arXiv:2301.05005v1 [math.FA] 12 Jan 2023

双线性形式、舒尔乘子、完全有界性与对偶性

ERIK CHRISTENSEN

摘要。关于算子和双线性形式的格罗滕迪克不等式，给出了复数 $m \times n$ 矩阵的一些分解结果。基于算子空间和完全有界映射理论，我们给出这些结果的范数最优版本，以及两个与舒尔积相关的范数最优分解结果。我们证明，分别由双线性形式和舒尔乘子构成的空间，在完全有界范数意义下互为共轭对偶。

1. 引言与符号

一个复标量值 $m \times n$ 矩阵 X 在纯数学和应用数学中可以有许多不同的含义。本文将重点讨论 X 的四种不同解释

(i) 作为从 n 维阿贝尔 C*-代数 $\mathcal{A}_n := C(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{C})$ 到 m 维希尔伯特空间 $\mathbb{C}^m$. 的线性映射 F_X 的矩阵；(ii) 作为由以下方式给出的、定义在 C*-代数乘积 $\mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_n$ 上的双线性形式 B_X 的核

$$B_X(a, b) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)} a(i) b(j).$$

(iii) 作为一个线性映射 S_X，定义在 $(M_{(m\times n)}(\mathbb{C}) \ \|.\|_\infty)$ 上，由 X 的 Schur 乘法（即逐项乘法）所诱导，表示为

$$S_X(A)_{(i,j)} := X_{(i,j)} A_{(i,j)}.$$

日期：2023年1月13日。2010 数学主题分类。主要分类：15A23、46B25、46L07。次要分类：15A60、15A63、47A30、47L25。关键词与短语。格罗滕迪克不等式、矩阵因子分解、最小范数、Schur 积、完全有界、列范数、算子空间、对偶性。

(iv) 作为一个双线性映射 T_X，从 $\mathcal{A}_m \times M_{(m\times n)}(\mathbb{C})$ 映入希尔伯特空间 $\mathbb{C}^n$，定义为

$$T_X(a,B)_j := \sum_{i=1}^{m} a(i)X_{(i,j)}B_{(i,j)}.$$

前三种解释广为人知，且一个多世纪以来一直受到多方面的研究；但第四种解释则是我们在为本文做准备、研究前三种解释时得出的。我们所说的研究，基于对经典格罗滕迪克不等式与完全有界多重线性映射理论之间联系的深入考察。由此我们注意到，可以进一步完善现有的一些矩阵分解结果。现在我们不定义格罗滕迪克不等式或完全有界性这些概念，而是留待引言最后一部分再作说明。本文内容简述如下：考察上述标量矩阵的任意一种解释，然后运用我们最近关于完全有界多重线性映射的斯廷斯普林表示的唯一性结果[4]，得到矩阵 X 的最优分解；这表明，该特定算子的完全有界范数实际上就是作用于该矩阵的某个分解范数。接着注意，在情形 (i) 和 (ii) 中，格罗滕迪克不等式与算子空间理论蕴含完全有界范数不超过算子范数与格罗滕迪克常数的乘积。事实上，格罗滕迪克常数是适用于所有情形的最小正实数。

关于完全有界范数上界的著名估计，在情形（i）和（ii）中分别来自 Grot-hendiek 关于从阿贝尔 C*-代数到希尔伯特空间的映射的不等式，以及他关于一对阿贝尔 C*-代数上的双线性形式的不等式 [9], [19]。在第三种情形中，Smith 的工作 [22] 表明 Schur 乘子的范数等于其完全有界范数。在第四种情形中，我们的对偶性结果意味着完全有界范数等于范数。

分解结果的范数最优性基于这样一个事实：关于完全有界线性映射或多线性映射的斯廷斯普林表示包含了关于完全有界范数最优性的论述， [13], [5], [20], [14]。在我们看来，这意味着我们得到的所有范数最优分解结果都属于算子空间与完全有界

映射理论，而现有的分解结果则是 Grothendiek 基础性工作的推论 [9]。

为了明确表述我们得到的结果，还需要引入一些记号。我们用小写希腊字母表示希尔伯特空间中的向量，并用 $\|\xi\|_2$ 表示某个希尔伯特空间中向量 ξ 的范数。对于 $\mathbb{C}^n$ 中的向量 ξ，我们用 $\Delta_n(\xi)$ 表示 $M_n(\mathbb{C})$中的对角矩阵，其对角线元素为 ξ；用 $\xi_|$ 表示 $M_{(n,1)}(\mathbb{C})$中的列矩阵，其元素为 ξ_i；同样，用 ξ_- 表示 $M_{(1,n)}(\mathbb{C})$中的行矩阵，其元素来自 ξ. 。在某些情况下，表达式 $\xi_|$ 和 ξ_- 表示希尔伯特空间 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{C}^n$. 之间相应的算子。对于由标量构成的矩阵 T，我们用 $\|T\|_\infty$ 表示其算子范数，用 $\|T\|_2$表示其希尔伯特–施密特范数，定义为$\|T\|_2 = \left(\sum_i, _j |T_{(i,j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$。我们将使用一个重要事实：对于 $\mathbb{C}^n$ 中的向量 ξ，有$\|\xi\|_2 = \|\xi_|\|_\infty = \|\xi_-\|_\infty$. 。我们还需要介绍矩阵的列范数和行范数。对于标量矩阵 X，其列范数就是所有列的范数中的最大值，记为 $\|X\|_c$. 。根据矩阵乘积的定义可得 $\|X\|_c^2 = \|\mathrm{diag}(X^*X)\|$。 X 的行范数 $\|X\|_r$ 定义为 X^*的列范数，并且有 $\|X\|_r^2 = \|\mathrm{diag}(XX^*)\|$.

我们回到条目 (i)、...、(iv)，并令 r 表示 X 的秩，那么本文的结果可以表述为

$$
\begin{aligned}
(1.1)\quad (\mathrm{i}) \qquad & \exists \xi \in \mathbb{C}^n,\ \exists T \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) \\
& X = T\Delta_n(\xi), \\
& \|T\|_\infty \|\xi\|_2 = \|F_X\|_{cb} \leq k_G^{\mathbb{C}} \|F_X\|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ii}) \qquad & \exists \xi \in \mathbb{C}^n,\ \exists \eta \in \mathbb{C}^m,\ \exists T \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) \\
& X = \Delta_m(\eta)^* T \Delta_n(\xi), \\
& \|\eta\|_2 \|T\|_\infty \|\xi\|_2 = \|B_X\|_{cb} \leq K_G^{\mathbb{C}} \|B_X\|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{iii}) \qquad & \exists L \in M_{(r,m)}(\mathbb{C}),\ \exists R \in M_{(r,n)}(\mathbb{C}) \\
& X = L^* R,\ \mathrm{rank}(L) = \mathrm{rank}(R) = \mathrm{rank}(X) = r, \\
& \|L\|_c \|R\|_c = \|S_X\|_{cb} = \|S_X\|.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{iv}) \qquad & \exists \gamma \in \mathbb{C}^m \exists L \in M_{(r,m)}(\mathbb{C}),\ \exists R \in M_{(r,n)}(\mathbb{C}) \\
& X = \Delta_m(\gamma) L^* R,\ \mathrm{rank}(L) = \mathrm{rank}(R) = \mathrm{rank}(X) = r, \\
& \|\gamma\|_2 \|L\|_c \|R\|_c = \|T_X\|_{cb}.
\end{aligned}
$$

初看条目 (ii) 和 (iii)，看不出标量矩阵的两种解释之间有什么联系，但我们将说明，在某种意义上，这两个概念可以视为相对于 $M_{(m\times n)}$ 上由下式给出的内积而言互为对偶

$$\forall X, Y \in M_{(m\times n)}(\mathbb{C}) : \langle X, Y \rangle := \mathrm{Tr}_n(Y^* X).$$

条目 (i) 和 (iv) 之间也存在类似的关系，这就是为什么我们发现 T_X 矩阵 X. 的解释

本文着重运用算子空间与完全有界映射理论，这一主题如今已在文献中得到充分阐述 [8], [14], [17], [18]。Pisier 在这一研究领域作出了许多深刻而令人瞩目的贡献，其中相当一部分与本文的某些内容密切相关，举例而言，参见 [16], [17], [18], [20] 。分解方面的内容在 [17] 的第 3 章和第 5 章中以更抽象的方式进行了讨论，但我们并未试图找出那些结果与本文所述结果之间的确切联系。众所周知，Grothendieck 的原始论文 [9]包含了关于算子的结果，这些算子可以经由希尔伯特空间或交换含幺 C*-代数进行分解，但我们并未试图将这一普遍主题与我们的工作联系起来。另一方面，我们给出的基本结果依赖于 Grothendieck 的论文，而 Pisier 在

