arXiv:2301.05045v1 [math.FA] 12 Jan 2023

（弱）相位恢复对偶框架的刻画

Fahimeh Arabyani-Neyshaburi[1], Ali Akbar Arefijamaal[2] 和 Rajab Ali Kamyabi-Gol[3], *

[1] 数学科学系，马什哈德费尔多西大学，伊朗马什哈德。[2] 数学与计算机科学系，哈基姆·萨卜泽瓦里大学，伊朗萨卜泽瓦尔。[3] 数学科学系，数学学院，马什哈德费尔多西大学及代数结构分析卓越中心（CEAAS），伊朗马什哈德。电子邮箱：kamyabi@um.ac.ir

摘要。近年来，根据线性测量的幅值恢复信号（相差一个模为一的常数）已广受关注并得到深入研究。然而，关于相位恢复仍有许多尚未解决的问题。给定一个相位恢复框架，能否对其相位恢复对偶框架族进行分类？这样的族在对偶框架集合中是否稠密？对于复希尔伯特空间的情形，能否给出一个向量族实现弱相位恢复的等价条件？相位、弱相位恢复与范数恢复之间有何联系？在此背景下，我们旨在处理有关相位恢复对偶框架和弱相位恢复框架的这些开放问题，并特别研究识别这些性质的等价条件。我们给出有限维希尔伯特空间中能够实现相位恢复的相位恢复框架之替代对偶框架的一些刻画。此外，对于某些框架类，我们证明相位恢复对偶框架族在对偶框架集合中开且稠密。随后，我们研究弱相位恢复问题。除此之外，我们还得到了向量族实现相位恢复的一些等价条件，并以弱相位恢复的形式表述。

2020年数学主题分类。主要分类：42C15；次要分类：41A58。

关键词。相位恢复，弱相位恢复，对偶框架。

* 通讯作者。

1. 引言与预备知识

不使用相位进行信号重建是一项长期以来的猜想，尤其是对于语音识别系统而言。R. Balan、P. Casazza 和 D. Edidin 首次从数学角度提出了这一问题，见 [8], ，近年来，由于其在 X-射线、电子显微镜、光学、图像处理等诸多领域的应用，这一问题备受关注 [5, 14, 20, 21]。为了更准确地阐述这一问题，我们先简要介绍相关领域的一些基本定义和预备知识。随后，我们提出若干问题，从新的角度探讨相位恢复框架。

本文中，我们假设 $\mathcal{H}$ 表示一个可分希尔伯特空间，$\mathcal{H}_n$ 表示一个 n维实或复希尔伯特空间，并在有必要区分二者时使用 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{C}^n$。此外，我们采用记号 $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ 和 $\{\delta_i\}_{i\in I_n}$ 表示 $\mathcal{H}_n$的标准正交归一基。

若存在常数 $0 < A_\Phi \leq B_\Phi < \infty$ 使得 Φ 中的向量族= $\{\phi_i\}_{i\in I}$ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{H}$ 中的一个框架:

$$A_\Phi \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |f, \phi_i\rangle|^2 \leq B_\Phi \|f\|^2, \qquad (f \in \mathcal{H}). \tag{1.1}$$

常数 A_Φ 和 B_Φ 称为框架界。若序列 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ 满足式 **(1.1)** 的右侧条件，则称其为贝塞尔序列。若框架 $\{\phi_i\}_{i\in I}$满足 $A = A_\Phi = B_\Phi$，则称其为 A-紧框架；当 $A_\Phi = B_\Phi = 1$ 时，称其为帕塞瓦尔框架。给定一个框架 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$，其格拉米矩阵由框架向量的内积构成，记为 $G_\Phi = [\langle\phi_i, \phi_j\rangle]_{i,j}$。框架算子定义为 $S_\Phi f = \sum_{i\in I}\langle f, \phi_i\rangle\phi_i$。它是一个有界、可逆且自伴的算子 [13]。此外，合成算子 $T_\Phi : l^2 \to \mathcal{H}$ 定义为 $T_\Phi\{c_i\} = \sum_{i\in I} c_i\phi_i$。框架算子可写为 $S_\Phi = T_\phi T_\phi^*$，其中 $T_\Phi^* : \mathcal{H} \to l^2$是 T的伴随算子，记为 $T_\Phi^* f = \{\langle f, \phi_i\rangle\}_{i\in I}$，称为分析算子。族 $\{S_\Phi^{-1} f_i\}_{i\in I}$ 也是 $\mathcal{H}$的一个框架，称为典范对偶框架。一般而言，若框架 $\{\psi_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ 满足$f = \sum_{i\in I}\langle f, \psi_i\rangle\phi_i$（对 $f \in \mathcal{H}$），则称其为 $\{\phi_i\}_{i\in I}$ 的替代对偶，或简称对偶。所有框架至少都有一个对偶，即典范对偶；冗余框架则有无穷多个替代对偶框架。我们用 $E(\Phi)$表示框架 Φ 的超额。众所周知，每个对偶框架都具有以下形式：$\{S_\Phi^{-1}\phi_i + u_i\}_{i\in I}$，其中 $\{u_i\}_{i\in I}$是满足 $\sum_{i\in I}\langle f, u_i\rangle\phi_i = 0$（对所有 $f \in \mathcal{H}$）的贝塞尔序列。还要指出，若存在 $\mathcal{H}$ 上的可逆算子 U 使得 $\Psi = U\Phi$，则称两个框架 Φ 和 Ψ 等价。有关框架理论的更多详细信息，请参见 [13, 16] ；关于对偶原理的重要性，请参见 [3, 4, 7, 17, 18, 19] 。

考虑希尔伯特空间 $\mathcal{H}_n$ 中的一个框架 $\{\phi_i\}_{i\in I_m}$。每当 $\{\phi_i\}_{i\in\sigma^c}$ 仍是 $\mathcal{H}_n$ 的一个框架时，有限指标集 $\sigma \subset I_m$ 就满足最小冗余条件（MRC）。此外，如果每个子集 $\sigma \subset I_m$、$|\sigma| = r$ 都满足 Φ 的 MRC，我们就称 Φ 满足针对 r 次擦除的 MRC。矩阵的火花是其列中最小线性相关子集的大小，而族 $\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 的火花定义为其合成矩阵 Φ 的火花。此外，若族 $\{\phi_i\}_{i\in I_m}$、$m \geq n$ 的火花为 $n + 1$，则称其为全火花。已有结果表明，若 $m \geq n$，则在所有框架 [2] 的集合中，全火花框架构成一个开且稠密的集合。

