arXiv:2301.05059v1 [cs.DC] 12 Jan 2023

状态较少、通信能力较弱的分布式自稳定最大独立集

GeorgeGiakkoupis Isabella Ziccardi Inria，法国雷恩 博科尼大学，意大利米兰george.giakkoupis@inria.fr isabella.ziccardi@unibocconi.it

摘要

我们研究一种简单的随机过程，它能在一般的 n 顶点图上计算极大独立集（MIS）。每个顶点有一个二元状态：黑色或白色，其中黑色表示该顶点属于极大独立集。初始时，顶点状态任意，并以并行方式更新：每一轮中，状态与其邻居的状态“矛盾”的每个顶点——即自身为黑色且有黑色邻居，或自身为白色且所有邻居均为白色——都以 $1/2$ 的概率改变状态。该过程在任意图上都以概率 1 稳定，最终黑色顶点构成一个极大独立集。也很容易看出，在团和树等某些图族上，期望稳定时间为 $O(\log n)$。然而，要分析该过程在超出这些简单情形的图上的表现，似乎颇具挑战。

我们的主要结果是，对于 $0 \le p \le \text{poly}(\log n) \cdot n^{-1/2}$ 和 $p \ge 1/\text{poly}(\log n)$，该过程在 $G_{n,p}$ 随机图上以高概率在 $\text{poly}(\log n)$ 轮内稳定。此外，该过程的一个扩展版本虽然顶点状态空间更大，但仍为常数；对于所有 $1 \le p \le 1$，它都能在 $G_{n,p}$ 上以高概率在 $\text{poly}(\log n)$ 轮内稳定。我们猜想，对于原始过程也成立这一改进后的界。事实上，我们认为，对于任意给定的 n 顶点图，原始过程都能以高概率在 $\text{poly}(\log n)$ 轮内稳定。这两个过程都可以直接转化为分布式/并行极大独立集算法；这些算法具有自稳定性，使用常数空间（且每轮使用常数个随机比特），并假设通信受限，如蜂鸣通信模型或同步石器时代模型。就我们所知，此前没有已知的极大独立集算法同时具备自稳定性、使用常数空间和常数随机性，并能在一般图或随机图上于 $\text{poly}(\log n)$ 轮内稳定。

1 引言

寻找极大独立集（MIS）是并行与分布式计算中的一个基本问题。给定一个图 $G = (V, E)$，目标是确定一个顶点集合 $S \subseteq V$，使得其中任意两个顶点 $u, v \in S$ 彼此不相邻（独立性 性质），并且不存在可以加入$u \in V \setminus S$ 而不破坏独立性的顶点（S 极大性 性质）。这一问题在并行计算中的重要性于 20 世纪 80 年代初首次得到认可，[32, 8], 这是由于它在对称性破缺方面有多种应用。[24], 此后，人们对其进行了广泛研究（截至 2015 年的工作综述见 [7]，最新成果见 [4, 17]）。

本文探讨在图上运行的简单分布式随机过程，这些过程从顶点的任意初始状态出发，求得一个极大独立集（MIS）。这些过程可直接转化为自稳定的 [10, 11]同步分布式算法，适用于计算和通信能力受到严格限制的网络系统，例如无线传感器网络。我们所研究的过程也与某些生物细胞网络相关。例如，已知苍蝇神经系统发育过程中发生的一种生物过程，等价于计算一个极大独立集（MIS） [2, 23]。

我们研究的主要随机过程称为二状态 MIS 过程，具体如下。每个顶点都有一个二元状态：黑色或白色，其中黑色表示该顶点属于极大独立集（MIS）。顶点的初始状态任意，并在同步轮次中更新。在每一轮中，每个 u 状态违反独立性或极大性要求的顶点，即 u 处于黑色且有一个黑色邻居，或处于白色且没有黑色邻居的顶点，都以 $1/2$的概率将状态切换为相反状态。显然，当某顶点处于黑色且没有黑色邻居，或处于白色且有一个已稳定为黑色的邻居时，其状态便会稳定；当所有顶点的状态都稳定后，黑色顶点的集合就是一个极大独立集（MIS）。同样显而易见的是，在任意图 G上，该过程最终以概率 1 稳定下来（由于随机化）。[1]