该论文 [19] 称之为综述。在综述 中，Grothendieck 给出了一个关于两个阿贝尔 C*-代数乘积上的双线性形式的分解结果，这一结果如今被称为格罗滕迪克不等式。 对这一不等式的一种改写表明，存在一个普适正常数 $K_G^{\mathbb{C}}$，使得任意双线性范数为$\|B_X\|$ 的复 $m \times n$ 矩阵都可以分解为

$$X = \Delta_m(\eta)^* T \Delta_n(\xi),\ \|\xi\|_2 = \|\eta\|_2 = 1,\ \|T\|_\infty \leq K_G^{\mathbb{C}} \|B_X\|, \tag{1.2}$$

X 的这一分解与 (1.1) 第 (ii) 项中描述的分解完全相同，唯一区别在于延拓 $\|T\|_\infty = \|B_X\|_{cb} \leq K_G^{\mathbb{C}} \|B_X\|$，因此，为了更加精确，我们将描述称为 完全有界 的概念。

设 φ 是某个希尔伯特空间 H 上算子构成的子空间 $\mathcal{S}$ 到某个希尔伯特空间 K 上的某个 $B(K)$ 的有界线性映射。如果存在一个正的 c，使得对任意自然数 k，映射 $\varphi_k := \varphi \otimes \mathrm{id}_{M_k(\mathbb{C})} : \mathcal{S} \otimes M_k(\mathbb{C}) \to B(H) \otimes M_k(\mathbb{C})$ 的范数不超过 c.，则称其为完全有界映射。若 φ 是完全有界的，则其完全有界范数 $\|\varphi\|$ 定义为范数 $\|\varphi_k\|$. 的上确界。在 [5] 中，完全有界性的概念以如下方式推广到希尔伯特空间上有界算子空间之间的多线性映射。对于定义在一对算子空间 $S_1 \subseteq B(K_1)$ 和 $S_2 \subseteq B(K_2)$ 的乘积上的有界双线性映射 $\Phi : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \to B(K)$，我们通过一个类似于矩阵乘法的公式定义 $\Phi_k : \big(\mathcal{S}_1 \otimes M_k(\mathbb{C})\big) \times \big(\mathcal{S}_2 \otimes M_k(\mathbb{C})\big) \to B(K) \otimes M_k(\mathbb{C})$。

$$\begin{aligned} &\forall A \in M_k(\mathcal{S}_1)\, \forall B \in M_k(\mathcal{S}_2)\, \forall i,j \in \{1,\dots,k\} : \\ &\Phi_k(A,B)_{(i,j)} := \sum_{l=1}^{k} \Phi(A_{(i,l)}, B_{(l,j)}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

在定理 2.1 的证明中，我们将看到方程 (1.2) 蕴含 $\|B_X\|_{cb} \leq K_G^{\mathbb{C}} \|B_X\|$.

Grothendieck 的综述 [9] 也表明，Grothendieck 不等式可用于描述那些作为 Schur 乘子的压缩算子复 $m \times n$ 矩阵。下述定理是 [9]的命题 7 的推论。

定理 1.1. </style}任意复矩阵都包含在由形式的标量矩阵构成的闭凸包中，其中($K_G^{\mathbb{C}})^{\frac{1}{2}} \|S_X\|^{\frac{1}{2}}$且 $|r_j| \leq (K_G^{\mathbb{C}})^{\frac{1}{2}} \|S_X\|^{\frac{1}{2}}$.

该定理在 [19] 中作为定理 3.2 提出，该文还包含证明、推广和历史注记。后来，该定理得到改进，形成了以下更精确的结果，将常数降低至

1. 存在某个希尔伯特空间单位球中的向量 ξ_j 和 η_i，使得 $X_{(i,j)} = \|S_X\| \langle \xi_j, \eta_i \rangle$. 本文提出了对这一分解的改进，将其改进为一个具有 $X = L^* R$的分解，使得 L 和 R 都是与 X秩相同的有限标量矩阵，并且 L 和 R 中所有列的范数都不超过 $\|S_X\|^{(1/2)}$. 。这一分解很容易从关于完全有界映射的现有文献中得到，参见 [14] 定理 8.7 (iii)；不过，关于 L 和 R的秩的表述似乎此前未曾受到注意。

第 2 节中，我们将详细证明摘要中提及并在上文讨论的关于最优分解的结果。

在第 3 节中，我们证明，$m \times n$复矩阵中的紧凸集 $\mathcal{CB}_{(m,n)} := \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|B_X\|_{cb} \leq 1\}$ 和 $\mathcal{CS}_{(m,n)} := \{Y \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|S_Y\| \leq 1\}$ 关于内积 $\mathrm{Tr}(Y^* X)$互为极集。我们还将证明，集合 $\mathcal{CF}_{(m,n)} := \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|F_X\|_{cb} \leq 1\}$的极集等于集合 $\mathcal{CT}_{(m,n)} := \{Y \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|T_Y\|_{cb} \leq 1\}$.

2. 分解

首先，我们将一个复 $m \times n$ 矩阵 X 视为从 $\mathcal{A}_n$ 到 $\mathbb{C}^m$. 的线性映射 F_X 的核。映射 F_X 并不直接映入算子空间，但算子空间 $M_{(m,1)}(\mathbb{C})$与 $\mathbb{C}^m$ 等距同构，因此自然地具有算子空间结构。在本文余下部分，我们将假设 F_X 是定义在 C*-代数$\mathcal{A}_n$ 上、像落在 $M_{(m,1)}(\mathbb{C})$中的算子，而后者是 C*-代数 $M_m(\mathbb{C})$的一个子空间。我们将首先证明，F_X 关于这一算子空间结构是完全有界的，然后为该映射找出两种自然的斯廷斯普林表示，从而得到分解结果。

定理 2.1。对于任意 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，映射 $F_X : \mathcal{A}_n \to M_{(m,1)}(\mathbb{C})$ 满足 $\|F_X\|_{cb} \leq k_G^{\mathbb{C}} \|F_X\|$.
存在一个单位向量 ξ 属于 $\mathbb{C}^n$，以及一个矩阵 C 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $\|C\|_\infty = \|F_X\|_{cb}$ 且 $X = C\Delta_n(\xi)$。
可以如下得到一个范数最优 *Stinespring* 表示：$F_X(A) = C\Delta_n(A)\xi_|$.

证明。众所周知，经典的小 *Grothendieck* 不等式 意味着存在一个单位向量 ξ，属于 $\mathbb{C}^n$，以及一个矩阵 C，属于$M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $X = C\Delta_n(\xi)$，且 $\|C\|_\infty \leq k_G^{\mathbb{C}} \|F_X\|$. 。于是我们可以写成

$$\forall a \in \mathcal{A}_n : \quad F_X(a) = C\Delta_n(a)\xi_|.$$

我们回顾一下， $\xi_|$ 有时表示 $M_{(n,1)}(\mathbb{C})$中的一个矩阵，有时表示 $B(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$中的一个算子。在这个方程中，它表示一个算子，而我们已经得到了 F_X 的斯廷斯普林表示，这证明了定理的第一条结论。现在我们将保留刚才得到的斯廷斯普林表示，并再构造另外两个表示。我们知道，F_X 存在一个范数最优且极小的斯廷斯普林表示，下面将其记为：

$$\forall a \in \mathcal{A}_n : \quad F_X(a) = W^* \gamma(a) V, \tag{2.1}$$

使得 γ 是 $\mathcal{A}_n$ 在希尔伯特空间 K上的一个表示， V 属于$B(\mathbb{C}, K)$，且 W属于 $B(\mathbb{C}^m, K)$，并且 $\|W\|\|V\| = \|F_X\|_{cb}$. 这就是最优性，而极小性意味着 K = 张成空间$(\{\gamma(a)V1 : a \in \mathcal{A}_n\})$。并且 K = 张成空间$(\{\gamma(a)W\eta : a \in \mathcal{A}_n, \eta \in \mathbb{C}^m\})$。我们将向量 Ω_n 定义为 $\mathbb{C}^n$ 中的向量，其所有分量均为 1。于是，我们可以通过以下方式得到 F_X 的一个斯廷斯普林表示。

$$\forall a \in \mathcal{A}_n : \quad F_X(a) = X \Delta_n(a) (\Omega_n)_|. \tag{2.2}$$

