)$ 不具有 WMP。然而，对于 CPP 情形，我们不能期望得到相同的结果。事实上，只要 X 是无限维巴拿赫空间 X [9, ，就存在一个从 X 到 c_0 的不达到范数的算子（引理 2.2], ）；而对于任意自反巴拿赫空间 X [2, ，(X, c_0) 都具有 CPP（命题 3.6]）。

注3.4. 注意，巴拿赫空间 Y 的 Schur性质意味着，对于每个自反空间 X，(X, Y) 都具有 CPP（事实上，它具有 WMP [2, 定理 3.5]）。然而，反过来并不成立，因为空间 c_0 不具有 Schur性质。

作为命题 3.2 的一个应用，只要 $p > 2$ 或 $q < 2$，数对 $(L_p[0, 1], L_q[0, 1])$ 就不满足 CPP。为验证这一点，我们需要下面这个引理；它是 [2, 命题 2.2] 和 [6, 命题 4] 关于 CPP 的一个版本。

引理 3.5. 设 X 和 Y 为巴拿赫空间。假设数对 (X, Y) 满足 CPP。那么对于任意子空间 $X_1 \subseteq X$ 和 $Y_1 \subseteq Y$，数对 $(X/X_1, Y_1)$ 满足 CPP。

证明。设 $\pi : X \to X/X_1$ 为典范商映射，ι 为从 Y_1 到 Y 的包含映射。假设 $T \in \mathcal{L}(X/X_1, Y_1)$ 和 $K \in \mathcal{K}(X/X_1, Y_1)$ 满足 $\|T+K\| > \|T\|$。那么显然 $\|\iota T\pi+\iota K\pi\| = \|T+K\| > \|T\| = \|\iota T\pi\|$。根据假设，扰动 $\iota T\pi + \iota K\pi$ 在某个 $x_0 \in B_X$ 处达到其范数。由此可知，$T + K$ 在 $\pi(x_0)$ 处达到其范数；因此，$(X/X_1, Y_1)$ 这一对具有 CPP。 ∎

仿照引理 3.5 的辅助下定理 3.2] 的证明，我们得到以下所需结果。

推论 3.6. 若 $p > 2$ 或 $q < 2$，则有序对 $(L_p[0, 1], L_q[0, 1])$ 不满足 CPP。

注意，具有 $1 < p < q < \infty$ 的有序对 (ℓ_p, ℓ_q) 满足 WMP（因此也满足 CPP），但它不是 V-对。我们不知道对于每一对巴拿赫空间，反向蕴含是否成立：

问题 3.7. 每个 V-对都满足 WMP 吗?

要证明每个 V-对都满足 WMP，一个自然的想法是尝试证明：每个具有非弱零极大化序列的 V-算子都达到范数。然而，下面的注记表明，存在具有非弱零极大化序列但不达到其范数的 V-算子。

注记 3.8. 令 $X = \ell_2 \oplus_\infty \mathbb{R}$。取一个不达到范数的算子 $T \in \widehat{\mathcal{L}}(\ell_2)$，使得 $\|T\| = 1$，并定义由 $T(x, a) = T(x)$ 给出的 $T \in \mathcal{L}(X, \ell_2)$。显然，$T$ 不达到其范数（该范数为一），且它有一个非弱零极大化序列（取 $((x_n, 1))$，其中 (x_n) 是 T 的一个极大化序列）。尽管如此，我们断言 T 是一个 V-算子。由于 T 是一个 V-算子，存在一个范数为一的算子 $B \in \mathcal{L}(\ell_2)$，使得 $TB - I$ 不是有界下方的。定义 $B \in \mathcal{L}(\ell_2, X)$，使得 $B(x) = (B(x), 0)$。显然，$TB - I$ 不是有界下方的，因此 T 是一个 V-算子，证毕。

尽管 T 是一个 V-算子，命题 3.2 表明，(X, ℓ_2) 不具有 CPP（因此，它不是一个 V-对）。

尽管在巴拿赫空间对 (X, Y) 上，WMP 和作为一个 V-对并非等价性质，但它们关系密切（例如，两者都蕴含 CPP）。因此，我们可以预期，某些对 V-对成立的结果也能转化为 WMP 版本，反之亦然。我们将在下面的命题中探讨这一点。

