具有多个视点的 1.5D 地形上的沃罗诺伊可见性图⋆

Vahideh Keikha[a]、[b]、Maria Saumell[a]、[c]、*

[a]捷克科学院计算机科学研究所，捷克共和国。[b]查理大学数学与物理学院应用数学系，布拉格，捷克共和国。[c]布拉格捷克理工大学信息技术学院理论计算机科学系，捷克共和国。

arXiv:2301.05049v1 [cs.CG] 12 Jan 2023

摘要

给定一个具有 n 个顶点的 1.5D 地形 $\mathcal{T}$和一组 $\mathcal{P}$ 由 $m < n$ 个视点组成的集合，沃罗诺伊可见性图 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 是对 $\mathcal{T}$ 的一种划分，将每个区域分配给距离最近（按欧几里得距离）的可见视点。彩色可见性图 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 是对 $\mathcal{T}$ 的一种划分，其中每个区域具有相同的可见视点集合。本文提出了一种计算 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的算法，其运行时间为 $O(n + (m^2 + k_c)\log n)$，其中 k_c 和 k_v 分别表示 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 和 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的总复杂度。该算法改进了此前针对这一问题的算法。我们还将该算法推广到高阶 Voronoi 可见性图以及相对于其他距离的沃罗诺伊可见性图。最后，我们证明了联系 k_v 与 k_c 的界，并展示了该算法在有限视距问题中的一种应用。

关键词：可见性、1.5D 地形、沃罗诺伊图、多个视点。

1. 引言

1.5D 地形 $\mathcal{T}$是由 $\mathbb{R}^2$ 中的x单调折线构成的，该折线包含n 个顶点。若连接 $\mathcal{T}$ 上两点的线段不包含任何严格位于 $\mathcal{T}$下方的点，则这两点可见。

地形中的可见性问题是地理信息科学中的基础问题，并有许多应用，例如布设防火瞭望塔或通信塔 [4], 、识别从敏感地点无法观察到的区域 [15],，或解决与传感器网络相关的问题 [17]。尽管 2.5D 地形在建模和预测方面更有意义，但 1.5D 地形更易于可视化和分析。它们有助于深入了解 2.5D 地形在地形分析中的难点，而正确理解 1.5D 地形被视为实现最终解决 2.5D 情形这一目标的重要一步。因此，过去 15 年间，计算几何领域的研究人员对 1.5D 地形中的可见性问题进行了深入研究。

在本文中，我们关注这样一种变体：一组 $\mathcal{P}$ 由$m < n$ 个视点组成，它们位于 $\mathcal{T}$ 的顶点上（关于$m < n$ 这一假设的讨论，请参见本节末尾）。对于每个视点$p \in \mathcal{P}$，p 的可视域 是 $\mathcal{T}$ 中可从p 看到的点的集合（示例见图1）。我们的目标是高效提取有关 $\mathcal{T}$ 相对于 $\mathcal{P}$的可见性信息。我们将继续开展 [12], 中的工作，其中引入了以下结构。

可见性图 Vis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 将 $\mathcal{T}$划分为可见区域（包含 $\mathcal{T}$中至少被 $\mathcal{P}$的一个元素看到的所有部分）和不可见区域（包含 $\mathcal{P}$中未被任何元素看到的部分）。示例见图2a。可见性图中的可见区域等于 $\mathcal{P}$中所有视点的可视域的并集。

⋆本研究得到捷克科学基金会项目GJ19-06792Y及机构支持RVO:67985807的资助。V.K还获得了查理大学项目UNCE/SCI/004以及捷克科学院的部分资助（M. Paluˇs获PraemiumAcademiae奖）。

*通讯作者电子邮箱： keikha@cs.cas.cz (Vahideh Keikha)， maria.saumell@fit.cvut.cz(Maria Saumell)

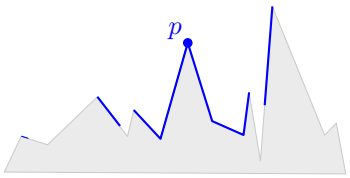

图 1：p的可视域。

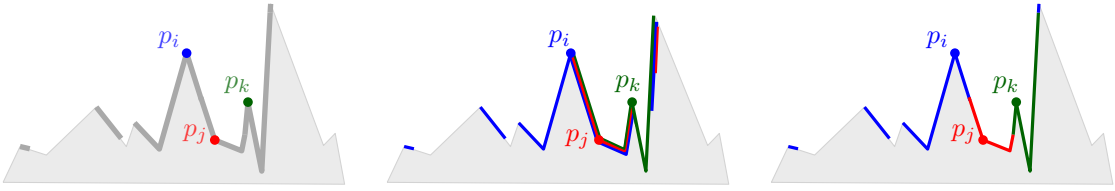

图 2：（a）Vis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)（可见区域以灰色显示）。（b）ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)。（c）VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)。

The 有色的 可见性图 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 是将 $\mathcal{T}$划分为若干区域，使每个区域中的点具有相同的可见视点集合。参见图 2b 示例。

最后，沃罗诺伊可见性图 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 是将 $\mathcal{T}$划分为若干区域，使每个区域具有相同的最近可见视点，其中所使用的距离是欧几里得距离（而不是沿地形的距离）。参见图 2c 示例。

文献 [12] 提出了用于计算 1.5D 地形和 2.5D地形中这些结构的算法。对于 1.5D 地形，计算 VorVis($\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$) 的算法运行时间为 O(n $+(m^2+k_c)$ log n $+k_v(m+\log n \log m)$)，其中 k_c 和 k_v 分别表示 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 和 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的总复杂度。k_c 和 k_v 的规模均为 O(mn)，且该界是渐近紧确的 [12]。该算法首先计算 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)，随后花费 Θ(m) 时间来求出 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的每个单独区域。本文表明，对于 1.5D 地形，可以更高效地从 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 中提取 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)，从而得到一个运行时间为 O(n $+(m^2+k_c)$ log n) 的算法。我们利用一个关于地形与一对视点的垂直平分线交点的观察结果，并据此证明 k_c 和 k_v 之间的关系。

