arXiv:2301.05044v1 [math.NT] 12 Jan 2023

关于几乎素数的 k 元组

陈斌

Abstract. 令 τ 表示因子函数，$\mathcal{H}=\{h_1,...,h_k\}$ 为一个可容许集。我们证明，存在无穷多个 n，使得乘积 $\prod_{i=1}^{k}(n+h_i)$ 无平方因子，且 $\sum_{i=1}^{k}\tau(n+h_i)\leq\lfloor\rho_k\rfloor$，其中 ρ_k 渐近于 $\frac{2126}{2853}k^2$。这一结果改进了 M. Ram Murty 和 A. Vatwani 先前的结果，将 $2126/2853$ 替换为 $3/4$。证明的主要工具是高秩塞尔伯格筛，以及用于光滑模数的等差数列中的除数函数的 Irving-Wu-Xi 估计。

1. 引言

我们考虑一个由互不相同的非负整数构成的集合 $\mathcal{H}=\{h_1,...,h_k\}$。如果对每个素数 p，h_i 占据的模 p 的不同剩余类的个数小于 p，就称该集合为可容许集。下面的猜想是素数理论中最重要的未解决问题之一。

猜想 1.1（素数 k 元组猜想）。给定一个可容许集 $\mathcal{H}=\{h_1,...,h_k\}$，存在无穷多个整数 n，使得所有 $n+h_i$ 都是素数。

取 $\mathcal{H}=\{0,2\}$，即可立即由此推出孪生素数猜想。尽管关于 $k\geq 2$ 的素数 k 元组猜想仍悬而未决，但许多数学家已在不同方向上取得了部分进展。其中一个方向是研究素数间的小间隔是否存在。2013年，Zhang [11] 证明了

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n)<7\times 10^7$$

通过改进 GPY 方法。他证明中的主要要素，是 Bombieri-Vinogradov 定理的一个更强版本，该版本适用于模数为光滑数的情形。Zhang 取得突破后，Maynard [3] 和 Tao 发展出了 Selberg 筛法的一个更高秩版本。这为证明素数之间的有界间隔提供了另一种方法，同时也带来了若干其他推论，因为这种方法更加灵活，能够证明在有界长度的区间中存在由许多素数组成的素数簇（参见 [3, 定理 1.1]）。值得一提的是，Zhang 关于光滑模数的 Bombieri-Vinogradov 定理强化版本，可以与 Maynard-Tao 筛法结合，证明在长度更短的有界区间中存在素数簇（参见 [9, 定理 4(vi)]）。这意味着，两种方法结合起来会比单独使用 Maynard-Tao 筛法得到更好的结果。关于这一方向进展的进一步讨论，请参阅 [9]。

2020年数学主题分类：11N05、11N35、11N36。关键词与短语：Selberg 筛法、光滑模数、几乎为素数的 k 元组。B. Chen 谨此感谢中国国家留学基金管理委员会（CSC）的资助。

对素数 k-元组猜想的另一种近似处理方式，是为以下表达式建立一个上界

$$\sum_{i=1}^{k}\tau(n+h_i),$$

其中， τ 表示因子函数。显然，若对无穷多个 n，有上界 $2k$ ，则素数 k-元组猜想成立。对于较大的 k，目前最好的结果是

定理 1.2（M. Ram Murty 和 A. Vatwani [1]）。存在 ρ_k ，使得有 $\gg x(\log\log x)^{-1}(\log x)^{-k}$ 个整数 $n \leq x$ ，其乘积 $\prod_{i=1}^{k}(n+h_i)$ 是无平方因子的，并且

$$\sum_{i=1}^{k}\tau(n+h_i) \leq \lfloor \rho_k \rfloor.$$

对于较大的 k，有 $\rho_k \sim \frac{3}{4}k^2$.

我们回顾此前的结果和方法。1997 年，Heath-Brown [6] 利用 Selberg 筛法，在 $\rho_k \sim \frac{3}{2}k^2$ 的情况下得到了上述结果。2006 年，Ho 和 Tsang [7] 通过改进 Heath-Brown 的筛权，得到了$\rho_k \sim k^2$ 。2017 年，M. Ram Murty 和 Akshaa Vatwani [1] 发展了一种带有加性扭曲的一般高秩塞尔伯格筛，以证明定理 1.2。接下来，我们将更详细地说明哪些方面决定了他们结果的质量。

当我们使用筛法研究素数 k-元组猜想时，影响结果的首要因素是筛法本身。粗略地说，使用形式更一般的筛权，就有更大的空间获得更好的数值结果。例如，Maynard 的工作 [3] 就体现了这一点。另一个关键因素是如何处理应用筛法时产生的误差项。为了控制这些误差项，上述结果都利用了 Bombieri-Vinogradov 定理的因子函数类比形式。更确切地说，令 $(a,q) = 1$，并设

$$E(x,q,a) = \sum_{\substack{n\leq x\\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\ q)}}\tau(n) - \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\leq x\\ (n,q)=1}}\tau(n), \tag{1.1}$$

wh其中 φ 是欧拉函数。那么对于任意 $A>0$ 和任意 $\theta < 2/3$ ，

$$\sum_{q\leq x^{\theta}}\max_{(a,q)=1}|E(x,q,a)| \ll_{A,\theta} \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{1.2}$$

事实上，(1.2) 可以由以下结果推出。对于 $q < x^2$，对于任意$\epsilon > 0$，有

$$|E(x,q,a)| \ll_{\epsilon} q^{-1/4}x^{1/2+\epsilon}. \tag{1.3}$$

这由 Selberg [10, pp. 234-237]和 Hooley [8] 与 Linnik 独立证明；这是 Kloosterman 和的 Weil 界的推论。(1.2) 中θ 的取值范围决定了定理 1.2 中 ρ_k 的取值。实际上， [1] 中的证明表明，只要 (1.2) 对 $0 < \theta < \theta_0$成立，就有$\rho_k \sim (2\theta_0)^{-1}k^2$ 。我们注意到，取值范围 $\theta < 2/3$

(1.2) 的这一取值范围仍是目前已知的最佳结果，尽管有理由预期 (1.2) 对所有 $\theta < 1$ 都成立。2015 年，A. J. Irving 在假设 q 仅含较小素因子的情况下，运用 van der Corput 方法的 q 类比，突破了 2/3 这一障碍。更准确地说，给定 $\varepsilon > 0$, Irving [5]（或见下文引理 4.2）证明了：

$$|E(x,q,a)| \ll_\varepsilon q^{-1}x^{1-\delta'} \tag{1.4}$$

对于 $q < x^{2/3+1/246-\varepsilon}$，只要 q 的任一素因子不超过 x^η，其中 δ' 和 η 是依赖于 ε 的一些正常数。最近，Wu 和 Xi [12] 发展了算术指数对理论，并利用该理论改进了 Irving 的结果，将 q 的范围扩展至 $q < x^{2/3+55/12756-\varepsilon}$（见 [12, 第 10] 节或下文的引理 4.3）。注意，$55/12756 \approx 1/231.92$。

自然会想到，我们能否将 Irving-Wu-Xi 估计与带有加性扭曲的高秩塞尔伯格筛结合起来，以改进定理 1.2。这是本文的主要目标，我们将证明

定理 1.3。存在 ρ_k，使得有 $\gg x(\log\log x)^{-1}(\log x)^{-k}$ 个整数 $n \le x$，其乘积 $\prod_{i=1}^k(n+h_i)$ 无平方因子，且

$$\sum_{i=1}^k \tau(n+h_i) \le \lfloor \rho_k \rfloor.$$

对于较大的 k，我们有 $\rho_k \sim \frac{2126}{2853}k^2$.

注意到 $2126/2853 = 0.74518... < 3/4$。

2. Notation

本节回顾 [2] 中引入的记号和术语。更详细的说明请参阅 [1] 和 [2]。

若整数 $\underline{d} := (d_1, \cdots, d_k)$ 构成一个 k-元组，且其分量的乘积无平方因子，则称该元组无平方因子。对于实数 R，不等式 $\underline{d} \le R$ 表示 $\prod_i d_i \le R$. 元组之间的整除性记号按分量定义，即，

$$\underline{d}|\underline{n} \Longleftrightarrow d_i|n_i \text{ for all } 1 \le i \le k.$$

元组之间模一个元组的同余记号也按分量定义。另一方面，若标量 q 整除元组 $\underline{d}$，我们称之为标量整除元组，当且仅当 q 整除乘积 $\prod_i d_i.$。明确写出同余关系 $\underline{d} \equiv \underline{e} \pmod q$ 时，表示该关系对每个分量都成立。