现在假设非线性映射

$$\mathbb{M}_\Phi : \mathcal{H} \to l^2(I), \qquad \mathbb{M}_\Phi(f) = \{|\langle f, \phi_i\rangle|^2\}_{i\in I} \tag{1.2}$$

通过对分析算子逐元素取绝对值得到。我们将 $\mathbb{H} = \mathcal{H}/\sim$ 定义为：将仅相差一个相位因子的两个向量视为相同，即 $f \sim g$，其中存在标量 θ 满足 $|\theta| = 1$，使得 $g = \theta f$。显然，在实希尔伯特空间中有 $\mathbb{H} = \mathcal{H}/\{1, -1\}$，而在复数情形下 $\mathbb{H} = \mathcal{H}/\mathbb{T}$，其中 $\mathbb{T}$ 是复单位圆。因此，映射 $\mathbb{M}_\Phi$ 可扩展为 $\mathbb{H}$，定义为 $\mathbb{M}_\Phi(\hat{f}) = \{|\langle f, \phi_i\rangle|^2\}_{i\in I}$, $f \in \hat{f} = \{g \in \mathcal{H}: g \sim f\}$。非线性映射 $\mathbb{M}_\Phi$ 的单射性意味着，可以根据信号框架系数的模，从 $\mathcal{H}$ 中重建每个信号，且只相差一个常数相位因子。在 [8], 中，作者研究了 $\mathbb{M}_\Phi$ 在有限维实希尔伯特空间中的单射性，并且证明，在n维复希尔伯特空间中，$4n-2$ 个测量足以保证单射性。事实上，映射 $\mathbb{M}_\Phi$的单射性等价于以下定义：

定义1.1. 向量族 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ in $\mathcal{H}$ 具有相位恢复性质，当且仅当只要 $f, g \in \mathcal{H}$ 满足

$$|\langle f, \phi_i\rangle| = |\langle g, \phi_i\rangle|, \qquad (i \in I) \tag{1.3}$$

就存在一个标量 θ，使得 $|\theta| = 1$，从而有 $f = \theta g$。

如果对于任意满足(1.3)的 $f, g \in \mathcal{H}$，都有 $\|f\| = \|g\|$，那么称 Φ 具有范数恢复性质。显然，如果 Φ 具有相位恢复（范数恢复）性质，那么对于任意 $0 < \alpha_i, i \in I$，$\alpha_i f_i$ 也具有相位恢复（范数恢复）性质。此外，紧框架具有范数恢复性质。相位恢复蕴含范数恢复，但反之不成立。例如，任意正交归一基都具有范数恢复性质，但不具有相位恢复性质。

下面的结果表明，对于两个等价框架 Φ 和 ψ，$\mathbb{M}_\Phi$ 和 $\mathbb{M}^\Psi$ 的单射性相同。

定理1.2. [8] 向量族 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ in $\mathcal{H}$ 具有相位恢复性质，当且仅当对于 $\mathcal{H}$上的每个可逆算子 U，$\{U\phi_i\}_{i\in I}$ 都具有相位恢复性质。

应用上述定理可知，一个框架能够进行相位恢复，当且仅当其典范对偶框架能够进行相位恢复。

定义 1.3. [8] 向量族 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ 在 $\mathcal{H}$ 中具有补性质，当且仅当对于每个 $\sigma \subset I$，要么 $\overline{span}\{\phi_i\}_{i\in\sigma} = \mathcal{H}$，要么 $\overline{span}\{\phi_i\}_{i\in\sigma^c} = \mathcal{H}$。

正如我们所述，关于能够进行相位恢复的框架的基本分类，首先针对有限维实情形在 [8] 中给出，随后针对无限维情形在 [11] 中给出，如下所示：

定理 1.4. 实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的族 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I}$ 能够进行相位恢复，当且仅当它具有补性质。

由上述定理可立即得出，实希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的每个相位恢复框架都满足 MRC, 且可承受（$n-1$）次擦除。

命题 1.5. [8] 如果 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 在 $\mathbb{R}^n$中具有相位恢复性质，那么 $m \geq 2n-1$。如果 $m \geq 2n-1$ 且 Φ 是全火花的，那么 ϕ 具有相位恢复性质。此外，$\{\phi_i\}_{i\in I_{2n-1}}$具有相位恢复性质，当且仅当 Φ 是全火花的。

$\mathcal{H}_n$ 中的两个向量 $x=\{x_i\}_{i\in I_n}$ 和 $y=\{y_i\}_{i\in I_n}$ 弱意义上具有相同的相位，如果存在一个 $|\alpha|=1$，使得对于所有满足 $x_i\neq 0\neq y_i$ 的 $i\in I_n$，$phase(x_i)=\alpha phase(y_i)$。

定义 1.6. 若族 $\Phi=\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ in $\mathcal{H}_n$ 对任意 $x,y\in\mathcal{H}_n$ 满足 $|\langle x,\phi_i\rangle|=|\langle y,\phi_i\rangle|$（对所有 $i\in I_m$），均有 x 和 y 弱相位相同，则称其具有弱相位恢复性质。

文中证明，若 $\Phi=\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中具有弱相位恢复性质，则 $m\geq 2n-2$ [10]。显然，相位恢复蕴含弱相位恢复性质，尽管反过来一般不成立。举一个简单的例子，$\{(1,1),(1,-1)\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中具有弱相位恢复性质，见 [1],，但显然不具有相位恢复性质。

现在，我们给出一般集的概念；若子集 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ 满足存在一个非零多项式 $p(x_1,...,x_n)$，使得

$$\Omega^c\subseteq\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : p(x_1,...,x_n)=0\}.$$

众所周知，一般集是开集、稠密集且具有满测度。此外，$\mathbb{C}^n$ 中的一般集定义为 $\mathbb{R}^{2n}$中的一般集。

应用 [6] 中引入的线性算子，可得到由(1.2)定义的 $\mathbb{M}_\Phi$具有单射性的等价条件。更具体地，设 $\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个向量族，$H_{n\times n}$表示所有 $n\times n$厄米矩阵组成的空间。考虑算子 Λ_Φ：$H_{n\times n}\to\mathbb{R}^m$，其定义为 $\Lambda_\Phi(A)=\{\langle A,\phi_i\otimes\phi_i\rangle\}_{i\in I_m}$，其中 $\phi_i\otimes\phi_i$是投影到 $span\{\phi_i\}$上的秩一投影。容易证明，$\Lambda_\Phi(f\otimes f)=\mathbb{M}_\Phi(f)$，这一等式在刻画 $\mathbb{M}_\Phi$、[6, 12]的单射性时起着关键作用。另请参见 [15]。因此，我们得到框架实现相位恢复的以下等价条件。