需要指出的是，除了文献 [12] 中针对 1.5D 地形的 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 提出的上述输出敏感算法外，作者还提出了一种分治算法，其运行时间为 $O(mn\log m)$，在最坏情况下近乎最优（回想一下，VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的最大复杂度为 $\Theta(mn)$）。因此，我们的新算法并未改善最坏情况实例的性能，而是在原输出敏感算法比该分治算法更快、且 $k_v m$ 是运行时间主导项的实例中有所改进。这类实例的一个例子是 $m = \Theta(\sqrt{n})$、$k_c = \Theta(n^{3/4})$ 且 $k_v = \Theta(n^{3/4})$。

本文还将我们的算法推广到计算高阶沃罗诺伊可见性图（即包含距某点最近的k 个可见视点的信息，其中 $k > 1$），以及针对另外两种距离的沃罗诺伊可见性图：沿地形的欧几里得距离和链路距离。所有这些推广算法的运行时间都与原算法相同。

最后，针对 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的新算法还使我们能够高效解决一个与有限视距相关的问题。提出这类问题的动机在于，尽管许多可见性问题假设可见范围无限，但在现实环境中，由视点建模的光强度、信号及其他现象会随距离增加而减弱。本着这一思路，O'Rourke [16], 提出了以最小总能量照亮一个多边形区域的问题，并在 [7, 8] 中进行了研究。我们考虑地形上的一个相关问题，即计算最小值 r^*，使得当视点只能看到距离在r^*以内的物体时，得到的可见性图与 Vis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 相同。我们证明，这个问题也可以在$O(n+(m^2+k_c)\log n)$ 时间内解决。

相关工作。 当只有一个视点时，可将 1.5D 地形转换为简单多边形，并应用 [13] 中的算法，在$O(n)$ 时间内计算其可见性图。关于多个视点这一变体，最早的结果之一是一个$O((n+m)\log m)$时间算法，用于检测是否存在可见点对

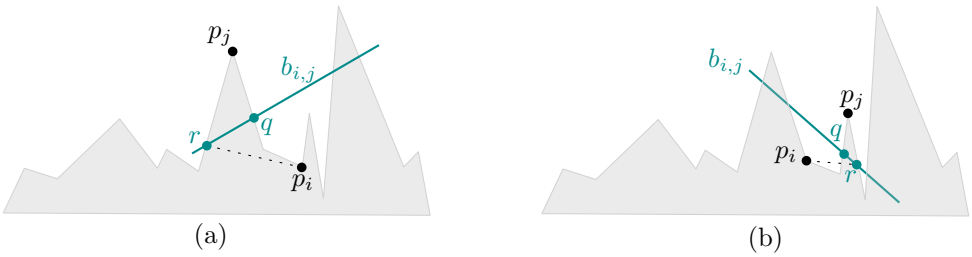

图3：引理 1 的示意图：(a) $x(p_i) > x(p_j)$; (b) $x(p_i) < x(p_j)$.

位于 1.5D 地形上方的视点 [2]。随后， [12] 对 1.5D 和 2.5D 地形中的 Vis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)、VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 和 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 进行了系统研究。与构造 Vis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 密切相关的一个问题是计算地形的总可见性指数，即每个视点能够看到的视点数量。该问题可在$O(n\log^2 n)$ 时间内解决 [1]。

视点位置未知的情形已得到充分研究。众所周知，计算使 1.5D 地形保持照明所需的最少视点数是NP完全问题 [9, 14], ，但该问题存在多项式时间近似方案 [9, 10, 11]。如果将视点限制在线上，则同一问题可在线性时间内求解 [6]。

假设。 </style}与 [12], 中一样，我们假设 $\mathcal{T}$ 的任意三个顶点不共线。为简化起见，我们还假设 $\mathcal{T}$ 的任何一条边都不包含在 $\mathcal{P}$中两个视点的垂直平分线上，并且 $\mathcal{T}$ 上的任意一点到 $\mathcal{P}$中三个或更多视点的距离都不相等。

如前所述，我们仅考虑视点位于地形顶点上的情形； [12], 中也作了相同假设，由此可知$m \leq n$。注意，这不会造成一般性的损失，因为如果视点位于地形边的内部，我们只需在地形上添加顶点，然后应用我们的算法即可。此外，在地形上放置超线性数量的视点似乎没有太大意义：如果同一条边上有两个以上的视点，很容易看出，最左侧和最右侧视点的可视域并集包含该边上其他任何视点的可视域。因此，就可见性而言，所有中间视点多少都无关紧要。

最后需要说明的是，在 [12], k_v 和 k_c 中，不仅包括位于相应图中两个不同区域边界上的 $\mathcal{T}$ 的数量，还包括 $\mathcal{T}$ 的顶点总数，即 n。为保持一致，本文也遵循相同的约定。

2. Voronoi可见性图的复杂度

文献 [12], 指出，VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的复杂度可能高于、低于或等于 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的复杂度。本节将进一步细化这一说法。回顾一下，在这两种情况下，复杂度均为 $O(mn)$，且该界是渐近紧确的 [12]。

Voronoi 可视域 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p, \mathcal{P})$ 指的是 p 的可视域中，与 p 的距离比与任何其他可见视点的距离都近的点的集合。

由于我们假设 $\mathcal{T}$ 的任何一条边都不包含在两个视点的垂直平分线上，因此 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 中两个相邻区域之间的公共边界始终是 $\mathcal{T}$ 上的一个点。我们称这类点为 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的事件 点。ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的事件 点定义类似，即映射中两个相邻区域边界上的点。

我们用 $b_{i,j}$表示两个视点 p_i 和 p j 的垂直平分线。此外，我们用 $q_{i,j}$表示 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的一个事件点，使得 $q_{i,}$ j 左右两侧无限接近该点的点分别属于 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_{i,}\mathcal{P})$ 和 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_{j,}\mathcal{P})$（注意，事件 $q_{i,}$ j 与事件 $q_{j,i}$ 不同）。存在三种（并非互斥的）可能性：(i) p_i 在 $q_{i,}$ j[1] 处变得不可见；(ii) p j 在 $q_{i,j}$ 处变得可见；(iii) p_i 和 p j 在 $q_{i,}$ j 处均可见，且 $q_{i,}$ j 是一个交点