如果向量函数的所有分量函数都是积性函数，就称该向量函数为积性函数。在此情形下，我们将函数 $f(\underline{d})$ 定义为其各分量（积性）函数的乘积，即

$$f(\underline{d}) := \prod_{i=1}^k f_i(d_i).$$

类似地，如果向量函数 $v(\underline{d})$ 的所有分量 v_i 都是可加的，就称该向量函数为可加的，此时我们定义

$$v(\underline{d}) = \sum_{i=1}^{k} v_i(d_i).$$

我们将使用一些向量函数，包括欧拉函数，以及最小公倍数函数和最大公约数函数。例如，

$$[\underline{d}, \underline{e}] := \prod_{i=1}^{k} [d_i, e_i].$$

当 $[\underline{d}, \underline{e}]$ 作为向量函数的自变量时，它表示各分量为 $[d_i, e_i]$的元组。具体含义将根据上下文确定。

我们采用以下多重指标记号来表示定义在 k元组上的函数 $F(t)$ 的混合偏导数，

$$F^{(\underline{\alpha})}(\underline{t}) := \frac{\partial^{\alpha} F(t_1, \cdots, t_k)}{(\partial t_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial t_k)^{\alpha_k}},$$

对于任意满足 $\alpha := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$. 的 k元组 $\underline{\alpha}$

给定定义在 $\mathbb{R}^k$上且具有紧支撑的光滑函数 G 和 H，我们定义

$$C(G,H)^{(\underline{a})} := \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{t_j^{a_j - 1}}{(a_j - 1)!} \right) G(\underline{t})^{(\underline{a})} H(\underline{t})^{(\underline{a})} \, \mathrm{d}\underline{t}$$

and

$$C(G,H)^{(\underline{a},\underline{b},\underline{c})} := (-1)^{a+b} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{t_j^{c_j - 1}}{(c_j - 1)!} \right) G(\underline{t})^{(\underline{a})} H(\underline{t})^{(\underline{b})} \, \mathrm{d}\underline{t}.$$

$\tau_k(n)$表示广义除数函数，即将 n 写成 k 个正整数之积的方法数。数 γ 表示欧拉常数。我们用 $\ll$ 表示维诺格拉多夫记号。我们还约定，用$n \sim N$表示 $N < n \leq 2N$。或者， $f(x) \sim g(x)$也可以表示 $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$。具体含义将由上下文 स्पष्ट。小于或等于 x的最大整数记为 $\lfloor x \rfloor$. 。求和符号上方的短横线表示我们对k元组求和，其中$\underline{d}$，且 $\underline{e}$无平方因子并与 W互素。在全文中， δ表示一个可以取得任意小的正量。

3. Some hypotheses

本节回顾 [1] 和 [2]中讨论的高秩塞尔伯格筛的一些主要特征。

给定一个由 k-元组组成的集合 $SS = \{\underline{n} = (n_1, \cdots n_k)\}$，我们希望估计以下形式的和：

$$\sum_{\underline{n} \in S} \omega_{\underline{n}} \left(\sum_{\underline{d} | \underline{n}} \lambda_{\underline{d}} \right)^2, \tag{3.1}$$

其中 $\omega_{\underline{n}}$ 是附加在元组 $\underline{n}$ 上的“权重”，而 $\lambda_{\underline{d}}$ 是待选取的参数。在本节中，我们默认条件 $\underline{n} \in S$ 成立，不再特别说明。我们对这个和施加以下假设：

H1. 若素数 p 整除元组 $\underline{n}$，且 p 整除 n_i 和 n_j，其中 $i \neq j$，那么 p 必须属于某个固定的有限素数集 P_0。

这一假设使我们能够运用所谓的“W 技巧”。也就是说，我们令$W = \prod_{p<D_0} p$，其中 D_0 依赖于 S，使得 $p \in P_0$ 蕴含 $p \mid W$。接着，我们固定一个剩余类元组 $\underline{b}$（模 W），使得对于所有 i，$(b_i, W) = 1$，并在所考虑的和中限制 $\underline{n}$ 与 $\underline{b}$ 同余。

H2’。设 W、$\underline{b}$ 如 H1 中所述，函数 $\omega_{\underline{n}}$ 满足

$$\sum_{\substack{\underline{d}\mid\underline{n}\\ \underline{n}\equiv\underline{b}\,(\mathrm{mod}\ W)}} \omega_{\underline{n}} = \frac{X}{f(\underline{d})} + \frac{X^*}{f_*(\underline{d})} v(\underline{d}) + r_{\underline{d}}$$

对于依赖于集合 S 的某些实数 X 和 X^*，其中 f 和 f_* 是乘法的，而 v 是可加的。

H3。设 f 如 H2’ 中所述，f 的各分量满足

$$f_j(p) = \frac{p}{\alpha_j} + O(p^t), \quad \text{with } t < 1,$$

对于每个素数 p 以及某个与 X、k 无关的固定 $\alpha_j \in \mathbb{N}$、α_j。

我们将元组 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 记为 $\underline{\alpha}$，并将各分量之和 $\Sigma_{j=1}^k \alpha_j$ 记为 α.

H4’。存在 $\varpi > 0$、$\eta_0 > 0$，使得

$$\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]\le X^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ d_i,e_i\le X^{\eta_0}\,\forall i}} |r_{[\underline{d},\underline{e}]}| \ll \frac{X}{(\log X)^A},$$

对于任意 $A > 0$、$\epsilon > 0$，有 $X \to \infty$.。隐含常数可能依赖于 A 和 ϵ。

H5。令 v 如 H2’ 中所述。对于每个 j，存在 β_j，使得

$$\sum_p \frac{v_j(p)}{p^{1+\delta}} = \frac{\beta_j}{\delta} + O(1), \qquad \sum_p \frac{|v_j(p)|}{p^{1+\delta}} \ll \frac{1}{\delta}$$

有 $\delta \to 0$。

我们将根据一个固定的对称函数 F 来选取 $\lambda_{\underline{d}}$：$[0,\infty)^k \to \mathbb{R}$，其支撑集位于截断单纯形上

$$\Delta_k^{[\kappa]}(1) := \{(t_1, \cdots, t_k) \in [0,\kappa]^k : t_1 + \cdots + t_k \le 1\}, \quad \text{for some } \kappa > 0,$$

as

$$\lambda_{\underline{d}} = \mu(\underline{d}) F\left(\frac{\log \underline{d}}{\log R}\right) := \mu(d_1)\cdots\mu(d_k) F\left(\frac{\log d_1}{\log R}, \cdots, \frac{\log d_k}{\log R}\right), \tag{3.2}$$

其中 R 是 X的某个固定幂。若 $\kappa = 1$，为简洁起见，我们记 $\Delta_k(1) = \Delta_k^{[1]}(1)$。

此后，我们假设 D_0（因此 W）$\to \infty$ 为 $X \to \infty$。

4. Lemmas

本节将介绍一些预备结果，其中一些直接引自文献。这些引理在第 5 节主定理的证明中起着重要作用。

在本节中，大 O 和小 o 记号均指关于 $X \to \infty$ 的渐近关系。此外，隐含常数可以依赖于那些与 X 无关的参数（例如函数 f、参数 A、α_j、β_j 等），但不能依赖于那些确实依赖于 X 的量（例如 D_0、W、R）。

首先回顾 [1] 中的主要结果，该结果可用于处理应用带有加性扭曲的高秩 Selberg 筛法时产生的主项。

引理 4.1（M. Ram Murty 和 A. Vatwani, [1, 引理 4.2]）。令 R 为 X 的某个固定幂，并令 $D_0 = o(\log\log R)$。设 f 为满足 H3、v 为满足 H5 的乘性向量函数和可加的向量函数。设 G、H 为具有紧支撑的光滑函数。记

$$G\left(\frac{\log \underline{d}}{\log R}\right) := G\left(\frac{\log d_1}{\log R}, \cdots, \frac{\log d_k}{\log R}\right)$$

对于 H 也类似。于是

$$\sum_{\underline{d},\underline{e}}{}' \frac{\mu(\underline{d})\mu(\underline{e})}{f([\underline{d},\underline{e}])} v([\underline{d},\underline{e}]) G\left(\frac{\log \underline{d}}{\log R}\right) H\left(\frac{\log \underline{e}}{\log R}\right)$$

由（如 $R \to \infty$）得到

$$(1+o(1))\frac{c(W)}{(\log R)^{\alpha-1}} \sum_{j=1}^{k} \beta_j \alpha_j C_j^*(G,H)^{(\underline{\alpha})} + O\left(\frac{c(W)\log D_0}{(\log R)^{\alpha}}\right),$$

其中,

$$C_j^*(G,H)^{(\underline{\alpha})} = C(G,H)^{(\underline{\alpha},\underline{\alpha},\underline{\alpha}+e_j)} - C(G,H)^{(\underline{\alpha}-e_j,\underline{\alpha},\underline{\alpha})} - C(G,H)^{(\underline{\alpha},\underline{\alpha}-e_j,\underline{\alpha})},$$

$$c(W) := \frac{W^{\alpha}}{\varphi(W)^{\alpha}},$$

且元组 $\underline{\alpha} \pm e_j$ is $(\alpha_1, \cdots, \alpha_j \pm 1, \cdots, \alpha_k)$。

