arXiv:2301.05052v1 [math.AG] 12 Jan 2023

拟齐次奇点的矩阵分解

´ ´ANANYO DAN 和 AGUSTIN ROMANO-VELAZQUEZ

Abstract. 给定一个孤立的拟齐次奇点 X，我们证明， X 上的秩一自反层群与由 $\mathbb{C}^*$-除子生成的自由阿贝尔群（模去线性等价）之间存在群同构。当 $\dim(X) = 2$ 时，我们将求任意自反 $\mathcal{O}_X$-模的矩阵分解问题，化归为求秩一自反层的矩阵分解这一问题。随后，我们列举出所有秩一自反层的矩阵分解。由此，我们证明了 Etingof 和 Ginzburg 关于点模的一个猜想。

1. Introduction

设 $X \subset \mathbb{C}^n$ 是由方程 $F \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]$ 定义的整正规超曲面。回顾一下， F 的矩阵分解是由两个秩相同的方阵（M_1， M_2）组成的有序对，满足乘积 $M_1.M_2$ 和 $M_2.M_1$ 均等于 F 乘以单位矩阵。Eisenbud [9] 证明了， F 的（约化）矩阵分解与没有自由直和项的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模之间存在一一对应关系。矩阵分解在奇点理论中发挥着核心作用。利用矩阵分解，Kn¨orrer [17] 和 Buchweitz-Greuel- Schreyer [6] 证明，有限 Cohen–Macaulay 表示类型的孤立超曲面奇点恰好是简单奇点。21世纪初，Kapustin [16], 和 Orlov [20–22]表明，矩阵分解可用于研究弦理论中出现的朗道–金兹堡模型，以及 Kontsevich 的同调镜像对称。特别是，根据 Orlov 的研究，有界导出范畴$D^b(X)$与 F的矩阵分解同伦范畴之间存在等价。一般而言，前一个范畴难以计算。因此，构造具体的矩阵分解族可以成为理解 $D^b(X)$的一种方式。

遗憾的是，目前还没有能够求出矩阵分解的“好”算法。因此，文献中的矩阵分解具体实例相当有限。例如，Buchweitz、Eisenbud 和 Herzog [5] 证明，对于 $F_n(X_1, \ldots, X_n) = X_1^2 + \cdots + X_n^n$，其中 $n \geq 8$，矩阵分解的最小尺寸有下界 $2^{\frac{n-2}{2}} \times 2^{\frac{n-2}{2}}$。特别是，对于$F_{16}$，最小矩阵分解的尺寸为 128×128。Crisler 和 Diveris [8] 提出了一种算法，仅能为多项式 F_n 在 $n \leq 8$的情形下求出矩阵分解。通过研究多项式 F_{16}，他们发现该算法会失效，而且无法修正。Laza、Pfister 和 Popescu [18] 计算了由 F_3定义的曲面上，与秩一反身层相关的所有矩阵分解。Baciu [3] 计算了由 $X_1^3 + X_1^2X_3 - X_2X_3$定义的超曲面上，与二阶分次 Ulrich 模相关的所有矩阵分解。Etingof 和 Ginzburg [11] 为由多项式 $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + \tau X_1X_2X_3$ 给出的超曲面族构造了一族矩阵分解，其中 τ遍历非零复数。Ros Camacho 和 Newton [25,26]计算了例外单峰

Date：2023年1月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：13C14、14J17、32S25、14E16。*Key words and phrases.* 矩阵分解、极大 Cohen–Macaulay 模、准齐次奇点、McKay 对应、 $\mathbb{C}^*$-曲线、尖点奇点。

超曲面奇点的具体矩阵分解。本文旨在将其中一些结果推广到任意孤立拟齐次超曲面奇点（至拓扑平凡变形为止）。

设 (X, x) 是一个二维孤立拟齐次超曲面奇点。这意味着存在整数 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, d)$，使得定义方程 F 满足：

$$F(\lambda^{\omega_1} X_1, \lambda^{\omega_2} X_2, \lambda^{\omega_3} X_3) = \lambda^d F(X_1, X_2, X_3), \text{ for all } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

整数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 称为该超曲面的权重。首先注意，每个 M 上的极大 Cohen-Macaulay 模 M 都处于一个含 4 项的正合列中。除 M 之外，其余三项分别是一个平凡丛、一个支撑在奇点 x 上的摩天大楼层，以及一个秩一反身层 $\mathcal{L}$；我们将其称为 M 的行列式（定理 3.5）。摩天大楼层的投射分解已为人熟知。此外，要得到短正合列的投射分解，只需确定其中三项里的两项的投射分解（并满足显然的相容条件）。因此，寻找对应于 M 的矩阵分解，可归结为确定对应于其行列式 $\mathcal{L}$ 的矩阵分解。我们首先对所有此类秩一反身层进行分类。记 $\mathrm{Ref}^{(1)}(X)$ 为 X 上所有秩一自反层构成的群（群结构见 §3.4），记 $\mathcal{D}(X)$ 为由 $\mathbb{C}^*$- 曲线（即在 X 上自然的 $\mathbb{C}^*$-作用下保持不变的曲线，见 §3.2）的类生成的自由阿贝尔群，再模去线性等价。我们证明：

定理 1.1. 任意的整曲线 D in X 要么是 a $\mathbb{C}^*$-曲线，要么与一条 $\mathbb{C}^*$-曲线完全交链接（参见定义 3.2）。此外，存在一个阿贝尔群同构：

$$\mathcal{D}(X) \to \mathrm{Ref}^{(1)}(X) \text{ sending } D \in \mathcal{D}(X) \text{ to } i_* \mathcal{O}_{X^*}(D \cap X^*), \tag{1.1}$$

where $X^* := X \backslash \{x\}$ 是 X 中的正则轨迹，而 i: $X^* \to X$ 是开浸入 n.

参见定理 3.3 和 3.4，其中给出了一个适用于 X任意维数的更一般表述。这可以视为一种 McKay 型对应：对应关系 (1.1) 的左侧参数化几何对象，即 $\mathbb{C}^*$-除子；右侧则参数化代数对象，即秩一反身层。

在任意秩下，极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模与支撑在除子上的秩一 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模之间存在一种 $1-1$ 对应（参见命题 2.3）。该对应将一个秩为 r 的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模 M，连同对 r 截面的一般选择，关联到它的退化模。此对应的优点在于，可以从相关退化模的投射分解中得到 M 的矩阵分解（定理 4.1）。后者是一个更简单的问题。我们在下面定理 1.2 的证明中运用了这一思路。

根据上文定理 1.1，秩一极大 Cohen–Macaulay 模由那些源自整 $\mathbb{C}^*$-曲线的模通过张量积生成。因此，与非奇异 $\mathbb{C}^*$-曲线相关联的极大 Cohen–Macaulay 模尤其值得关注。我们称这类模为广义 Wunram 模（见 §4.2）。下文定理 1.2 将明确描述对应于秩一广义 Wunram 模的矩阵分解。注意，X 包含一条非奇异的 $\mathbb{C}^*$-曲线，当且仅当（经过重新参数化后）X 的某个权重为 1。回顾一下，Orlik 和 Wagreich [19] 以及 Arnold [1] 对孤立拟齐次曲面奇点进行了分类，分类考虑到拓扑平凡变形（见 §4.4 中的表）。对于该表中提及的奇点类型，我们推导出以下矩阵分解列表：

定理 1.2. 设 X 是下文 §4.4 表 1 中列出的一种权重为 $(1,\omega_2,\omega_3)$ 的拟齐次奇点。给定正整数 n、m 和复数 c_1、c_2，记：

$$S_{(c_1,c_2,n,m)}(Z_1,Z_2):=\sum_{j=1}^{m}\frac{Z_1^{(j-1)n}Z_2^{m-j}c_1^{j-1}}{c_2^{jn}}$$

那么，与 X 上任意秩一广义 Wunram 模相关联的矩阵分解是一对 2×2 矩阵 $(\mathrm{adj}(A)\ A)$，其中 A 是一个具有如下形式的矩阵 $A:=(m_{i,\ j})$，对于 i、$j\in\{1,2\}$，有

$$m_{1,1}=X_1^{\omega_2}b-X_2a^{\omega_2},\ m_{1,2}=X_3a^{\omega_3}-X_1^{\omega_3}c\ \text{ and}$$

元素 $m_{2,\ 1}$,$m_{2,\ 2}$ 由下表给出，其中第一列列出了表 1 中的各种奇点类型：

Type	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$
$\mathrm{I}_{p,q,r}$	$S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)$	$S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)$
$\mathrm{II}_{p,q,r}$	$\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)$	$S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+$ $+X_3^rS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)$
$\mathrm{III}_{p,q,r}$	$\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,r)}\ (X_1,\ X_3)$ $+\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,1)}(X_1,X_3)$	$X_3S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+$ $+X_3^rS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)$
$\mathrm{IV}_{p,q,r}$	$XS_{(c,a,\omega_3,r)}\ (X_1,\ X_3)\ +\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,1)}(X_1,X_3)$	$X_3S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)$
$\mathrm{V}_{p,q,r}$	$XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)\ +\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,1)}(X_1,X_3)$	$X_3S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+$ $+X_1^pS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)$
$\mathrm{VI}_{p,q,r,b_2,b_3}$	$XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)$ $+\frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,b_3)}(X_1,X_3)$	$XS_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+$ $+X_3^{b_3}S_{(b,a,\omega_2,b_2)}(X_1,X_2)$
$\mathrm{VII}_{p,q,r,b_2,b_3}$	$XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)$ $+\frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,b_3)}(X_1,X_3)$	$XS_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+$ $+X_3^{b_3}S_{(b,a,\omega_2,b_2)}(X_1,X_2)+$ $+X_1^pS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)$

