arXiv:2301.05025v1 [math.HO] 11 Jan 2023

拓扑数据分析“听见”鼓与编钟的形状

作者：Guo-Wei Wei

2023年1月13日

摘要

马克·卡茨于1966年提出了一个著名问题：“能否听出鼓的形状？”这是一个谱几何问题，过去六十年来一直令数学家着迷，同时对建筑声学、音频取证、模式识别、放射学和成像科学等许多其他领域也十分重要。一个相关的问题是，如何听出鼓的形状。我们表明，答案就在中国公元前475—433年的65件曾侯乙编钟中。这套编钟的尺寸和重量逐渐变化，从而能够演奏旋律、音程并体现不同的律制。许多其他乐器也采用了相同的设计原理，例如木琴、排箫、钢琴等。我们揭示了许多乐器的渐进模式与拓扑数据分析（TDA）中的滤过（或谱序列）之间存在着引人入胜的联系。我们认为，由滤过诱导的演化 de Rham–Hodge 理论为乐器提供了新的数学基础。本文还简要讨论了它的离散对应形式——持久拉普拉斯算子，以及许多其他持久拓扑拉普拉斯算子，包括持久层拉普拉斯算子和持续路径拉普拉斯算子。

“能否听出鼓的形状？”，这是马克·卡茨在 1966 [10], 提出的著名问题，几代数学家一直对此着迷。换句话说，如果你听到鼓发出的声音，也就是鼓产生的一组泛音，能否由此推断出它的形状？从数学角度看，谱几何问题的核心在于：能否根据定义在该形状上的拉普拉斯算子的特征值，唯一确定其形状。在二维及更高维的情形中，有许多等谱流形并非等距 [6, 15, 17]。然而，这个问题尚未彻底解决——对于某些几何类型，我们可以从声音辨别其形状 [9, 16]。这个问题的影响深远，涉及数学以外的许多领域，例如建筑声学、音频取证、模式识别、放射学、成像科学和音乐科学 [3, 4]。

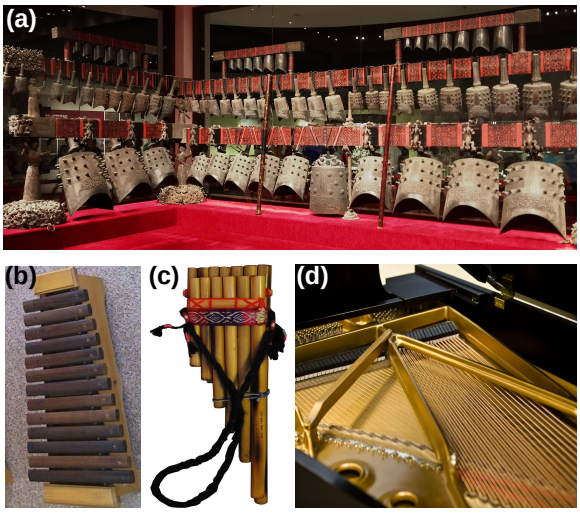

图 1：乐器中的渐进模式。**a**。曾侯乙编钟。**b**。木琴。**c**。排箫。**d**。三角钢琴的琴弦。图片由维基百科提供。

在音乐创作中，使用不同尺寸的鼓组，而不是单个鼓，是一种常见做法
以便形成主音和声进行，这是现代音乐中和声的基础。人类的大脑通过鼓组训练，能够分辨单个鼓的泛音。通过一组鼓进行比较训练和学习，是从鼓组中听出鼓的形状的基础。

有趣的是，为了创造音律和谐，古代中国人在中国战国时期（公元前475—433年）铸造了一套由65件曾侯乙编钟组成的乐器（图1a）。每件编钟的形状都经过设计，能够发出独特的声音。这套65件编钟的尺寸和重量逐渐变化，

其高度从153.4厘米（60.4英寸）到20.4厘米（8.0英寸）不等，重量从203.6千克（449磅）到2.4千克（5.3磅）不等。曾侯乙编钟的音域从C2到D7，并能在音域的中间部分演奏全部十二个半音 [21], ，从而演绎旋律、音程并体现不同律制。许多其他乐器也采用了相同的设计原理，例如木琴（图1b）、排箫（图1c）和钢琴（图1d）。由于编钟彼此距离很近，敲击时可能会产生共振，从而形成悠长的和声。编钟由青铜制成，青铜是当时最珍贵的金属之一，因此被用于各种仪式、典礼和娱乐活动。