除非张成空间$(\{\Delta_n(a) X^* \eta : a \in \mathcal{A}_n, \eta \in \mathbb{C}^m\})$不等于 $\mathbb{C}^n$.，否则这个斯廷斯普林表示是极小的。因此，当且仅当 X 中的所有列均非零时，我们才有一个极小表示。显然，假设 X 中的每一列都非零并无损一般性；在此假设下，(2.2)中的斯廷斯普林表示是极小的。由 [4] 可知，$\mathcal{A}_n$的表示 γ 和 Δ_n 酉等价，因此我们不妨假设(2.1)中的希尔伯特空间 K 等于 $\mathbb{C}^n$，且 $\gamma = \Delta_n$，于是

$$X \Delta_n(a) (\Omega_n)_| = W^* \Delta_n(a) V.$$

定义向量 ξ 属于 $\mathbb{C}^n$ 为 $\xi := V1$，则 $\|\xi\|_2 = \|V\|$，由初等代数可知 $X = W^* \Delta_n(\xi)$，因此定理得证 □

前一个定理是单边的，原因在于线性映射的核通常写在自变量的左侧。因此需要作出如下定义。

定义 2.2. 设 X 是一个标量 $m \times n$ 矩阵，则 G_X 定义为从 $\mathcal{A}_m$ 到 $M_{(1,n)}(\mathbb{C})$ 的线性映射，由下式给出

$$\forall a \in \mathcal{A}_m. \quad G_X(a) := a_X.$$

对于自伴算子空间之间的完全有界映射 T，可以将 $T^\#$ 定义为相同空间之间的完全有界算子，其完全有界范数为 $\|T^\#\|_{cb} = \|T\|_{cb}$，满足方程 $T^\#(y) := (T(y^*))^*$. 。很容易看出，对于一个 $m \times n$矩阵 X，我们有 $(F_{X^*})^\# = G_X$.。基于此，我们将定理 2.1 应用于 X^*，得到分解 $X^* = D^* \Delta_n(\eta)^*$

使得 $\|D^*\|_\infty\|\eta\|_2 = \|F_{X^*}\|_{cb} = \|G_X\|_{cb}$，由此我们证明了以下定理。

定理 2.3。对于任意 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，映射 $G_X: \mathcal{A}_m \to M_{(1,n)}(\mathbb{C})$ 满足 $\|G_X\|_{cb} \le k_G^{\mathbb{C}}\|G_X\|$.
存在一个单位向量 η 属于 $\mathbb{C}^m$ 以及一个矩阵 D 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $\|D\|_\infty = \|G_X\|_{cb}$ 且 $X = \Delta_m(\eta)D$.

可以得到一个范数最优 *Stinespring* 表示，如下：$G_X(A) = \eta_-\Delta_m(a)D$.

现在我们将重点讨论复 $m \times n$ 矩阵，将其作为 $\mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_n$. 上双线性算子 B_X 的核。我们给出的结果及其证明与刚才给出的结果及证明类似。

定理 2.4。对于任意 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|B_X\|_{cb} \le K_G^{\mathbb{C}}\|B_X\|$.存在一个单位向量 ξ 属于 $\mathbb{C}^n$，一个单位向量 η 属于 $\mathbb{C}^m$ 以及一个矩阵C 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $\|C\|_\infty = \|B_X\|_{cb}$ 且 $X = \Delta_m(\eta)^*C\Delta_n(\xi)$。

可以得到一个范数最优的斯廷斯普林表示$B_X（A, B） = （\eta|）^*\Delta_m（A）C\Delta_n（B）\xi|$.

证明。由经典格罗滕迪克不等式可知，存在单位向量 μ 属于 $\mathbb{C}^m$、ν 属于 $\mathbb{C}^n$，以及矩阵 D 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $\|D\|_\infty \le K_G^{\mathbb{C}}\|B_X\|$ 且 $X = \Delta_m(\mu)^*D\Delta_n(\nu)$。经过初等运算可得

$$\forall y \in \mathcal{A}_m \forall z \in \mathcal{A}_n : B_X(y,z) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n (y_i\bar{\mu}_i)D_{(i,j)}(\nu_j z_j) = (\mu|)^*\Delta_m(y)D\Delta_n(z)\nu|. \tag{2.3}$$

因此，我们得到了 B_X 的一个斯廷斯普林表示，这表明 $\|B_X\|_{cb} \le \|\mu\|_2\|D\|_\infty\|\nu\|_2 \le K_G^{\mathbb{C}}\|B_X\|$.。我们将采用 B_X 的一个范数最优且极小的斯廷斯普林表示，并使用以下记号。存在希尔伯特空间 K、L，$\mathcal{A}_m$ 在 K上的表示 π，$\mathcal{A}_n$ 在 L上的表示 ρ，以及算子 R属于 $B(K,\mathbb{C})$、S属于 $B(L,K)$、T 属于 $B(\mathbb{C},L)$，使得对于任意 y 属于 $\mathcal{A}_m$，以及任意 z 属于 $\mathcal{A}_n$

$$B_X(y,z) = R\pi(y)S\rho(z)T, \text{ and } \|R\|\|S\|\|T\| = \|B_X\|_{cb}. \tag{2.4}$$

如上所述，我们用 Ω_m 表示 $\mathbb{C}^m$ 中所有元素均为 1 的向量，并类比 (2.2)，定义 B_X 的第二个斯廷斯普林表示如下：

$$B_X(y,z) = ((\Omega_m)|)^*\Delta_m(y)X\Delta_n(z)(\Omega_n)|. \tag{2.5}$$

若满足以下 4 个条件，则第二个斯廷斯普林表示是极小的

(i) $\text{span}(\{\Delta_n(z)\Omega_n : z \in \mathcal{A}_n\}) = \mathbb{C}^n$.

(ii) 张成空间($\{\Delta_m(y)X\Delta_n(z)\Omega_n : \ y \in \mathcal{A}_m, z \in \mathcal{A}_n \} = \mathbb{C}^m$.(iii) 张成空间($\{\Delta_m(y^*)\Omega_m : \ y \in \mathcal{A}_m \}) \ = \mathbb{C}^m$.(iv) 张成空间($\{\Delta_n(z^*)$ $X^*\Delta_m(y^*)\Omega_m : \ y \in \mathcal{A}_m, z \in \mathcal{A}_n \} = \mathbb{C}^n$.

由于向量 Ω_m 和 Ω_n 中的所有元素都是 1，因此条件 (i) 和 (iii) 均成立。若 X 的所有行都非零，则条件 (ii) 成立；类似地，若 X 的所有列都非平凡，则条件 (iv) 成立。假设 X 的所有列和所有行均非零并不会造成严重限制，因此我们作此假设，而 (2.5) 给出了 B_X. 的一个极小 Stinespring 表示。于是我们可以应用 [4] 中定理 3.2 的第 (ii) 项，并据此假设在 Stinespring 表示 (2.4) 中有 $K = \mathbb{C}^m$、$L = \mathbb{C}^n$、$\pi = \Delta_m$ 和 $\rho = \Delta_n$. 。接着注意到，$\Delta_m(\mathcal{A}_m)$ 的交换子等于 $\Delta_m(\mathcal{A}_m)$，对 $\mathcal{A}_n$ 也同样成立。因此，应用同一定理的第 (v) 项时，我们发现存在一个向量 ξ，属于 $\mathbb{C}^n$，使得 $\Delta_n(\xi)(\Omega_n)_| = T$. 。于是 $\xi = T1$，其中 1 是 $\mathbb{C}$ 中的单位向量，因此 $\|\xi\|_2 = \|T\|$. 。我们还得到，存在一个向量 η，属于 $\mathbb{C}^m$，使得 $\Delta_m(\eta)(\Omega_m)_| = R^*$. 。于是 $\eta = R^*1$，且 $\|\eta\|_2 = \|R\|$。通过一些初等代数运算可得 $X = \Delta_m(\eta)^* S \Delta_n(\xi)$，由 (2.4) 可知 $\|\eta\|_2\|S\|\|\xi\|_2 = \|B_X\|_{cb}$，定理得证。□

现在我们将转而研究复矩阵 $m \times n$ 的 Schur 乘子范数S_X X，以及由此得到的分解结果。对 Schur 乘子范数 $\|S_X\|$ 进行估计的研究由来已久，我们无意涵盖所有相关成果。另一方面，有几篇论文根据某些正矩阵的对角线范数给出了估计。最著名的估计当然是 Schur 最早给出的那个 [21], ，尽管他并未这样看待它；但他的结果表明，对于正矩阵 X，Schur乘法是正映射，因此其范数等于对角线的范数。据我们所知，与 Schur 乘子范数相关的行范数和列范数这一说法，最早见于 Davidson 和 Donsig 的文章 [6]。此前的研究者用某些正矩阵的对角线范数来表述他们的估计，但正如我们在引言中所见，这实际上是一回事。在文章 [3] 中，我们构造了 Schur 积的一个具体 Stinespring 表示，由此证明 Schur乘法是完全有界双线性算子，且完全有界范数为 1。这里我们只重述 [3],中的一个结果，该结果表明定理 2.7 的分解是最优的。

命题 2.5。设 l，m，n 为自然数，L 且 R 为 $M_{(l,m)}$（$\mathbb{C}$）中的矩阵，且 $M_{(l,n)}$（$\mathbb{C}$）中的矩阵，则 $\|S_{(L^*R)}\| \leq \|L\|_c\|R\|_c$.