其中，(a,b,c) 遍历 X 中满足 $a\neq 0$ 的所有点。

这一结果将在 §4.5 中证明。剩余情形 $a=0$ 在注 4.5 中讨论。注意，这也给出了由 X 上的点参数化的矩阵分解显式族。我们的计算还原了 Laza、Pfister 和 Popescu 得到的矩阵分解 [18]。作为上述定理 1.2 的推论，我们证明了 Etingof 和 Ginzburg [11, 猜想 3.6.8] 的若干特殊情形：

猜想。设 F 是以 X_1、X_2、X_3、$\Phi\in F/[F,F]$、$\mathfrak{A}(\Phi)$ 为基的自由张量代数：$=F/\langle\langle\partial_i\Phi\rangle\rangle_{i=1,2,3}$，对于 $\mathfrak{A}(\Phi)$ 中不是零因子的中心元 Ψ，记 $\mathfrak{B}(\Phi,\Psi)$：$=\mathfrak{A}(\Phi)/\langle\langle\Psi\rangle\rangle$。对于代数 $\mathfrak{B}(\Phi,\Psi)$ 上的任意点模 P（见 [2, 定义 3.8]），都可以自然地关联一个矩阵分解 $M(P)=(M_+,M_-)$。

利用定理 1.2，我们证明：

定理 1.3. 设 $\Phi:=X_1X_2X_3-X_2X_1X_3$。那么，经过适当选择 Ψ，上述猜想成立；也就是说，对于代数 $\mathfrak{B}(\Phi,\Psi)$ 上的任意点模 P，都可以自然地关联一个矩阵分解。

精确表述见定理 4.6。请注意，上述定理中 Ψ 的选择将对应于拟齐次多项式。

在第 5.1 节中，我们研究尖点奇点的情形。在 2021年 Oberwolfach 奇点研讨会上，Duco van Straten 教授向第二作者提出了一个关于尖点奇点矩阵分解构造的问题。我们通过定理 5.1 对他的问题给出了部分回答，

具体而言，我们构造了尖点奇点族的矩阵分解族。通过固定某些数值，该定理还复现了 Etingof 和 Ginzburg [11] 研究的三次曲线。在第 5.2 节中，我们研究非孤立奇点的矩阵分解，并推广了 Baciu [3] 的一个结果。

2. Preliminaries

本节回顾超曲面奇点的矩阵分解概念，并说明其与极大 Cohen–Macaulay 模空间的关系（定理 2.1）。最后，我们回顾退化模的基础知识（命题 2.3）。这为研究矩阵分解提供了一种新方法，后续章节将用它进行显式计算。

2.1. 设置。固定一个整数 $n \geq 3$。设 X 是 $\mathbb{C}^n$ 中一个整的正规超曲面。记 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} := \mathbb{C}[[X_1, ..., X_n]]$ 和 $F \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 为定义超曲面 X 的方程，并记 $\mathcal{O}_X := \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}/(F)$ 为其关联的坐标环。注意，X 可能具有非孤立奇点。

2.2. 矩阵分解。F 的矩阵分解是由两个 $m \times m$ 矩阵 (Φ, Ψ) 构成的有序对，其元素属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$，并满足矩阵乘法关系：

$$\Phi \cdot \Psi = F \cdot \mathrm{Id}_m, \quad \Psi \cdot \Phi = F \cdot \mathrm{Id}_m,$$

其中 Id_m 是 $m \times m$ 单位矩阵。当且仅当

$$\mathrm{Im}(\Phi : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus m}) \subset \mathfrak{m}\, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus m} \quad \text{and} \quad \mathrm{Im}(\Psi : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus m}) \subset \mathfrak{m}\, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus m},$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$的极大理想。回顾一下关于矩阵分解的以下经典结果：

定理 2.1. 以下对象之间存在一一对应关系：

(1) F的约化矩阵分解的等价类。(2) 周期为二的 $\mathcal{O}_X$-模的非平凡周期极小自由分解的同构类。(3) 没有自由直和项的极大 Cohen-Macaulay $\mathcal{O}_X$-模。

证明. 证明见 [9, 推论 6.3] 。 □

本文将利用定理 2.1 中 (1) 与 (3) 之间的等价关系。因此，我们简要回顾如何将 F 的矩阵分解与没有自由直和项的极大 Cohen-Macaulay 模联系起来。设 M 是一个没有自由直和项的极大 Cohen-Macaulay $\mathcal{O}_X$-模。这意味着 M 的深度等于 X的维数，即 $n-1$。根据 Auslander-Buchsbaum 公式，这意味着作为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-模，$M$ 的投射维数等于 1。因此，我们有如下形式的短正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus a} \xrightarrow{(m_1,\ldots,m_a)} M \to 0 \tag{2.1}$$

其中 $m_i \in M$，标准基元素 $e_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus a}$ 映射到 m_i，其中 $1 \leq i \leq a$。由于 M的支撑位于 X 上，因此我们有 $a = b$。于是，态射 Φ 由一个系数属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$的 $a \times a$矩阵给出。假设这是 M 的极小分解。由于 M被F湮灭，对于每个 $1 \leq i \leq a$，$Fe_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus a}$在 M中映射为零。由（2.1）的正合性，存在$\Psi(e_i) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus a}$，使得 $\Phi \circ \Psi(e_i) = Fe_i$。换言之，存在一个系数属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$的 $a \times a$矩阵 Ψ，使得 $\Phi \cdot \Psi = F \cdot \mathrm{Id}_a$。因此，$(\Psi, \Phi)$ 是 F的矩阵分解。

2.3. 退化模。设 M 是一个秩为（例如） r的极大 Cohen-Macaulay $\mathcal{O}_X$模。给定 M的一个 r 元截面组 $\underline{s}:=(s_1,...,s_r)$，相应的退化轨迹是截面 $s_1\wedge s_2\wedge...\wedge s_r\in\wedge^r M$ 的零点集，也就是这组 r个截面线性相关的点的轨迹。考虑态射

$$\underline{s}:\mathcal{O}_X^{\oplus r}\to M,$$

将 e_i 的一个标准基向量发送到 s_i。将态射 $\underline{s}$ 的余核记为 $\mathcal{C}_{\underline{s}}$。注意，$\mathcal{C}_{\underline{s}}$ 的支撑就是相应的退化轨迹。对于 r 个截面 $\underline{s}:=(s_1,...,s_r)$ 的一般选择，相应的退化轨迹 Supp($\mathcal{C}_{\underline{s}}$) 是约化的 Cohen–Macaulay 子簇，余维为 1（见 $[10,$ 第 $431]$ 页）。此外，由于这组 r 个截面的一般性，r 个截面中 $r-1$ 个线性相关的轨迹具有余维 2（见 $[10,$ 引理 $5.2]$）。这意味着，余核 $\mathcal{C}_{\underline{s}}$ 支撑在 X 中一个约化的 Cohen–Macaulay 子簇上，该子簇的余维为 1，并且余核在其支撑上的秩为 1。余核 $\mathcal{C}_{\underline{s}}$ 将被称为与截面 r 元组 $\underline{s}:=(s_1,...,s_r)$ 相关的退化模。这启发了如下定义：

定义 2.2. 若由 M 的 r 元组截面 $\underline{s}:=(s_1,...,s_r)$ 所诱导的态射 $\underline{s}$ 的余核 $\mathcal{C}_{\underline{s}}$ 支撑在 X 的一个约化 Cohen–Macaulay 子簇上，该子簇的余维为 1，且余核是 Supp($\mathcal{C}_{\underline{s}}$) 上的秩 1 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，则称这些截面为弱一般截面。

2.4. 对偶化退化模。设 M 是一个秩为 r 的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，且 $\underline{s}:=(s_1,...,s_r)$ 是 M 的一个 r 元组弱一般截面。根据定义，我们有如下形式的短正合列：

$$0\to\mathcal{O}_X^{\oplus r}\xrightarrow{\underline{s}}M\to\mathcal{C}_{\underline{s}}\to 0, \tag{2.2}$$

其中 $\mathcal{C}_{\underline{s}}$ 是某个 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，它支撑在 X 中的一个约化 Cohen–Macaulay 子簇上，且在其支撑上的秩为 1。对这个正合列取对偶，可得

$$0\to M^\vee\to\mathcal{O}_X^{\oplus r}\xrightarrow{\underline{s}'}\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{C}_{\underline{s}},\mathcal{O}_X)\to 0, \tag{2.3}$$

右侧的满射性由 $\mathcal{E}xt^1_X(M,\mathcal{O}_X)$ 的消失性推出（见 $[4,$定理$3.3.10]$）。本文中，我们将记 $\mathcal{A}_{\underline{s}}:=\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{C}_{\underline{s}},\mathcal{O}_X)$。注意，对 (2.3) 取对偶，并利用 $\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{A}_{\underline{s}},\mathcal{O}_X)\cong\mathcal{C}_{\underline{s}}$ 和 $M^{\vee\vee}\cong M$（见 $[4,$ 定理 $3.3.10]$），可得回正合列 (2.2)。这意味着：