乐器演进模式（图 1）与数学过滤（图 2a）之间存在一种引人入胜且显而易见的联系。数学过滤是一种谱序列技术， [13] 广泛应用于同调代数和拓扑数据分析（TDA）。作为数学的一个新分支，拓扑数据分析运用拓扑和几何概念来理解并提取数据中的拓扑模式与结构。拓扑数据分析的主要工具是持久同调， [5,22], 它是代数拓扑的一个分支，通过滤过为点云构建数学显微镜。通过比较分析滤过所引起的拓扑不变量变化，持久同调描绘出数据的形状， [12]。结合先进的机器学习和深度学习算法，持久同调在数据科学领域取得了巨大成功。它已成为简化生物分子相互作用的几何复杂性并降低其高维性最强大的工具之一， [11], 从而革新了药物发现以及新兴病毒变体的预测。

然而，持久同调并不能直接用于编钟的音调分析。首先，编钟组可以看作是一组不断演化的编钟流形所形成的结果，而非点云的滤过结果。此外，与编钟组的同伦形状演化相关的拓扑不变量并无变化。最后，持久同调无法呈现编钟或许多其他乐器的频率或音调分析。

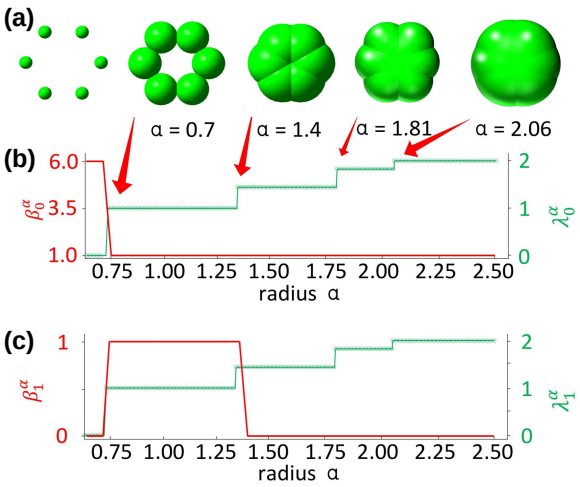

图 2：滤过和持久拉普拉斯谱示意图。**a.** 点云的滤过。**b-c.** 点云的持久拉普拉斯分析。这里，β_j^α和 $\lambda_j^\alpha(j=0,1)$ 分别是持久贝蒂-j 数和第 j 个持久拉普拉斯的第一个非零特征值。注意，λ_j^α 捕捉了数据的同伦形状演化（参见 $\alpha = 1.5$ 之后的频率变化），而这并未反映在 β_j^α 中。λ_0^α 与 λ_1^α 之间的相似性纯属巧合。图片由蒋健博士提供。

最近，有人提出了一种演化德拉姆–霍奇方法，作为经典德拉姆-霍奇理论的一种多尺度推广；后者是20世纪数学的里程碑 [1]。该方法对滤过诱导流形进行多尺度几何与拓扑分析，并可在编钟集合上定义一族演化霍奇拉普拉斯算子，以刻画其音调演化。结合一族演化德拉姆复形，演化霍奇拉普拉斯算子通过其核或零空间维数揭示了完整的拓扑不变量集合，例如贝蒂数。

流形上的演化德拉姆
–霍奇方法的点云对应方法称为单纯复形上的持续谱图 [18] （也称为持久拉普拉斯算子[14]）。与演化德拉姆–霍奇方法一样，持久拉普拉斯算子不仅像持久同调那样在其调和谱中给出完整的拓扑不变量集合，还能在其第一非调和谱中捕捉数据在滤过过程中的同伦形状演化（图 2b 和 2c），而持久同调无法描述这一点。