二状态 MIS 过程可以看作一种自然的并行化（加入随机性），它基于 [28, 20], 提出的一种简单的自稳定顺序确定性算法。在该算法中，每一步只有一个节点更新其状态（若该节点有黑色邻居，则从黑色变为白色；若没有黑色邻居，则从白色变为黑色）。 [28] 还指出，通过将顺序算法中的转移随机化，我们可以得到一种算法，该算法在一般的对抗性调度器模型下以概率 1 稳定，其中包括同步模型。 [31]提出的一般变换框架也能得出类似的结论。已知该顺序算法在每个进程最多执行 2 步后即可稳定（无论调度顺序如何）。然而，分析并行过程的稳定时间似乎要困难得多，迄今尚未得到研究。

二状态 MIS 过程可直接转化为适用于严苛蜂鸣通信模型的自稳定 MIS 算法 [9]。在该模型中，每个同步轮次里，每个节点要么监听，要么发出蜂鸣信号；而监听的节点只能判断是否没有邻居发出蜂鸣信号，或至少有一个邻居发出蜂鸣信号。在我们的情形中，可以让黑色节点在每轮发出蜂鸣信号，而白色节点监听。黑色节点必须能够检测冲突（否则就无法判断自己是否有黑色邻居），因此我们假设采用带发送方碰撞检测的蜂鸣模型版本（又称全双工模型） [1, 16]。

我们还提出了二状态 MIS 过程的一种简单变体，称为三状态 MIS 过程。该变体增加了一个状态，且不需要冲突检测（见定义 5）。这一变体适用于同步石器时代模型 [13, 12]。同步石器时代模型可以看作是将蜂鸣模型扩展到常数个信道（不进行冲突检测）：每个节点最多在一个信道上发出蜂鸣信号，并监听其他信道。

总体而言，通过二状态和三状态 MIS 过程得到的算法具有若干吸引人的性质：它们仅使用常数个状态（2 或 3 个），并且每轮只需一个随机比特；它们不需要节点 ID 或任何全局图信息（例如顶点数 n或最大度 Δ）；它们只假设通信能力非常弱（蜂鸣模型或石器时代模型）；它们是自稳定的，而且极其简单。我们将证明，对于某些图族，这些算法也很快，即从任意初始状态出发，它们都能在关于 n 的多对数轮次内稳定，以高概率。[2] 此外，尽管我们未能在此证明如此强的结论，但我们相信这些算法在所有图上都很快。

文献中已经提出了若干自稳定分布式 MIS 算法，但据我们所知，没有一种算法具备上述所有性质。已知的蜂鸣模型自稳定 MIS 算法需要（近似）了解 n，使用的空间是 n 的超常数函数，并且需要超常数量的随机比特 [1, 23, 16]。在石器时代模型中，[13] 提出的一种 MIS 算法与我们的算法具有类似性质（并且可证明对所有

[1]我们本可以将过程定义为：当白色顶点没有黑色邻居时，以概率 1 从白色转变为黑色；但我们选择了随机转移，因为这样可以简化分析。[2]本文不分析三状态 MIS 过程，但我们预计它的表现与二状态 MIS 过程相似（或更好）。

图）运行速度很快，但并非自稳定算法；而最近为该模型提出的一种自稳定算法 [12] 仅在直径有已知常数上界的图上运行速度较快 D。其他随机自稳定 MIS 算法则需要超常数量的状态和通信 [30]。最后，已知的确定性自稳定极大独立集算法需要节点 ID 互不相同、超常数量的状态和通信，而且通常远慢于随机化算法；其稳定时间与 n 或最大度 Δ [22, 18, 29, 5]成线性关系。