引理 4.2（A. J. Irving [5, 定理 1.2]）。设 $E(x,q,a)$ 如 (1.1) 中所示。假设 $\varpi, \eta > 0$ 满足

$$246\varpi + 18\eta < 1.$$

存在 $\delta' > 0$，依赖于 ϖ 和 η，使得对于任意的 x^{η}-$smooth$、无平方因子 $q \le x^{2/3+\varpi}$ 以及任意 $(a,q) = 1$，我们有

$$E(x,q,a) \ll_{\varpi,\eta} q^{-1}x^{1-\delta'}.$$

引理 4.3（J. Wu 和 P. Xi [12, 定理 1.2]）。令 $E(x,q,a)$ 如 (1.1) 中定义。假设 $\varepsilon > 0$。存在正实数 $\delta' = \delta'(\varepsilon)$ 和 $\eta = \eta(\varepsilon)$，使得对于任意 q^{η}-$smooth$、无平方因子的 $q \le x^{2/3+55/12756-\varepsilon}$ 以及任意 $(a,q) = 1$，我们有

$$E(x,q,a) \ll_{\varepsilon} q^{-1}x^{1-\delta'}.$$

注 4.4。其表述与 [12, 定理 1.2], 略有不同，但仔细分析其证明 [12, 第 10] 节即可得出。

下面的引理是 [1, 定理 4.3] 的对应结果，也可视为带有加性扭曲的高秩塞尔伯格筛的平滑版本。这里，平滑版本是指筛权 $\lambda_{\underline{d}}$ 支持在满足乘积 $\prod_i d_i$ 仅含小于 R^κ 的素数作为素因子的 $\underline{d}$ 上。

引理 4.5. 设 $\lambda_{\underline{d}}$ 如 (3.2) 中所述。假设 H1、H2'、H4' 和 H5 成立。我们还假设，由 H2' 得到的两个函数 f 和 f_* 分别满足带有 α_j 和 α_j^* 的 H3。令 $R = X^{\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\varpi)-\delta}, \kappa = \frac{2\eta_0}{2/3+\varpi}$ 和 $D_0 = o(\log\log R)$。那么，

$$\sum_{\underline{n}\equiv\underline{b}\,(\mathrm{mod}\ W)} \omega_{\underline{n}} \left(\sum_{\underline{d}\mid\underline{n}} \lambda_{\underline{d}}\right)^2 = (1+o(1))\frac{c(W)X}{(\log R)^\alpha} C(F,F)^{(\underline{\alpha})} + (1+o(1))\frac{c^*(W)X^*}{(\log R)^{\alpha^*-1}} \sum_{j=1}^{k} \beta_j \alpha_j^* C_j^*(F,F)^{(\underline{\alpha}^*)}$$

其中 $C_j^*(F,F)^{(\underline{\alpha}^*)}$ 表示该量

$$C(F,F)^{(\underline{\alpha}^*,\underline{\alpha}^*,\underline{\alpha}^*+e_j)} - C(F,F)^{(\underline{\alpha}^*-e_j,\underline{\alpha}^*,\underline{\alpha}^*)} - C(F,F)^{(\underline{\alpha}^*,\underline{\alpha}^*-e_j,\underline{\alpha}^*)},$$

and

$$\alpha^* = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^*, \qquad c(W) = \frac{W^\alpha}{\varphi(W)^\alpha}, \qquad c^*(W) = \frac{W^{\alpha^*}}{\varphi(W)^{\alpha^*}},$$

元组 $\underline{\alpha}^* \pm e_j$ 是 $(\alpha_1^*, \cdots, \alpha_j^* \pm 1, \cdots, \alpha_k^*)$。

证明。我们的证明沿用 [2, 定理 3.6] 的论证。我们展开平方，交换求和次序，应用 W-技巧，最后使用 $H2'$。得到

$$X \sum_{\substack{\underline{d},\underline{e}<R \\ d_i,e_i\le R^\kappa\ \forall i}}{}' \frac{\lambda_{\underline{d}}\lambda_{\underline{e}}}{f([\underline{d},\underline{e}])} + X^* \sum_{\substack{\underline{d},\underline{e}<R \\ d_i,e_i\le R^\kappa\ \forall i}}{}' \frac{\lambda_{\underline{d}}\lambda_{\underline{e}}}{f_*([\underline{d},\underline{e}])} v([\underline{d},\underline{e}]) + O\left(\sum_{\substack{\underline{d},\underline{e}<R \\ d_i,e_i\le R^\kappa\ \forall i}}{}' |\lambda_{\underline{d}}||\lambda_{\underline{e}}||r_{[\underline{d},\underline{e}]}|\right).$$

我们需要分析两个主要项。根据给定的 $\lambda_{\underline{d}}$ 选择，第一个项可以按照 [2] 中的定理 3.6 处理，得到

$$(1+o(1))\frac{c(W)X}{(\log R)^\alpha} C(F,F)^{(\underline{\alpha})}.$$

第二项得到

$$X^* \sum_{\underline{d},\underline{e}<R}{}' \frac{\mu(\underline{d})\mu(\underline{e})}{f_*([\underline{d},\underline{e}])} v([\underline{d},\underline{e}]) F\Big(\frac{\log \underline{d}}{\log R}\Big) F\Big(\frac{\log \underline{e}}{\log R}\Big).$$

根据引理 4.1，这可表示为

$$(1+o(1))\frac{c^*(W)X^*}{(\log R)^{\alpha^*-1}}\sum_{j=1}^{k}\beta_j\alpha_j^*C_j^*(F,F)^{(\underline{\alpha}^*)}.$$

为完成证明，我们注意到，对 R、κ 的选择以及 $H4'$ 可确保误差项可以忽略不计。□

5. Application to almost prime k-tuples

我们回顾可容许集的定义。

定义 5.1. 若集合 $\mathcal{H}=\{h_1,...,h_k\}$ 由互不相同的非负整数组成，则称其为可容许集；如果对每个素数 p，都存在一个剩余类 b_p（模 p），使得 $b_p\notin\mathcal{H}$（模 p），则该集合是可容许的。

在本节中，我们处理一个大小为 k、$\mathcal{H}=\{h_1,...,h_k\}$ 的固定的可容许集，其中 k 是一个充分大的整数。首先，我们使用 W-技巧。令 $W=\prod_{p<D_0}p$，由中国剩余定理可知，我们可以找到一个整数 b，使得对于每个 h_i，$b+h_i$ 与 W 互素。我们限制 n 取该固定剩余类 b 模 W 中的值。通过应用素数定理，可以选择 $D_0=\log\log\log N$，从而 $W\sim(\log\log N)^{1+o(1)}$。随后我们考察以下表达式：

$$S_1=\sum_{\substack{n\sim N\\ n\equiv b\,(\mathrm{mod}\,W)}}\left(\sum_{d_j\mid n+h_j\forall j}\lambda_{\underline{d}}\right)^2, \tag{5.1}$$

$$S_2=\sum_{\substack{n\sim N\\ n\equiv b\,(\mathrm{mod}\,W)}}\left(\sum_{j=1}^{k}\tau(n+h_j)\right)\left(\sum_{d_j\mid n+h_j\forall j}\lambda_{\underline{d}}\right)^2. \tag{5.2}$$

对于正数 ρ，我们用 $S(N,\rho)$ 表示以下量

$$\rho S_1-S_2.$$

我们论证的关键在于，恰当选取 $\lambda_{\underline{d}}$，从而证明

$$S(N,\rho)>0$$

对所有充分大的 N 都成立。这意味着，存在无穷多个整数 n，使得

$$\sum_{j=1}^{k}\tau(n+h_j)\le\lfloor\rho\rfloor,$$

其中 $\lfloor\rho\rfloor$ 表示小于或等于 ρ 的最大整数。

S_1 的渐近公式已在 [2, 引理 4.2]中推导得出。我们接下来推导 S_2.的渐近公式

5.1. S_2的渐近公式。

我们写作

$$S_2=\sum_{m=1}^{k}S_2^{(m)},\qquad S_2^{(m)}=\sum_{\substack{n\sim N\\ n\equiv b\,(\mathrm{mod}\,W)}}\tau(n+h_m)\left(\sum_{d_j\mid n+h_j\forall j}\lambda_{\underline{d}}\right)^2$$