证明。令 $k = \max\{l, m, n\}$，并将矩阵 L 和 R 视为 $M_k(\mathbb{C})$ 中的矩阵，再令 A为 $M_k(\mathbb{C})$ 中的矩阵，则我们将应用 [3]中的定理 2.3。该结果讨论的是 Schur 块乘积，但当然同样适用于普通的 Schur 积。采用 [3] 中的记号， $M_k(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k$上的两个表示 λ和 ρ确实可交换，因此有

$$\begin{aligned} \|S_{(L^*R)}(A)\| &= \|V^*\lambda(L^*R)\rho(A)V\| \\ &= \|V^*\lambda(L^*)\rho(A)\lambda(R)V\| \\ &\leq \|V^*\lambda(L^*)\|\|\rho(A)\|\|\lambda(R)V\| \text{ by Lemma 2.6 of [3]} \\ &= \|L\|_c\|\rho(A)\|\|R\|_c, \end{aligned}$$

由此命题得证。 □

这一结果为此前关于舒尔乘子范数的一些结论提供了简明的证明。C. Davis [7] 研究了当 X 为自伴矩阵时的乘子范数$\|S_X\|$，他对乘子范数给出的上界是 $|X|$的对角线的范数，这恰好是$\|(|X|)^{\frac{1}{2}}\|_c^2$.当 X为自伴矩阵且其极分解为 $X = S|X|$时， X可分解为 $X = (|X|^{\frac{1}{2}})(S|X|^{\frac{1}{2}})$，而 Davis 的结果可由命题 2.5 应用于这一分解而得出。M. Walter 在 [24] 中针对一般的 X 给出了一个上界，该上界用若干对角线的范数表示。用我们的语言来说，Walter 的结果是 $\|S_X\|_{cb} \leq \|(XX^*)^{\frac{1}{2}}\|_c\|(X^*X)^{\frac{1}{2}}\|_c$.在我们的框架下，这对应于一个具有极分解 $X = V|X|$的 X 的分解，如下所示：$X = \big((XX^*)^{\frac{1}{2}}\big)\big(V(X^*X)^{\frac{1}{2}}\big)$.Bo˙zejko 在 [2]中为 Walter 的结果给出了一个非常简短的证明，与我们采用的方法有关。两者的差异主要在于他运用了现有的巴拿赫空间理论。Davidson和Donsig 的文章[6] 包含了许多与我们的研究相关的问题的信息，但我们并未认真尝试将我们的方法应用于这样的问题：笛卡尔积$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的哪些子集 S 具有这样的性质，即用 S 的特征函数进行 Schur乘法会导出一个完全有界舒尔乘子。根据 [1]，我们知道，当 $J = \mathbb{N}$ 时，将一个有界矩阵限制到其下三角部分并非有界映射；但我们还没有找到办法证明这个矩阵不能分解为 L^*R，其中 $\|L\|_c < \infty$ 且 $\|R\|_c < \infty$.我们认为，Lust-Piquard 的杰出结果 [12] 应当有助于我们理解一些我们一直感兴趣的舒尔乘子问题。遗憾的是，我们未能做到这一点。在 [11]中，Livshits 研究了分块矩阵之间的 Schur 块乘积，其中各块的元素为算子

，并得到了一个不等式；在我们的框架下，这是不完全有界性所导致的 Schur 块乘积的推论。

将 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 包含于 $M_k(\mathbb{C})$ 中，其中 k 大于两者，方式可以任意，只需在 $M_k(\mathbb{C})$ 中固定 m 行和 n 列。这种包含显然是关于算子范数的等距映射，并且存在一个关于算子范数的范数为 1 的条件期望，它将 $M_k(\mathbb{C})$ 映射到嵌入的 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 副本上；该条件期望由左右分别乘以正交投影给出。因此，对于一个复矩阵 $m \times n$ X，Schur 乘子范数 $\|S_X\|$ 在 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 和 $M_k(\mathbb{C})$ 上相同。考虑到这一点，我们有时会在方阵的框架下进行讨论，直至在此框架中得到结果，然后在最后推出一般情形的结果。

在以下定理的证明中，我们用到的基本结果，是 Smith 的结果 [22] ： 完全有界范数 $\|S_X\|_{cb}$ 等于算子范数 $\|S_X\|$。它取代了定理 2.1 和 2.4 的证明中所用的 Grothendieck 不等式。

我们上文提到，Grothendieck 的工作 [9] 给出了对范数为 1 的 Schur 乘子的结构的描述。除一个常数外，这种描述与通过 Pisier 的著作 [17] 和 Paulsen 的著作 [14]中所述的完全有界映射理论所获得的最优结果类似。以上内容导出了以下定理，不过该定理采用分解结果的形式，其中还包含关于所涉及矩阵的秩的陈述。关于秩的陈述是以下引理的推论。

引理 2.6。 设 k, m, n, r 为自然数， A 为一个复矩阵， B 为一个复矩阵，且 r 为乘积 AB.的秩。那么存在一个 $m \times r$ 复矩阵 L 和一个 $r \times n$ 复矩阵 R ，使得 $AB = LR, \|L\|_\infty \leq \|A\|_\infty, \|R\|_\infty \leq \|B\|_\infty,$ $\|L\|_2 \leq \|A\|_2, \|R\|_2 \leq \|B\|_2, \|L\|_r \leq \|A\|_r$ 且 $\|R\|_c \leq \|B\|_c$

证明。令 E 表示 B 的值域投影， F 表示 AE的支撑投影，则 AE 的秩与 AB的秩相同，因此 F 的秩为 r ；又由于 $F \leq E$ ，我们有 FB的秩也为 $r.$ 。由于 $r \leq k$ ，存在一个等距映射 W ，属于 $M_{(k,r)}(\mathbb{C})$，使得 $W^*W = I_{\mathbb{C}^r}, WW^* = F$，于是我们可以定义 $L := AW$ 和 $R := W^*B$ ，使其具有所需的性质。 □

定理 2.7。 设 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 且秩为 r，则存在矩阵 L 属于 $M_{(r\times m)}(\mathbb{C})$ 以及 R 属于 $M_{(r,n)}(\mathbb{C})$ ，使得它们的秩均为 r，

$$L^*R = X \ and \ \|L\|_c\|R\|_c = \|S_X\|_{cb} = \|S_X\|.$$

设 $k = \max\{m, n\}$，并令 X，L 和 R 属于 $M_k(\mathbb{C})$，编号相同。$M_k(\mathbb{C})$ 上的算子 S_X 将具有如下范数最优 *Stinespring* 表示

$$S_X(A) = \big(V^*\lambda(L^*)\big)\rho(A)\big(\lambda(R)V\big).$$

证明。很容易想到，可以像前面几次那样，基于 [4], 中的结果给出一个证明。这个思路确实可行，但遗憾的是，我们沿此思路找到的证明比下面这个证明更复杂，而后者只是一个著名结果的简单应用。回到结果 [16]定理 5.1 (ii) 或 [14] 定理 8.7 (iii)，于是存在一个希尔伯特空间K，其中有一些向量 ξ_j、$1 \le j \le n$ 和 η_i、$1 \le i \le m$，且它们属于 K，使得$\|\xi_j\|_2 \le \|S_X\|^{\frac{1}{2}}$、$\|\eta_i\|_2 \le \|S_X\|^{\frac{1}{2}}$ 以及 $X_{(i,j)} = \langle \xi_j, \eta_i \rangle$.。令 K_1 表示 K 的子空间，它由向量 $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \cup \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$. 线性张成。令 d 为 K_1 的维数，并令 $\{e_1, \ldots, e_d\}$ 为标准正交基 K_1，那么我们可以通过以下公式构造一个标量 $d \times m$ 矩阵$L^0 = (L^0_{(t,i)})$ 和一个标量 $d \times n$ 矩阵 $R^0 = (R^0_{(t,j)})$

$$L^0_{(t,i)} := \langle \eta_i, e_t \rangle$$
$$R^0_{(t,j)} := \langle \xi_j, e_t \rangle.$$