[1]当我们写道p_i 在$q_{i,j}$处变得不可见时，意思是它在$q_{i,j}$ 的紧左侧可见，而在紧右侧不可见。我们写道p_j 在$q_{i,j}$处变得可见时，含义相同。

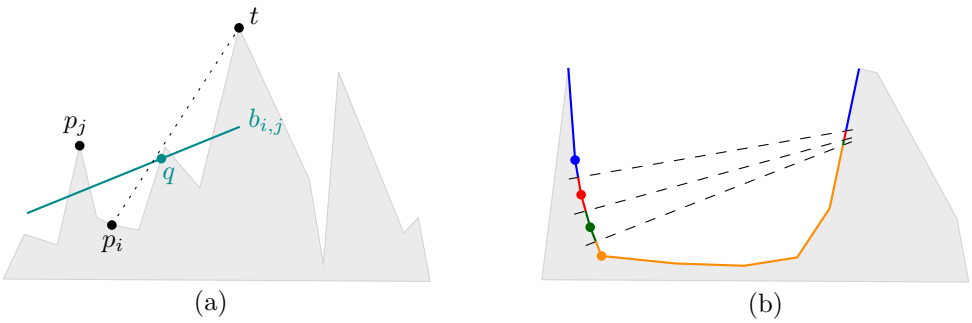

图4：(a) 在垂直平分线与 $\mathcal{T}$ 的交点处，对 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 的事件进行分摊的示意图（定理1的证明）：事件 q 计入 p_i，因为 q 右侧没有任何点 t 属于 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i,\mathcal{P}_r)$。(b) 一个 $k_v = k_c + 2m - 2$ 的实例：ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 由三个部分组成（一个对所有视点均可见的部分，夹在两个对任何视点均不可见的部分之间），而在 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 中（图中所示），可见部分被细分为 $2m - 1$ 个部分。

位于$b_{i,\ j}$和 $\mathcal{T}$之间的点。

在下面的引理中，我们证明本文的关键观察：尽管垂直平分线 $b_{i,j}$ 可能与地形 Θ相交 n 次，但只有其中两个交点与此相关，并可能产生 (iii) 类事件。

引理 1. 设 $p_i \in \mathcal{P}$ 的高度低于 $p_j \in \mathcal{P}$。设 q 为 $b_{i,j}$ 与 $\mathcal{T}$ 的交点，且位于 p_i 的左侧（分别为右侧）。那么，任何位于 q 左侧（分别为右侧）且从 p_i 可见的点，到 p_j 的距离都小于到 p_i 的距离。因此，q 左侧（分别为右侧）不存在位于 q 处的 *(iii)* 类事件 $q_{i,j}$ 或 $q_{j,i}$。

证明。 由于假设p_i的y坐标小于p_j的坐标，因此平面上到p_i比到p_j更近的区域位于$b_{i,j}$的下方。但任何位于$b_{i,j}$上或其下方，且在q左侧（分别为右侧）的点r，都无法从p_i处看见，因为线段$p_i r$包含一个严格位于地形表面下方的点（具体而言，就是与q垂直对齐的点）；示意见图3。

陈述的第二部分成立，是因为从p_i处可见是类型（iii）事件的条件之一。

□

为了证明我们的界，我们还会用到 1.5D 地形中一个众所周知的可见性性质，称为顺序断言：

引理2（中的断言2.1）。设 $a,b,c,$ 和 d 是 $\mathcal{T}$ 上的四个点，满足 $x(a) < x(b) < x(c) < x(d)$。若 a 能看见 c，且 b 能看见 d，则 a 能看见 d。

我们用 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 和 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 分别表示 $\mathcal{T}$的沃罗诺伊可见性图和彩色可见性图，并假设视点只能看到自身及其左侧。此外，我们用 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p,\ \mathcal{P}_\ell)$ 表示在相同假设下p的沃罗诺伊可视域。使用视点只能看到右侧的可见性这一假设，可类似地定义 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$)、ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 和 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p,\ \mathcal{P}_r)$。现在我们可以证明以下结论：

定理1. 给定一个具有 n 个顶点的地形 $\mathcal{T}$，以及一组位于 $\mathcal{T}$顶点上的 m 个视点 $\mathcal{P}$，以下界成立：

$$k_v \le \min\{k_c + m^2, 2k_c + 8m - 4\}.$$

证明. 由于 $\mathcal{T}$的顶点同时计入k_v 和k_c，我们在分析中将其排除。

我们先证明$k_v \le k_c + m^2$。注意，类型 (i) 和 (ii) 的事件也是 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的事件。下面证明类型 (iii) 的事件至多有m^2 个。

设p_i、p_j为一对视点。如果p_i和p_j处于同一高度，则$b_{i,j}$是垂直的，且只与 $\mathcal{T}$相交一次，因此 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 在$b_{i,j} \cap \mathcal{T}$上至多有一个事件。否则，不失一般性，假设p_i低于p_j。根据引理 1，类型 (iii) 事件$q_{i,j}$或$q_{j,i}$的唯一候选点，是类型为

[2]当p 的y坐标小于（分别大于）q 的y坐标时，我们称p 位于较低（分别为较高）的位置 q.