命题 2.3. 存在一一 $1-1$ 对应关系，建立在以下两类对象之间：

$$\left\{\begin{array}{c}(M,\underline{s})\text{ where }M\text{ is a MCM}\\ \mathcal{O}_X\text{-module of rank }r\text{ and}\\ \underline{s}:=(s_1,...,s_r)\text{ is an }r\text{-tuple}\\ \text{of weakly general sections of }M\end{array}\right\}\longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}(\mathcal{A}_{\underline{s}},\underline{s}')\text{ where }\mathcal{A}_{\underline{s}}\text{ is a CM }\mathcal{O}_X\text{-module}\\ \text{supported on a CM subvariety of}\\ \text{codimension one in }X\text{ and of rank 1}\\ \text{over the support and generated by }\underline{s}'\end{array}\right\}$$

其中，双射由 (2.2) 和 (2.3) 得出。

证明. 详见 [12]，其中给出了详细证明。 □

定义 2.4. 给定一对 $(M,\underline{s})$，其中 M是一个秩为r的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，且 $\underline{s}$是 M 的一个由 r 个弱一般截面组成的元组，我们将命题 2.3 中相应的一对 $(\mathcal{A}_{\underline{s}},\underline{s}')$ 称为与 $(M,\underline{s})$ 相关联的退化对。

3. McKay-type correspondence for quasi-homogeneous singularities

准齐次超曲面奇点是齐次奇点的推广。我们研究包含在此类超曲面中的 $\mathbb{C}^*$除子。我们发现，每个有效整除子要么是 $\mathbb{C}^*$除子，要么与 $\mathbb{C}^*$除子完全交链接（见定义 3.2）

（定理 3.3）。据此，我们发现，准齐次超曲面上的 $\mathbb{C}^*$除子（模线性等价）与秩一自反层之间存在 $1-1$ 对应关系（定理 3.4）。此外，若超曲面的维数为二，则每个极大 Cohen–Macaulay 模都可以仅用 $\mathbb{C}^*$曲线的理想层和某些摩天大楼层来表示（定理 3.5）。

3.1. 准齐次超曲面。若存在正整数（$\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, d$），使得对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，都有 $F(\lambda X_1, \lambda X_2, ..., \lambda X_n) = \lambda^d F(X_1, ..., X_n)$，则称多项式 $F \in \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]]$ 为准齐次多项式。由 F 定义的超曲面 X 称为权重为 $\underline{\omega}$ 的准齐次超曲面：$= (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$。注意， X 上有一个自然的 $\mathbb{C}^*$-作用：

$$\mathbb{C}^* \times X \to X \text{ sending } (\lambda, (x_1, ..., x_n)) \mapsto (\lambda^{\omega_1} x_1, \lambda^{\omega_2} x_2, ..., \lambda^{\omega_n} x_n).$$

在本节中，我们假设 X 在原点 0 处只有孤立奇点。记 $\mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$ 为 $X^* := X \backslash \{0\}$ 在 $\mathbb{C}^*$-作用下的商。考虑由此得到的商映射：

$$\pi_X : X^* \to \mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}. \tag{3.1}$$

3.2. $\mathbb{C}^*$-除子。设 X 是一个维数为 n 、权重为$\underline{\omega} := (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, d)$ 的准齐次超曲面。注意，给定一个闭点 $(a_1, a_2, ..., a_n) \in X$，相应的$\mathbb{C}^*$-曲线是由下式给出的参数曲线：

$$n : \mathbb{C}^* \to X \text{ sending } \lambda \mapsto (\lambda^{\omega_1} a_1, \lambda^{\omega_2} a_2, ... \lambda^{\omega_n} a_n).$$

我们将 $\mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$上的相应点记为 $[a_1, a_2, ..., a_n]$。显然，态射 π_X 在 $[a_1, ..., a_n]$上的纤维是一条整曲线，而 n 是该纤维的正规化映射。这意味着， $\mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$ 中一个整除子在 π_X 下的原像是不可约的。

X^* 中的一个整除子 D 称为 $\mathbb{C}^*$-除子，如果存在 $\mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$ 中的一个整魏尔除子 D'，使得 $D \cong \pi_X^{-1}(D')_{\text{red}}$，其中 π_X 如（3.1）中所示。 X 中的一个整除子称为$\mathbb{C}^*$-除子，如果它是 X^*上一个整 $\mathbb{C}^*$-除子的闭包。记 $\mathcal{D}(X)$ 为由 X中的整 $\mathbb{C}^*$-除子生成、模线性等价得到的自由阿贝尔群。 $\mathcal{D}(X)$的元素称为 X上的 $\mathbb{C}^*$-除子。

3.3. 链接与余留除子。设 $(X,0)$ 是一个孤立的准齐次超曲面奇点，其权重为 $\underline{\omega} := (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, d)$。考虑 (3.1) 中的商映射 π_X，它从 X 的正则轨迹到由 $\mathbb{C}^*$ 作用得到的商。

定义 3.1. 若整除子 $D \subset X$ 满足以下复合映射

$$D \backslash \{0\} \subset X \backslash \{0\} \xrightarrow{\pi_X} \mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$$

是支配映射。

定义 3.2. 若存在多项式 $g \in \mathbb{C}[[X_1, X_2, ..., X_n]]$ 使得 $D \cup E = Z(g) \cap X$，其中 $Z(g)$ 表示 g 的零点集，则称两个不同的除子 D, E 完全交链接。此外，若 D 和 E 完全交链接，则称 D 是 E 的余留除子（反之， E 是 D 的余留除子）。这一术语源自经典链接理论（见 [23]）。

定理 3.3. 设 $D \subset X$ 为一个整水平的除子。那么，存在一个 $\mathbb{C}^*$-除子$E \subset X$，使得 D 与 E完全交链接。

证明。考虑式 (3.1) 中的商映射 π_X 从 X^* 到 $\mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$。根据一般光滑性定理，存在一个开稠密仿射子概形 $U \subset \mathbb{P}^{\underline{\omega}}_{X^*}$，使得由此得到的从 $\pi_X^{-1}(U)$ 到 U 的态射是光滑的。由于 π_X 是仿射态射，且 U 是仿射的，因此$\pi_X^{-1}(U)$是仿射且非奇异的。这意味着 $\text{Pic}(\pi_X^{-1}(U)) = 0$。由于 D是一个整水平的

除子， $U_D := D \cap \pi_X^{-1}(D)$ 是 $\pi_X^{-1}(U)$ 中的一个非空卡蒂埃除子。由于 $\mathrm{Pic}(\pi_X^{-1}(U)) = 0$，理想层 $\mathcal{I}_{U_D}$ 就是某个 $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_{\pi_X^{-1}(U)}$的$f.\mathcal{O}_{\pi_X^{-1}(U)}$。根据 [14, 引理 II.5.3]，存在一个正则函数 $\widetilde{f} \in \mathcal{O}_X$，使得 $Z(\widetilde{f}) \cap \pi_X^{-1}(U) = Z(f) \cap \pi_X^{-1}(U)$。这意味着$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$零点集 $Z(f)$ 是 f 的形式

$$Z(\widetilde{f}) = \overline{Z(f)} \cup E \tag{3.2}$$

其中 $\overline{Z(f)}$是 X 中 f 的零点集的闭包，且 E 是位于补集$X\backslash\pi_X^{-1}(U)$中的一个除子。由于 E是一个除子，且与 $\pi_X^{-1}(U)$不相交，因此 E在 $\mathbb{P}_{X^*}^{\omega}$中的概形论像$\pi_X(E)$与 U不相交。由于 π_X的纤维不可约且维数为一，根据纤维维数定理，我们得到对于某个 $\mathbb{P}_{X^*}^{\omega}$中的除子 E'，有 $E \cong \pi_X^{-1}(E')$。特别地， E是一个 $\mathbb{C}^*$-除子。此外，由于 D是整的，且在 $\pi_X^{-1}(U)$上与 $Z(f)$一致，因~~此我~~们有 $Z(f) = D$。根据 (3.2)，这意味着 D 与一个 $\mathbb{C}^*$-除子 E完全交链接。这证明了该定理。□

3.4. 秩一对应。用 $\mathrm{Ref}^{(1)}(X)$ 表示 X上秩一反身层的空间。令 $i : X^* \to X$ 为自然包含。回顾一下，正则簇上的每个秩一反身层都是可逆的（见 [15, 命题 1.9]）。此外， X上的每个反身层都可表示为通过 i 将 X^* 上的一个反身层直像得到（见 [15, 命题 1.6]）。这意味着，在通过 i取直像时，

$$i_* : \mathrm{Pic}(X^*) \to \mathrm{Ref}^{(1)}(X) \text{ sending } \mathcal{L} \text{ to } i_*\mathcal{L}$$

是一个同构态射。皮卡群 $\mathrm{Pic}(X^*)$ 上的群运算在 $\mathrm{Ref}^{(1)}(X)$ 上诱导出一个群运算，即

$$M.N := i_*(i^*M \otimes_{\mathcal{O}_{X^*}} i^*N) \text{ and } M^\vee := i_*((i^*M)^\vee).$$