注意，对于 X 的每个 1-补子空间 X_1，只要 (X, Y) 具有 WMP（分别地，是一个 V-对），则 (X_1, Y) 也具有 WMP（分别地，是一个

V-对）（参见 [2, 命题 2.2], 分别地, [6, 命题 4]）。然而，对于定义域空间X的任意子空间，是否仍然如此尚不清楚。对此，以下结果推广了推论 3.8], 的 [4, (c)；作者在那里证明了当 $X=(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)_p$ 和 $Y=(\sum_{n=1}^{\infty}F_n)_q$，且 $\dim(E_n)$、$\dim(F_n)<\infty$、$1<p<\infty$ 和$1\leqslant q<\infty$ 时，配对 (X,Y) 具有 WMP。

命题 3.9。设 (E_n) 和 (F_n) 是有限维空间的序列。若 $X\subseteq(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)_p$ 且 $Y\subseteq(\sum_{n=1}^{\infty}F_n)_q$ 对于 $1<p<\infty$ 和$1\leqslant q<\infty$成立，则对 (X,Y) 有 WMP。

证明。证明思路源自 Ostrovskii 的 [11, 引理 1]。令 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$、$\|T\|=1$，并设 $(x_n)\subseteq S_X$ 是T的极大化序列。假设 (x_n) 弱收敛到 $x_0\neq 0$。我们旨在证明 T达到其范数。

情形 1：$1<p\leqslant q<\infty$。为简便起见，考虑 $\mathbb{R}^2$ 上由 $\|(a,b)\|_r:=(|a|^r+|b|^r)^{1/r}$ 对于 $1<r<\infty$ 给出的范数 $\|\cdot\|_r$。于是

(1) 对于 X 中的一个弱零序列 (w_n) 以及 $v\in X$，我们有

$$\|w_n+v\|=\|(\|w_n\|,\|v\|)\|_p+o(1)$$

(2) $\|(a,b)\|_r<\|(c,d)\|_r$ 若 $0\leqslant a\leqslant c$ 且 $0\leqslant b\leqslant d$，并且这些不等式中至少有一个是严格不等式。

令 $w_n=x_n-x_0$。则 (w_n) 是弱零的（因此，$(T(w_n))$ 在 Y 中是弱零的）；于是

$$\begin{aligned}\|T(x_n)\|=\|T(w_n)+T(x_0)\|&=\|(\|T(w_n)\|,\|T(x_0)\|)\|_q+o(1)\\&\leqslant\|(\|w_n\|,\|T(x_0)\|)\|_q+o(1).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\|T(x_n)\|=\|w_n+x_0\|+o(1)=\|(\|w_n\|,\|x_0\|)\|_p+o(1).$$

取一个子序列，$\|w_n\|\to\alpha$。因此，我们有

$$\|(\alpha,\|x_0\|)\|_p\leqslant\|(\alpha,\|T(x_0)\|)\|_q\leqslant\|(\alpha,\|T(x_0)\|)\|_p.$$

这表明 $\|T(x_0)\|=\|x_0\|$。由于 $x_0\neq 0$，我们得出 T 在 x_0 处取得其范数。

情形2：$1\leqslant q<p<\infty$。我们分别用 $\overline{\delta}_Z(t)$ 和 $\overline{\rho}_Z(t)$ 表示巴拿赫空间 Z 的 AUC模和 AUS模。由 [10, 定理 3.1] 可知

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_X(t)\leqslant\overline{\rho}_{(\sum_{n=1}^{\infty}E_n)_p}(t)&=(1+t^p)^{1/p}-1\\&<(1+t^q)^{1/q}-1=\overline{\delta}_{(\sum_{n=1}^{\infty}F_n)_q}(t)\leqslant\overline{\delta}_Y(t)\end{aligned}$$

对于 $0<t<1$。根据 [5, 命题 2.3], ，我们得出从X 到 Y 的每个算子都是紧算子；因此，T 能取到其范数。 ∎

正如我们从定理 2.1 和注记 2.3 中已经观察到的，数对 (X, c) 和 (X, ℓ_∞) 不可能是 V- 对（因为它们不具备 CPP ）。下述结果也涵盖了这种情况，因为 c 和 ℓ_∞ （一般而言， $C(K)$-空间）具有 Dunford-Pettis 性质。回顾一下，若巴拿赫空间 X 中每个从 X到任意巴拿赫空间的弱紧算子都是完全连续的，就称 X 具有 Dunford-Pettis 性质。

命题 3.10. 设 X 是一个巴拿赫空间， Y 是一个具有 Dunford-Pettis 性质的巴拿赫空间。若 (X, Y) 是一个 V-对，则 $\mathcal{L}(X, Y)$ 中的每个算子都范数达到。