在本小节中，我们得到了 $S_2^{(m)}$ 的渐近公式。

引理 5.2. 假设$0<\varpi<\frac{55}{12756}$。令 $\varepsilon=\frac{55}{12756}-\varpi$, $\eta=\eta(\varepsilon)$如引理 4.3, $\eta_0=\eta/2$, $\kappa=\frac{2\eta_0}{2/3+\varpi}$中所定义。取 $\lambda_{\underline{d}}$如(3.2)中所述，且 $R=N^{\frac{1}{2}\ (\frac{2}{3}+\varpi)\ -\delta}$，则当 $N\to\infty$时，

$$\begin{aligned}S_2^{(m)}:=&\sum_{\substack{n\sim N\\ n\equiv b\,(\mathrm{mod}\,W)}}\tau(n+h_m)\left(\sum_{d_j\mid n+h_j\forall j}\lambda_{\underline{d}}\right)^2\\ =&(1+o(1))\frac{W^{k-1}}{\varphi(W)^k}\frac{N}{(\log R)^k}\left(\frac{\log N}{\log R}\alpha^{(m)}-\beta_1^{(m)}-4\beta_2^{(m)}\right),\end{aligned}$$

with

$$\alpha^{(m)}=\int_{\Delta_k(1)}t_m\Big(F^{(\underline{1}+e_m)}(\underline{t})\Big)^2\,\mathrm{d}\underline{t},$$

$$\beta_1^{(m)}=\int_{\Delta_k(1)}t_m^2\Big(F^{(\underline{1}+e_m)}(\underline{t})\Big)^2\,\mathrm{d}\underline{t},$$

and

$$\beta_2^{(m)}=\int_{\Delta_k(1)}t_mF^{(\underline{1}+e_m)}(\underline{t})F^{(\underline{1})}(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}.$$

证明。沿用 [1, 引理 5.10], 中的相同论证，可以证明 H1、H2'、H3 和 H5 均成立。H2'中的变量满足

$$X=\frac{\varphi(W)}{W^2}N\left(\log N+2\gamma-1+\sum_{p\mid W}\frac{2\log p}{p-1}\right),\quad X^*=-\frac{\varphi(W)}{W^2}N,$$

$$f(\underline{d})=f_*(\underline{d})=\frac{\varphi(d_m)}{d_m\tau(d_m)}\prod_{p\mid d_m}\left(\frac{2p}{2p-1}\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{d_j^2}{\varphi(d_j)},$$

$$v(\underline{d})=\log d_m-\sum_{p\mid d_m}\frac{\log p}{2p-1}-\sum_{j\neq m}\sum_{p\mid d_j}\frac{2\log p}{p-1},$$

$$r_{\underline{d}}=E'(N,q,a)+O(d_m^{1/2}q^{\epsilon-1}\sqrt{N}),$$

其中

$$q=W\prod_{j=1}^{k}d_j,$$

$$E'(N,q,a)=\tau(\delta)\sum_{d|\delta}\frac{\mu(d)}{\tau(d)}E(N/\delta d,q',a_d), \tag{5.3}$$

满足 $\delta=(a,q)$ $q'=q/\delta, a_d\equiv a\overline{\delta d}$（模 q'）。这里， $\overline{\delta d}$是 δd模 q'的逆元，而a 是一个取决于 b、 m、 $\underline{d}$和 W的整数。

H3 对于 f 和 f_* 成立，其中

$$\alpha_j=\alpha_j^*=\begin{cases}1 & \text{if } j=1,\cdots,k,\ \ j\neq m,\\ 2 & \text{if } j=m.\end{cases} \tag{5.4}$$

对于由下式给出的加性函数 v ，H5 对 β_j成立

$$v_j(p)=-\frac{2\log p}{p-1}\quad\text{for }\ j\neq m,\qquad v_m(p)=\log p-\frac{\log p}{2p-1},$$

and

$$\beta_j=\begin{cases}0 & \text{if } j=1,\cdots,k,\ \ j\neq m,\\ 1 & \text{if } j=m.\end{cases} \tag{5.5}$$

我们详细验证 H4'。事实上，只需证明对于任意 $A>0$、 $\epsilon>0$,

$$\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]\le N^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ d_j,e_j\le N^{\eta_0}\,\forall j}}{}'|E'(N,q,a)|+O\left(\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]\le N^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ d_j,e_j\le N^{\eta_0}\,\forall j}}{}'[d_m,e_m]^{1/2}q^{\epsilon-1}\sqrt{N}\right)\ll\frac{N}{(\log N)^A}, \tag{5.6}$$

其中 $q=W\prod_j[d_j,e_j]$。记 $\prod_{j\neq m}[d_j,e_j]$为 $[\underline{d},\underline{e}]_m$，则有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]\le N^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ d_i,e_i\le N^{\eta_0}\,\forall j}}{}'[d_m,e_m]^{1/2}q^{\epsilon-1}&\ll\sum_{[\underline{d},\underline{e}]\le N^{2/3+\varpi}}{}'[d_m,e_m]^{1/2}q^{\epsilon-1}\\ &\ll W^{\epsilon-1}\sum_{[d_m,e_m]\le N^{2/3+\varpi}}[d_m,e_m]^{\epsilon-1/2}\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]_m\le N^{2/3+\varpi}\\ [\underline{d},\underline{e}]_m\text{ square-free}}}([\underline{d},\underline{e}]_m)^{\epsilon-1}.\end{aligned}$$

利用 [2, 命题 3.1] 和分部求和，并结合 $\tau_3(n)$ 的平均阶为 $(\log n)^2$, 这一事实，我们得到

$$\sum_{[d_m,e_m]\le N^{2/3+\varpi}}[d_m,e_m]^{\epsilon-1/2}\ll\sum_{r\le N^{2/3+\varpi}}r^{\epsilon-1/2}\tau_3(r)\ll(N^{2/3+\varpi})^{\epsilon+1/2}(\log N)^2.$$

类似地,

$$\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]_m\le N^{2/3+\varpi}\\ [\underline{d},\underline{e}]_m\text{ square-free}}}([\underline{d},\underline{e}]_m)^{\epsilon-1}\ll\sum_{r\le N^{2/3+\varpi}}r^{\epsilon-1}\tau_{3(k-1)}(r)\ll(N^{2/3+\varpi})^{\epsilon}(\log N)^{3k}.$$

由于 ϵ 可以任意小，且 $W \ll (\log\log N)^2,$，我们得到，

$$\sideset{}{'}\sum_{\substack{[\underline{d},\underline{e}]\le N^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ d_j,e_j\le N^{\eta_0}\,\forall j}} [d_m,e_m]^{1/2} q^{\epsilon-1}\sqrt{N} \ll N^{\epsilon'+(2/3+\varpi)/2}\sqrt{N},$$

对任意 $\epsilon'>0$。由于 $2/3+\varpi<1$，该项确实是 $N(\log N)^{-A}$的阶，对任意 $A>0$ 均如此，正如所需。现在我们只需考虑(5.6)的第一项。它可以被估计为

$$\sum_{\substack{q\le W N^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ q\mid \prod_{p\le N^{\eta_0}} p}} \tau_{3k}(q) \max_{a\,(\mathrm{mod}\ q)} |E'(N,q,a)|$$

$$\ll \left(\sum_{q\le N^{2/3-\epsilon}} + \sum_{\substack{N^{2/3-\epsilon}<q\le N^{2/3+\varpi-\epsilon}\\ q\mid \prod_{p\le N^{\eta_0}} p}} \right) \mu(q)^2 \tau_{3k}(q) \max_{a\,(\mathrm{mod}\ q)} |E'(N,q,a)| \tag{5.7}$$

我们首先处理(5.7)的第一项。注意到(5.3)给出

$$E'(N,q,a) = \tau(\delta) \sum_{d\mid\delta} \frac{\mu(d)}{\tau(d)} E\left(\frac{N}{\delta d}, \frac{q}{\delta}, a_d\right),$$

其中 $\delta=(a,q)$。
若 $\left(\frac{N}{\delta d}\right)^{\frac{1}{2}} > \frac{q}{\delta}$，则由(1.3)可得

$$\left| E\left(\frac{N}{\delta d}, \frac{q}{\delta}, a_d\right)\right| \ll \left(\frac{q}{\delta}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{N}{d\delta}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{4}} \ll q^{-\frac{1}{4}} N^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{4}} \ll \frac{N}{q},$$

只要$q<N^{\frac{2}{3}-\frac{\epsilon}{3}}$。
若 $\left(\frac{N}{\delta d}\right)^2 \le \frac{q}{\delta}$，我们利用平凡上界得到

$$\begin{aligned}\left| E\left(\frac{N}{\delta d}, \frac{q}{\delta}, a_d\right)\right| &\le \left| \sum_{\substack{n\le \frac{N}{\delta d}\\ n\equiv a_d\,(\mathrm{mod}\ q\delta^{-1})}} \tau(n)\right| + \frac{1}{\varphi(q\delta^{-1})} \left| \sum_{\substack{n\le \frac{N}{\delta d}\\ (n,q\delta^{-1})=1}} \tau(n)\right| \\ &\le N^{\epsilon} + \frac{N}{\delta d}\log N \frac{\log q\delta^{-1}}{q\delta^{-1}} \ll \frac{N\log^2 N}{q},\end{aligned}$$

其中我们用到了估计 $\frac{1}{\varphi(n)} \ll \log\log n$。因此，我们得到

$$|E'(N,q,a)| \ll \tau(\delta)^2 \frac{N\log^2 N}{q} \ll \tau(q)^2 \frac{N\log^2 N}{q}$$

对于 $q \le N^{2/3-\epsilon}$。

另一方面， [1, 定理 5.9]给出

$$\sum_{q\le N^{\theta}} \mu(q)^2 \max_{y\le N} \max_{a \,(\mathrm{mod}\, q)} |E'(y,q,a)| \ll \frac{N}{(\log N)^{A'}}$$