定理 3.4。态射

$$\phi : \mathcal{D}(X) \to \mathrm{Ref}^{(1)}(X)$$

将一个 $\mathbb{C}^*$-除子 D 映射到反身层 $i_*(\mathcal{O}_{X^*}(D \cap X^*))$，这是一个阿贝尔群同构。

证明。显然，这是一个群同态。此外，由于 U 是整且正则的， $\mathcal{D}(X)$ 包含于 $\mathrm{Pic}(U)$ 中。正如上文所述， $\mathrm{Ref}^{(1)}(X)$ 与 $\mathrm{Pic}(U)$ 同构，因此这意味着该态射 ϕ 是单射。故只需验证 ϕ 是满射。

考虑 $M \in \mathrm{Ref}^{(1)}(X)$。注意，限制 $M|_{X^*}$ 是一个反身层。由于 X^* 是正则的，这意味着 $M|_{X^*}$ 是一个可逆层。换言之，

$$M|_{X^*} \cong \mathcal{O}_{X^*}(D^*)$$

对某个除子 D^* on X^*。将 $D^* = \sum_i a_i D_i$ 写成整除子D_i的线性组合。若 D_i 不是水平的，则由纤维维数定理， $\pi_X|_{D_i}$ 的概形论像E_i 是 $\mathbb{P}_{X^*}^{\omega}$中的一个除子。由于 D_i 是整的， E_i 是不可约的。这意味着 $\pi_X^{-1}(E_i)$ 是不可约的（见 §3.2）。因此， $D_i = \pi_X^{-1}(E_i)_{\mathrm{red}}$。换言之， D_i 是一个 $\mathbb{C}^*$-除子。若 D_i 是水平的，则由定理 3.3，存在一条 $\mathbb{C}^*$-曲线 D_i^c，使得 D_i 与 $-D_i^c$线性等价。因此， D^* 与一个由$\mathbb{C}^*$-除子线性组合得到的除子线性等价。这证明了 ϕ 的满射性，从而得证。□

3.5. 二维情形。设 (X, x) 是一个孤立的准齐次超曲面奇点。假设 $\dim X = 2$。记 k_x 为奇点 x 上的一维向量空间的摩天大楼层。

定理 3.5。设 M 是一个秩为（例如） r 的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模。那么，对于 M 的截面 $(s_1, ..., s_r)$ 的一般选取，我们有如下形式的正合列

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus r-1} \xrightarrow{(s_1,\dots,s_{r-1})} M \to \mathcal{L} \to k_x^{\oplus m} \to 0 \tag{3.3}$$

对于某个非负整数 m，且 $\mathcal{L}$ 是 X 上秩为 1 的自反层，即 $\mathcal{L} \in \mathrm{Ref}^{(1)}(X)$。特别地，若 C 表示态射 $(s_1,..., s_r)$ 的余核的支撑，则 $\mathcal{L}$ 是 X 中 C 的理想层的对偶。

证明。记态射的余核为 $\mathcal{A}$

$$(s_1, ..., s_r) : \mathcal{O}_X^{\oplus r} \to M. \tag{3.4}$$

注意， $\mathcal{A}$ 是一个 Cohen–Macaulay 模，其支撑维数为 1，且在其支撑上的秩为 1。记 $\mathcal{A}$ 的支撑为 C，并记 $\mathcal{A}' := \mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$。对 (3.4) 取对偶，得到如下短正合列图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{C|X} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \\
0 & \longrightarrow & M^\vee & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^{\oplus r} & \xrightarrow{(t_1,\dots,t_r)} & \mathcal{A}' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中，态射 p_2 将 1 映到 t_1，而 p_1 将 1 映到标准基元素 $e_1 \in \mathcal{O}_X^{\oplus r}$。因此， p_1 的余核同构于 $\mathcal{O}_X^{\oplus r-1}$。由于 $\mathcal{A}'$ 是 Cohen–Macaulay，态射 p_2 是单射（截面 t_1 在 C 上无挠）。根据贝尔蒂尼型定理（见 [24, 第 434] 页），$C\backslash\{x\}$ 是非奇异的。由于仿射非奇异曲线上的任何无挠层都是平凡的，我们得出 $\mathcal{A}'$ 与 $\mathcal{O}_C$ 在 X^* 上同构。取 $t_1 = 1 \in \Gamma(\mathcal{O}_C)$，我们注意到 p_2 的余核具有 $k_x^{\oplus m}$ 的形式，其中 m 是某个非负整数。利用蛇引理，得到正合列：

$$0 \to \mathcal{I}_{C|X} \to M^\vee \to \mathcal{O}_X^{\oplus r-1} \to k_x^{\oplus m} \to 0$$

对该序列取对偶并应用 [4, 定理 3.3.10]，即可得到正合列 (3.3)。定理得证。□

4. Matrix factorization using degeneracy modules

极大 Cohen–Macaulay 模的矩阵分解很难。不过，我们可以转而研究相关退化模的自由分解。这是一个稍微容易些的问题。利用这一思路，我们得到矩阵分解（见定理 4.1 和推论 4.3）。随后，我们将其用于枚举准齐次曲面中由 $\mathbb{C}^*$-曲线导出的所有 Cohen–Macaulay 模的矩阵分解（见引言中陈述并在 §4.5 中证明的定理 1.2）。

4.1. 通过退化模进行矩阵分解。设 M 是秩为 r 、不含自由直和项（即不包含 $\mathcal{O}_X$ 作为直和项）的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模。设 $\underline{s}$ 是 M 的一个由 r 个弱一般截面组成的元组。令 $(\mathcal{A}_{\underline{s}}, \underline{s}')$ 为相应的退化对。由于 $\mathcal{A}_{\underline{s}}$ 是一个支撑在 $\mathbb{C}^n$ 中维数为 $n-2$ 的子簇上的 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，$\mathcal{A}_{\underline{s}}$ 的深度为 $n-2$。由 Auslander-Buchsbaum 公式可知， $\mathcal{A}_{\underline{s}}$ 的投射维数为 2。于是，从 $\underline{s}'$ 开始，这一对诱导出如下形式的正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus a} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b} \xrightarrow{B} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r} \xrightarrow{\underline{s}'} \mathcal{A}_{\underline{s}} \to 0 \tag{4.1}$$

其中 A（分别为 B）由一个元素属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 的 $b\times a$（分别为 $r\times b$）矩阵诱导而来。为简化记号，我们也将它们分别记作 A（和 B）。特别地，

$$Ae_i^{(a)}=\sum_{j=1}^{b}a_{ji}e_j^{(b)}\text{ and }Be_i^{(b)}=\sum_{j=1}^{r}b_{ji}e_j^{(r)},$$

其中 $\{e_i^{(t)}\}_{i=1}^{t}$ 是自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-模 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus t}$ 关于 $t\in\{r,a,b\}$ 的标准基。我们证明：

定理 4.1. 记 K 为由所有满足 $Bm\in\mathcal{I}_X^{\oplus r}$ 的 $m\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}$ 构成的 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}$ 的 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-子模。那么，

(1) K 与 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}$ 同构，作为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-模；(2) 固定一个如 (1) 所示、由 $b\times r$-矩阵给出的从 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}$ 到 K 的同构

$$A':\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\xrightarrow{\sim}K\subset\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}.$$

那么，（除对 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}$ 的基作变换外）复合

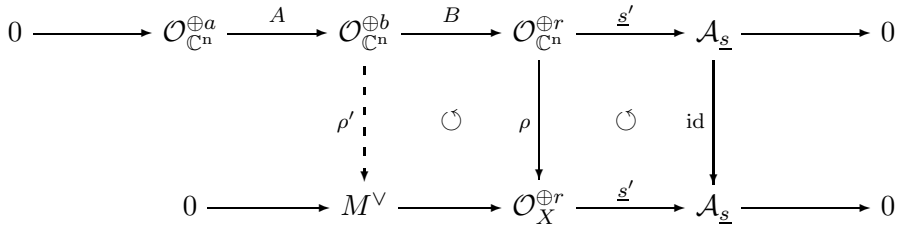
$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\xrightarrow{A'}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}\xrightarrow{B}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\text{ coincides with }F\mathrm{Id}_{r\times r}:\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r},$$

其中 $F\in\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 定义 X,

(3) 与 M 相关联的矩阵分解形式为 $\big(\mathrm{adj}(A|A')^T,\ (A|A')^T\big)$，其中 $(-)^T$ 表示矩阵的转置，而 adj(–) 表示矩阵的伴随矩阵。

在证明定理之前，注意到由正合列 (4.1) 可知，我们有 $b=r+a$（$\mathcal{A}_{\underline{s}}$ 的支撑在 $\mathbb{C}^n$ 中的余维为 2）。于是，矩阵 $(A|A')$ 是一个 $b\times b$-矩阵。

证明。比较正合列 (2.3) 和 (4.1)，得到如下正合列图：



其中，竖直态射 ρ 是自然的限制态射，而第一个竖直态射ρ' 由核的泛性质诱导。由于最后两个竖直箭头是满射，因此通过简单的图追逐（利用从 $M^\vee$ 到 $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$ 的态射的单射性），我们得出态射 ρ' 从 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}$ 到 $M^\vee$ 是满射。注意， ρ 位于短正合列中：