$b_{i,j} \cap \mathcal{T}$ 的所有位于 p_i 右侧的点中最靠左的点，以及所有位于左侧的点中最靠右的点。因此，每对视点至多产生两个类型 (iii) 的事件。

接下来，我们证明关于 k_v 的第二个上界。我们分别用 k_v^ℓ、k_c^ℓ、k_v^r 和 k_c^r 表示 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$)、ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$)、VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 和 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 的所有区域的总复杂度。

ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的每个事件都可以唯一地对应到 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 或 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中的某个事件：如果该事件涉及视点 p_i（变为可见或不可见），且位于 p_i 的左侧，那么同一事件也会出现在 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 中，并将其对应到该事件。如果该事件位于 p_i 的右侧，则将其对应到 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中的同一事件。如果该事件发生在 p_i 上，可以很容易看出，p_i 要么是 $\mathcal{T}$ 的最左端点，此时将其对应到 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中的同一事件；要么是 $\mathcal{T}$ 的最右端点，此时将其对应到 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 中的同一事件。

ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 或 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中未被分配任何 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 事件的每个事件，都位于 $\mathcal{T}$ 中某个既非最左点也非最右点的视点所在的位置。事实上，若 $p_i \in \mathcal{P}$ 是这样的视点，那么在其所在位置，p_i 会在 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中变得可见，并在 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 中变得不可见[3]，但 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 中不存在此类事件（其中有一段 $\mathcal{T}$ 从 p_i 可见，并包含 p_i，且该点不在其边界上而在其内部）。由此可证 $k_c^\ell + k_c^r \le k_c + 2m$。

接下来，我们证明 k_v^r 与 k_c^r 之间的关系。假设我们从左向右遍历 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$)，并在每个不是 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中事件的位置停下，也就是说，该事件位于垂直平分线 $b_{i,j}$ 与 $\mathcal{T}$ 的交点处。由于在 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中，视点只能看到自身及其右侧的点，因此 p_i 和 p_j 位于事件 q 的左侧。不失一般性，设 p_j 位于 p_i 的左侧。与引理 1 的证明相同，若 p_i 高于 p_j，则垂直平分线 b_i 上位于 p_i 右侧的点都无法被 p_j 看见，这与垂直平分线 $b_{i,j}$ 和 $\mathcal{T}$ 的交点处存在事件相矛盾。此外，p_i 与 p j 高度不同，因为两者都位于 q 的左侧。因此，p_i 低于 p j。令 t 为 q 右侧一个能被 p_i 看见的点（见图 4a）。根据引理 1，取 a $= p_j$、b $= p_i$、c $=$ q 和 d $=$ t，则 t 也能被 p j 看见。根据引理 1，t 到 p_j 的距离小于到 p_i 的距离。因此，t $\notin \mathcal{W}_\mathcal{T}(p_i,\mathcal{P}_r)$。这意味着 q 右侧不存在 $\mathcal{W}_\mathcal{T}(p_i,\mathcal{P}_r)$ 的部分，尤其不存在由 p_i 的垂直平分线与另一个视点相交所产生的后续事件。我们将事件 q 计入 p_i，由此可得，此类事件至多有 m − 1 个。因此，$k_v^r \le k_c^r + m - 1$。

最后，我们根据 k_v^r 和 k_v^ℓ，推导出 k_v 的一个上界。

取 $\mathcal{T}$ 的一段连续部分 $\mathcal{T}'$，它既属于 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中某个视点 p_i 的沃罗诺伊可视域，也属于 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 中某个视点 p_j 的沃罗诺伊可视域。令 $\mathcal{T}'$ 为满足此性质的最大部分。注意，p_i 位于 $\mathcal{T}'$ 的左侧，而 p_j 位于其右侧。此外，在 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 中，$\mathcal{T}'$ 上的每个点都属于 p_i 或 p j 的沃罗诺伊可视域。接下来，我们证明 $b_{i,j}$ 与 $\mathcal{T}'$ 至多相交一次。当 y(p_i) $=$ y(p_j) 时，结论显然成立。否则，不失一般性，假设 p_i 低于 p j。令 q 为 $b_{i,j}$ 与 $\mathcal{T}'$ 之间最左侧的交点（若存在）。可知 q 位于 p_i 的右侧。此外，$\mathcal{T}'$ 上位于 q 右侧的所有点都能从 p_i 处看到，因为它们属于 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 中 p_i 的沃罗诺伊可视域。根据引理 1，$\mathcal{T}'$ 上位于 q 右侧的所有点到 p j 的距离都小于到 p_i 的距离。因此，$b_{i,j}$ 与 $\mathcal{T}'$ 在 q 右侧没有交点，且 $b_{i,j}$ 与 $\mathcal{T}'$ 至多相交一次。这意味着 $\mathcal{T}'$ 在最终图中至多被分成两段。

这种情况　在 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_r$) 或 VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 中至少有一个区域没有任何可见视点的情况是平凡的。

因此，$k_v \le 2(k_v^r + k_v^\ell)$。

综合以上结果，

$$\begin{aligned} k_v &\le 2(k_v^r + k_v^\ell) \\ &\le 2(k_c^r + k_c^\ell + 2m - 2) \\ &\le 2(k_c + 4m - 2) = 2k_c + 8m - 4. \end{aligned}$$

□

关于下界，我们证明如下结论：

例 1. 该　存在一个含有 n 个顶点的地形，以及一组位于地形顶点上的 m 个视点，使得 $k_v = k_c + 2m - 2$。构造过程如图 *4b* 所示。

[3]严格来说，在 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}_\ell$) 中，$p_i$ 会在其右侧紧接着变得不可见。

3. 沃罗诺伊可见性图的计算

我们提出的算法很简单：从左向右扫描地形，并用一棵平衡二叉搜索树维护可见点集合，其中每个视点的键值是当前被扫描线扫描到的地形点与该视点之间的欧几里得距离；相关视点始终是最近的可见视点。该算法基于以下观察：按到 $\mathcal{T}$ 的距离对整个视点集合排序并加以维护可能代价高昂（因为两个视点的垂直平分线可能与地形 $\Theta(n)$ 次相交），而根据引理 1，维护可见视点集合则不会（因为在潜在的 $\Theta(n)$ 个交点中，这两个视点至多在两个交点处可见）。得益于这一观察，VorVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的新事件可在$O(\log m)$ 时间内找到，而非$O(m)$。接下来我们将介绍具体细节。

算法从左向右扫描地形，并在可能成为事件点的点处停下。类型 (i) 和 (ii) 事件的候选点是 ColVis($\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$) 的事件。我们将在第 3.2 节说明类型 (iii) 事件的候选点。

3.1. ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的事件

我们使用 [12] 中的算法版本来计算 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$)。该版本返回一个双向链表，其中包含按从左到右顺序排列的 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的顶点，并提供如下可见性信息：对于 ColVis($\mathcal{T},\mathcal{P}$) 的第一个分量，会指定可见视点；对于其他分量，算法则输出相对于其紧邻左侧分量，可见视点集合的变化。