由希尔伯特空间基本理论及方程$X_{(i,j)} = \langle \eta_j, \xi_i \rangle$ 可知，$(L^0)^* R^0 = X$，且 L^0 和R^0中的每一列的范数都不超过$\|S_X\|^{\frac{1}{2}}$.。于是引理 2.6 表明，存在矩阵 $L \in M_{(r,m)}(\mathbb{C})$和 $R \in M_{(r,n)}(\mathbb{C})$，二者的秩均为 r，使得 $X = L^* R$且 $\|L\|_c \|R\|_c \le \|S_X\| = \|S_X\|_{cb}$.。我们回到 [3]中的定理 2.3，并回忆表示 λ 和 ρ 彼此交换，因此，由 $\lambda(X) = \lambda(L^*)\lambda(R)$可知，我们得到了该定理所述的 S_X 的斯廷斯普林表示。同一篇文章中的引理 2.6 表明，完全有界范数 $\|S_X\|_{cb}$ 不超过 $\|L\|_c \|R\|_c$，定理得证。□

现在我们转而研究双线性算子 T_X.

定理 2.8。设 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 且秩为 r，则存在一个向量 γ 属于 $\mathbb{C}^m$ 以及矩阵 L 属于 $M_{(r,m,)}(\mathbb{C})$ R 属于 $M_{(r,n)}k(\mathbb{C})$，使得它们的秩均为 r,

$$\Delta_m(\gamma) L^* R = X \text{ and } \|\gamma\|_2 \|L\|_c \|R\|_c = \|T_X\| = \|T_X\|_{cb}.$$

对于 $k := \max\{m, n\}$，作用于 $\mathcal{A}_k \times M_k$（$\mathbb{C}$）上的算子 T_X 将具有如下范数最优 *Stinespring* 表示

$$T_X(a, B) = \big(\gamma_-\big)\Delta_k(a)\big(V^*\lambda(L^*)\big)\rho(B)\big(\lambda(R)V\big).$$

证明。 我们将先在 $m = n = k$ 的情形下证明该定理，然后再讨论一般情形。等式 $\|T_X\| = \|T_X\|_{cb}$由定理 3.7 的推论 3.8 得出，下面的证明独立于这一结果。

在证明的第一部分，我们将假设 X 在$M_k(\mathbb{C})$中可逆，并在此情形下证明结论。随后，通过紧致性论证即可得到适用于一般方阵的结论。利用 [3] 中的记号，可以立即按如下方式得到 T_X的斯廷斯普林表示

(2.6)
$$\forall a \in \mathcal{A}_k \, \forall B \in M_k(\mathbb{C}) : \quad T_X(a, B) = (\Omega_k)_- \Delta_k(a) V^* \lambda(X) \rho(B) V.$$

我们将证明这个斯廷斯普林表示是极小的，因此需要证明下列方程成立

(i) $\text{span}\,(\{\rho(B)V\xi : B \in M_k(\mathbb{C}), \xi \in \mathbb{C}^k\}) = \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k$.
(ii) $\text{span}\,(\{\Delta_k(a)V^*\lambda(X)\rho(B)V\xi : a \in \mathcal{A}_k, B \in M_k(\mathbb{C}), \xi \in \mathbb{C}^k\}) = \mathbb{C}^k$.
(iii) $\text{span}\,(\{\Delta_k(a)\Omega_k : a \in \mathcal{A}_k\}) = \mathbb{C}^k$.
(iv) $\text{span}(\{\rho(B)\lambda(X^*)V\Delta_k(a)\Omega_k : a \in \mathcal{A}_k, B \in M_k(\mathbb{C})\}) = \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k$.

为验证 (i)，注意到 $\rho(e_{(i,j)})V\delta_j = (\delta_j \otimes \delta_i)$。由于 X可逆且 λ是幺正的，$\lambda(X)$可逆；再由 (i) 以及 V^* 的值域为 $\mathbb{C}^k$. 整个空间这一事实，即可验证 (ii)。显然，(iii) 成立。(iv) 可由 $\lambda(X^*)$的可逆性、 λ 与 ρ 可交换，以及 (i) 和 (iii) 推出。于是，我们可以为 T_X选取一个范数最优的极小斯廷斯普林表示；并且根据 [4], 的定理 3.2，我们可以假设这个斯廷斯普林表示也采用 $\mathcal{A}_k$ 的表示Δ_k 以及 $M_k(\mathbb{C})$的表示 ρ 。因此，存在 $\mathbb{C}^k$ 中的一个单位向量 γ 、一个属于 $B(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k)$的算子 Y，使得 $\|Y\| = \|T_X\|_{cb}$；并且存在一个属于 $B(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^k)$的算子$Z$，使得 $\|Z\| = 1$，且具有如下性质

(2.7) $$\forall a \in \mathcal{A}_k \, \forall B \in M_k(\mathbb{C}) : \quad T_X(a, B) = (\gamma)_- \Delta_k(a) Y \rho(B) Z.$$

ˆ 根据 [4] 的定理 3.2，我们知道存在一个算子 Z，属于 $\rho(M_k(\mathbb{C}))$的交换子，且满足 $ZV = Z.$。我们知道， $\rho(M_k(\mathbb{C}))$ 的交换子等于 $\lambda(M_k(\mathbb{C}))$，因此存在一个矩阵 R，属于ˆ$M_k(\mathbb{C})$，使得 $Z = \lambda(R)$，并且有 $Z = \lambda(R)V.$。方程$\|Z\| = 1$ 根据 [3] 的引理 2.6 可推出 $\|R\|_c = 1.$。由于假设 X 可逆， X 的所有行都非零，因此我们可以看到， γ 中的所有元素都必须非零；而对角矩阵代数的交换性表明

$\gamma_-\Delta_k(a) = (\Omega_k)_-\Delta_k(a)\Delta_k(\gamma)$。在开始接下来的一系列计算之前，我们提醒您，$V\delta_j := \delta_j \otimes \delta_j$，因此有 $V\Delta_k(\xi) = \lambda(\Delta_k(\xi))V$，对于任意向量 ξ. 。然后，可以将条目 (i) 和 (iii) 中的结果以及上文的说明代入方程 (2.6) 和 (2.7)，从而得到以下一系列方程。

$$\begin{aligned} \Delta_k(\gamma)Y\lambda(R) &= V^*\lambda(X) \\ Y\lambda(R) &= \Delta_k(\gamma)^{-1}V^*\lambda(X) \\ Y\lambda(R) &= V^*\lambda(\Delta_k(\gamma)^{-1}X) \\ (VY)\lambda(R) &= VV^*\lambda(\Delta_k(\gamma)^{-1}X) \end{aligned} \tag{2.8}$$

我们将基于矩阵单位 $e_{(i,j)} \otimes e_{(m,n)}$，以张量形式写出方程 2.8，因此先写出方程 (2.8) 中各个算子的表达式。

$$\begin{aligned} VY &= \sum_{i,j,m,n} (VY)_{((i,j),(m,n))}(e_{(i,j)} \otimes e_{(m,n)}) \\ \lambda(R) &= \sum_{s,t} R_{(s,t)}(e_{(s,t)} \otimes I) \\ VV^*\lambda(\Delta_k(\gamma)^{-1}X) &= \sum_{u,v} \gamma_u^{-1} X_{(u,v)}(e_{(u,v)} \otimes e_{(u,u)}). \end{aligned}$$

于是方程 (2.8) 变为

$$\sum_{i,j,m,n,t} (VY)_{((i,j),(m,n))} R_{(j,t)}(e_{(i,t)} \otimes e_{(m,n)}) = \sum_{(u,v)} \gamma_u^{-1} X_{(u,v)}(e_{(u,v)} \otimes e_{(u,u)}). \tag{2.9}$$

由此，我们通过定义其伴随 L^* 的公式，在 $M_k(\mathbb{C})$ 中定义一个矩阵 L：

$$(L^*)_{(i,j)} := (VU)_{(i,j),(i,i))}. \tag{2.10}$$

我们看到，L^* 的行范数不大于 VY 的行范数，而后者又不大于 Y 的范数，因此 $\|L\|_c \leq \|Y^*\| = \|T_X\|_{cb}$。通过初等计算并与方程 (2.9) 比较可得，$L^*R = \Delta_k(\gamma)^{-1}X$，且 $\Delta_k(\gamma)L^*R = X$，其中 $\|\gamma\|_2 = 1$、$\|L\|_c \leq \|T_X\|_{cb}$、$\|R\|_c = 1$，并且

$$T_X(a,B) = \big(\gamma_-\big)\Delta_k(a)\big(V^*\lambda(L^*)\big)\rho(B)\big(\lambda(R)V\big),$$