通过层论 [8] 对持久拉普拉斯算子进行了推广，由此得到的层持久拉普拉斯算子

[20]允许将异质特征嵌入拓扑不变量中，例如，将非几何信息编码到基于几何的单纯复形中。另一种推广是基于路径复形和路径同调 [2, 7]构建的持久路径拉普拉斯算子 [19], 。持久路径拉普拉斯算子专为有向图和有向网络设计。这些新的持久拓扑拉普拉斯算子不仅为音乐科学中的音调分析奠定了数学基础，还显著拓展了拓扑数据分析的适用领域和能力。

参考文献

[1] J. Chen、R. Zhao、Y. Tong 和 G.-W. Wei。演化德拉姆–霍奇方法。《离散与连续动力系统·*B*辑》，26(7):3785，2021年。[2] S. Chowdhury 和 F. M´emoli。有向网络的持久路径同调。载于第二十九届*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集，第1152–1169页。SIAM，2018年。[3] L. Cosmo、M. Panine、A. Rampini、M. Ovsjanikov、M. M. Bronstein 和 E. Rodol`a。等谱化，或如何聆听形状、风格与对应关系。载于*IEEE/CVF*计算机视觉与模式识别会议论文集，第7529–7538页，2019年。[4] I. Dokmani´c、R. Parhizkar、A. Walther、Y. M. Lu 和 M. Vetterli。声学回波揭示房间形状。《美国国家科学院院刊》，110(30):12186–12191，2013年。[5] H. Edelsbrunner、J. Harer 等。持久同调——综述。《当代数学》，453:257–282，2008年。[6] C. Gordon、D. Webb 和 S. Wolpert。通过黎曼轨形构造等谱平面域与曲面。《数学发明》，110(1):1–22，1992年。[7] A. Grigor'yan、Y. Lin、Y. Muranov 和 S.-T. Yau。路径复形和有向图的同调。*arXiv*预印本 *arXiv:1207.2834*，2012年。[8] J. Hansen 和 R. Ghrist。迈向胞腔层的谱理论。《应用与计算拓扑学杂志》，3(4):315–358，2019年。[9] H. Hezari、Z. Lu 和 J. Rowlett。梯形的狄利克雷等谱问题。《数理物理学杂志》，62(5):051511，2021年。[10] M. Kac。能否听出鼓的形状?《美国数学月刊》，73(4P2):1–23，1966年。[11] J. Liu、K.-L. Xia、J. Wu、S. S.-T. Yau 和 G.-W. Wei。生物分子拓扑：建模与分析。《数学学报（英文版）》，38(10):1901–1938，2022年。[12] P. Y. Lum、G. Singh、A. Lehman、T. Ishkanov、M. Vejdemo-Johansson、M. Alagappan、J. Carlsson 和 G. Carlsson。利用拓扑从复杂数据的形状中提取洞见。《科学报告》，3(1):1–8，2013年。[13] J. McCleary。谱序列使用指南。第58卷。剑桥大学出版社，2001年。[14] F. M´emoli、Z. Wan 和 Y. Wang。持久拉普拉斯算子：性质、算法与意义。《*SIAM*数据科学数学杂志》，4(2):858–884，2022年。[15] J. Milnor。某些流形上拉普拉斯算子的特征值。《美国国家科学院院刊》，51(4):542–542，1964年。[16] A. W. Reid。算术双曲2维和3维流形的等谱性与可公度性。《杜克数学杂志》，65(2):215–228，1992年。

[17] M.-F. Vign´eras。等谱且非等距的黎曼流形。数学年刊，112(1):21–32，1980年。[18] R. Wang、D. D. Nguyen 和 G.-W. Wei。持续谱图。生物医学工程数值方法国际期刊，36(9):e3376，2020年。[19] R. Wang 和 G.-W. Wei。持续路径拉普拉斯算子。数据科学基础，5(1):26–55，2023年。[20] X. Wei 和 G.-W. Wei。持久层拉普拉斯算子。*arXiv*预印本 *arXiv:2112.10906*，2021年。[21] Y. Yan、K. Chai、H. Liang 和 L. Kong。物理学对中国古代编钟的研究。载于*AIP*会议论文集，第1517卷，第43–48页。美国物理学会，2013年。[22] A. Zomorodian 和 G. Carlsson。计算持久同调。离散与计算几何，33:249–274，2005年。

Guo-Wei Wei 是密歇根州立大学的密歇根州立大学基金会教授。他的研究涉及生物科学和数据科学的数学基础。