3.2. 类型 *(iii)* 事件的候选点

接下来，我们描述与一对视点 p_i、$p_j \in \mathcal{P}$ 相关的类型 (iii) 事件候选点。

如果 p_i和 p_j处于同一高度，那么 $b_{i,j}$与 $\mathcal{T}$的唯一交点位于两个视点之间。如果该点同时从 p_i 和 p_j可见，我们就将其加入类型 (iii) 事件的候选点。

否则，不失一般性，我们可以假设 p_i 低于 p_j。根据引理 1，涉及 p_i和 p_j的类型 (iii) 事件，唯一的候选点是所有位于 p_i 右侧的同类交点中最靠左的一个，以及所有位于其左侧的点中最靠右的一个。为简单起见，我们先假设 <style id='b'>$_{i,j}$在这些交点处均不与 $\mathcal{T}$ 相切。此时，当且仅当这些交点同时从 p_i 和 p_j可见时，才将其加入由该直线扫过的事件候选点列表。

最后，令 q 为涉及 p_i 和 p_j的两个类型 (iii) 事件候选点之一。假设 q 位于 p_i 右侧（另一种情况对称）。如果 $b_{i,j}$ 在 q处与 $\mathcal{T}$ 相切，那么 $\mathcal{T}$ 上无限接近 q 左侧或右侧的点，距离 p_i 都比距离 p_j 更近（而 q 到二者的距离相等）。此外，p_i 在越过 q后立即变得不可见。因此，无须将 q 加入类型 (iii) 事件的候选点列表：在 q之前，算法已知 p_i 比 p_j更靠近地形。在 q处，算法会处理 p_i变得不可见这一情况，而 p_j（若可见）会自动在当前 Voronoi 可见区域“所有者”的候选列表中获得比 p_i 更高的优先级。关键论证（q右侧不再有类型 (iii) 事件的候选点）在这种情况下同样成立。

3.3. 数据结构

该算法使用以下数据结构。

我们维护一棵平衡二叉搜索树H，其中包含在扫描的当前位置可见的视点。这些视点按照各自对应的键值在树中排序；键值是视点到扫描线与地形当前交点的距离。由于扫描线移动时键值会发生变化，因此不会将键值存储在树中，但需要时可以在常数时间内计算出每个键值。该算法始终选择H 中键值最小的视点，作为当前 Voronoi 可见区域的“所有者”。

在H中，当视点变得可见或不可见时，我们分别执行插入操作和删除操作。在这些操作中，如果需要在树的某个节点处决定转向其左子树还是右子树，我们只需计算该节点中视点对应的键值，并将其与要插入或删除的视点的键值进行比较。因此，可以按照标准方式在$O(\log m)$时间内完成插入操作和删除操作。

当扫描线遇到一个类型 (iii) 事件的候选点（我们称其为q）时，两个可见视点相对于它们到地形的当前距离的相对顺序会发生变化（严格来说，是在q之后立即发生变化）。在H 中反映这一变化的一种可行方法是，从树中删除与q关联的两个视点之一，然后

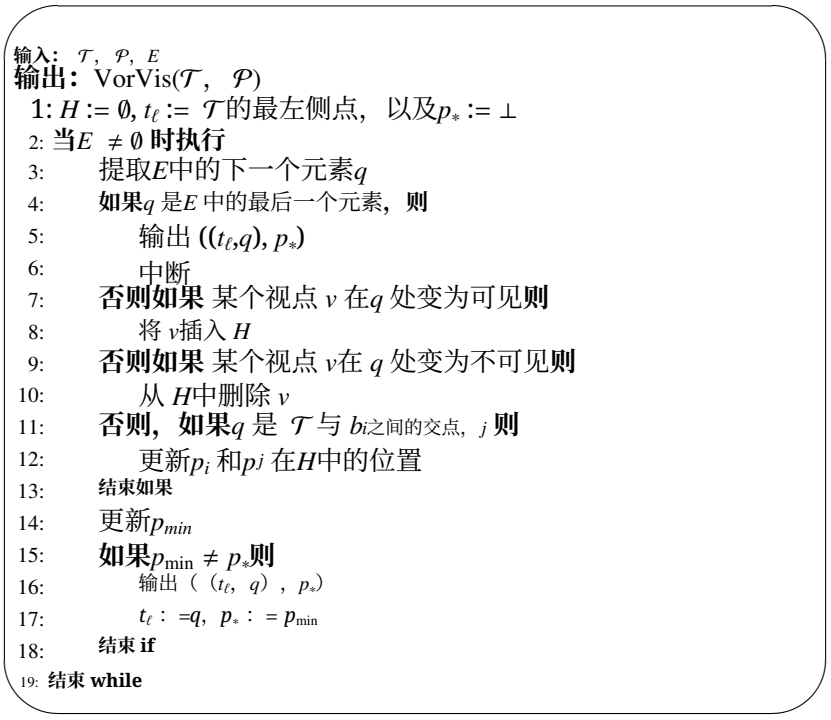

图 5：VorVis 的计算 （$\mathcal{T}$,$\mathcal{P}$）。E 是潜在事件列表，H 是包含当前可见视点的树，t_ℓ 是
c 的左端点 $\mathcal{T}$的当前区段中，p_* 是该区段内最近的可见视点，而$p_{\min}$ 是H 中键值最小的视点。

再将其插入，并以这些视点到 $\mathcal{T}$ 右侧无穷接近q 的一个点（且仍位于列表中下一个事件左侧）的距离作为键值。因此，类型 (iii) 事件的候选点可以在H 中用$O(\log m)$时间处理。

此外，我们使用一种数据结构，使我们能够在 $\mathcal{T}$ 中于$O(\log n)$时间内回答射线发射查询 [5]。此类查询用于判定给定的一对点是否相互可见，并找出 $\mathcal{T}$ 与一对视点的垂直平分线之间的相关交点。

3.4. 算法描述

给定 $\mathcal{T}$ 上的q和r，且$x(q) < x(r)$，我们分别用 $\mathcal{T}(q, r)$和 $\mathcal{T}[q, r]$ 表示q 与r之间地形的开区段和闭区段。