证明。设 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 满足 $\|T\| = 1$。由于 (X, Y) 是一个 V-对，存在 $B \in \mathcal{L}(Y, X)$ 满足 $\|B\| = 1$，以及一个序列 $(y_n) \subseteq S_Y$，使得 $\|(TB - I)(y_n)\| \to 0$。由于 X 是自反的，取一个子序列后，我们可以假设 $(B(y_n))$ 弱收敛到某个 $x_0 \in B_X$。由此可得，$(TB(y_n))$ 在 Y 中弱收敛到 $T(x_0)$，进而推出 (y_n) 弱收敛到 $T(x_0)$。由于 Y 具有 Dunford-Pettis 性质， B 是完全连续的；因此 $(B(y_n))$ 在范数下收敛到 $BT(x_0)$。注意，此时 $(TB(y_n))$ 在范数下收敛到 $TBT(x_0)$；因此，(y_n) 在范数下收敛到 $TBT(x_0)$。这表明 $\|TBT(x_0)\| = 1$，且 T 在 x_0 处达到其范数。

■

不同于 WMP，由命题 3.10 可知，对于任意无限维巴拿赫空间 X，数对（X，c_0）都不是 V-对，这一事实强调了“WMP $\Rightarrow$ V-性质”这一蕴含关系是不成立的。

致谢。本文的研究始于作者于2022年6月在 IMAC Castell´on 逗留期间。作者对整个研究所深表感谢，尤其感谢 Sheldon Dantas 在此期间给予的热情接待。

Mingu Jung 获得了韩国高等研究院的 KIAS个人资助（MG086601）。最后两位作者还获得了 Agencia Estatal de Investigaci´on 和 EDRF/FEDER“创造欧洲的方式”（MCIN/AEI/10.13039/501100011033）的部分资助，资助项目为 PID2021-122126NB-C32 和 PID2021-122126NB-C31（Rueda Zoca）。Abraham Rueda Zoca 的研究还获得了 Junta de Andaluc´ıa 的 FQM-0185 和 PY20 00255 项目资助。

References

[1] R.M. Aron, D. García, D. Pellegrino, and E. V. Teixeira, *Reflexivity and non-weakly null maximizing sequences* **148** 2020 , 美国数学会会刊 ( ), 第 2 期, 741–750。[2] S. Dantas, M. Jung, and G. Martínez-Cervantes, *Some remarks on the weak maximizing property* **504** 2021 125433 , 数学分析与应用杂志 ( ), 文章编号 。[3] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, and V.Zizler, *Functional Analysis and Infinite dimensional Geometry*, CMS 数学丛书，施普林格出版社，纽约，2001年。[4] L.C. García-Lirola and C. Petitjean, *On the weak maximizing properties*, 班纳赫数学分析杂志 15, 55 (2021年)。

[5] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, and G. Schechtman, *Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between infinite-dimensional Banach spaces* **3** 84 711 746 2002 , 伦敦数学会会刊 ( ), –( ) [6] V.A. Khatskevich, M.I. Ostrovskii, and V.S. Shulman, *Extremal Problems for Operators in Banach Spaces Arising in the Study of Linear Operator Pencils*, 积分方程与算子理论 51 (2005), 109–119。[7] J. Kover, *Compact perturbations and norm-attaining operators*, 数学问题 28 (2005), 第 4 期, 401–408。[8] J. Lindenstrauss, *On operators which attain their norm*, 以色列数学杂志, 1 (1963), 139–144。[9] M. Martín, J. Merí, and R. Payá, *On the intrinsic and the spatial numerical range* **318** 2006 175 189 , 数学分析与应用杂志 ( ), –。[10] V.D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces II. Geometry of the unit ball*。数学科学进展 26 73–149 (1971)。[11] M.I. Ostrovskii, *Extremal Problems for Operators in Banach Spaces Arising in the Study of Linear Operator Pencils II* **51** 2005 , , 积分方程与算子理论 ( ), 553–564。[12] D. Pellegrino and E.V. Teixeira, *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces* **40** 2009 417 431 , 巴西数学会公报（新系列）( ), –。

(Jung) School of Mathematics, Korea Institute for Advanced Study, 02455Seoul, Republic of KoreaORCID: 0000-0003-2240-2855*Email address*: jmingoo@kias.re.kr*URL*: https://clemg.blog/

（G. Mart´ınez-Cervantes） Universidad de Alicante, Departamento de Matemáticas,Facultad de Ciencias, 03080 Alicante, Spain ORCID: 0000-0002-5927-5215*Email address*: gonzalo.martinez@ua.es

(RUEDA ZOCA) Universidad de Granada, Facultad de Ciencias. Departamentode Análisis Matemático, 18071-Granada, SpainORCID: 0000-0003-0718-1353*Email address*: abrahamrueda@ugr.es*URL*: https://arzenglish.wordpress.com