1.1 我们的贡献

我们首先分析完全图以及森林度有界的图上的二状态 MIS 过程的稳定时间。[3] 我们还给出了适用于一般图的、以最大度表示的上界。这些结果的证明大多较为直接。

Theo注 1。在 n 个顶点的图 G 上，二状态 MIS 过程的稳定时间 is

- $O(\log n)$ 的期望时间，并且以 $O(\log^2 n)$ 的概率 w.h.p.，若 G 是完全图 K_n。
- $O(\log n)$ 的概率 w.h.p.，若 G 的森林度有界。

至多为 $O(\Delta \log n)$ 的概率 w.h.p.，若 G 的最大度为 Δ。

本文的一项主要技术贡献是分析 Erd˝os- R´enyi $G_{n,p}$ 随机图上的二状态 MIS 过程。我们证明，当平均度 np 至多为 $\text{poly}(\log n) \cdot \sqrt{n}$时，$G_{n,p}$ 随机图的稳定时间上界为多对数级别。当平均度至少为 $n/\text{poly}(\log n)$时，也很容易得到相同的上界。

定理 2. 对于满足$0 \le p \le \text{poly}(\log n) \cdot n^{-1/2}$或 $p \ge 1/\text{poly}(\log n)$的 $G_{n,p}$ 随机图，二状态 MIS 过程的稳定时间至多为 $\text{poly}(\log n)$，以高概率成立。

我们的证明技巧无法为 $G_{n,p}$ 在 p的完整范围内的二状态 MIS 过程给出多对数级别的上界。我们的第二项技术贡献是扩展二状态 MIS 过程，使其在 $G_{n,p}$ 对于所有 $0 \le p \le 1$，均能以高概率在多对数时间内稳定。扩展后的过程采用了 [12]中提出的相位时钟子过程。有趣的是，与 [12], 不同，我们不使用相位时钟进行同步，而是将其用作本地非同步计数器（更详细的讨论见第 1.2 节）。

定理 3. 存在一种具有 18 种状态的 2 状态过程扩展，使得对于任意 $0 \le p \le 1$，该过程在 $G_{n,p}$ 随机图上的稳定时间至多为 $\text{poly}(\log n)$，以高概率成立。

我们认为，定理 3 给出的上界同样适用于二状态 MIS 过程。事实上，我们猜想，在 n上的稳定时间以高概率为 $\text{poly}(\log n)$。对于任意给定的 n顶点图，我们也猜想三状态 MIS 过程同样如此。对于二状态过程，我们所能期望的最佳通用上界为 $O(\log^2 n)$，因为该过程在完全图上需要$\Theta(\log^2 n)$轮次才能稳定 K_n，且这一结论以高概率成立。[4] 对于三状态过程，我们没有发现稳定时间超过 $O(\log n)$的图。

[3]图的森林度是指将其边划分为若干森林所需的最少数量。[4]在由 $\sqrt{n}$ 个互不相交的团组成的图上，该过程还需要 $\Theta(\log^2 n)$ 轮次 $in\ expectation$ 才能稳定。

1.2 分析概述与技巧

下面我们概述二状态 MIS 过程及其在$G_{n,\,p}$随机图上的扩展的分析。

为了避免同时处理图的随机性和顶点状态的任意初始化，我们先处理图的随机性。我们定义一个良图族，其中的图满足分析所需的所有结构性质，例如任意诱导子图的平均度上界，以及任意两个顶点的公共邻居数量上界（见定义 17）。随后我们证明，$G_{n,\,p}$ 随机图以高概率是良图，并在分析中假设图任意但为良图。

分析通过证明：从任意顶点状态出发，经过 $O(\log n)$ 轮次后，过程会取得足够进展来展开，其中进展以期望稳定的顶点数量来衡量。

在二状态 MIS 过程中，如果一个顶点是黑色且有一个黑色邻居，或者是白色且没有黑色邻居，我们就称该顶点为活跃。因此，活跃顶点会在下一步将其状态改为均匀随机状态。如果一个顶点处于活跃状态，且其活跃邻居不超过 k 个，则称它为 k-活跃。