我们的算法如图5所示，输入为 $\mathcal{T}$、 $\mathcal{P}$ 以及按从左到右顺序排列的潜在事件列表E 。该列表包含 ColVis($\mathcal{T}$, $\mathcal{P}$)的所有事件，以及$O(m^2)$个类型(iii)事件的候选事件。列表E 还包含一个位于地形最右端点的事件。

算法将 VorVis($\mathcal{T}$,$\mathcal{P}$) 输出为一个配对列表，形式为 $((q, r), p_i)$，其中 p_i 是（q, r）中最近的可见视点$\mathcal{T}$（如果 $\mathcal{T}$（q, r）对任何视点都不可见，则输出 $((q, r), \perp)$）。算法中的变量 t_ℓ 和 p_* 分别表示算法当前正在分析的 $\mathcal{T}$ 部分的左端点，以及该部分中最近的可见视点。变量 $p_{\min}$ 表示H 中键值最小的视点（如果H 为空，则$p_{\min} = \perp$）。

初始时，$H := \emptyset$，$t_\ell :=$ $\mathcal{T}$的最左端点，且 $p_* := \perp$。

我们重复以下过程，直到 E 为空：从 E中取出下一个元素q，并根据四种情况进行处理，分别对应图 5 中伪代码的第 4、7、9 和 11 行。为简化起见，在图 5 的描述中，我们有意忽略了多个不同类型的事件在 $\mathcal{T}$ 的同一点发生的情况；这一情况将在下一段讨论。第 4、7 和 9 行中的情况显而易见。对于从第 11 行开始的情况，在第 12 行中，我们按照第 3.3 节的说明更新 H 中p_i 和p_j 的位置（参见讨论扫描线遇到一个可能的 (iii) 类事件的那一段）。我们还指出，如果q 是 $\mathcal{T}$ 与多个类型为$b_{i,j}$ 的垂直平分线的交点，则可以按任意顺序处理这些垂直平分线。[4]

[4]根据我们的一般位置假设，q 与三个或更多视点的距离不相等，因此经过q 的平分线中至多有一条可能涉及 e

还需要说明如何处理多个不同类型的事件在$\mathcal{T}$的同一点发生的情况。在这种情况下，我们首先执行该点所有事件触发的 H 修改（插入变得可见的视点、删除变得不可见的视点，以及更新视点对的位置）。以这种方式更新H 后，我们更新$p_{\min}$；如果$p_{\min} \neq p_*$，则输出 $((t_\ell, q), p_*)$，设置$t_\ell := q$，并设置$p_* := p_{\min}$。

3.5. 正确性与运行时间

我们首先证明，VorVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$) 的算法总是会选出距离最近的可见视点。视点可见性状态的变化对应于 ColVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$) 的事件，这些事件会被加入 E，因此在扫描过程中的任意时刻，H 中包含的可见视点集合都是正确的。对于视点到地形的距离，每当扫描到一个视点或该视点变为可见时，都会根据其当前到地形的距离将其正确地插入 H。可见视点之间按其到 $\mathcal{T}$ 的距离排列的顺序发生变化时，恰好对应于 $\mathcal{T}$ 与这些视点之间的垂直平分线的交点。正如定理1的证明中所述，对于每一对视点，两者同时可见且其垂直平分线与 $\mathcal{T}$ 的交点处于交点位置的情况至多发生两次。此类事件会预先计算并存储在 E 中，之后由算法处理。

接下来，我们分析该算法的复杂度 .

使用文献 [12] 中的算法，可以在 $O(n + (m^2 + k_c) \log n)$ 时间内计算映射 ColVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$)。该映射至多有 k_c 个区域；然而，由于多个视点可能同时变为可见或不可见，从左向右扫描 ColVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$) 时，对所有视点而言，视点变为可见或不可见的次数总和可能更高；文献 [12] 给出的上界为 $k_c + m^2$。每当视点的可见性状态发生变化，我们都会在 H 中执行一次插入或删除操作，耗时 $O(\log m)$。该算法最多处理 m^2 个地形与端点垂直平分线之间的交点，每个交点耗时 $O(\log m)$。因此，可以在 $O((m^2 + k_c) \log m)$ 时间内，从 ColVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$) 中提取 VorVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$)。该算法的空间复杂度等于存储地形、事件和数据结构所需的空间，即 $O(n + m^2 + k_c)$。

我们最后给出如下结论：

定理2。定理 地形上 *Voronoi* 可见性图的构造时间为 $O(n + (m^2 + k_c) \log n)$，且
空间复杂度为 $O(n + m^2 + k_c)$

间。

4. 扩展

本节将介绍对前述算法所做的调整，以计算相关映射。

4.1. 高阶沃罗诺伊可见性映射

我们将k阶沃罗诺伊可见性图 $\text{VorVis}_k(\mathcal{T}, \mathcal{P})$定义为对 $\mathcal{T}$的划分，使每个区域内具有相同的一组 ℓ 个最近可见视点，其中 ℓ 是k 与该区域内可见视点数量中的较小值。注意，m阶沃罗诺伊可见性图等于 ColVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$)。

通过调整第 3 节中的算法，我们可以轻松计算 $\text{VorVis}_k(\mathcal{T}, \mathcal{P})$。在这种情况下，我们需要维护两个额外变量：直线当前扫过的点处可见视点的总数b，以及当前 ℓ 个最近可见视点中最远的一个，记为$p_{\max}$。与 ColVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}$)的算法类似，出于空间方面的考虑，我们的 $\text{VorVis}_k(\mathcal{T}, \mathcal{P})$算法会返回一个双向链表，其中包含 $\text{VorVis}_k(\mathcal{T}, \mathcal{P})$的顶点，并按从左到右的顺序排列，同时附带以下信息：$\text{VorVis}_k(\mathcal{T}, \mathcal{P})$的第一个分量会指定这组 ℓ 个最近可见视点；对于其他分量，算法则会输出相对于其紧邻左侧分量，这组 ℓ 个最近可见视点的变化。

令q 为事件列表E中的下一个元素，其计算方式与上一节相同。我们详细说明一个或多个视点在q处变得可见的情况，其余情况留给感兴趣的读者。令 $\mathcal{P}'$表示在q处变得可见的视点集合。我们更新b。如果在此次更新之后，$b \leq k$，则报告顶点q 以及集合 $\mathcal{P}'$（其中包含 ℓ 个最近可见视点集合中的新视点）。我们还将 $\mathcal{P}'$ 中的视点插入H。否则，令b' 和b 分别表示在q 之前和q处可见的视点数量。如果$b' < k$，则从 $\mathcal{P}'$ 中移除$k - b'$ 个距离q 最近的视点（将 $\mathcal{P}'$ 中的视点按照其到q 的距离排序后得到）

---

p_*.