推论 1.7. 设 $\Phi=\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 中的一个框架，则以下命题等价；

(i) Φ 能进行相位恢复。(ii) $\mathbb{M}_\Phi$ 是单射的。(iii) $\Lambda_\Phi|_{B_1}$ 是单射的，其中 B_1 表示秩一矩阵。(iv) Λ_Φ 的零空间中不存在秩为 2 的矩阵。

证明。$(i)\Leftrightarrow(ii)$ 根据定义显然成立。对于 $(ii)\Leftrightarrow(iv)$，我们只需注意到，由于 Φ 在 $\mathcal{H}_n$ 中的完备性，秩一矩阵 $B_1=\{f\otimes f: f\in\mathcal{H}_n\}$ 不可能属于 Λ_Φ 的零空间。事实上，$\Lambda_\Phi(f\otimes f)=\mathbb{M}_\Phi(f)=0$ 意味着 $f\perp\phi_i$，对所有 $i\in I_m$ 均成立，因此 $f=0$。所以，根据 [6], 的引理 5.5，$\mathbb{M}_\Phi$ 的单射性等价于以下命题：Λ_Φ 的零空间中不存在秩为 2 的矩阵。另一方面，$\mathbb{M}_\Phi$ 的单射性，加上映射 $\gamma: \mathcal{H}_n\to B_1$, $\gamma(f)=f\otimes f$ 可逆这一事实，可推出线性算子 $\Lambda_\Phi|_{B_1}$ 也是单射的。此外，对于 $\mathbb{M}_\Phi$ 的一个左逆 $\mathbb{L}_\Phi$，映射 $\gamma\mathbb{L}_\Phi$ 是 $\Lambda_\Phi|_{B_1}$ 的左逆。反过来，对于 $\Lambda_\Phi|_{B_1}$ 的一个左逆 Γ_Φ，映射 $\gamma^{-1}\Gamma_\Phi$ 是 $\mathbb{M}_\Phi$ 的左逆，由此完成 $(ii)\Leftrightarrow(iii)$ 的证明。□

本文结构安排如下：第2节致力于刻画相位恢复对偶框架和全火花对偶框架。在本节中，对于若干类框架，我们证明，所有（全火花）相位恢复对偶框架在所有对偶框架的集合中开且稠密。此外，我们还给出若干相关例子

。在第3节中，我们综述弱相位恢复问题，并探讨用于识别相位恢复框架和弱相位恢复框架的一些等价条件。我们还给出一族弱相位恢复框架构成框架的充分条件，并且其典范对偶也具有弱相位恢复性质。

2. 相位恢复对偶框架

本节讨论这样一个问题：给定相位恢复框架 Φ，刻画有限维希尔伯特空间中 Φ 的相位恢复对偶框架。对于某些类的框架，我们证明，给定框架的相位恢复对偶框架在所有对偶框架组成的集合中稠密。对于框架 Φ，我们用 D_Φ 表示其所有对偶框架 Φ 所成的集合，并用 PD_Φ 表示其中相位恢复对偶框架构成的子集。我们首先研究等价框架的相位恢复对偶框架之间的关系，这对本节的主要结果是一个非常有用的工具。

引理 2.1. 设 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的一个框架，且 $\mathcal{T}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 上的一个可逆算子。那么，

(i) $D_{\mathcal{T}\Phi} = (\mathcal{T}^*)^{-1}D_\Phi$.
(ii) $PD_{\mathcal{T}\Phi} = (\mathcal{T}^*)^{-1}PD_\Phi$.

证明. 已知 $\mathcal{T}\Phi$ 是一个具有 $S_{\mathcal{T}\Phi} = \mathcal{T}S_\Phi\mathcal{T}^*$ [13]的框架，因此通过简单计算可得 $D_{\mathcal{T}\Phi} = \{(\mathcal{T}^*)^{-1}G : \ G \in D_\Phi\} = (\mathcal{T}^*)^{-1}D_\Phi$。此外，$(ii)$ 可由 (i) 和定理1.2 直接得到。□

注记 2.2. 若 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的框架，使得 $E(\Phi) = k$，其中 $E(\Phi)$ 表示 Φ 的超额，则存在 i_1、...、i_k，使得 $\Phi \setminus \{\phi_{i_j}\}_{j=1}^k$ 构成 $\mathcal{H}_n$ 的里斯基底。因此，采用上述记号且不失一般性，我们可以考虑 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I_n}\cup\{\phi_i\}_{i=n+1}^m$，其中 $\{\phi_i\}_{i\in I_n}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的里斯基底~。从这个角度来看，Φ 实际上等价于一种形式 $\{\delta_i\}_{i\in I_n}\cup\{\phi_i\}_{i=n+1}^m$~，其中包含冗余元素 $\{\phi_i\}_{i=n+1}^m$。

在下一个定理中，我们确定了 n 维实空间中框架 $\{\phi_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 的对偶框架集合，并证明 PD_ϕ 是 D_ϕ 中一个开且稠密的子集。

定理 2.3. 设 $\phi = \{\phi_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个相位恢复框架。那么 PD_ϕ 是 D_ϕ 中的一个开且稠密子集。

证明. 首先设 $\{\phi_i\}_{i\in I_n}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交归一基，且 $\phi_j = \sum_{i\in I_n} a_i^j\phi_i$、$j = n+1$、...、$2n-1$ 对应某些非零系数 $\{a_i^j\}_{i\in I_n}$。由于

$$D_\Phi = \left\{\{S_\Phi^{-1}\phi_i + u_i\}_{i\in I_{2n-1}} : \sum_{i\in I_{2n-1}} \langle f,\phi_i\rangle u_i = 0, for\ all\ f\in\mathbb{R}^n\right\}$$