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\xrightarrow{F\mathrm{Id}_{r\times r}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\xrightarrow{\rho}\mathcal{O}_X^{\oplus r}\to 0.$$

将蛇引理应用于上述正合列图表，可得到如下正合列：

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus a}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\xrightarrow{(A|A')}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}\xrightarrow{\rho'}M^\vee\to 0\tag{4.2}$$

其中复合映射

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\xrightarrow{A'}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}\xrightarrow{B}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\text{ coincides with }F\mathrm{Id}_{r\times r}:\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus r}.$$

这证明了定理的（1）和（2）部分（将 K 认作 A' 的像）。如上所述， $b=r+a$。对（4.2）取对偶，得到正合列：

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}\xrightarrow{(A|A')^T}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus b}\to\mathcal{E}xt^1_{\mathbb{C}^n}(M^\vee,\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})\to 0.\tag{4.3}$$

Si由于 F 湮灭 $M^\vee$ （因为 $M^\vee$ 支撑在 X 上），根据 [4, 引理 1.2.4]

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathbb{C}^n}(M^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathbb{C}^n}(M^\vee, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{H}\mathrm{om}_X(M^\vee, \mathcal{O}_X),$$

其中最后一个同构由 $\mathcal{H}$om-函子 的伴随性得到。由于 M 是一个极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，因此特别是自反的。因此， M 的双对偶 $M^{\vee\vee}$ 与 M 同构。于是， $\mathcal{E}xt^1_{\mathbb{C}^n}(M^\vee, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \cong M$，而（4.3）给出了 M 的投射分解。换言之， $\left(\mathrm{adj}(A|A')^T,\ (A|A')^T\right)$ 是一个矩阵分解。这证明了该定理。□

4.2. 广义 Wunram 模。按照定义， [12], 一个秩为 1 的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模M 称为广义 Wunram 模，如果对于 M 的截面 s 的一般选择，由乘以 s 定义的从 $\mathcal{O}_X$ 到 M 的自然态射的余核，与某个余维为 1 的非奇异子簇 $D \subset X$ 的 $\mathcal{O}_D$ 同构。

4.3. 退化模的投射分解。设 M 是秩一广义 Wunram 模， $s \in M$ 是一个一般截面， D 是相应的退化轨迹。特别地，我们有如下形式的短正合列：

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\cdot s} M \to \mathcal{O}_D \to 0, \tag{4.4}$$

其中， D 是 X 中余维为 1 的非奇异子簇。对该正合列取对偶，我们得到如下形式的短正合列：

$$0 \to M^\vee \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_X) \to 0 \tag{4.5}$$

注意， $\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_X)$ 是一个支撑在 D 上的 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模，且在其支撑上的秩为一。现在，光滑仿射簇上的秩一极大 Cohen-Macaulay 模是平凡的。因此， $\mathcal{E}xt^1_X(\mathcal{O}_D, \mathcal{O}_X)$ $\cong \mathcal{O}_D$。现在我们构造 $\mathcal{O}_D$ 的投射分解。由于 D 是非奇异的，存在 $f, g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$，使得 D （在 $\mathbb{C}^n$ 中）的理想由 f 和 g 生成（正则局部环是完全交环）。于是我们得到 Koszul 分解：

命题 4.2。 $\mathcal{O}_D$ 的投射分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus 2} \xrightarrow{B} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to \mathcal{O}_D \to 0$$

其中 $Ae := -fe_1 + ge_2$, $Be_1 := g$，且 $Be_2 = f$，其中 e（分别为 $\{e_1, e_2\}$）是 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ （分别为 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus 2}$ ）的标准基。

推论 4.3。设 X 是任意维数的正规超曲面奇点（不一定是孤立的）。设 M 是秩一广义 Wunram 模， $s \in M$ 是一般截面，而 D 是与有序对 (M, s) 相关联的退化轨迹；由于 M 是秩一广义 Wunram 模，故该退化轨迹非奇异。则与 M 相关联的矩阵分解为一对矩阵 $(\mathrm{adj}(C)$ $C)$，其中 C 是矩阵

$$C := \begin{pmatrix} -f & g \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

$f, g \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 定义了 $\mathbb{C}^n$ 中的非奇异簇 D，而 X 由如下形式的正则函数定义： F: $= h_1 g + h_2 f$（因为 $D \subset X$，我们有 $F \in (f, g)$）。

证明。转换为定理 4.1 的记号后，我们有 $a = 1$、$b = 2$ 和 $r = 1$。态射 A 和 B 在命题 4.2 中定义。现在我们需要根据定理 4.1 计算 K 和 A'。回忆一下，

$$K = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 | a_1 g + a_2 f \in \mathcal{I}_X\} \text{ where}$$

$\mathcal{I}_X$是 $\mathbb{C}^n$ 中由（设为） F生成的 X 理想。当然，由于 $D \subset X$，存在 h_1、$h_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$使得 $F = h_1 g + h_2 f$。换言之， $h_1 e_1 + h_2 e_2 \in K$。我们声称， K是由.....生成的

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-模由 $h_1e_1 + h_2e_2$生成。事实上，由于$K \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ （定理 4.1），它由单个元素生成，设为 $h_1'e_1 + h_2'e_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus 2}$。于是，存在 $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 使得

$$\lambda(h_1'e_1 + h_2'e_2) = h_1e_1 + h_2e_2.$$

应用 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-线性态射 B，我们得到

$$\lambda B(h_1'e_1 + h_2'e_2) = B(\lambda(h_1'e_1 + h_2'e_2)) = B(h_1e_1 + h_2e_2) = F. \tag{4.6}$$

由于 $h_1'e_1 + h_2'e_2 \in K$，我们有 $B(h_1'e_1 + h_2'e_2) = \lambda' F$，其中某个 $\lambda' \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 满足此式。代入 (4.6) 可得 $\lambda\lambda' = 1$，即 λ 是$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ 中的一个单位元。这证明了我们的断言： K 由 $h_1e_1 + h_2e_2$ 作为一个 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$-模生成。然后，我们可以取态射

$$A' : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\sim} K \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}^{\oplus 2} \text{ sending 1 to } h_1e_1 + h_2e_2.$$

它满足复合 $B \circ A' = F \times$Id 的条件。根据定理 4.1， M 的矩阵分解具有如下形式： $\big(\text{adj}(A|A')^T,\ (A|A')^T\big)$，其中

$$(A|A') = \left(\begin{array}{c|c} -f & h_1 \\ g & h_2 \end{array}\right), \text{ so } (A|A')^T = \begin{pmatrix} -f & g \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$$

这就证明了该推论。 □

4.4. 拓扑平凡变形的矩阵分解。Orlik 和 Wagreich [19] 以及 Arnold [1] 证明，一个孤立的准齐次曲面奇点可以变形为以下七类之一，同时保持其链接微分同胚不变

Type	定义多项式
$\mathrm{I}_{p,q,r}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_1^p + X_2^q + X_3^r$
$\mathrm{II}_{p,q,r}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_1^p + X_2^q + X_2X_3^r$带有 $q > 1$
$\mathrm{III}_{p,q,r}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_1^p + X_3X_2^q + X_2X_3^r$与 $q > 1$和 $r > 1$
$\mathrm{IV}_{p,q,r}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_1^p + X_3X_2^q + X_1X_3^r$与 $p > 1$
$\mathrm{V}_{p,q,r}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_2X_1^p + X_3X_2^q + X_1X_3^r = 0$
$\mathrm{VI}_{p,q,r,b_2,b_3}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_1^p + X_1X_2^q + X_1X_3^r + X_2^{b_2}X_3^{b_3}$， 其中 $(p-1)(qb_3 + rb_2) = pqr$
$\mathrm{VII}_{p,q,r,b_2,b_3}$	$F(X_1, X_2, X_3) := X_2X_1^p + X_1X_2^q + X_1X_3^r + X_2^{b_2}X_3^{b_3}$与 $(p-1)(qb_3 + rb_2) = r(pq-1)$

TABLE 1. 拟齐次奇点类型

Xu 和 Yau [27] 证明，上述变形实际上是拓扑平凡变形。此外，拟齐次奇点的拓扑类型由其权重决定，反之亦然。现在我们使用推论 4.3，为所有秩一广义 Wunram 模构造相应的矩阵分解。

4.5. 定理 1.2 的证明。给定 c_1、 $c_2 \in \mathbb{C}$，并令 k、 n、 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ 表示

$$G_{(c_1,c_2,n)}(Z_1, Z_2) := c_1Z_1^n - c_2^nZ_2.$$

以及定理 1.2 中定义的 $S_{(c_1,c_2,n,m)}(Z_1$、 $Z_2)$ 。注意，

$$Z_3^k G_{(c_1,c_2,n)}(Z_1, Z_2)S_{(c_1,c_2,n,m)}(Z_1, Z_2) = Z_3^k\left(\frac{c_1^m Z_1^{mn}}{c_2^{mn}} - Z_2^m\right). \tag{4.7}$$