），我们将这些视点添加到集合 $\mathcal{P}'_{in}$ 中，并将其插入 H。在 $\mathcal{P}'$ 中可能执行完此操作后，我们继续如下进行：从 $\mathcal{P}'$ 中提取距离 q 最近的视点；如果它比 $p_{\max}$ 更接近 q，则将该视点添加到 $\mathcal{P}'_{in}$ 中，将其插入 H，将视点 $p_{\max}$ 添加到 $\mathcal{P}_{out}$ 中，并更新 $p_{\max}$。注意，可以通过在 H 中查找"旧" $p_{\max}$ 的前驱来更新 $p_{\max}$，所需时间为 $O(\log m)$。我们重复此过程，直到 $\mathcal{P}'$ 为空，或者 $\mathcal{P}'$ 中的下一个元素比 $p_{\max}$ 距离 q 更远。然后，将 $\mathcal{P}'$ 中的其余视点（如果有）插入 H。最后，我们报告顶点 q 以及集合 $\mathcal{P}'_{in}$（其中包含 ℓ 个最近可见视点集合中的新视点）和集合 $\mathcal{P}_{out}$（其中包含不再属于 ℓ 个最近可见视点集合的视点）。

显然，视点的每次可见性状态变化，以及 $\mathcal{T}$ 与两个可见视点的垂直平分线的每次交点，都可以在 $O(\log m + \log n)$ 时间内处理。因此，我们得到：

定理 3. 构造 *1.5D* 地形的 k 阶 *Voronoi* 可见性图需要 $O(n + (m^2 + k_c)\log n)$ 时间和 $O(n + m^2 + k_c)$ 空间。

4.2. 其他距离

给定 $\mathcal{T}$ 上满足 $x(q) < x(r)$ 的 q, r，q 和 r 之间还有另外两种自然距离：线段 $\mathcal{T}[q, r]$ 的欧几里得长度，我们称之为 沿地形的欧几里得距离；以及线段 $\mathcal{T}(q, r)$ 上的顶点数，我们称之为 链路距离。[5] 我们可以基于这些距离定义 $\mathcal{T}$ 的 Voronoi 可见性图。

与标准情形相关的差异在于两个视点 p_i 和 p_j 之间的垂直平分线形状。对于沿地形的欧几里得距离，$\mathcal{T}$ 上恰有一个点到 p_i 和 p_j 的距离相等；经过预处理 $\mathcal{T}$ 后，可以在 $O(\log n)$ 时间内计算出该点，并且可以在 $O(1)$ 时间内计算 $\mathcal{T}$ 上任意一对顶点之间的沿地形的欧几里得距离。[6] 对于链路距离，如果 p_i 和 p_j 之间有奇数个顶点，那么 $\mathcal{T}$ 上恰有一个顶点到 p_i 和 p_j 的距离相等，而且可以在 $O(1)$ 时间内计算出该顶点。然而，如果 p_i 和 p_j 之间有偶数个顶点，那么 $\mathcal{T}$ 上存在一条开放边，其上所有点到 p_i 和 p_j 的链路距离都相同。在这种情况下，我们必须允许两个相邻 Voronoi 区域之间的边界为一维；或者，如果更希望保持简单，也可以（人为地）选取该边的一个内部点，作为 $\mathcal{T}$ 与 p_i 和 p_j 的垂直平分线的交点。

根据上一段的说明，为类型 (iii) 的事件添加相应的候选项后，算法的其余部分与一般情形相同。运行时间也保持不变，因为对于 $\mathcal{T}$ 上的一对点，在这两种情况下都能在 $O(1)$ 时间内计算出它们之间的距离。因此，我们得出：

定理 4. 对于沿地形的欧几里得距离或链路距离，*1.5D* 地形的沃罗诺伊可见性图可在 $O(n + (m^2 + k_c)\log n)$ 时间和 $O(n + m^2 + k_c)$ 空间内构造。

5. r 的计算 *

我们回顾一下t r^* 是满足以下条件的 r 的最小值：如果视点只能看到距离 r 以内的物体，可见性 $\mathcal{T}$ 的映射不会改变。

设 $\mathcal{P}^r$ 表示视点集合 $\mathcal{P}$，并限制这些视点的可见范围为 r。于是，我们可以用自然的方式定义 Vis($\mathcal{T}, \mathcal{P}^r$)、VorVis($\mathcal{T}, \mathcal{P}^r$).....请注意，对于 $\mathcal{P}^\infty$，我们得到的对象与标准情形相同。

令 $d(x,y)$ 表示两点 x 和 $y \in \mathrm{R}^2$ 之间的欧几里得距离。

引理 3. $r^* = \max_{i=1,\ldots,m}\{\sup_{x \in W_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^\infty)} d(p_i, x)\}$。

---

[5] 对于链路距离，我们取地形 $\mathcal{T}(q, r)$ 的开区段，使得同一条边上的任意两点（包括端点）之间的（链路）距离为零。[6] 如果我们为 $\mathcal{T}$ 的每个顶点 q 存储沿地形从 q 到 $\mathcal{T}$ 最左端点 q_d 的欧几里得距离，那么对于满足 $x(q) < x(r)$ 的 $\mathcal{T}$ 顶点 q 和 r，沿地形的欧几里得距离为 $r_d - q_d$。