代入 $f = \phi_j, j = 1, ..., 2n-1$ 后，我们观察到 $(2n-1)\times n$ 矩阵 $[u_1|u_2|...|u_{2n-1}]^T$属于 Φ 的转置 Gram矩阵 G_Φ^T的零空间。事实上，

$dim(nullG_\Phi) = n-1$；这保证了 $\{u_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 中至多只有 $n-1$ 个向量线性无关。更确切地说，

$$u_1 + \sum_{i=n+1}^{2n-1} \langle \phi_1, \phi_i\rangle u_i = 0, \quad \dots \quad u_n + \sum_{i=n+1}^{2n-1} \langle \phi_n, \phi_i\rangle u_i = 0.$$

因此，选择 $\{u_j\}_{j=n+1}^{2n-1}$ 后，我们得到

$$u_i = -\sum_{j=n+1}^{2n-1} a_i^j u_j, \quad (i \in I_n), \tag{2.1}$$

其中 $a_i^j = \langle \phi_i, \phi_j\rangle$，对于 $n+1 \le j \le 2n-1$。因此，每个对偶框架都由以下向量唯一构造

$$\mathcal{U} = [u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}] \in \mathbb{R}^{n(n-1)}. \tag{2.2}$$

将 D_Φ 视为度量空间，其中度量为 $d(G,H) = \sum_{i\in I_{2n-1}} \|g_i - h_i\|$，我们定义映射 ξ : $D_\Phi \to \mathbb{R}^{n(n-1)}$，其定义为 $\xi(G) = \mathcal{U}_g$，其中 $\mathcal{U}_g \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ 是与 $G \in D_\Phi$ 相关联的唯一序列，如式 (2.2) 所示。显然，ξ 定义良好且为单射。此外，取 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$，然后令 $u_{n+1} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$，...，$u_{2n-1} = \{\mathcal{A}_{n^2-2n+1}, \dots, \mathcal{A}_{n(n-1)}\}$，并根据式 (2.1) 构造 u_i、$i \in I_n$。于是我们得到 $\{S_\Phi^{-1}\phi_i + u_i\}_{i\in I_{2n-1}} \in D_\Phi$，即 ξ 是双射。此外，ξ 是利普希茨函数。设 $G = \{S_\Phi^{-1}\phi_i + u_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 和 $H = \{S_\Phi^{-1}\phi_i + v_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 是 Φ 的对偶框架，其相关的 $\mathcal{U}_g$ 和 $\mathcal{U}_h$ 分别如式 (2.2) 所示。于是，

$$\|\xi(G) - \xi(H)\| = \|\mathcal{U}_g - \mathcal{U}_h\| = \sum_{i=n+1}^{2n-1} \|u_i - v_i\| \le \sum_{i\in I_{2n-1}} \|u_i - v_i\| = d(G,H).$$

此外，ξ 是一个双利普希茨函数，不过我们不需要用到这一事实。现在注意到，根据定理 1.4，对偶框架 $\{g_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 无法进行相位恢复的唯一情形，是存在某个指标集 $\{i_j\}_{j=1}^n \subset I_{2n-1}$，使得 $det[g_{i_1}| \ \dots \ |g_{i_n}] = 0$ 成立。将这些方程相乘，得到一个关于 $u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}$的 $n(n-1)$ 变量多项式，记为 P_ϕ。因此，

$$PD_\Phi = \xi^{-1}\{\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n(n-1)} : P_\phi(\mathcal{U}) \neq 0\}, \tag{2.3}$$

这意味着 PD_Φ 在 D_Φ中是开集。进一步证明 PD_Φ 在 D_ϕ中也是稠密的。令 $\epsilon > 0$和 $G = \{g_i\}_{i\in I_{2n-1}} = \{S_\Phi^{-1}\Phi_i + u_i\}_{i\in I_{2n-1}}$为 $D_\Phi \setminus PD_\Phi$中的一个对偶框架。于是，G 仅在满足 $P_\phi(\{u_i\}_{i=n+1}^{2n-1}) = 0$的向量 $\{u_i\}_{i=n+1}^{2n-1}$ 上相关。取一个序列 $\{\{v_i^k\}_{i=n+1}^{2n-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$，其元素取自 $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ 中的多项式 P_ϕ 的根，并使 $\lim_{k\to\infty}\{v_i^k\}_{i=n+1}^{2n-1} = \{u_i\}_{i=n+1}^{2n-1}$。此外，对所有 $1 \le i \le n$和 $k \in \mathbb{N}$，令 $v_i^k = -\sum_{j=n+1}^{2n-1} a_i^j v_j^k$。于是，$\{v_i^k\}_{i\in I_{2n-1}}$ 满足 (2.1)，因此，与 $\{\{v_i^k\}_{i=n+1}^{2n-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 相关联、由 $h_i^k = S_\Phi^{-1}\Phi_i + v_i^k$, $i \in I_{2n-1}$ 定义的序列 $\{h_i^k\}_{k\in\mathbb{N},\ i\in I_{2n-1}}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$构成 Φ的一个对偶框架。此外，存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于 $k \ge k_0$

$$d\left(\{v_i^k\}_{i=n+1}^{2n-1}\}, \{u_i\}_{i=n+1}^{2n-1}\}\right) = \sum_{i=n+1}^{2n-1} \|v_i^k - u_i\| < \epsilon.$$

因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} d(\{h_i^k\}_{k\in\mathbb{N},i\in I_{2n-1}},\{g_i\}_{i\in I_{2n-1}}) &= \sum_{i\in I_{2n-1}}\|v_i^k-u_i\| \\ &= \sum_{i\in I_n}\|v_i^k-u_i\|+\sum_{i=n+1}^{2n-1}\|v_i^k-u_i\| \\ &= \sum_{i\in I_n}\|-\sum_{j=n+1}^{2n-1}a_i^j(v_j^k-u_j)\|+\sum_{i=n+1}^{2n-1}\|v_i^k-u_i\| \\ &\le \sum_{i\in I_n}\sum_{j=n+1}^{2n-1}|a_i^j|\|v_j^k-u_j\|+\sum_{i=n+1}^{2n-1}\|v_i^k-u_i\| \\ &\le (\alpha+1)\sum_{j=n+1}^{2n-1}\|v_j^k-u_j\|<\epsilon(\alpha+1), \end{aligned}$$