设 X 是由上方表 1 中的拟齐次多项式 $F(X_1, X_2, X_3)$ 定义的拟齐次曲面奇点。根据假设， X 的权重为 $(1, \omega_2, \omega_3)$。取一点 $(a, b, c) \in X$，满足 $a \neq 0$。相应的 $\mathbb{C}^*$-曲线，记为 $W_{a,\ b,\ c}$，由以下参数化给出：

$$n\colon \mathbb{C}^* \to X \text{ such that } \lambda \mapsto (a\lambda, b\lambda^{\omega_2}, c\lambda^{\omega_3}).$$

注意，$W_{a,\ b,\ c}$ 是多项式的零点集（在 $\mathbb{C}^3$ 中）：

$$G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)=X_1^{\omega_2}b-X_2a^{\omega_2}\quad\text{and}\quad G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)=X_1^{\omega_3}c-X_3a^{\omega_3}.$$

根据推论 4.3，我们只需找到 $h_1,h_2\in\mathbb{C}[X_1,X_2,X_3]$，使得

$$F=G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)h_1+G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)h_2.$$

I 型$_{p,q,r}$：在这种情况下 $F=X_1^p+X_2^q+X_3^r$。根据方程（4.7），

$$G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)=\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}-X_2^q+\frac{c^rX_1^{r\omega_3}}{a^{r\omega_3}}-X_3^r.$$

由于 F 是准齐次的，我们有 $p=p\omega_1=q\omega_2=r\omega_3$。此外，由于 $(a,b,c)\in X$，我们有 $a^p+b^q+c^r=0$。因此，

$$\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}+\frac{c^rX_1^{r\omega_3}}{a^{r\omega_3}}=X_1^p\left(\frac{b^q}{a^{q\omega_2}}+\frac{c^r}{a^{r\omega_3}}\right)=X_1^p\left(\frac{b^q+c^r}{a^p}\right)=-X_1^p.$$

因此，$G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)=-F$。特别是，$h_1:=S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)$ 且 $h_2:=S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)$。这证明了此情形下的矩阵分解。

II 型$_{p,\ q,\ r}$：在这种情况下 $F=X_1^p+X_2^q+X_2X_3^r$。根据方程（4.7），

$$\begin{aligned}&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+X_3^rS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)\right)+\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)\\&=\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}-X_2^q+X_3^r\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}-X_2X_3^r+\left(\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}\right)\frac{c^rX_1^{r\omega_3}}{a^{r\omega_3}}-\left(\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}\right)X_3^r\\&=\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}-X_2^q-X_2X_3^r+\frac{bc^rX_1^{r\omega_3+\omega_2}}{a^{r\omega_3+\omega_2}}-X_3^r.\end{aligned}$$

像之前一样推理（F 是准齐次的），我们得到

$$\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}+\frac{bc^rX_1^{r\omega_3+\omega_2}}{a^{r\omega_3+\omega_2}}=X_1^p\left(\frac{b^q+bc^r}{a^p}\right)=-X_1^p.$$

因此（使用 $p=p\omega_1=q\omega_2=r\omega_3+\omega_2$），

$$\begin{aligned}&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+X_3^rS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)\right)+\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)\\&=-X_2^q-X_2X_3^r-X_1^p.\end{aligned}$$

这就得到了这种情况下的矩阵分解。

III 型$_{p,q,r}$：在这种情况下 $F=X_1^p+X_3X_2^q+X_2X_3^r$。像之前一样推理，利用（4.7），我们得到，

$$\begin{aligned}&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(X_3S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+X_3^rS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)\right)\\&+G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)\left(\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)+\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,1)}(X_1,X_3)\right)\\&=\frac{b^qX_3X_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}-X_3X_2^q+X_3^r\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}-X_2X_3^r+\frac{bc^rX_1^{r\omega_3+\omega_2}}{a^{r\omega_3+\omega_2}}-\left(\frac{bX_1^{\omega_2}}{a^{\omega_2}}\right)X_3^r+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}-\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}X_3\\&=-X_3X_2^q-X_2X_3^r+\frac{bc^rX_1^{r\omega_3+\omega_2}}{a^{r\omega_3+\omega_2}}+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}\quad\text{and}\\&\frac{bc^rX_1^{r\omega_3+\omega_2}}{a^{r\omega_3+\omega_2}}+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}=X_1^p\left(\frac{bc^r+b^qc}{a^p}\right)=-X_1^p.\end{aligned}$$

（最后一个等式中使用 $p=p\omega_1=q\omega_2+\omega_3=r\omega_3+\omega_2$）。这就证明了这种情况下的矩阵分解。

IV 型$_{p,q,r}$：在这种情况下 $F = X_1^p + X_3X_2^q + X_1X_3^r$。与之前一样，利用 (4.7) 可得

$$
\begin{aligned}
&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(X_3S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)\right)\\
&+G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)\left(XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)+\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,1)}(X_1,X_3)\right)\\
&=-X_3X_2^q+\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}-X_1X_3^r+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}\ \text{and}\\
&\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}=X_1^p\left(\frac{ac^r+b^qc}{a^p}\right)=-X_1^p.
\end{aligned}
$$

（最后一个等式使用 $p = p\omega_1 = q\omega_2 + \omega_3 = r\omega_3 + \omega_1 = r\omega_3 + 1$ ）。这就证明了此情形下的矩阵分解。

V 型$_{p,\ q,\ r}$：在此情形下，$F(X_1, X_2, X_3) = X_2X_1^p + X_3X_2^q + X_1X_3^r$。像之前一样，利用方程（4.7），我们有：

$$
\begin{aligned}
&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(X_3S_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+X_1^pS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)\right)\\
&+G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)\left(XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)+\frac{b^qX_1^{q\omega_2}}{a^{q\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,1)}(X_1,X_3)\right)\\
&=-X_3X_2^q+\frac{bX_1^{\omega_2+p}}{a^{\omega_2}}-X_2X_1^p+\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}-X_1X_3^r+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}\ \text{and}\\
&\frac{bX_1^{\omega_2+p}}{a^{\omega_2}}+\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}+\frac{b^qcX_1^{\omega_3+q\omega_2}}{a^{\omega_3+q\omega_2}}=X_1^{\omega_2+p}\left(\frac{ba^p+ac^r+b^qc}{a^{\omega_2+p}}\right)=0.
\end{aligned}
$$

（最后一个等式使用 $p + \omega_2 = q\omega_2 + \omega_3 = r\omega_3 + \omega_1 = r\omega_3 + 1$ ）。这就证明了此情形下的矩阵分解。

VI 型$_{p,\ q,\ r,\ b_2,\ b_3}$：在此情形下，$F = X_1^p + X_1X_2^q + X_1X_3^r + X_2^{b_2}X_3^{b_3}$。像之前一样，利用（4.7），我们有

$$
\begin{aligned}
&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(XS_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2)+X_3^{b_3}S_{(b,a,\omega_2,b_2)}(X_1,X_2)\right)\\
&+G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)\left(XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3)+\frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,b_3)}(X_1,X_3)\right)\\
&=\frac{b^qX_1^{q\omega_2+1}}{a^{q\omega_2}}-X_1X_2^q+X_3^{b_3}\frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}-X_2^{b_2}X_3^{b_3}+\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}-X_1X_3^r+\frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}\left(\frac{c^{b_3}X_1^{\omega_3b_3}}{a^{\omega_3b_3}}-X_3^{b_3}\right)\\
&=\frac{b^qX_1^{q\omega_2+1}}{a^{q\omega_2}}-X_1X_2^q-X_2^{b_2}X_3^{b_3}+\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}-X_1X_3^r+\frac{c^{b_3}b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}{a^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}\ \text{and}\\
&\frac{b^qX_1^{q\omega_2+1}}{a^{q\omega_2}}+\frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}+\frac{c^{b_3}b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}{a^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}=X_1^p\left(\frac{ab^q}{a^{q\omega_2+1}}+\frac{ac^r}{a^{r\omega_3+1}}+\frac{c^{b_3}b^{b_2}}{a^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}\right)=-X_1^p
\end{aligned}
$$

（最后一个等式中使用了 $p = 1 + q\omega_2 = r\omega_3 + 1 = b_2\omega_2 + b_3\omega_3$ ）。这就证明了此情形下的矩阵分解。

VII 型$_{p,\ q,\ r,\ b_2,\ b_3}$：在此情形下 $F = X_2X_1^p + X_1X_2^q + X_1X_3^r + X_2^{b_2}X_3^{b_3}$。仿照前面的论证，利用 (4.7) 可得，

$$\begin{aligned}
&G_{(b,a,\omega_2)}(X_1,X_2)\left(XS_{(b,a,\omega_2,q)}(X_1,X_2) + X_3^{b_3}S_{(b,a,\omega_2,b_2)}(X_1,X_2) + X_1^pS_{(b,a,\omega_2,1)}(X_1,X_2)\right)\\
&+ G_{(c,a,\omega_3)}(X_1,X_3)\left(XS_{(c,a,\omega_3,r)}(X_1,X_3) + \frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}S_{(c,a,\omega_3,b_3)}(X_1,X_3)\right)\\
&= \frac{b^qX_1^{q\omega_2+1}}{a^{q\omega_2}} - X_1X_2^q + X_3^{b_3}\frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}} - X_2^{b_2}X_3^{b_3} + \frac{bX_1^{\omega_2+p}}{a^{\omega_2}} - X_2X_1^p + \frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}}\\
&- X_1X_3^r + \frac{b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2}}{a^{b_2\omega_2}}\left(\frac{c^{b_3}X_1^{\omega_3b_3}}{a^{\omega_3b_3}} - X_3^{b_3}\right)\\
&= \frac{b^qX_1^{q\omega_2+1}}{a^{q\omega_2}} - X_1X_2^q - X_2^{b_2}X_3^{b_3} + \frac{bX_1^{\omega_2+p}}{a^{\omega_2}} - X_2X_1^p + \frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}} - X_1X_3^r + \frac{c^{b_3}b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}{a^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}.
\end{aligned}$$