对任意 $A' > 0$ 和 $\theta < 2/3$ 均成立。因此，由柯西-施瓦茨不等式，(5.7) 的第一项可估计为

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\le N^{2/3-\epsilon}} \mu(q)^2 \tau_{3k}(q) \max_{a \,(\mathrm{mod}\, q)} |E'(N,q,a)| \\
&\ll \left(\sum_{q\le N^{2/3-\epsilon}} \mu(q)^2 \tau_{3k}(q)^2 \tau(q)^2 \frac{N\log^2 N}{q} \right)^{\frac12} \left(\sum_{q\le N^{2/3-\epsilon}} \mu(q)^2 \max_{a \,(\mathrm{mod}\, q)} |E'(N,q,a)| \right)^{\frac12} \\
&\ll \frac{N}{(\log N)^A}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

对任意 $A > 0$ 均成立，因为 $N \to \infty$。

现在转而考察 (5.7) 的第二项。为了估计 $E'(N,q,a)$，其中 $N^{2/3-\epsilon} < q \le N^{2/3+\varpi-\epsilon}$, $q \mid \prod_{p\le N^{\eta_0}} p$，我们分三种情况讨论。若 $d \ge N^{\epsilon/2}$，粗略估计给出

$$\begin{aligned}
\left| E\left(\frac{N}{\delta d}, \frac{q}{\delta}, a_d\right) \right| &\le \left| \sum_{\substack{n\le \frac{N}{\delta d} \\ n\equiv a_d \,(\mathrm{mod}\, q\delta^{-1})}} \tau(n) \right| + \frac{1}{\varphi(q\delta^{-1})} \left| \sum_{\substack{n\le \frac{N}{\delta d} \\ (n,q\delta^{-1})=1}} \tau(n) \right| \\
&\ll N^{\frac{\epsilon}{4}} \left(\frac{N}{\delta d} \cdot \frac{\delta}{q} + 1 \right) + \frac{\delta}{q} \cdot \frac{N}{\delta d} \cdot N^{\frac{\epsilon}{4}} \\
&\ll \frac{N^{1-\frac{\epsilon}{4}}}{q}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

若 $d < N^{\epsilon/2}, \delta > N^{4\varpi}$，由 (1.3) 可得，

$$\left| E\left(\frac{N}{\delta d}, \frac{q}{\delta}, a_d\right) \right| \ll \left(\frac{q}{\delta}\right)^{-\frac14} \left(\frac{N}{\delta d}\right)^{\frac12+\epsilon} \ll \left(\frac{q}{\delta}\right)^{-\frac14} \left(\frac{N}{\delta}\right)^{\frac12+\epsilon} \ll q^{-\frac14} N^{\frac12-\varpi-4\varpi\epsilon+\epsilon}. \tag{5.10}$$

最后，如果 $d < N^{\epsilon/2}, \delta \le N^{4\varpi}$，我们有

$$\frac{q}{\delta} \le \frac{N^{\frac23+\varpi-\epsilon}}{\delta} \le \left(\frac{N}{\delta d}\right)^{\frac23+\varpi} = \left(\frac{N}{\delta d}\right)^{\frac23+\frac{55}{12756}-\varepsilon},$$

and

$$N^{\eta_0} = N^{\frac{\eta}{2}} \le \left(\frac{N^{\frac23-\epsilon}}{N^{4\varpi}}\right)^{\eta} \le \left(\frac{q}{\delta}\right)^{\eta}.$$

由于 ϵ 可以任意小，由引理 4.3 得到,

$$\left|E\left(\frac{N}{\delta d},\frac{q}{\delta},a_d\right)\right| \ll_{\varpi} \left(\frac{N}{\delta d}\right)^{1-\delta'}\frac{\delta}{q} \ll \frac{N^{1-\delta'}\delta^{\delta'}}{q} \ll \frac{N^{1-\delta'+4\varpi\delta'}}{q}, \tag{5.11}$$

其中 δ' 是一个依赖于 ϖ 的正数。
因此，由 (5.3)、(5.9)、(5.10) 和 (5.11) 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{N^{2/3-\epsilon}<q\le N^{2/3+\varpi-\epsilon/2}\\ q\mid\prod_{p\le N^{\eta_0}}p}} \tau_{3k}(q)\max_{a\,(\mathrm{mod}\,q)}|E'(N,q,a)|\\
&\ll \sum_{N^{2/3-\epsilon}<q\le N^{2/3+\varpi-\epsilon/2}} \tau_{3k}(q)\tau(\delta)^2\left(\frac{N^{1-\frac{\epsilon}{4}}}{q}+q^{-\frac14}N^{\frac12-\varpi-4\varpi\epsilon+\epsilon}+\frac{N^{1-\delta'+4\varpi\delta'}}{q}\right)\\
&\ll \frac{N}{(\log N)^A} \qquad (5.12)
\end{aligned}$$

对于任意 $A>0$，当 $N\to\infty$ 时。
至此，H4' 的验证完成。
由于选取 D_0 可得

$$\frac{\log D_0}{\log R}=o(1),$$

现在我们可以应用引理 4.5。其余论证与[1,引理 5.10]相同。证明完毕。□

注意到我们对$\lambda_{\underline{d}}$ 的选择满足 [2, 引理 4.2], 的条件，我们将上述引理与 S_1 在 [2, 引理 4.2]中得到的渐近公式结合起来。

引理 5.3。假设 $0<\varpi<\frac{55}{12756}$。令 $\varepsilon=\frac{55}{12756}-\varpi$, $\eta=\eta(\varepsilon)$ 按引理 4.3, $\eta_0=\eta/2$, $\kappa=\frac{2\eta_0}{2/3+\varpi}$ 中的定义。取 $\lambda_{\underline{d}}$如 (3.2) 所示，且 $R=N^{\frac12(\frac23+\varpi)^-\delta}$，则当 $N\to\infty$ 时,

$$S(N,\rho):=\rho S_1-\sum_{m=1}^{k}S_2^{(m)}=(1+o(1))\frac{W^{k-1}}{\varphi(W)^k}\frac{N}{(\log R)^k}\Big(\rho I(F)-\frac{\alpha^*}{(\frac12(\frac23+\varpi)-\delta)}+\beta_1^*+4\beta_2^*\Big),$$

with

$$\alpha^*=\sum_{i=1}^{k}\alpha^{(m)}=k\alpha^{(k)},\quad \beta_1^*=\sum_{i=1}^{k}\beta_1^{(m)}=k\beta_1^{(k)},\quad \beta_2^*=\sum_{i=1}^{k}\beta_2^{(m)}=k\beta_2^{(k)},$$

and

$$I(F)=\int_{\Delta_k(1)}(F^{(\underline{1})}(\underline{t}))^2\,\mathrm{d}\underline{t}.$$

5.2. 测试函数的选择。

现在，我们借鉴 [3] 和 [4] 中的一些思路，来选取一个合适的光滑函数 F。

令 $T = \frac{k}{\log\log k}$。定义函数 $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为

$$g(t) := \begin{cases} e^{-\frac{t}{2}}\big(1-\frac{t}{T}\big), & \text{if } t \le T, \\ 0, & \text{if } t > T, \end{cases} \tag{5.13}$$

以及单纯形集

$$\Delta_k(r) := \{(t_1,\cdots,t_k) \in [0,\infty)^k : t_1+\cdots+t_k \le r\}.$$

令 $h_1(t_1,\cdots,t_k)\colon [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ 为一个光滑函数，满足 $|h_1(t_1,\cdots,t_k)| \le 1$ 使得

$$h_1(t_1,\cdots,t_k) = \begin{cases} 1, & \text{if } (t_1,\cdots,t_k) \in \Delta_k(1-\delta_1), \\ 0, & \text{if } (t_1,\cdots,t_k) \notin \Delta_k(1), \end{cases} \tag{5.14}$$

其中，$\delta_1 > 0$ 是一个稍后选定的小常数。

此外，我们可以假设

$$\left|\frac{\partial h_1}{\partial t_j}(t_1,\cdots,t_k)\right| \le \frac{1}{\delta_1}+1 \tag{5.15}$$

对每个 $(t_1,\cdots,t_k) \in \Delta_k(1) \setminus \Delta_k(1-\delta_1)$ 以及 $1 \le j \le k$，均有。

设 $h_2(t)\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个满足下列条件的光滑函数：$|h_2(t)| \le 1$，使得

$$h_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \le t \le T-\delta_2, \\ 0, & \text{if } t > T, \end{cases} \tag{5.16}$$

其中，$\delta_2 < 1$ 是一个稍后选定的小正数。我们还可以假设

$$|h_2'(t)| \le \frac{1}{\delta_2}+1 \tag{5.17}$$

对每个 $T-\delta_2 \le t \le T$，均有。

最后，我们定义函数 $F\colon [0,\infty)^k \to \mathbb{R}$ 如下：

$$F(\underline{t}) = (-1)^k \int_{t_1}^{\infty} \cdots \int_{t_k}^{\infty} h_1(\underline{t}) \prod_{j=1}^{k} h_2(kt_j) g(kt_j)\, \mathrm{d}\underline{t}, \quad \text{for } \underline{t} \in [0,\infty)^k. \tag{5.18}$$