对于 $k\ge k_0$，即 PD_Φ 在 D_Φ 中稠密。

现在，应用引理 2.1 和注记 2.2，即可得到一般情形下的结果。事实上，正如我们在注记 2.2 中讨论的，每个框架 $\Psi=\{\psi_i\}_{i\in I_{2n-1}}$ 都等价于形如 $\Phi=\{\delta_i\}_{i\in I_n}\cup\{\phi_i\}_{i=n+1}^{2n-1}$ 的框架。因此，存在一个作用于 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆算子 $\mathcal{T}$，使得 $\Psi=\mathcal{T}\Phi$；由此，根据引理 2.1，我们得到

$$\overline{PD_\Psi}=\overline{PD_{\mathcal{T}\Phi}}=\overline{(\mathcal{T}^*)^{-1}PD_\Phi}\supseteq(\mathcal{T}^*)^{-1}\overline{PD_\Phi}=(\mathcal{T}^*)^{-1}D_\Phi=D_\Psi,$$

即 $\overline{PD_\Psi}=D_\Psi$。并利用 (2.3)

$$PD_\Psi=(\mathcal{T}^*)^{-1}PD_\Phi=(\mathcal{T}^*)^{-1}\xi^{-1}\{\mathcal{U}\in\mathbb{R}^{n(n-1)}:P_\phi(\mathcal{U})\neq 0\},$$

即 PD_Ψ 在 D_Ψ 中是开集。证毕。 □

采用与定理 2.3 证明类似的方法可推出，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意满足 $E(\Phi)=1$ 的全火花框架 Φ，所有全火花对偶框架构成的集合嵌入于 $\mathbb{R}^n$ 中的一个一般集。

推论 2.4. 设 $\Phi=\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的全火花框架。那么，Φ 的所有全火花对偶框架构成 D_Φ 的一个开且稠密子集，并嵌入 $\mathbb{R}^n$ 中的一个一般集。

证明。应用注记 2.2，$\Phi=\{\phi_i\}_{i=1}^{n+1}$ 的全火花框架等价于 $\tilde{\Phi}$：
$=\{\delta_i\}_{i=1}^n\cup\{\sum_{i=1}^n\alpha_i\delta_i\}$，其中 α_i、$i\in I_n$为非零标量；此时，框架算子如下：

$$S_{\tilde{\Phi}}=\begin{bmatrix} 1+\alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \dots & \alpha_1\alpha_n \\ \alpha_1\alpha_2 & 1+\alpha_2^2 & \dots & \alpha_2\alpha_n \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ \alpha_1\alpha_n & \alpha_2\alpha_n & \dots & 1+\alpha_n^2 \end{bmatrix}$$

此外， $\tilde{\Phi}$ 的每个对偶框架都具有 $\{S_{\tilde{\Phi}}^{-1}\tilde{\phi}_i + u_i\}_{i=1}^{n+1}$的形式，使得 $T_u T_{\tilde{\Phi}}^* = 0$。取 $u_{n+1} = [x_1, ..., x_n]^T$，可得对所有 $i \in I_n$， $u_i = -\alpha_i u_{n+1}$。因此， $D_{\tilde{\Phi}}$是所有满足以下条件的 $\{g_i\}_{i=1}^{n+1}$的集合

$$g_i^k = \begin{cases} -\alpha\alpha_i\alpha_k - \alpha_i x_k & k \neq i, \\ \alpha(1 + \sum_{j\neq i}\alpha_j^2) - \alpha_i x_k & k = i, \end{cases}$$

其中 $\alpha = \dfrac{1}{detS_{\tilde{\Phi}}} = \dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$, g_i^k表示 g_i的 k^{th} 坐标，且

$$g_{n+1} = \{\alpha\alpha_i + x_i\}_{i=1}^n.$$

这表明，每个对偶框架都与一个 n变量 $\{x_i\}_{i\in I_n}$ 相关联，并且除以下情况外，对偶框架都是全火花框架：对于某个指标集 $\{i_j\}_{j=1}^n \subset I_{n+1}$，序列 $u_{n+1} = \{x_i\}_{i\in I_n}$ 属于由 $det[g_{i_1}| \ \ ... \ \ |g_{i_n}] = 0$构造的多项式的根。将这些 $n+1$ 个多项式相乘，可得到一个 n变量~多项式 $P_{\tilde{\Phi}}(x_1, ..., x_n)$。因此， Φ 的每个全火花对偶框架，都是通过从多项式 $P_{\tilde{\Phi}}$的根中一般选择 u_{n+1} 得到的。于是，采用与定理 2.3 证明类似的方法，并考虑定义为 $\xi(G) = u_{n+1}$ 的双射 $\xi : D_{\tilde{\Phi}} \to \mathbb{R}^n$，其中 $G = \{S_{\tilde{\Phi}}^{-1}\tilde{\phi}_i + u_i\}_{i=1}^{n+1}$， Φ 在 D_Φ 中的所有全火花对偶框架的补集等价于 $P_{\tilde{\Phi}}$的根集，因此， Φ 的全火花对偶框架集合通过 ξ嵌入到 $\mathbb{R}^n$ 中的一个一般集中。在一般~情形下，若 $\Phi = \mathcal{T}\Phi$，则对于 $\mathbb{R}^n$ 上的可逆算子 $\mathcal{T}$，利用引理 2.1， Φ, FD_Φ 的全火花对偶框架集合与 $(\mathcal{T}^*)^{-1}FD_{\tilde{\Phi}}$相同，证明完毕。□

2.1. 示例

示例 2.5. 假设 $\phi = \{\phi_i\}_{i=1}^3$ 是 $\mathbb{R}^2$的全火花框架。由于 $E(\phi)$ =1，且等价框架具有相同的相位恢复性质，因此我们假设 ϕ 与 $\{\delta_1, \delta_2, \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2\}$等价，其中 α_1 和 α_2 均非零。在这种情况下，

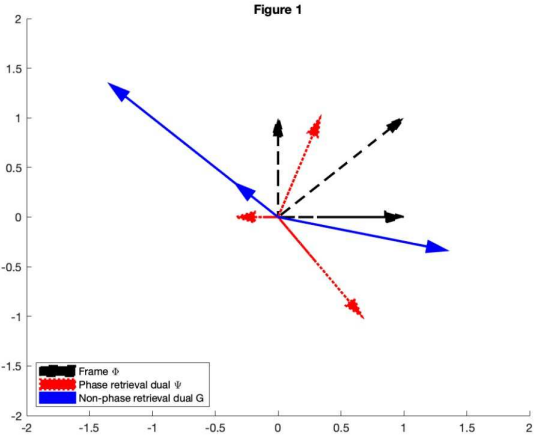
$$D_\phi = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha(1+\alpha_2^2) - \alpha_1 x \\ \\ -\alpha\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\alpha\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 x \\ \\ \alpha(1+\alpha_1^2) - \alpha_2 y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 + x \\ \\ \alpha\alpha_2 + y \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