此外，利用 $\omega_2 + p = 1 + q\omega_2 = r\omega_3 + 1 = b_2\omega_2 + b_3\omega_3$，我们有

$$\frac{b^qX_1^{q\omega_2+1}}{a^{q\omega_2}} + \frac{bX_1^{\omega_2+p}}{a^{\omega_2}} + \frac{c^rX_1^{r\omega_3+1}}{a^{r\omega_3}} + \frac{c^{b_3}b^{b_2}X_1^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}}{a^{b_2\omega_2+\omega_3b_3}} = X_1^{q\omega_2+1}\left(\frac{ab^q + a^pb + ac^r + c^{b_3}b^{b_2}}{a^{q\omega_2+1}}\right) = 0$$

这就证明了这种情形下的矩阵分解，进而证明了该定理。 □

注 4.4. 注意，在 $F = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$ 的情形下，我们的计算得到了 Laza、Pfister 和 Popescu [18] 所计算的矩阵分解。

注 4.5. 为求完整起见，我们现在考虑 $a = 0$ 的情形。为简单起见，我们考虑 I 型多项式 $_{p,\ q,\ r}$，其余情形的证明类似。为固定记号，$F = X_1^p + X_2^q + X_3^r$ 的权重为 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，且 V 是由 F 定义的曲面。令 $(a, b, c) \in V(p, q, r)$，其中 $a = 0$。由于点 $(0, b, c)$ 与原点不同，且它是 F 的一个零点，因此 b 和 c 均非零。与点 $(0, b, c)$ 相关联的 $\mathbb{C}^*$-曲线记为 $W_{b,\ c}$，其参数化为

$$n\colon \mathbb{C}^* \to X \text{ such that } \lambda \mapsto (0, b\lambda^{\omega_2}, c\lambda^{\omega_3}).$$

当且仅当 $\omega_2 = 1$ 或 $\omega_3 = 1$ （经过重新参数化）时，这条 $\mathbb{C}^*$曲线是光滑的。不失一般性，假设 $\omega_2 = 1$。在此假设下，由点 $(0, b, c)$ 给出的 $\mathbb{C}^*$曲线由以下多项式定义

$$f = X_1 \quad \text{and} \quad G_{(c,b,\omega_3)}(X_2, X_3) = cX_2^{\omega_3} - b^{\omega_3}X_3.$$

由方程（4.7），

$$X_1(-X_1^{p-1}) + G_{(c,b,\omega_3)}(X_2, X_3)S_{(c,b,\omega_3,r)}(X_2, X_3) = -X_1^p + \frac{c^rX_2^{r\omega_3}}{b^{r\omega_3}} - X_3^r.$$

根据假设，$a = 0$ 和 $b^q + c^r = 0$。因此，

$$-X_1^p + \frac{c^rX_2^{r\omega_3}}{b^{r\omega_3}} - X_3^r = -X_1^p - X_2^q - X_3^r.$$

令 M 为与退化轨迹 $W_{b,c}$ 对应的极大 Cohen-Macaulay 模（见命题 2.3）。利用推论 4.3，我们得出 M 的矩阵分解为：

$$\begin{pmatrix} -X & b^{\omega_3}X_3 - cX_2^{\omega_3} \\ S_{(c,b,\omega_3,r)}(X_2, X_3) & X_1^{p-1} \end{pmatrix}.$$

4.6. Etingof-Ginzburg猜想。取 $\Phi := X_1X_2X_3 - X_2X_1X_3$。那么， $\mathfrak{A}(\Phi) = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ （见 [13, 例 1.3.3]）。我们证明：

定理 4.6. 设 $\Psi \in \mathfrak{A}(\Psi)$ 是表 1 中提及的多项式之一，且其中一个权重为 1。那么，对于 $\mathfrak{B}(\Phi, \Psi)$ 上的任意点模，都可以自然地关联一个矩阵分解。

证明. 记由 Ψ 定义的超曲面为 X。考虑满足 $a \neq 0$ 的点 $(a, b, c) \in X$。记与点 (a, b, c) 关联的剩余域为 $k(a, b, c)$。注意， $k(a, b, c)$ 是一个点模。于是，根据定理 1.2，我们自然地将矩阵分解 $M(P) = (M(P)_+, M(P)_-)$ 关联到点模 $P := k(a, b, c)$。此外，每个点模都是这类剩余域的若干个副本的直和，即，任意点模 P 的形式为：

$$P := \bigoplus_{i \in I} k(a_i, b_i, c_i)^{\oplus m_i}, \text{ where } (a_i, b_i, c_i) \in X^* \text{ and } m_i > 0.$$

记 P_i 为点模 $k(a_i, b_i, c_i)$，记 $M(P_i) := (M(P_i)_+, M(P_i)_-)$ 为相应的矩阵分解。记 $M(P)_+$（分别地， $M(P)_-$）为对角线上含有 m_i 个 $M(P_i)_+$ （分别地， $M(P_i)_-$）的矩阵，其中 i 遍历 I 中的各项。于是，与 P 相关联的矩阵分解为 $M(P) := (M(P)_+, M(P)_-)$。这就证明了该定理。□

5. More examples: cusps and non-isolated singularities

本节将求出某些尖点奇点和非孤立奇点的矩阵分解。

5.1. 尖点奇点。设

$$F(X_1, X_2, X_3) = X_1^{(r-2)q} + X_2^q + X_3^r + \tau X_1X_2X_3,$$

其中 $\tau \in \mathbb{C}^*$ 且 $r \geq 3$。记由 F 定义的曲面为 X。设 $\omega \in \mathbb{C}$ 满足 $\omega^{r-1} = 1/\tau$。取一个不同于原点的点 $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$，使得

$$a^{q(r-2)} + b^q = 0 \text{ and } c(c^{r-1} + ab) = 0. \tag{5.1}$$

考虑由以下参数化给出的 $\mathbb{C}^*$-曲线，记为 $W_{a,\ b,\ c}$：

$$n \colon \mathbb{C}^* \to X \text{ such that } \lambda \mapsto (a\lambda\omega, b\lambda^{r-2}\omega^{r-2}, c\lambda).$$

注意，态射 n 确实映射到 X，因为

$$\begin{aligned} F(n(\lambda)) &= (a\lambda\omega)^{(r-2)q} + (b\lambda^{r-2}\omega^{r-2})^q + (c\lambda)^r + \frac{1}{\omega^{r-1}}(a\lambda\omega)(b\lambda^{r-2}\omega^{r-2})(c\lambda) \\ &= (\lambda\omega)^{(r-2)q}\left(a^{(r-2)q} + b^q\right) + \lambda^r\left(c^r + abc\right) = 0 \end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 (5.1) 得出。令 $M_{a,\ b,\ c}$ 为与退化轨迹 $W_{a,\ b,\ c}$ 相关联的极大 Cohen–Macaulay $\mathcal{O}_X$-模（见命题 2.3）。我们证明：

定理 5.1. 与 $M_{a,\ b,\ c}$ 相关联的矩阵分解为

$$\begin{pmatrix} G_{(c,a\omega,1)}(X_1, X_3) & -G_{(b,a,r-2)}(X_1, X_2) \\ S_{(b,a,r-2,q)(X_1,X_2)} + \frac{cX_1^2}{a\omega^r} S_{(b,a,r-2,1)(X_1,X_2)} & S_{(c,a\omega,1,r)}(X_1, X_3) + \frac{X_1X_2}{\omega^{r-1}} S_{(c,a\omega,1,1)}(X_1, X_3) \end{pmatrix},$$

其中 $G_{(c_1,c_2,n)}(Z_1, Z_2) := c_1Z_1^n - c_2^nZ_2$ 且

$$S_{(c_1,c_2,n,m)}(Z_1, Z_2) := \sum_{j=1}^{m} \frac{Z_1^{(j-1)n} Z_2^{m-j} c_1^{j-1}}{c_2^{jn}}.$$

证明。注意，曲线 $W_{a,b,c}$ 由以下多项式定义：

$$G_{(c,a\omega,1)}(X_1,X_3)=cX_1-a\omega X_3 \quad \text{and} \quad G_{(b,a,r-2)}(X_1,X_2)=bX_1^{r-2}-a^{r-2}X_2.$$