由于 $h_1(\underline{t}) \prod_{j=1}^{k} h_2(kt_j) g(kt_j)$ 是一个支集包含于 $\Delta_k^{[\frac{T}{k}]}(1)$ 上的光滑函数，我们得到 $F(\underline{t})$ 也是一个支集包含于 $\Delta_k^{[\frac{T}{k}]}(1)$ 上的光滑函数，并且

$$F^{(\underline{1})}(\underline{t}) = h_1(\underline{t}) \prod_{j=1}^{k} h_2(kt_j) g(kt_j). \tag{5.19}$$

鉴于引理 5.3，本节余下部分的主要目标是估计 $\alpha^{(k)}$、$\beta_1^{(k)}$、$\beta_2^{(k)}$ 和 $I(F)$。

注 5.4. 将测试函数 F 的导数选为 (5.19) 这种形式的想法源自 Maynard [3, 第 7] 节。我们在此引入光滑函数 h_1和 h_2 的做法，受到 H. Li 和 H. Pan [4] 的工作的启发。

继续之前，我们先介绍一些与函数 g相关的积分的数值结果。

$$\int_0^T g(t)^2\,\mathrm{d}t = 1 - 2(T + e^{-T} - 1)T^{-2}, \tag{5.20}$$

$$\int_0^T tg'(t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} - \frac{Te^{-T} + e^{-T} - 1}{2T^2}, \tag{5.21}$$

$$\int_0^T tg(t)^2\,\mathrm{d}t = 1 + (6 - 4T - 2Te^{-T} - 6e^{-T})T^{-2}. \tag{5.22}$$

5.3. $\alpha^{(k)}$ 的一个上界。

在本文余下部分中，由 O 或 $\ll$ 这一记号所隐含的任何常数都是绝对常数。

我们有

$$\begin{aligned} F^{(\underline{1}+e_k)}(\underline{t}) =& \frac{\partial F^{(\underline{1})}}{\partial t_k}(\underline{t}) \\ =& \frac{\partial h_1}{\partial t_k}(\underline{t})\prod_{j=1}^{k} h_2(kt_j)g(kt_j) + kh_1(\underline{t})h_2'(kt_k)g(kt_k)\prod_{j=1}^{k-1} h_2(kt_j)g(kt_j) \\ &+ kh_1(\underline{t})h_2(kt_k)g'(kt_j)\prod_{j=1}^{k-1} h_2(kt_j)g(kt_j) \\ =:& I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{5.23}$$

根据 h_1 的定义，我们得到

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k(1)} I_1^2 t_k d\underline{t} =& \int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} t_k\left(\frac{\partial h_1}{\partial t_k}(\underline{t})\right)^2 \prod_{j=1}^{k} e^{-kt_j}\left(1 - \frac{kt_j}{T}\right)^2 h_2(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} \\ \le& \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right)^2 \int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} t_k e^{-kt_k}\left(1 - \frac{kt_k}{T}\right)^2 h_2(kt_k)^2 \prod_{j=1}^{k-1} h_2(kt_j)^2 g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} \\ \le& \frac{1}{ke}\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right)^2 \int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} \prod_{j=1}^{k-1} h_2(kt_j)^2 g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

在最后一步中，我们使用了 $\max_{u\ge 0} ue^{-ku} = \frac{1}{ke}$. 令 $r = t_1 + \cdots + t_k$，于是可得

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} \prod_{j=1}^{k-1} h_2^2(kt_j)g^2(kt_j)\,\mathrm{d}\underline{t} \le& \int_{\Delta_{k-1}(1)} \left(\int_{1-\delta_1}^{1} dr\right) \prod_{j=1}^{k-1} g(kt_j)^2 h_2(kt_j)^2\,\mathrm{d}t_1 \cdots\,\mathrm{d}t_{k-1} \\ \le& \frac{\delta_1 \Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

其中 $\Upsilon = \int_0^T g(t)^2 \,\mathrm{d}t$.

我们得出

$$\int_{\Delta_k(1)} I_1^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t} \ll \frac{1}{k\delta_1} \cdot \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}. \tag{5.26}$$

由（5.24）和（5.25）可知。

关于$\int_{\Delta_k(1)} I_2^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}$的上界，我们发现

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_k(1)} I_2^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t} \leq & \left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)^2 \int_{\Delta_{k-1}(1)} \left(\prod_{j=1}^{k-1} g(kt_j)^2 h_2(kt_j)^2\right) \\
& \cdot \left(\int_{(T-\delta_2)/k}^{T/k} t_k k^2 e^{-kt_k} \left(1-\frac{kt_k}{T}\right)^2 dt_k\right) \,\mathrm{d}t_1 \cdots \,\mathrm{d}t_{k-1} \\
\leq & \left(1+\frac{1}{\delta_2}\right)^2 \int_{\Delta_{k-1}(1)} \left(\prod_{j=1}^{k-1} g(kt_j)^2 h_2(kt_j)^2\right) \\
& \cdot \frac{\delta_2}{k} \cdot \frac{T}{k} \cdot k^2 e^{-(T-\delta_2)} \left(\frac{\delta_2}{T}\right)^2 \,\mathrm{d}t_1 \cdots \,\mathrm{d}t_{k-1} \\
\ll & \frac{\delta_2}{Te^T} \cdot \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

在第二个不等式中，我们对第二个积分使用了平凡上界。现在我们来估计$\int_{\Delta_k(1)} I_3^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}$。

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_k(1)} I_3^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t} = & \int_{\Delta_k(1)} t_k k^2 h_1(\underline{t})^2 h_2(kt_k)^2 g'(kt_k)^2 \prod_{j=1}^{k-1} h_2(kt_j)^2 g(kt_j)^2 \,\mathrm{d}\underline{t} \\
\leq & k^2 \int_0^\infty t_k h_2(kt_k)^2 g'(kt_k)^2 \,\mathrm{d}t_k \prod_{j=1}^{k-1} \int_0^\infty h_2(kt_j)^2 g(kt_j)^2 \,\mathrm{d}t_j \\
\leq & k^2 \int_0^{\frac{T}{k}} t_k g'(kt_k)^2 \,\mathrm{d}t_k \prod_{j=1}^{k-1} \int_0^{\frac{T}{k}} g(kt_j)^2 \,\mathrm{d}t_j \\
= & \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}} \int_0^T t g'(t)^2 dt.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

由柯西-施瓦茨不等式、(5.26)、(5.27)、(5.28) 和 (5.21)，我们可推出

$$\begin{aligned}
\alpha^{(k)} = & \int (I_1+I_2+I_3)^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t} \\
= & \int (I_1^2+I_2^2+I_3^2+2I_1I_2+2I_1I_3+2I_2I_3) t_k \,\mathrm{d}\underline{t} \\
\leq & \int I_1^2 t_k d\underline{t} + \int I_2^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t} + \int I_3^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t} + 2\left(\int I_1^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int I_2^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$+2\left(\int I_1^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int I_3^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}}+2\left(\int I_2^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int I_3^2 t_k \,\mathrm{d}\underline{t}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}\int_0^T tg'(t)^2\,\mathrm{d}t+O\left(\left(\frac{1}{k\delta_1}+\sqrt{\frac{\delta_2}{k\delta_1 Te^T}}+\frac{1}{\sqrt{k\delta_1}}+\sqrt{\frac{\delta_2}{Te^T}}\right)\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}\right). \tag{5.29}$$

现在，取 $\delta_1=\sqrt[k]{\log_k k}$，并注意到 $T=k\log\log k$ 和 $\delta_2<1$，可得

$$\alpha^{(k)}\leq \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}\int_0^T tg'(t)^2\,\mathrm{d}t+O\left(\frac{1}{(\log k)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-1}}\right). \tag{5.30}$$

5.4. $\beta_1^{(k)}$ 和 $\beta_2^{(k)}$ 的一个上界。

回顾一下。

$$\beta_1^{(k)}=\int_{\Delta_k(1)} t_k^2(F^{(\underline{1}+e_k)}(\underline{t}))^2\,\mathrm{d}\underline{t}=\int_{\Delta_k(1)} t_k^2(I_1+I_2+I_3)^2\,\mathrm{d}\underline{t}. \tag{5.31}$$

与估计 $\alpha^{(k)}$ 时类似的论证表明，右侧 (5.31) 的主要贡献来自 $\int_{\Delta_k(1)} I_3^2t_k^2\,\mathrm{d}\underline{t}$。因此，

$$\begin{aligned}\beta_1^{(k)}&\ll\int_{\Delta_k(1)} I_3^2t_k^2\,\mathrm{d}\underline{t}\\&=\int_{\Delta_k(1)} t_k^2k^2h_1(\underline{t})^2h_2(kt_k)^2g'(kt_k)^2\prod_{j=1}^{k-1}h_2(kt_j)^2g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}\\&\leq\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\int_0^T t^2g'(t)^2\,\mathrm{d}t\ll\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