其中 $\alpha = \dfrac{1}{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2}$。值得注意的是，此时所有对偶框架都是全火花框架，因而都具有相位恢复性质；唯一例外是由 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 得到的对偶框架，其对应三个不同的直线，斜率分别为 0、 ∞ 和 $-\alpha_1/\alpha_2$，例如 $x = -\alpha\alpha_1$、 $y = -\alpha\alpha_2$和 $\alpha_1 x + \alpha_2 y = \alpha$。考虑

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : (x + \alpha\alpha_1)(y + \alpha\alpha_2)(\alpha_1 x + \alpha_2 y - \alpha) = 0\}$$

我们得到 $\{u_i\}_{i\in I_4}$ 在 $\mathbb{R}^2$中的一个一般选择。 ϕ 的所有对偶框架都是该族经 $\{S_\phi^{-1}\phi_i\}_{i\in I_4}$ 平移所得，这一事实表明，全火花对偶框架在 D_Φ 中稠密且具有满测度。作为一个特例，考虑 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$，我们得到相位恢复框架 $\phi = \{\delta_1, \delta_2, \delta_1 + \delta_2\}$，并可看到， Φ 的对偶框架对所有 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 都能进行相位恢复，除去直线 $x = \dfrac{-1}{3}$、 $y = \dfrac{-1}{3}$ 以及

$y = \frac{1}{3} - x$。令 $x = 0, y = 2/3$，我们得到一个相位恢复对偶 Ψ；而 $x = 1$, $y = \frac{-2}{3}$ 满足 $y = \frac{1}{3} - x$，给出一个非相位恢复对偶框架 G。见图1。



例2.6. 设 $\phi = \{\phi_i\}_{i=1}^4$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个全火花框架。在这种情况下，ϕ 等价于框架

$$\phi := \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3 \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0\}.$$

ϕ 的所有对偶框架的集合具有如下形式：$D_\phi = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$，其中 re

$$g_1 = \begin{bmatrix} \alpha(1+\alpha_2^2+\alpha_3^2) - \alpha_1 x \\ -\alpha\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 y \\ -\alpha\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1 z \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} -\alpha\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2 x \\ \alpha(1+\alpha_1^2+\alpha_3^2) - \alpha_2 y \\ -\alpha\alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 z \end{bmatrix},$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} -\alpha\alpha_1\alpha_3 - \alpha_3 x \\ -\alpha\alpha_2\alpha_3 - \alpha_3 y \\ \alpha(1+\alpha_1^2+\alpha_3^2) - \alpha_3 z \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 + x \\ \alpha\alpha_2 + y \\ \alpha\alpha_3 + z \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha = \frac{1}{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}$ 和 x、y、$z \in \mathbb{R}$ 均为任意向量。Φ 的所有对偶框架都是全火花框架，但以下情形除外：$det[g_i|g_j|g_k] = 0$，其中 i、j、$k \in I_4$，且 $(x$、y、$z)$ 属于四个不同的平面 $x = -\alpha\alpha_1$、$y = -\alpha\alpha_2$、$z = -\alpha\alpha_3$ 和 $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \alpha$。类似地，通过选择

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : (x + \alpha\alpha_1)(y + \alpha\alpha_2)(z + \alpha\alpha_3)(\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z - \alpha) = 0\}$$

我们可以说，全火花对偶框架是通过对族 $\{u_i\}_{i\in I_4}$ 的一般选择，对典范对偶进行平移得到的。

例2.7。考虑 $\phi = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \sum_{i=1}^{3} \delta_i, \delta_1 - \delta_2 + \delta_3\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的全火花框架。在这种情况下，所有对偶框架都通过对 $\begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ 的一般选择构造。事实上，令

$u_4 = [x_1 \quad y_1 \quad z_1]^T$ 和 $u_5 = [x_2 \quad y_2 \quad z_2]^T$，则 ϕ 的所有对偶框架构成的集合为

$$g_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - x_1 - x_2 \\ -y_1 - y_2 \\ \frac{-2}{5} - z_1 - z_2 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ \frac{1}{3} + y_2 - y_1 \\ -z_2 - z_1 \end{bmatrix},$$

$$g_3 = \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} - x_1 - x_2 \\ -y_1 - y_2 \\ \frac{3}{5} - z_1 - z_2 \end{bmatrix}, g_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + x_1 \\ \frac{1}{3} + y_1 \\ \frac{1}{5} + z_1 \end{bmatrix}, g_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} + x_1 \\ \frac{-1}{3} + y_2 \\ \frac{1}{5} + z_2 \end{bmatrix}$$

其中，x_1、x_2、y_1、y_2、z_1、z_2 可从 $\mathbb{R}$中任意选取。所有导致对偶框架无法实现相位恢复的情形，都与 $\mathbb{R}^6$中一个六变量多项式的根相关；该多项式由对所有指标集 $\{i_j\}_{j=1}^{3} \subset I_5$，将多项式相乘得到，如 $det[g_{i_1}|g_{i_2}|g_{i_3}] = 0$所示。作为一种情形，$det[g_2|g_4|g_5] = 0$ 推导出

$$z_1 + x_2 - \frac{3x_1}{5} - \frac{3z_2}{5} + 3x_2z_1 - 3x_1z_2 = 0,$$

而该方程的根与一族无法实现相位恢复的对偶框架相关，并构成 $\mathbb{R}^3$中的一个曲面。

3. 弱相位恢复

本节的主要结果是，根据弱相位恢复，给出一族向量实现相位恢复的若干等价条件。由此还可得出相位恢复、弱相位恢复与范数恢复之间的关系。首先，我们介绍一族向量实现弱相位恢复的一些性质。

命题3.1. 假设 $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I_m}$ 是 $\mathcal{H}_n$中的一个框架。那么，对于 $\mathcal{H}_n$上的每个二维正交投影 P，Φ 具有弱相位恢复性质，当且仅当 $P\Phi$ 具有弱相位恢复性质。