利用 (4.7)，我们得到

$$\begin{aligned}
&G_{(c,a\omega,1)}(X_1,X_3)\left(S_{(c,a\omega,1,r)}(X_1,X_3)+\frac{X_1X_2}{\omega^{r-1}}S_{(c,a\omega,1,1)}(X_1,X_3)\right)\\
&+G_{(b,a,r-2)}(X_1,X_2)\left(S_{(b,a,r-2,q)(X_1,X_2)}+\frac{cX_1^2}{a\omega^r}S_{(b,a,r-2,1)(X_1,X_2)}\right)\\
&=\frac{c^rX_1^r}{a^r\omega^r}-X_3^r-\frac{X_1X_2X_3}{\omega^{r-1}}+\frac{b^qX_1^{q(r-2)}}{a^{q(r-2)}}-X_2^q+\frac{cbX_1^r}{a^{r-1}\omega^r} \text{ and}\\
&\frac{c^rX_1^r}{a^r\omega^r}+\frac{cbX_1^r}{a^{r-1}\omega^r}=0 \text{ and } \frac{b^qX_1^{q(r-2)}}{a^{q(r-2)}}=-X_1^{q(r-2)}.
\end{aligned}$$

最后一行中的等式由假设 (5.1) 得出。利用推论 4.3，我们得出，与$M_{a,b,c}$ 相关联的矩阵分解如定理陈述所示。定理得证。□

注 5.2。注意：

(1) 若我们假设 $q=r=3$，那么 F 就是 Etingof 和 Ginzburg [11]研究的三次多项式。
(2) 若我们施加不等式 $r<q(r-2)$，那么 F 就是类型为 $T_{(r-2)q,q,r}$ 的尖点奇性（参见 [7, 定理 7.10]）。

5.2. 非孤立奇点。我们的下一个应用是展示如何推广 Baciu [3] 的构造。考虑齐次多项式

$$F=X_1^4+X_1^3X_3-X_2^4X_3.$$

在这种情况下，奇异轨迹是直线

$$X_{\text{sing}}=\{(0,0,z)\in\mathbb{C}^3 \mid z\in\mathbb{C}\}.$$

设 $(a,b,1)\in\mathbb{C}^3\setminus\{0\}$，使得 $F(a,b,1)=0$。由点 $(a,b,1)$ 给出的 $\mathbb{C}^*$-曲线是由下式给出的理想的零点集

$$f=X_1-X_3a \quad \text{and} \quad g=X_2-X_3b.$$

设 $h_1=X_1^3+X_1^2X_2+aX_1^2X_3+aX_1X_2X_3+a^2X_1X_3^2+a^2X_2X_3^2+a^3X_3^3$和

$$h_2=X_2^2X_3+bX_2X_3^2+(a^3+b^2)X_3^3.$$

于是我们得到 F对应的矩阵分解：

$$M(a,b,c)=\begin{pmatrix} f & g\\ -h_2 & h_1\end{pmatrix}.$$

注意， h_1 和 h_2 可以改写为：

$$\begin{aligned}
h_1=&X_1(X_1^2+X_1X_2+aX_1X_3+aX_2X_3)+X_3(a^2X_1X_3+a^2X_2X_3+a^3X_3^2),\\
h_2=&X_3(X_2^2+bX_2X_3+(a^3+b^2)X_3^2).
\end{aligned}$$

因此，以下矩阵（也由点 $(a:b:1)\in X^*$ 参数化）是 F 的矩阵分解：

$$M(a,b,c;3)=\begin{pmatrix} 0 & -f & g\\ X & -X_2^2-bX_2X_3-(a^3+b^2)X_3^2 & -a^2X_1X_3-a^3X_3^2\\ X_3 & 0 & X_1^2+X_1X_2+aX_1X_3+aX_2X-aX_2X_3\end{pmatrix}.$$

Acknowledgement

我们感谢 Javier F. de Bobadilla 教授和 Duco van Straten 教授对这一问题的关注及其有益的意见。第一作者获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/T019379/1。第二作者获得 OTKA 126683 和 Lend¨ulet 30001 的资助。第二作者感谢吕米尼国际数学会议中心的热情接待，并为其提供了理想的工作环境。他还感谢 Javier F. de Bobadilla 教授的邀请；他担任 2021年第二学期 Jean-Morlet讲席。

References

[1] V. I. Arnol'd. 退化临界点邻域内函数的标准形。 *Russ. Math. Surv.*, 29 2 10( ): –50, 1974. [2] M. Artin, J. Tate 和 M. Van den Bergh. 与椭圆曲线自同构相关的一些代数。载于 *The Grothendieck Festschrift,* 第 33–85 页。施普林格, 2007。[3] C. Baciu. 简单节点仿射锥上的秩二乌尔里希模。 *Analele Ştiinţifice ale Universităţii "Ovidius" Constanţa. Seria: Matematică* 15 1 15 32, 2007 , ( ): – 。

[4] W. Bruns 和 H. J. Herzog. *Cohen-Macaulay rings*。《剑桥大学出版社》，1998。[5] R.-O. Buchweitz, D. Eisenbud 和 J. Herzog. 二次超曲面上的 Cohen–Macaulay 模。附录由 Ragnar-Olaf Buchweitz 撰写：比较定理（第 96–116 页）。《奇点、代数表示与向量丛》，会议论文集，兰布雷希特/普法尔茨/联邦德国，1985，《数学讲义》1273，58–95；96–116（1987），1987。[6] R.-O. Buchweitz, G.-M. Greuel 和 F.-O. Schreyer. 超曲面奇点上的 Cohen–Macaulay 模 II。 *Inventiones Mathematicae*, 88:165–182, 1987. [7] I. Burban 和 Y. Drozd. 曲面奇点上的极大 Cohen–Macaulay 模。载于 *Trends in representation theory of algebras and related topics. Proceedings of the 12th international conference on representations of algebras and workshop (ICRA XII) Toruń Poland August 15–24 2007.* 101 166 ¨ , , , , ,

第 – 页。苏黎世：欧洲数学会（EMS），2008。[8] D. Crisler 和 K. Diveris. 平方和多项式的矩阵分解。 *Pi Mu Epsilon Journal*, 14 5 301 306, 2016 ( ): – 。[9] D. Eisenbud. 完全交的同调代数及其在群表示中的应用。 *Transactions of the American Mathematical Society*, 260:35–64, 1980。[10] D. Eisenbud 和 J. Harris. *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*。剑桥大学出版社，2016。[11] P. Etingof 和 V. Ginzburg. 非交换德尔佩佐曲面与卡拉比–丘代数。 *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)* 12 6 1371 1416, 2010 , ( ): – 。

[12] J. Fern´andez de Bobadilla 和 A. Romano-Vel´azquez. 正规戈伦斯坦施泰因曲面上的自反模、其变形与模空间。 *arXiv preprint arXiv:1812.06543*, 2018。[13] V. Ginzburg. 卡拉比–丘代数。 *arXiv preprint math/0612139*, 2006。[14] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*。《数学研究生教材》第 52 卷。施普林格出版社，1977。[15] R. Hartshorne. 稳定自反层。 *Mathematische Annalen*, 254(2):121–176, 1980。[16] A. Kapustin 和 Y. Li. 朗道–金兹堡模型与代数几何中的D膜。 *J. High Energy Phys.* 312 10 2002 , , 。

[17] H. Kn ¨ orrer. 超曲面奇点上的 Cohen–Macaulay 模 I。 *Inventiones Mathematicae* 88 153 164, 1987 , : – 。[18] R. Laza, G. Pfister 和 D. Popescu. 椭圆曲线锥上的极大 Cohen–Macaulay 模。*Journal of Algebra*, 253(2):209–236, 2002。[19] P. Orlik 和 P. Wagreich. 带有 $\mathbb{C}^*$ 作用的代数曲面孤立奇点。 *Ann. Math. (2)*, 93:205–228, 1971。[20] D. Orlov. 奇点的三角范畴与朗道–金兹堡模型中的D膜。载于 *Algebraic geometry. Methods relations and applications. Collected papers. Dedicated to the memory of Andrei Nikolaevich Tyurin.* 227 248 2004 , , 第 – 页。莫斯科：Maik Nauka/Interperiodica，。[21] D. Orlov. 相干层的导出范畴与奇点的三角范畴。载于 *Algebra, arithmetic and geometry*, 第 – 页。施普林格，。[22] D. Orlov. 朗道–金兹堡模型、D膜与镜像对称。 *Matemática Contemporânea* 41 75 112, , : – 。[23] C. Peskine 和 L. Szpiro. 代数簇的链接 I。 *Inventiones mathematicae*, 26(4):271–302, 1974。

[24] P. Pragacz. 退化轨迹的计数几何。载于 *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 第 21 卷，第 413–454 页，1988。[25] A. Ros Camacho 和 R. Newton. 轨形自等价例外单峰奇点。2016 年 7 月。[26] A. Ros Camacho 和 R. Newton. 奇异对偶轨形等价 I。

Journal of Singularities 14 34 51, , : – 。
2016
[27] Y. Xu 和 S.-T. Yau. 二维孤立准齐次超曲面奇点拓扑类型的分类。 *Manuscr. Math.*, 64(4):445–469, 1989。

School of Mathematics and Statistics, University of Sheffield, Hicks building, Hounsfield Road , S3 7RH, UK

Email address: a.dan@sheffield.ac.uk

Alfréd Rényi Institute Of Mathematics, Hungarian Academy Of Sciences, Reáltanoda Utca 13-15, H-1053, Budapest, HungaryUniversidad Nacional Autónoma de México Avenida Universidad s/n, Colonia Lomas de ChamilpaCP 62210, Cuernavaca, Morelos Mexico*Email address*: agustin@renyi.hu, agustin.romano@im.unam.mx