在最后一步中，我们用到了这样一个事实：$\int_0^T t^2g'(t)^2\,\mathrm{d}t=O(1)$，因为 $k\to\infty$。注意到被积函数是一个指数递减函数，即可轻易看出这一点。类似地，我们有

$$\beta_2^{(k)}=\int_{\Delta_k(1)} t_kF^{(\underline{1}+e_k)}(\underline{t})F^{(\underline{1})}(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}=\int_{\Delta_k(1)} t_k(I_1+I_2+I_3)F^{(\underline{1})}(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}. \tag{5.33}$$

(5.33) 右侧的主要贡献来自 $\int_{\Delta_k(1)} t_kI_3F^{(\underline{1})}(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}$。因此，

$$\begin{aligned}\beta_2^{(k)}&\ll\int_{\Delta_k(1)} t_kI_3F^{(\underline{1})}(\underline{t})\,\mathrm{d}\underline{t}\\&=\int_{\Delta_k(1)} t_kkh_1^2(\underline{t})h_2(kt_k)^2g'(kt_k)g(kt_k)\prod_{j=1}^{k-1}h_2(kt_j)^2g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}\\&\leq\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\int_0^T tg'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ll\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

5.5. $I(F)$ 的下界。

在本小节中，我们推导 $I(F)$ 的一个下界。我们的论证受到 [3,Section 7] 的启发。

命题 5.5. 对于每个 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_2 = \delta_2(\epsilon) > 0$，使得

$$I(F) > \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\left(1 - \frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}\right)\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u - \epsilon + O\left(\frac{e^{\sqrt{\log k}}(\log k)^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{k-1}}\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\right), \tag{5.35}$$

其中

$$\mu = \frac{\int_0^\infty u g(u)^2\,\mathrm{d}u}{\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u} \qquad and \qquad \Upsilon = \int_0^T g(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

证明。回顾 $I(F)$ 的定义以及我们的测试函数 F，可得

$$I(F) = \int_{\Delta_k(1)} (F^{(1)}(\underline{t}))^2\,\mathrm{d}\underline{t} = \int_{\Delta_k(1)} h_1(\underline{t})^2 \prod_{j=1}^k h_2(kt_j)^2 g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}.$$

根据勒贝格控制收敛定理，对于每个 $\epsilon > 0$，我们可以取足够小的$\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$，使得

$$I(F) > \int_{\Delta_k(1)} h_1(\underline{t})^2 \prod_{j=1}^k g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} - \epsilon. \tag{5.36}$$

根据 $h_1(\underline{t})$的定义，可得

$$I(F) > \int_{\Delta_k(1)} \prod_{j=1}^k g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} - \int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} \prod_{j=1}^k g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} - \epsilon. \tag{5.37}$$

因此，要证明 (5.35)，只需证明

$$\int_{\Delta_k(1)} \prod_{j=1}^k g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} \geq \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\left(1 - \frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}\right)\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u, \tag{5.38}$$

and

$$\int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} \prod_{j=1}^k g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} \ll \frac{e^{\sqrt{\log k}}(\log k)^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{k-1}}\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}. \tag{5.39}$$

我们从（5.39）开始。显然，

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} \prod_{j=1}^k g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t} &= \int_{\substack{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)\\ \underline{t}\in[0,T/k]^k}} \prod_{j=1}^k e^{-kt_j}\left(1-\frac{kt_j}{T}\right)^2\,\mathrm{d}\underline{t}\\ &\leq \int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} e^{-k(\sum_{j=1}^k t_j)}\,\mathrm{d}\underline{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq e^{-k(1-\delta_1)}\int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)} 1\,\mathrm{d}\underline{t}\\&\leq e^{-k(1-\delta_1)}\int_{\Delta_{k-1}(1)}\int_{1-\delta_1}^{1}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t_1\cdots\,\mathrm{d}t_{k-1}\\&=\frac{e^{-k(1-\delta_1)}\delta_1}{(k-1)!}.\end{aligned}\tag{5.40}$$

在倒数第二步中，我们通过 $r=t_1+\cdots+t_k$ 进行了变量替换。结合斯特林公式与（5.40），得到

$$\int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)}\prod_{j=1}^{k}g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}\ll\frac{e^{k\delta_1}\delta_1}{\sqrt{k-1}(k-1)^{k-1}}.\tag{5.41}$$

由 (5.20)，我们得到

$$\Upsilon=\int_0^T g(t)^2\,\mathrm{d}t\geq 1-\frac{2}{T}.\tag{5.42}$$

由于 $T=\frac{k}{\text{双重对数 }k}$，有

$$\Upsilon^{k-1}\geq\left(1-\frac{2\log\log k}{k}\right)^{k-1}=e^{(k-1)\log\left(1-\frac{2\log\log k}{k}\right)}\geq e^{(k-1)\frac{-4\log\log k}{k}}\geq\frac{1}{(\log k)^4}.\tag{5.43}$$

将 (5.41) 与 (5.43) 结合，便得到，当 $\delta_1=\frac{\surd}{\text{对数}_k\ k}$ 时，

$$\frac{k^k}{\Upsilon^{k-1}}\int_{\Delta_k(1)\setminus\Delta_k(1-\delta_1)}\prod_{j=1}^{k}g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}\ll\frac{e^{k\delta_1}\delta_1k^k(\log k)^4}{\sqrt{k-1}(k-1)^{k-1}}\ll\frac{e^{\sqrt{\log k}}(\log k)^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{k-1}},\tag{5.44}$$

于是结论 (5.35) 得证。

现在证明 (5.38)。由于平方非负，我们将外积分限制在 $\sum_{j=2}^{k}t_j\leq 1-T/k$,

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_k(1)}\prod_{j=1}^{k}g(kt_j)^2\,\mathrm{d}\underline{t}\geq&\int_{\substack{t_2,\cdots,t_k\geq 0\\ \sum_{j=2}^{k}t_j\leq 1-T/k}}\cdots\int\int_0^{T/k}\prod_{j=1}^{k}g(kt_j)^2\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\,\mathrm{d}t_k\\=&I'-E,\end{aligned}\tag{5.45}$$

其中

$$I'=\int_{t_2,\cdots,t_k\geq 0}\cdots\int\int_0^{T/k}\prod_{j=1}^{k}g(kt_j)^2\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\,\mathrm{d}t_k=\left(\int_0^{\infty}g(kt)^2\,\mathrm{d}t\right)^k=\frac{\Upsilon^k}{k^k},\tag{5.46}$$

$$E=\int_{\substack{t_2,\cdots,t_k\geq 0\\ \sum_{j=2}^{k}t_j>1-T/k}}\cdots\int\int_0^{T/k}\prod_{j=1}^{k}g(kt_j)^2\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\,\mathrm{d}t_k$$

$$=k^{-k}\left(\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u\right)\int\cdots\int_{\substack{u_2,\cdots,u_k\geq 0\\ \sum_{j=2}^k u_j>k-T}}\prod_{j=2}^k g(u_j)^2\,\mathrm{d}u_2\cdots\,\mathrm{d}u_k. \tag{5.47}$$

我们可以验证，所选的 g 满足

$$\mu=\frac{\int_0^\infty ug(u)^2\,\mathrm{d}u}{\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u}<1-\frac{T}{k}. \tag{5.48}$$

事实上，由 (5.20) 和 (5.22)，我们有

$$\begin{aligned}\mu=&\frac{\int_0^\infty ug(u)^2\,\mathrm{d}u}{\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u}=\frac{1+(6-4T-2Te^{-T}-6e^{-T})T^{-2}}{1-2(T+e^{-T}-1)T^{-2}}\\ =&1-\frac{2T+2Te^{-T}+4e^{-T}-4}{1-2(T+e^{-T}-1)T^{-2}}.\end{aligned} \tag{5.49}$$

由于 $T=\quad\frac{k}{\log\log k}$，因此可得

$$1-\mu-\frac{T}{k}=\frac{2T+2Te^{-T}+4e^{-T}-4}{1-2(T+e^{-T}-1)T^{-2}}-\frac{T}{k}\gg 1. \tag{5.50}$$

设 $\Theta=(k-T)/(k-1)-\mu>0$。若 $\sum_{j=2}^k u_j>k-T$，则 $\sum_{j=2}^k u_j>(k-1)(\mu+\Theta)$，因此我们有

$$1\leq\Theta^{-2}\left(\frac{1}{k-1}\sum_{j=2}^k u_j-\mu\right)^2. \tag{5.51}$$

由于 (5.51) 的右侧对所有 u_j 均非负，因此若将被积函数乘以 $\Theta^{-2}\left(\sum_{j=2}^k u_j/(k-1)-\mu\right)^2$，再去掉 $\sum_{j=2}^k u_j>k-T$ 这一条件，就能得到 E 的一个上界。我们得到