二状态 MIS 过程的一个基本性质是，如果一个顶点处于 k-活跃状态，那么它会在 $O(\log k)$ 轮次内以 $\Omega(1/k)$ 的概率稳定为黑色。我们还将这一性质推广到活跃顶点集合。[5] 这两个性质结合良图的结构性质，足以说明当未稳定顶点数或活跃顶点数足够大时，能够取得预期的进展。

较难的情况是未稳定顶点数相对较少，即 $O(p^{-1}\log^2 n)$，且其中处于活跃状态的顶点比例低于 $1/\text{poly}(\log n)$。人们可能会认为这种情况很容易处理，因为从 $O(p^{-1}\log^2 n)$ 个顶点中随机选取一个子集，其诱导子图的最大度以高概率为 $\Delta = O(\log^2 n)$（而定理 1 对该 Δ 给出了 $O(\log^3 n)$ 的界）。然而，上述关于 Δ 的界并不适用于由 $O(p^{-1}\log^2 n)$ 个顶点的任意子集诱导出的子图。尽管如此，其平均度确实为 $O(\log^2 n)$，因此有常数比例的顶点的度为 $O(\log^2 n)$。

设 u 是这样一个顶点，即在未稳定顶点的诱导子图中，其度为 $d = O(\log^2 n)$。为了防止 u 变为活跃（从而成为 d-活跃）或变得稳定，在每一轮中，u 至少有一个邻居必须是未稳定的黑色顶点。粗略地说，我们证明：如果顶点 v 在长度为 r 轮次的某个区间内（忽略最初几轮，例如 v 初始为黑色的情况）曾有 b 的概率成为未稳定的黑色顶点，那么 v 在该区间内成为 θ-活跃的概率为 $\text{poly}(b/r)$。对于分析，只需令 $r = O(\log\log n)$。粗略地说，θ 受两个节点可能拥有的公共邻居数的最大值所限，因此若 $p \le$ 为 $\text{poly}(\log n)$，则 $\theta \le$ 为 $\text{poly}(\log n)$（相关引理见第 4.1 节）。

如果 u 的每个 d 邻居在接下来的 r 轮次内成为未稳定的黑色顶点的概率都小于 $1/(2d)$，那么 u 有常数概率变为活跃（或稳定）。另一方面，如果存在某个邻居 v，其在接下来的 r 轮次内成为未稳定的黑色顶点的概率为 $b \ge 1/(2d)$，那么如上所述，v 以至少 $\text{poly}(b/r) = 1/\text{poly}(\log n)$ 的概率变为 θ-活跃。由此可知，在接下来的 $r = O(\log\log n)$ 轮次中的某个时刻，u 以概率 $1/\text{poly}(\log n)$ 成为 $\text{poly}(\log n)$-活跃，或拥有某个 $\text{poly}(\log n)$-活跃邻居。因此，u 在接下来的 $O(\log n)$ 轮次内以概率 $1/\text{poly}(\log n)$ 稳定。[6]

当 $p > \text{poly}(\log n)\cdot n^{-1/2}$ 时，上述分析的最后一种情况无法给出多对数界。解决这一问题的一种方法是控制顶点从白色变为黑色的频率。我们通过加入这种控制机制，扩展了二状态 MIS 过程。

[5] 文献中对分布式 MIS 算法的分析通常会用到类似的性质。[6] 我们认为，对这一论证加以改进，或许能将其应用于更广泛的图类。

我们将这一新过程称为三色 MIS 过程。它由两个并行运行的子过程组成：第一个子过程类似于二状态 MIS 过程，只是增加了第三种颜色——灰色；黑色顶点现在会变为灰色而非白色，灰色顶点过一段时间后会变为白色，而其他顶点将灰色顶点视为白色。灰色转为白色的过程由第二个子过程控制，该子过程称为对数切换。