因此，当 X 可逆时，定理得证。

如果 X 不可逆，那么存在一个偏等距映射 W，将 X 的核映到余核；该余核等于 X^*的核，接着

对于任意 $\varepsilon > 0$，算子 $X_\varepsilon ;= X + \varepsilon W$ 都是可逆的。等式 (2.6) 意味着 $\|T_X - T_{X_\varepsilon}\|_{cb} \leq \varepsilon\sqrt{k}.$。然后，将该定理的结果应用于 X_ε时，我们得到一个单位向量 γ_ε，它属于 $\mathbb{C}^k$；以及矩阵 L_ε、 R_ε，它们属于 $M_k(\mathbb{C})$，满足$\|L_\varepsilon\|_c \leq \|T_X\|_{cb} + \varepsilon\sqrt{k}$、 $\|R_\varepsilon\|_c \leq 1$和$X_\varepsilon = \Delta_k(\gamma_\varepsilon)L_\varepsilon^* R_\varepsilon.$。接着通过紧致性论证可知，存在一个单位向量 γ，它属于 $\mathbb{C}^k$；以及矩阵 L_0、 R_0，满足 $\|L_0\|_c \leq \|T_X\|_{cb}$、$\|R_0\|_c \leq 1$ 和 $X = \Delta_k(\gamma)L_0^* R_0.$。为了得到定理中提到的秩条件，我们应用引理 2.6。除陈述 $\|T_X\| = \|T_X\|_{cb}$ 尚待推论 3.8 证明外，定理在二次情形下即得证。在~矩形情形中，当 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$时，我们将 X 嵌入为 $\tilde{X}$，放入$M_k(\mathbb{C})$中，编号保持不变，其余位置填零。可以验~证 $\|T_{\tilde{X}}\|_{cb} = \|T_X\|_{cb}$，因此，对于一个属于$\mathbb{C}^k$的向量 γ_0、一个属于 $M_{(r,k)}(\mathbb{C})$的矩阵 L_0 以及一个属于 $M_{(r,k)}(\mathbb{C})$的矩阵 R_0，有 $X = \Delta_k(\gamma_0)(L_0)^* R_0$。令 P_m 和 P_n 分别表示将 $\mathbb{C}^k$ 正交投影到 $\mathbb{C}^k$中由前 m 个和前 n个基向量张成的子空间上的投影，则 $X = \Delta_m(P_m\gamma_0)(L_0P_m))^*(R_0P_n)$ 将给出所需的分解。□

3. 对偶性

沿用上文的记号，我们将考察复值 $m \times n$矩阵，并定义这些矩阵的 6 个紧凸子集如下:

(3.1)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{(m,n)} &:= \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|B_X\| \leq 1\} \\
\mathcal{S}_{(m,n)} &:= \overline{\mathrm{conv}}\big(\{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : X_{(i,j)} = \bar{l}_i r_j,\ |l_i| = 1,\ |r_j| = 1\}\big) \\
\mathcal{CB}_{(m,n)} &:= \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|B_X\|_{cb} \leq 1\} \\
\mathcal{CS}_{(m,n)} &:= \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|S_X\|_{cb} \leq 1\} \\
\mathcal{CF}_{(m,n)} &:= \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|F_X\|_{cb} \leq 1\} \\
\mathcal{CT}_{(m,n)} &:= \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \|T_X\|_{cb} \leq 1\}.
\end{aligned}
$$

我们在第 2 节中间接遇到了这些集合；从它们的定义可知，它们全都是$M_{(m,n)}(\mathbb{C})$的紧凸子集，并且在单位圆盘内的复数标量乘法下保持不变。

在这项研究中，我们需要一些观察结果，现将它们列为命题。

定理 2.1 推出以下结果。

命题 3.1. 设 m, n 为自然数，则

$$\mathcal{CF}(m,n) = \{C\Delta_n(\xi) : C \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}),\, \xi \in \mathbb{C}^n,\, s.t.\, \|C\|_\infty \|\xi\|_2 \leq 1\}.$$

定理 2.4 推出。

命题 3.2。 设 m 和 n 为自然数，则

$$\mathcal{CB}_{(m,n)} = \{\Delta_m(\eta)^* C \Delta_n(\xi) : C \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}),\, \eta \in \mathbb{C}^m,\, \xi \in \mathbb{C}^n \\ s.t.\, \|\eta\|_2 \|C\|_\infty \|\xi\|_2 \leq 1\}.$$

证明。 证明中唯一尚缺的一点是，对于一个 $m \times n$矩阵 $X = \Delta_m(\eta)^* C \Delta_n(\xi)$, 我们有 $\|B_X\|_{cb} \leq \|\eta\|_2 \|C\|_\infty \|\xi\|_2$; 但这已在方程 (2.3) 后面的几行中证明。□

命题 2.5 和定理 2.7 结合起来，立即得到以下结果。

命题 3.3。 设 m, n 为自然数，且 $l := $ 最小值$\{m, n\}$,则

$$\mathcal{CS}_{(m,n)} = \{L^* R : \ L \in M_{(l,m)}(\mathbb{C}) \ \|L\|_c \leq 1, R \in M_{(l,n)}(\mathbb{C}) \ \|R\|_c \leq 1\}.$$

定理 2.8 推出以下命题。

命题 3.4。 设 m, n 为自然数，且 $l := $ 最小值$\{m, n\}$,则

$$\mathcal{CT}_{(m,n)} = \{\Delta_m(\gamma) L^* R : \gamma \in \mathbb{C}^m, \|\gamma\|_2 \leq 1,\, L \in M_{(l,m)}(\mathbb{C}), \|L\|_c \leq 1, \\ R \in M_{(l,n)}(\mathbb{C}), \|R\|_c \leq 1\}.$$

注 3.5。 引理 2.6 表明，在上述命题中可以去掉数字 l，但引入 l 使引理得到了加强，具体而言，它表明这些单位球中的所有算子都可以在施加这一限制的情况下得到。

证明定理 3.7 时，我们需要以下观察。

引理 3.6。 设 T 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $\|T\|_2 = 1$. 存在一个矩阵 R，其中 $\|R\|_c = 1$ 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，其所有列的范数均为 *1* 或 *0*；并且存在一个分量为正的单位向量 ξ 属于 $\mathbb{C}^n$，使得 $T = R\Delta_n(\xi)$。

若 R 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 且满足 $\|R\|_c \leq 1$，并且 ξ 属于 $\mathbb{C}^n$ 且范数不超过 *1*，则对 $T := R\Delta_n(\xi)$： $\|T\|_2 \leq 1$.

证明。 给定一个满足 $\|T\|_2 = 1$的 T，定义 $\xi_j := (\sum_i |T_{(i,j)}|^2)^{\frac{1}{2}}$，并且

$$R_{(i,j)} := \begin{cases} 0 & \text{if } T_{(i,j)} = 0, \\ T_{(i,j)}/\xi_j & \text{if } T_{(i,j)} \neq 0. \end{cases}$$

通过直接计算可得，我们得到了具有所需性质的 $T = R\Delta_n(\xi)$。类似地，对于形如 $R\Delta_n(\xi)$ 的 T，有

$\|T\|_2 \leq \|R\|_c\|\xi\|_2.$ □

现在我们来考察 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 上由迹 Tr_n 在满足 $\mathrm{Tr}_n(I) = n$ 的 $M_n(\mathbb{C})$ 上定义的内积：

$$\forall X, Y \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}): \quad \langle X, Y\rangle := \mathrm{Tr}_n(Y^*X). \tag{3.2}$$

和往常一样，我们通过以下表达式定义 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 的子集 $\mathcal{D}$ 的极集 $\mathcal{D}^\circ$：

$$\mathcal{D}^\circ := \{X \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}) : \forall D \in \mathcal{D}, |\langle X, D\rangle| \leq 1\}. \tag{3.3}$$