(5.52)

$$E\leq\Theta^{-2}k^{-k}\left(\int_0^\infty g(u)^2\,\mathrm{d}u\right)\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left(\frac{\sum_{j=2}^k u_j}{k-1}-\mu\right)^2\left(\prod_{j=2}^k g(u_j)^2\right)\,\mathrm{d}u_2\cdots\,\mathrm{d}u_k.$$

展开内层平方，并计算所有不属于u_j^2 形式的项，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left(\frac{2\sum_{2\leq i<j\leq k}u_iu_j}{(k-1)^2}-\frac{2\mu\sum_{j=2}^k u_j}{k-1}+\mu^2\right)\left(\prod_{j=2}^k g(u_j)^2\right)\,\mathrm{d}u_2\cdots\,\mathrm{d}u_k\\ &=\frac{k-2}{k-1}\mu^2\Upsilon^{k-1}-2\mu^2\Upsilon^{k-1}+\mu^2\Upsilon^{k-1}\\ &=\frac{-\mu^2\Upsilon^{k-1}}{k-1}.\end{aligned} \tag{5.53}$$

对于 u_j^2项，鉴于 g的支集，我们看到 $u_j^2 g(u_j)^2 \le T u_j g(u_j)^2$。因此，

(5.54)
$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty u_j^2 \left(\prod_{i=2}^k g(u_i)^2 \right) \, \mathrm{d}u_2 \cdots \, \mathrm{d}u_k \le T\Upsilon^{k-2} \int_0^\infty u_j g(u_j)^2 \, \mathrm{d}u_j = \mu T \Upsilon^{k-1}.$$

由 (5.52)、(5.53) 和 (5.54) 可得

$$\begin{aligned} E &\le \Theta^{-2} k^{-k} \left(\int_0^\infty g(u)^2 \, \mathrm{d}u \right) \left(\frac{\mu T \Upsilon^{k-1}}{k-1} - \frac{\mu^2 \Upsilon^{k-1}}{k-1} \right) \\ &\le \left(\frac{\Theta^{-2} \mu T k^{-k} \Upsilon^{k-1}}{k-1} \right) \left(\int_0^\infty g(u)^2 \, \mathrm{d}u \right). \end{aligned} \tag{5.55}$$

由于 $(k-1)\Theta^2 \ge k(1-T/k-\mu)^2$ and $\mu \le 1$，由 (5.55) 可得

$$E \le \left(\frac{T k^{-k-1} \Upsilon^{k-1}}{(1-T/k-\mu)^2} \right) \left(\int_0^\infty g(u)^2 \, \mathrm{d}u \right). \tag{5.56}$$

由 (5.45)、(5.46) 和 (5.56)，我们得到 (5.38)。命题的证明至此完成。□

5.6. 定理 1.3 的证明完成。

证明。回顾 $\mathrm{supp}\ F(\underline{t}) \subset \Delta_k^{[\frac{T}{k}]}$(1) and $T/k = 1/\log\log k$。我们可以找到一个序列 $\{\varpi_k\}_{k=0}^\infty \subset (0, 55/12756)$，使得 $\lim_k \varpi_k = 55/12756$，以及一个实数 K，满足

$$\frac{\eta(\varepsilon_k)}{2/3 + \varpi_k} \ge \frac{1}{\log\log k}, \tag{5.57}$$

对于 $k > K$，其中 $\varepsilon_k = 55/12756 - \varpi_k$，函数 $\eta(\cdot)$ 的定义同引理 4.3。取 $\varpi = \varpi_k$ 应用引理 5.3，可得 $S(N, \rho) > 0$，对所有充分大的 N 均成立，前提是

$$\rho > \frac{k\alpha^{(k)}}{(\frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \varpi_k) - \delta) I(F)} - \frac{k\beta_1^{(k)}}{I(F)} - \frac{4k\beta_2^{(k)}}{I(F)}, \tag{5.58}$$

将 $\alpha^{(k)}$、$\beta_1^{(k)}$、$\beta_2^{(k)}$ 和 I（F）的估计（见 (5.30)、(5.32)、(5.34) 和命题 5.5）代入 (5.58) 的右侧，得到

$$\begin{aligned} &\frac{k\alpha^{(k)}}{(\frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \varpi_k) - \delta) I(F)} - \frac{k\beta_1^{(k)}}{I(F)} - \frac{4k\beta_2^{(k)}}{I(F)} \\ \le &\frac{(\frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \varpi_k) - \delta)^{-1} \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-2}} \int_0^T t g'(t)^2 \, \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{(\log k)^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-2}} \right)}{\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k} \left(1 - \frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2} \right) \int_0^T g(t)^2 \, \mathrm{d}t - \epsilon + O\left(\frac{e^{\sqrt{\log k}} (\log k)^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{k-1}} \frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k} \right)}. \end{aligned} \tag{5.59}$$

我们将 $\delta_2>0$ 取为充分小，使得该估计变为

$$\leq \frac{(\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\varpi_k)-\delta)^{-1}\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-2}}\int_0^T tg'(t)^2\,\mathrm{d}t+O\left(\frac{1}{(\log k)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^{k-2}}\right)}{\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\left(1-\frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}\right)\int_0^T g(t)^2\,\mathrm{d}t+O\left(\frac{e^{\sqrt{\log k}}(\log k)^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{k-1}}\frac{\Upsilon^{k-1}}{k^k}\right)}. \tag{5.60}$$

由于 (5.50) 和 $T/k=1/\log\log\,k$，我们有

$$\frac{T}{k(1-T/k-\mu)^2}=o(1),\quad \text{as } k\to\infty. \tag{5.61}$$

由 (5.20) 和 (5.21) 可得

$$\frac{\int_0^T tg'(t)^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^T g(t)^2\,\mathrm{d}t}\to\frac{1}{4},\quad \text{as } k\to\infty. \tag{5.62}$$

结合 (5.60)、(5.61)、(5.62) 和 $\lim_k\varpi_k=55/12756$，得到

$$\begin{aligned}\frac{k\alpha^{(k)}}{(\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\varpi_k)-\delta)I(F)}-\frac{k\beta_1^{(k)}}{I(F)}-\frac{4k\beta_2^{(k)}}{I(F)}\leq&\frac{\int_0^T tg'(t)^2\,\mathrm{d}t}{(\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\varpi_k)-\delta)\int_0^T g(t)^2\,\mathrm{d}t}k^2+o(k^2)\\=&\frac{1}{\frac{4}{3}+2\varpi_k-2\delta}k^2+o(k^2)\\=&\frac{1}{\frac{4}{3}+2\cdot\frac{55}{12756}-2\delta}k^2+o(k^2),\quad \text{as } k\to\infty.\end{aligned} \tag{5.63}$$

由于 δ 可以任意小，我们可以取

$$\rho_k=\frac{1}{\frac{4}{3}+2\cdot\frac{55}{12756}}k^2+o(k^2)=\frac{2126}{2853}k^2+o(k^2). \tag{5.64}$$

最后，我们指出，满足本定理要求的整数 $\leq x$的个数为 $\gg x(\log\log x)^{-1}(\log\,x)^{-k}$。使用与 [1, 定理 5.13]相同的论证即可得出这一结论。定理 1.3 的证明至此完成。□

References

[1] M. Ram Murty 和 A. Vatwani，带有加性扭曲的高秩塞尔伯格筛及其应用，Funct. Approx. Comment. Math., 57(2) (2017), 151–184.[2] A. Vatwani，高秩塞尔伯格筛及其应用，Czechoslovak Math. J., 68(143)(1) (2018), 169–193.[3] J. Maynard，素数间的小间隔，Ann. of Math. (2) 181 (2015), no. 1, 383–413.[4] H. Li 和 H. Pan，特殊形式素数之间的有界间隔，Int. Math. Res. Not. (2015), no . 23, 12345–12365.[5] A. J. Irving，光滑模数下等差数列中的除数函数，Int. Math. Res. Not. (2015), no. 15, 6675–6698.[6] D.R. Heath-Brown，几乎素数 k 元组，Mathematika 44 (1997), no. 2, 245–266.[7] K-H. Ho, K-M, Tsang，关于几乎素数 k 元组，J. Number Theory 120 (2006), no. 1, 33–46.[8] C. Hooley，数论中的一个渐近公式，Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 396–413.[9] Polymath D.H.J，塞尔伯格筛的变体及包含许多素数的有界区间，Researchin the Mathematical sciences 1 (2014), Art. 12, 83 pp.

[10] A. Selberg, 《筛法讲义》, 《论文集》第 II 卷, Springer-Verlag, 柏林, 1991.[11] Y. Zhang, 素数之间的有界间隔, Ann. of Math.(2) 179 (2014), no. 3, 1121–1174.[12] J. Wu 和 P. Xi, 代数迹函数的算术指数对。附 Will Sawin 撰写的附录, Algebra Number Theory.(2) 15 (2021), no. 9, 2123–2172.

B. Chen, Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281, B 9000 Ghent, Belgium电子邮箱地址：bin.chen@UGent.be