证明。 设 p_i 和 x 分别是视点和 $\mathcal{T}$ 中使右侧表达式达到最大值的点。若 $r^* < d(p_i, x)$,x 便不会在 $\mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{r^*})$ 中被 p_i 看到。由于 x 属于 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^{\infty})$ 的边界，所有其他能够看到 x 的视点到 x 的距离都大于或等于 $d(p_i,x)$；因此，在 $\mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{r^*})$ 中，它们也都看不到 x。由于 x 在 $\mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{\infty})$[7], 中可见，这就产生了矛盾。因此，$r^* \geq d(p_i, x)$。

另一方面，为了使 $\mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{\infty})$ 保持不变，只需让所有 i 对应的 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^{\infty})$ 的闭包保持可见即可，因为 $\mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{\infty})$ 等于区域 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^{\infty})$ 的闭包之并。若我们将可见范围设为
$\sup_{x \in \mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^{\infty})} d(p_i, x)$，则 $\mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^{\infty})$ 的闭包确实仍然可见。因此，$r^* \leq \max_{i=1,\ldots,m} \{ \sup_{x \in \mathcal{W}_{\mathcal{T}}(p_i, \mathcal{P}^{\infty})} d(p_i, x) \}$。

□

利用对 r^* 的这一刻画，我们可以证明如下结论：

定理5. 求满足 $\mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{r^*}) = \mathrm{Vis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{\infty})$ 的最小值 r^* 的问题，可以在 $O(n + (m^2 + k_c) \log n)$ 时间内解决。

证明。 根据引理 3，只需考虑 $\mathrm{VorVis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{\infty})$ 的顶点（即沃罗诺伊可视域边界上的点）与其对应视点之间的距离。因此，若已知 $\mathrm{VorVis}(\mathcal{T}, \mathcal{P}^{\infty})$，该问题便可在线性时间内轻易解决。

□

6. 最后说明

如 [12], 所示，在计算 $\mathrm{ColVis}(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ 的算法运行时间中，如果我们假设不存在两个视点在 $\mathcal{T}$ 的同一点处同时从不可见变为可见，则 $m^2 \log n$ 这一项会消失。通过对地形进行无穷小扰动，总能实现这一点。然而，这种扰动并不会使所提出的计算 $\mathrm{VorVis}(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ 算法的运行时间中的同一项消失。鉴于定理1中的一个界保证 $k_v = O(k_c + m)$，因此，如何为 $\mathrm{VorVis}(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ 设计一种对于所有可能实例都同样快于 $\mathrm{ColVis}(\mathcal{T}, \mathcal{P})$ 的算法，仍然是一个开放问题。

参考文献

[1] Afshani, P.、de Berg, M.、Casanova, H.、Karsin, B.、Lambrechts, C.、Sitchinava, N.、Tsirogiannis, C.，2018。用于一维总可见性指数问题及其并行化的高效算法。《实验算法学期刊》23，1–23。[2] Ben-Moshe, B.、Hall-Holt, O.、Katz, M.J.、Mitchell, J.S.，2004。在多边形内点的可见图计算，载于：第20届计算几何年度研讨会论文集，第27–35页。[3] Ben-Moshe, B.、Katz, M.J.、Mitchell, J.S.，2007。最优1.5D 地形守卫的常数因子近似算法。SIAM 计算杂志36，1631–1647。[4] Catry, F.X.、Rego, F.C.、Santos, T.、Almeida, J.、Relvas, P.，2007。葡萄牙森林火灾预防——利用地理信息系统帮助提高早期火灾探测的有效性，载于：第4届国际野地火灾会议论文集。[5] Chazelle, B.、Edelsbrunner, H.、Grigni, M.、Guibas, L.J.、Hershberger, J.、Sharir, M.、Snoeyink, J.，1994。利用测地三角剖分进行多边形中的射线发射。《Algorithmica》12，54–68。[6] Daescu, O.、Friedrichs, S.、Malik, H.、Polishchuk, V.、Schmidt, C.，2019。高程地形守卫与单调多边形守卫。《计算几何：理论与应用》84，22–35。[7] Eisenbrand, F.、Funke, S.、Karrenbauer, A.、Matijevic, D.，2008。节能舞台照明。《国际计算几何与应用杂志》18，107–129。[8] Ernestus, M.、Friedrichs, S.、Hemmer, M.、Kokem¨uller, J.、Kr¨oller, A.、Moeini, M.、Schmidt, C.，2017。美术馆照明算法。《全球优化杂志》68，23–45。[9] Friedrichs, S.、Hemmer, M.、King, J.、Schmidt, C.，2016。连续1.5维地形守卫问题：离散化、最优解与多项式时间近似方案。《计算几何杂志》7，256–284。[10] Friedrichs, S.、Hemmer, M.、Schmidt, C.，2014。连续1.5维地形守卫问题的多项式时间近似方案，载于：第26届加拿大计算几何会议论文集。[11] Gibson, M.、Kanade, G.、Krohn, E.、Varadarajan, K.，2009。地形守卫的近似方案，载于：近似、随机化与组合优化：算法与技术。Springer，第140–148页。[12] Hurtado, F.、L¨offler, M.、Matos, I.、Sacrist´an, V.、Saumell, M.、Silveira, R.I.、Staals, F.，2014。多视点地形可见性。《国际计算几何与应用杂志》24，275–306。

[7]根据我们对可见性的定义，$\mathcal{T}$ 的最大可见部分是闭集，因此 Voronoi 视域边界上的点都是可见的。

[13] Joe, B., Simpson, R.B., 1987. 对 Lee 可视多边形算法的修正。BIT 数值数学 27, 458–473. [14] King, J., Krohn, E., 2011. 地形守卫是 NP 困难的。SIAM 计算杂志 40, 1316–1339. [15] M¨oller, B., 2006. 不断变化的风电景观：对丹麦北日德兰土地利用和人口视觉影响的区域评估。《应用能源》83, 477–494. doi:10.1016/j.apenergy.2005.04.004. [16] O'Rourke, J., 2006. CCCG 2005 未解决问题，载于：第 18 届加拿大计算几何会议论文集。[17] Yick,J., Mukherjee,B., Ghosal,D.,
2008 52, 2292 2330 10.1016/j.comnet.. 无线传感器网络综
2008.04.002
述。《计算机网络》– . doi: 。