定义 (3.1) 中定义的 6 个集合都具有等于其双极集的性质，因此下述陈述中的极集圆圈可以移到等式另一侧。

定理 3.7。对于任意一对自然数 m，n，我们有以下关系

$$\mathcal{B}_{(m,n)} = \big(\mathcal{S}_{(m,n)}\big)^\circ \tag{3.4}$$

$$\mathcal{CB}_{(m,n)} = \big(\mathcal{CS}_{(m,n)}\big)^\circ \tag{3.5}$$

$$\mathcal{CF}_{(m,n)} = \big(\mathcal{CT}_{(m,n)}\big)^\circ. \tag{3.6}$$

证明。方程 (3.4) 基于以下恒等式

$$\mathrm{Tr}_n\big((\bar{l}_i r_j)^* X\big) = \sum_{i,j} l_i x_{(i,j)} \bar{r}_j$$

于是，根据 B_X 作为两个 C*-代数 $\mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_n$上的双线性算子的范数定义，以及这些代数的单位球中的极点是酉元这一事实，可得结论。对于 (3.5)，我们将在 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 上引入共轭运算，其定义为 $(\overline{X})_{(i,j)} := \overline{X_{(i,j)}}$. 由于转置和伴随运算相对于算子范数都是等距映射，因此共轭运算是配备算子范数的 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 上的共轭线性等距映射，从而得到 $\|S_X\| = \|S_{\overline{X}}\|$.。简单计算可知，对于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 中的矩阵 C、X，以及 $\mathbb{C}^m$ 中的向量 η 和 $\mathbb{C}^n$ 中的向量 ξ，有

$$\mathrm{Tr}_n\big(X^*\Delta_m(\eta)^* C\Delta_n(\xi)\big) = \langle\big(\bar{X} \circ C\big)\xi, \eta\rangle. \tag{3.7}$$

命题 3.2 中的等式可应用于上面的方程；从左向右读方程 (3.7)，可得 $(\mathcal{CB}_{(m,n)})^\circ \subseteq \mathcal{CS}_{(m,n)}$.。另一方面，从右向左读则可得 $\mathcal{CS}_{(m,n)} \subseteq (\mathcal{CB}_{(m,n)})^\circ$.。这就完成了

方程 (3.4) 和 (3.5) 的证明，但方程 (3.6) 的证明稍微复杂一些。

我们注意到，集合 $\mathcal{CF}_{(m,n)}$ 和 $\mathcal{CT}_{(m,n)}$ 都等于其双极，因此只需证明

$$\mathcal{CF}_{(m,n)} \subseteq \mathcal{CT}^{\circ}_{(m,n)} \text{ and } \big(M_{(m,n)}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{CF}_{(m,n)}\big) \subseteq \big(M_{(m,n)}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{CT}^{\circ}_{(m,n)}\big).$$

为证明第一个包含关系，取 X 属于 $\mathcal{CF}_{(m,n)}$，并取 Y 属于 $\mathcal{CT}_{(m,n)}$。于是 $X = C\Delta_n(\xi)$，其中 $\|C\|_\infty \leq 1$、$\|\xi\|_2 \leq 1$，且 $Y = \Delta_m(\eta)L^*R$，其中 $\|\eta\|_2 \leq 1$ 和 $\|L\|_c\|R\|_c \leq 1.$。由方程 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} |\langle Y, X\rangle| &= |\mathrm{Tr}\big(\Delta_n(\xi)^* C^* \Delta_m(\eta)(L^*R)\big)| \\ &= |\langle (\bar{C} \circ (L^*R))\bar{\xi}, \bar{\eta}\rangle| \leq 1, \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{CF}_{(m,n)} \subseteq \mathcal{CT}^{\circ}_{(m,n)}$.

现在假设 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$，但不属于 $\mathcal{CF}_{(m,n)}$，于是 $\|F_X\|_{cb} > 1$。回想一下，我们将 F_X 视为一个值域在算子空间 $M_m(\mathbb{C})$ 中的算子。因此，根据 Smith 的结果 [22], [14]命题 8.11，我们有 $\|F_X\|_{cb} = \|(F_X)_m\|.$。这意味着存在一个压缩算子 $A = (A_{(i,j)})$，属于 $M_m(\mathcal{A}_n)$，一个单位向量 Λ，属于 $\mathbb{C}^m$，以及一个向量 Θ，属于 m 个 $\mathbb{C}^m$ 的和，并且满足 $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_m)\Theta_s = (\theta_{(s,1)}, \ldots, \theta_{(s,m)})$ 和 $\sum_{s,\ i} |\theta_{(s,i)}|^2 = 1$，使得

$$\big|\langle (F_X)_m(A)\Lambda, \Theta\rangle\big| > 1. \tag{3.8}$$

我们可以通过 $B := A\Lambda$ 定义 B $M_{(m,1)}(\mathcal{A}_n)$ 中的列算子，然后 B 是一个压缩算子，这意味着我们可以定义一个 $m \times n$ 标量矩阵 R，其列范数不超过 1，如下所示：

$$R \in M_{(m,n)}(\mathbb{C}), \quad R_{(s,j)} = \overline{B_{(s,1)}(j)}. \tag{3.9}$$

单位向量 Θ 可用于定义矩阵 $m \times m$ T，使得$\|T\|_2 = 1$ 满足

$$T \in M_m(\mathbb{C}), \quad T_{(i,s)} := \theta_{(s,i)}. \tag{3.10}$$

然后我们可以计算

$$
\begin{aligned}
1 < \big|\langle (F_X)_m(A)\Lambda,\, \Theta\rangle\big| &= \Big|\sum_{s,t=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)}A_{(s,t)}(j)\lambda_t\bar{\theta}_{(s,i)}\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{s=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)}B_{(s,1)}(j)\bar{\theta}_{(s,i)}\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)}\sum_{s=1}^{m}(R^*)_{(j,s)}(T^*)_{(s,i)}\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)}(R^*T^*)_{(j,i)}\Big| \\
&= \big|\langle X, TR\rangle\big|.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

回顾 $\|T\|_2 = 1$，在 $M_m(\mathbb{C})$ 中；由引理 3.6 可知，存在一个单位向量 η，属于 $\mathbb{C}^m$，以及一个算子 L，属于 $M_m(\mathbb{C})$，使得 $\|L\|_c = 1$ 且 $T^* = L\Delta_m(\eta)^*$，于是 $T = \Delta_m(\eta)L^*$. 。若将此方程代入方程 (3.11)，便可看出 X 不属于极集 $\mathcal{CT}^{\circ}_{(m,n)}$，定理得证。□

方程 (3.6) 推出以下推论，从而完成定理 2.8 的证明。

推论 3.8. 设 X 是一个复 $m\times n$ 矩阵，则 $\|T_X\| = \|T_X\|_{cb}$.

证明. 设 C 是一个算子范数至多为 1 的 $m\times n$ 复矩阵，且 ξ 是 $\mathbb{C}^n$ 单位球中的一个向量，则 $\overline{C}$ 是一个范数至多为 1 的算子，并且有

$$
\begin{aligned}
\|T_X\| &\geq \|T_X(I_{\mathcal{A}_m}, \overline{C})\| \\
&\geq |\langle T_X(I_{\mathcal{A}_m}, \bar{C}), \xi\rangle| \\
&= \Big|\sum_j \bar{\xi}_j \sum_i X_{(i,j)}\overline{C_{(i,j)}}\Big| \\
&= \big|\mathrm{Tr}_n((C\Delta_n(\xi))^* X)\big| \\
&= \big|\langle X,\, C\Delta_n(\xi)\rangle\big|.
\end{aligned}
$$

由命题 3.1 和方程 (3.6)，我们便得到 $\|T_X\| \geq \|T_X\|_{cb}$，从而推得该推论。

□

定理 3.7 对双线性形式有一个直接推论。该结果或许可以从现有文献中推导出来，但由于它是

前述证明的直接结果，我们认为将其列入本文是合理的。

推论 3.9. 设 X 属于 $M_{(m,n)}(\mathbb{C})$ 且 $l := \text{最小}\{m, n\}$, 则$\|B_X\|_{cb} = \|(B_X)_l\|$.