在对数切换中，每个顶点都有一个开/关二进制变量；如果灰色顶点的切换变量为开，它就会变为白色。我们希望对数切换满足两个基本性质：(i) 每经过 $\Theta(\log n)$ 轮次，顶点就会从关切换为开；(ii) 每经过 $O(1)$ 轮次，顶点就会从开切换为关。[7] 然而，我们不知道如何用常数个状态实现性质 (i)。我们注意到，只要性质 (i) 在 $p > \mathrm{poly}(\log n)\ n^{-1/2}$ 时成立就足够了；对于更小的 p，较弱的性质便已足够：(i′) 顶点从关切换为开所需的轮次至多为$O(\log n)$。如何实现这种区分并非显而易见，因为我们希望该过程适用于所有 $0 \le p \le 1$，同时又不知道 p (也不知道图拓扑的任何其他信息)。我们通过以下方式实现这一点。

我们利用这样一个事实：如果 $p > \mathrm{poly}(\log n) \cdot n^{-1/2}$，那么该图的直径为常数（事实上直径为 2）。我们设计的对数开关过程类似于 [12] 中提出的相位时钟过程 RandPhase。RandPhase 假设该过程已知图直径的一个上界 D，并使用 $D+3$ 个状态。对于 $D=3$ （而非 2！），对数开关的核心机制与 RandPhase 完全相同，但底层图的直径可以任意大且未知。对数开关还包含一个将状态映射到开/关切换值的映射。RandPhase 用于同步（实现长度为 $D+\Theta(\log n)$ 的同步相位），而对数开关的目的并非同步，因为并不要求不同顶点的切换变量同时改变。

概述。 本文其余部分安排如下。 第 2 节 介绍 2 状态和 3 状态极大独立集过程的定义及一些基本性质。 第 3 节 给出定理 1的证明。 第 4 节 证明定理 2。 第 5 节 定义三色极大独立集过程，并证明定理 3。 附录 B 回顾相关工作。

记号。设 $G=(V,E)$ 是一个有 n 个顶点的图。对于每个顶点 $u \in V$, $N(u) = \{v : (u,v) \in E\}$ 是 u 的邻居集合，而 $N^+(u) = N(u) \cup \{u\}$。类似地，对于顶点集合 $S \subseteq V$，我们定义 $N(S) = \bigcup_{u\in S} N(u) \setminus S$以及 $N^+(S) = \bigcup_{u\in S} N^+(u) = N(S) \cup S$。对于两个（不一定不相交的）集合 $S,T \subseteq V$，令 $E(S,T) = \{(u,v) \in E : u \in S, v \in T\}$表示一个端点属于 S、另一个端点属于 T 的边集合。我们还定义 $E(S) = E(S,S)$。用 $G[S]$表示 G 在 $S \subseteq V$ 上的诱导子图，即 $G[S] = (S, E(S))$。

2 二状态和三状态 MIS 过程

我们定义了两种自稳定分布式图过程，在任意给定的图上运行时，它们都能计算出一个极大独立集。

定义 4（二状态 MIS 过程）。在图 $G=(V,E)$ 上的二状态 MIS 过程中，每个顶点$u \in V$ 的二元状态取自集合 {黑色、白色}，且所有状态并行更新

[7] 之所以对数切换就足够，而不需要“对数的对数”切换，是因为在分析二状态 MIS 过程的最后一种情形时，考虑由 $O(p^{-1}\log^2 n)$ 个顶点诱导的子图，其中有常数比例的顶点，其度至少为 $\Omega(\log^3 n)$ 的邻居不超过 $O(\log n)$ 个。

轮次。顶点 u 的初始状态 $c_0(u)$可以是任意状态，并且在每一轮 $t = 1,2,\ldots,$ u中，其状态都根据以下规则从 $c_{t-1}(u)$更新为 $c_t(u)$。