证明。若 Φ 进行弱相位恢复，那么容易看出，对于 $\mathcal{H}_n$上的任意正交投影 P，$P\Phi$ 也进行弱相位恢复，另见 [1]。反之，设 x、$y \in \mathcal{H}_n$ 以及 $|\langle x、\ \phi_i\rangle| = |\langle y、\ \phi_i\rangle|$。根据假设，$P\Phi$对 $\mathcal{H}_n$ 在闭子空间 $span\{x, y\}$上的投影 P进行弱相位恢复，这意味着 x 和 y 具有相同的弱相位。□

我们证明了， $\mathbb{R}^n$ 中的弱相位恢复族 [1] 张成整个空间，这意味着这样的族构成了 $\mathbb{R}^n$的一个框架。在复数情形 $\mathbb{C}^n$ 下，目前尚无相关结果。下文将给出这方面的一个充分条件，该条件也有助于本节的主要结果。

命题 3.2. 设 $\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一族向量，使得对于 $\mathbb{C}^n$上的每个酉算子 U ，$U\Phi$ 都能进行弱相位恢复。那么 $\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是$\mathbb{C}^n$的一个框架。

证明。假设存在一个元素$x \in \{\phi_i\}_{i\in I_m}^{\perp}$，并将$\mathbb{C}^n$ 的一组标准正交基取为 $\{e_i\}_{i\in I_n}$ ，其中 $e_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$。此外，取 $0 \neq y \in span\{\phi_i\}_{i\in I_m}$ ，使得存在$\{\beta_i\}_{i=2}^n \subset \mathbb{C}$，且其中有一些非零元素满足 $y = \sum_{i=2}^n \beta_i e_i$。定义

$$\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n; \quad \mu(e_i) = \delta_i$$

其中 $\{\delta_i\}_{i\in I_n}$ 是 $\mathbb{C}^n$的标准正交基。显然， μ 是一个酉算子，并且

$$\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y) = \|x\|\delta_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i\delta_i, \quad \mu(-x+y) = -\|x\|\delta_1 + \sum_{i=2}^n \beta_i\delta_i.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} |\langle \mu(x+y), \mu\phi_i\rangle| &= |\langle x+y, \phi_i\rangle| \\ &= |\langle -x+y, \phi_i\rangle| \\ &= |\langle \mu(-x+y), \mu\phi_i\rangle|, \end{aligned}$$

对所有 $i \in I_m$均成立。根据假设， $\mu\Phi$ 能够进行弱相位恢复，因此可推出$\mu(x + y)$与 $\mu(-x + y)$弱意义下具有相同的相位，这不可能，除非$x = 0$。因此， Φ 是 $\mathbb{C}^n$的一个框架。□

定理 3.3. 设 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 中的一个向量族。那么以下条件等价；

(i) Φ 具有相位恢复性质。(ii) 对 $\mathcal{H}_n$ 上的每个可逆算子 U， $U\Phi$ 都具有相位恢复性质。(iii) 对 $\mathcal{H}_n$ 上的每个可逆算子 U， $U\Phi$ 都具有范数恢复性质。(iv) 对 $\mathcal{H}_n$ 上的每个可逆算子 U， $U\Phi$ 都具有弱相位恢复性质。

证明。(i)、(ii) 和 (iii) 的等价性已在 [9] 中证明。此外，显然有 $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv)$。因此，只需证明 $(iv) \Rightarrow (i)$。假设 $U\Phi$ 对 $\mathcal{H}_n$ 上的所有可逆算子都具有弱相位恢复性质，特别地，这意味着 ϕ 具有弱相位恢复性质。此外， Φ 是 $\mathcal{H}_n$ 的一个框架，即根据命题 3.2， Φ 张成 $\mathcal{H}_n$ 。接下来，我们将证明 Φ 具有相位恢复性质。反之，设 $\mathcal{H}_n$ 中存在非零元素 x 和 y，使得

$$|\langle x, \phi_i\rangle| = |\langle y, \phi_i\rangle|, \quad (i \in I_m) \tag{3.1}$$

但对于任意 $|c| = 1$， $y \neq cx$ 。由于 Φ 能够实现弱相位恢复，因此存在某个 $|\theta|$ =1，使得对于所有 $j \in I_n$， $\theta phase(x_j) = phase(y_j)$。假设 $y \neq \theta x$ 意味着存在某个 $j \in I_n$使得$|x_j| \neq |y_j|$ 。由于 Φ 是一个框架，因此对于某个 i，(3.1) 中的等式非零；于是 $y = cx$ 立即意味着 x 和 y 线性无关，并且

我们可以考虑 $\mathcal{H}_n$的一组基，其中包含 x和 y作为 $\{x, y, e_3, ..., e_n\}$。我们分以下几种情况讨论

情形 1. 若 x 和 y 的支撑互不相交，则它们没有非零的公共坐标。不失一般性，设 $x_1, y_2 \neq 0$，因此 $x_2 = y_1 = 0$。定义 U: $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$，使得 $Ux = x - y, Uy = x + y$ 以及 $Ue_k = e_k, 3 \leq k \leq n$。于是， U 是 $\mathcal{H}_n$ 上的有界可逆算子，并且

$$|\langle Ux, (U^{-1})^*\phi_i\rangle| = |\langle Uy, (U^{-1})^*\phi_i\rangle|, \quad (i \in I_m),$$

由 (3.1) 及 U的可逆性可知。然而，由于 $phase(Ux)_1 = phase(Uy)_1$且 $phase(Ux)_2 = e^{i\pi}phase(Uy)_2$， Ux和 Uy不具有弱相同相位。这与假设 $(U^{-1})^*\Phi$ 具有弱相位恢复性质相矛盾。

情形 2。设 x 和 y 在第 i个位置有一个共同的非零坐标。若对所有 $l \neq i$ 都有 $y_l = 0 = x_l$ ，则由 (3.1) 并利用假设 $|x_i| = |y_i|$，即 $y = \theta x$ ，可得矛盾。因此，存在 $l \neq i$ ，使得 $y_l \neq 0$ 或 $x_l \neq 0$。不失一般性，设 $y_l \neq 0$ 且 $\frac{|x_l|}{|y_l|} < \frac{|x_i|}{|y_i|}$。事实上，若所有共同的非零元素 $\frac{|x_i|}{|y_i|} = c$ 都成立，则 $y = \frac{\theta}{c}x$，这与假设矛盾。