证明。 根据定理 3.7 和紧致性，存在 Y 属于 $\mathcal{CS}_{(m,n)}(\mathbb{C})$，使得 $\|B_X\|_{cb} = \text{Tr}_n(Y^*X)$。然后根据命题 3.3，存在 L 属于 $M_{(l,m)}(\mathbb{C})$ 和 R 属于 $M_{(l,n)}(\mathbb{C})$，二者的列范数均不超过 1，使得 $Y = L^*R$。接着可以按以下方式构造压缩矩阵 A 属于 $M_l(\mathcal{A}_m)$ 和 B 属于 $M_l(\mathcal{A}_n)$，使得 $\|(B_X)_l(A, B)\| = \|B_X\|_{cb}$。

对于 $1 \leq s \leq l$，定义元素 a^s 属于 $\mathcal{A}_m$ 和 b^s 属于 $\mathcal{A}_n$，如下

$$a^s(i) := l_{(s,i)} \text{ and } b^s(j), := \overline{r_{(s,j)}}.$$

由于 L 和 R 的列范数均不超过 1，因此有

$$\sum_{s=1}^{l} a^s(a^s)^* \leq I_{\mathcal{A}_m} \text{ and } \sum_{s=1}^{l} (b^s)^* b^s \leq I_{\mathcal{A}_n}, \tag{3.12}$$

并且我们可以定义矩阵 A in $M_l(\mathcal{A}_m)$ 和 B in $M_l(\mathcal{A}_n)$。

$$A_{(u,v)} := \begin{cases} a^v & \text{if } u = 1, \\ 0 & \text{if } u \neq 1 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$B_{(v,w)} := \begin{cases} b^v & \text{if } w = 1, \\ 0 & \text{if } w \neq 1. \end{cases}$$

由于 A 是一个单行算子，而 B 是一个单列算子，不等式 (3.12) 表明 A 和 B 是压缩算子，因此 $\|(B_X)_l(A, B)\| \leq \|(B_X)_l\|$ 另一方面，由于 A是一个单行矩阵，而 B 是一个单列矩阵，我们有

$$\|(B_X)_l(A, B)\| = |\big(B_X)_l(A, B)\big)_{(1,1)}| = |\sum_{s=1}^{l} B_X(a^s, b^s)|.$$

于是我们得到以下方程

$$\begin{aligned}\|(B_X)_l\| &\geq \Big|\sum_{s=1}^{l} B_X(a^s, b^s)\Big| \\ &= \Big|\sum_{s=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)} a^s(i) b^s(j)\Big| \\ &= \Big|\sum_{s=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{(i,j)} l_{(s,i)}\overline{r_{(s,j)}}\Big| \\ &= \big|\mathrm{Tr}_m(X(R^*L))\big| \\ &= \big|\mathrm{Tr}_n(Y^*X)\big| \\ &= \|B_X\|_{cb}\end{aligned}$$

推论由此得证。 □

注 3.10. 推论 3.9 的证明实际上表明，当 A 是长度为l 的单行矩阵，且 B 是长度为 l的单列矩阵时，可以取到最大值，因此完全有界范数为

(3.14)

$$\|B_X\|_{cb} = \max\{\,|\sum_{s=1}^{l} B_X(a_s, b_s)| \,:\, \sum_{s=1}^{l} a_s a_s^* \leq I_{\mathcal{A}_m} \ \sum_{s=1}^{l} b_s^* b_s \leq I_{\mathcal{A}_n}\,\}.$$

上述有限和可能对 Haagerup 张量积 $\mathcal{A}_m \otimes \mathcal{A}_n$有所启示；或者，该注的内容也可能由 Haagerup 张量积的一些$_h$众所周知的性质以及张量积因子的有限维性推出，参见 [14] 第 17 章或[19] 定理 14.1。文献 [20] 从这样的角度研究了 $\mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_m$上的双线性形式：这类双线性形式可以看作从算子空间 $\mathcal{A}_n$ 到 $\mathcal{A}_m$.的对偶空间所给出的算子空间的算子。我们没有在此探讨这一方面，因为代数 $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{A}_m$ 是阿贝尔的，在这种情况下，双线性形式的两种完全有界性定义确实一致。

我们的最后一条评论自然源自上述一些结果；研究者中或许有人知道这一点，但我们尚未见过其他地方以这种方式表述。我们回顾一下，格罗滕迪克不等式意味着 $\mathcal{B}_{(m,n)} \subseteq K_G^{\mathbb{C}}\mathcal{CB}_{(m,n)}$，而 $K_G^{\mathbb{C}}$ 是适用于所有对 (m, n) 的最小正实数。关于极集的结果进而推出了众所周知的结果，即 $\mathcal{CS}_{(m,n)} \subseteq K_G^{\mathbb{C}}\mathcal{S}_{(m,n)}$. 定理中的结果

2.1、2.4、Smith 的结果 [22] 以及推论 3.9 表明，Grothendieck 复常数 $k_G^{\mathbb{C}}$ 和 $K_G^{\mathbb{C}}$ 在形式上可以计算为

定理 3.11.

$$k_G^{\mathbb{C}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{X\in M_k(\mathbb{C})} \frac{\|(F_X)_k\|}{\|F_X\|}, \tag{3.15}$$

$$K_G^{\mathbb{C}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{X\in M_k(\mathbb{C})} \frac{\|(B_X)_k\|}{\|B_X\|}. \tag{3.16}$$

致谢

我们谨向 Narutaka Ozawa、Vern Paulsen 和 Gilles Pisier 致谢，感谢他们提供了非常宝贵的帮助并提出了意见。

参考文献

[1] R. Bhatia、M.D. Choi、C. Davis，《矩阵与其非对角部分的比较》，Gohberg 纪念文集，第 I 卷（1988），151—164；《算子理论进展与应用》40（1989），Birkhäuser，巴塞尔。[2] M. Bo˙zejko，《关于 Walter 不等式在 Schur 乘子上的评注》，《美国数学会会刊》107（1989），133—136。[3] E. Christensen，《关于 Schur 块乘积的完全有界性》，《美国数学会会刊》147（2019），523–532。[4] E. Christensen，《算子值多重线性映射的极小 Stinespring 表示》，《算子理论杂志》，即将发表，arXiv:2108.11778。[5] E. Christensen、A. M. Sinclair，《完全有界多重线性算子的表示》，《泛函分析杂志》72（1987），151–181。[6] K. R. Davidson、A. P. Donsig，《Schur 乘子的范数》，《伊利诺伊数学杂志》2007（51），743–766。[7] C. Davis，《Schur 乘积运算的范数》，《数值数学》4（1962），343—344[8] E. G. Effros、Z-J. Ruan，《算子空间》，伦敦数学会专著新辑第23卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2000。[9] A. Grothendieck，《拓扑张量积度量理论综述》，《圣保罗数学会通报》8（1953），1–79。重印于《Resenhas》2（1996），401–480。[10] R. V. Kadison、J.R. Ringrose，《算子代数理论基础》，数学研究生丛书，Springer，1997。[11] L. Livshits，《无限维 Schur 乘积和 Schur 乘子的块矩阵推广》，《线性与多重线性代数》38（1994），59–78。[12]F. Lust-Piquard，《系数问题：矩阵空间上的 Kahane-Katznelson-De Leeuw 定理的一个版本》，《泛函分析杂志》149（1997），352—376。[13] V. I. Paulsen，《每个完全多项式有界算子都相似于一个压缩算子》，《泛函分析杂志》55（1985），1–17。[14]V. I. Paulsen，《完全有界映射与算子代数》，剑桥大学出版社，剑桥，2002。

[15] *V. I. Paulsen*、*R. R. Smith*，《算子系统上的多重线性映射与张量范数》，《泛函分析杂志》*73*（*1987*），*258–276*。[16] *G. Pisier*，《非交换 *C** 代数的格罗滕迪克定理》，附录讨论格罗滕迪克常数，《泛函分析杂志》*29*（*1978*），*397–415*。[17]] *G. Pisier*，《相似问题与完全有界映射》，《数学讲义》*1618*，第*2*版，*Springer*，*2001*。[18] *G. Pisier*，《算子空间理论导论》，伦敦数学会讲义丛书第*294*卷。剑桥大学出版社，剑桥，*2003*。[19] *G. Pisier*，《格罗滕迪克定理：过去与现在》，《美国数学会通报》。[20] *G. Pisier*、*D. Shlyakthenko*，《算子空间的格罗滕迪克定理》，《数学发明》*150*（*2002*），*185–217*。[21] *I. Schur*，《关于具有无限多个变量的有界双线性型理论的评注》，《纯粹与应用数学杂志》*140*（*1911*），*1–28*。[22] *R. R. Smith*，《完全有界模映射与 *Haagerup* 张量积》，《泛函分析杂志》*102*（*1991*），*156–175*。[23] *W. F. Stinespring*，《*C**-代数上的正函数》，《美国数学会会刊》*6*（*1955*），*211–216*。[24] *M.E. Walter*，《关于 *Schur* 积的范数》，《线性代数及其应用》*79*（*1986*），*209—213*。

Erik Christensen，丹麦哥本哈根哥本哈根大学数学研究所。电子邮箱：echris@math.ku.dk