因此，我们得到 $\epsilon > 0$ ，使得 $\frac{|x_l|}{|y_l|} < \epsilon < \frac{|x_i|}{|y_i|}$ 。定义 U： $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$ ，使得$Ux = \theta x - \epsilon y$、 $Uy = \theta x + \epsilon y$ 且 $Ue_k = e_k$、 $3 \leq k \leq n$。此外，

$$(Ux)_j = (|x_j| - \epsilon|y_j|)\alpha_j\theta, \quad (Uy)_j = (|x_j| + \epsilon|y_j|)\alpha_j\theta. \quad (j \in I_n)$$

其中 $\alpha_j = phase(x_j)$。因此，我们得到 $phase(Ux)_i = phase(Uy)_i$，然而$phase(Ux)_l = e^{i\pi}phase(Uy)_l$。这与前一种情形类似，会导致矛盾，证毕。

□

下面的结果给出了框架族满足某个充分条件的情形，使其典范对偶也具有弱相位恢复性质。

命题 3.4. 设 $\Phi = \{\phi_i\}_{i\in I_m}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 中的一个框架，其框架算子为对角算子。那么，当且仅当其典范对偶具有弱相位恢复性质时， Φ 才具有弱相位恢复性质。

证明。设 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 分别为 S_Φ的对角元素。显然，对所有 $i \in I_n$，都有 $\alpha_i > 0$。设 Φ 具有弱相位恢复性质，取 $x, y \in \mathcal{H}_n$使得 $|\langle x, S_\Phi^{-1}\phi_i\rangle| = |\langle y, S_\Phi^{-1}\phi_i\rangle|$。于是，我们得到 $S_\Phi^{-1}x = (x_1/\alpha_1, ..., x_n/\alpha_n)$ 和$S_\Phi^{-1}y = (y_1/\alpha_1, ..., y_n/\alpha_n)$弱相位相同。因此，$x$和 y也弱相位相同。反向结论可由类似的论证得出。□

资金支持。作者未披露任何资金支持。

数据可用性声明。本文不适用数据共享，因为在本文撰写过程中未生成任何数据集。

利益冲突。本研究不存在任何利益冲突。

参考文献

1. F. Akrami、P.G. Casazza、A. Rahimi、M.A. Hasankhanifard 和 B. Daraby，《关于（弱）相位恢复、范数可恢复的实希尔伯特空间框架及投影的注记》。arXiv:2110.06868v1 math.FA。2. B. Alexeev、J. Cahill、D. Mixon，《全火花框架》，J. Fourier Anal. Appl. 18(6) (2012), 1167–1194。3. F. Arabyani Neyshaburi、A. Arefijamaal 和 Gh. Sadeghi，《最优替代对偶框架的极点与识别》。Linear Algebra Appl. 549 (2018), 123–135。4. F. Arabyani Neyshaburi、A. Arefijamaal 和 Gh. Sadeghi，《希尔伯特空间中的数值最优与谱最优对偶框架》。Linear Algebra Appl. 2020;604:52-71。5. R. Balan、B. G. Bodmannan、P. Casazza 和 D. Edidin，《从框架系数的幅值进行无痛重构》。J. Fourier Anal. Appl. 15 (2009), 488–501。6. R. Balan，《从冗余表示的幅值重构信号：复数情形》。Found Comput Math. 16(3) (2015), 677–721。7. H. Bolcskei、F. Hlawatsch 和 H. G. Feichtinger，《过采样滤波器组的框架理论分析》。IEEE Trans. Signal Process. 46 (1998), 3256–3268。8. R. Balan、P.G. Casazza 和 D. Edidin，《无相位信号重构》。应用与计算调和分析 20 (2006), 345–356。9. S. Bahmanpour、J. Cahill、P. G. Casazza、J. Jasper 和 L.M. Woodland，《相位恢复与范数恢复》。arXiv:1409.8266v1 math.FA。10. S. Botelho-Andrade、P. G. Casazza、D. Ghoreish、Sh. Jose 和 J. C. Tremain，《弱相位恢复与无相位重构》。arXiv:1612.08018v1 math.FA。11. J. Cahill、P. G. Casazza 和 I. Daubechies，《无限维希尔伯特空间中的相位恢复》。Transactions of the AMS, series B. 3 (2016), 63–76。12. J. Cahill、P. G. Casazza、J. Peterson 和 L. Woodland，《通过投影进行相位恢复》。博士论文。2015。arXiv:1305.6226v3 math.FA。13. O. Christensen，《框架与基：入门课程》。Birkh¨auser，波士顿。2016。14. Y. Ephraim、D, Malah，《使用最小均方误差短时谱幅度估计器进行语音增强》。IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. 32(6) (1984), 1109-1121。15. M. A. Hasankhani Fard、L. Mohammadi Rad，《有限维复希尔伯特空间中的范数可恢复框架及其扰动》，Numer Func Anal Opt. 38(1) (2016), 51-57。16. C. Heil，《基理论入门》。App. Numer. Harmon. Anal，Springer，纽约，扩充版，2011。17. J. Lopez、D. Han，《抗擦除的最优对偶框架》。Linear Algebra Appl. 432(1) (2010), 471–482。18. J. Kovacevic、M. Puschel，《具有最大擦除鲁棒性的实紧框架》。书籍章节，载于：J.A. Storer、M. Cohn（编），《DCC 2005 论文集：数据压缩会议》：电气与电子工程师学会，洛斯阿拉米托斯，加利福尼亚州，(2005), 63–72。19. S. Pehlivan、D. Han 和 R. Mohapatra，《线性连接序列与抗擦除的谱最优对偶框架》。J. Functional Anal. 265(11) (2013), 2855-2876。20. H.L. van Trees，《最优阵列处理》。Wiley，纽约，2002。

21. Y. Wang、Z. Xu，稀疏信号的相位恢复。《应用与计算调和分析》37（2014），531–544。

Fahimeh Arabyani-Neyshaburi[1]
电子邮箱：f.arabiani@um.ac.ir，fahimeh.arabyani@gmail.com

Ali Akbar Arefijamaal[2]电子邮箱：
arefijamaal@hsu.ac.ir;arefijamaal@gmail.com

Rajab Ali Kamyabi-Gol[3,*]电子
邮箱：kamyabi@um.ac.ir