令 NC $_t(u) = \{c_{t-1}(v)\colon\ v \in N(u)\}$若 $\big(c_{t-1}(u) =$为黑色且 NC $_t(u) \ni$为黑色$\big)$，或 $\big(c_{t-1}(u) =$为白色且 NC$_t(u) \not\ni$为黑色$\big)$，则令 $c_t(u)$ 从 {黑色、白色}中均匀随机取一个状态 c_t；否则设置 $u(= c_{t-1})u$

如果顶点 u 的状态为黑色或白色，我们分别称其为黑色或白色。如果u 为黑色且有黑色邻居，或为白色且没有黑色邻居，我们称其为活跃。

如果顶点 u为黑色且没有黑色邻居，或为白色且有一个黑色且稳定的邻居，我们称其为稳定。根据更新规则可立即得知，顶点一旦变为稳定，此后便始终保持稳定，其状态也不再改变。顶点 u 的稳定时间是指 u 达到稳定状态时所处的最早轮次。该过程的稳定时间是指所有顶点均达到稳定状态时所处的最早轮次。容易验证，在该过程的稳定时间之后，黑色顶点集合构成 G的一个极大独立集。

令 $B_t = \{u \in V\colon\ c_t(u) =$ black$\}$ 表示第 $t \geq 0$ 轮结束时黑色顶点的集合，并令 $W_t = V \setminus B_t$ 表示白色顶点的集合。我们令

$$A_t = \{u \in B_t\colon N(u) \cap B_t \neq \emptyset\} \cup \{u \in W_t\colon N(u) \cap B_t = \emptyset\}$$

表示第 t 轮结束时活跃顶点的集合。令 $I_t = \{u \in B_t\colon\ N(u) \cap B_t = \emptyset\}$ 表示第 t 轮结束时稳定黑色顶点的集合（注意， I_t 是一个独立集，也是最终极大独立集的子集）。最后，令 $V_t = V \setminus N^+(I_t)$ 表示第 t 轮结束时尚未稳定的顶点集合。

定义 5（三状态 MIS 过程）。在 $G = (V, E)$ 上的三状态 MIS 过程中，每个顶点 $u \in V$ 的状态取自集合 {black1、black0、white}，并在并行轮次中更新状态。 u 的初始状态 $c_0(u)$ 是任意的；在每一轮 $t \geq 1$ 中，u 的状态按如下方式更新。

令 NC $_t(u) = \{c_{t-1}(v)$: 如果 $v \in N(u)\}$为黑色1或 $c_{t-1}(u) =$ 黑色0，且 NC $\big(c_{t-1}(u) =$ 黑色 $_t$为或 $u(\not\ni) 1\big)$ 白色，且 NC $\big(c_{t-1}(u) =$ 白色 $_t$，则令 $u(= \{)$ 从黑色1、黑色$\}\big)$ 中均匀随机选择一个状态；否则，如果 $c_t(u)$ {为黑色0，则将 0}$(\ c_{t-1})\ u$设为白色；否则将 $=(\ c_t)u(\ =)$设为

在三状态 MIS 过程中，当一个顶点 u 的状态为黑色1或黑色0时，我们称其为黑色。随后，稳定顶点和稳定化时间的定义与之前相同。注意，稳定黑色顶点的状态会在黑色1和黑色0两种状态之间永久交替。

本文聚焦于二状态 MIS 过程，但我们预计，我们的所有上界结果都应当适用于三状态 MIS 过程。

2.1 二状态 MIS 过程的基本性质

我们展示二状态 MIS 过程的一些基本性质。在分析中，假设在每一轮 $t \geq 1$ 开始时，我们为每个顶点 u 掷一枚独立硬币 $\phi_t(u)$，使得 $\mathbb{P}[\phi_t(u)$ 为黑色， $= (] = \mathbb{P}[\phi_t)$ 为白色。然后，如果 u 在该轮必须将其状态更新为随机状态，即如果 $u \in A_{t-1}$，我们设 $c_t(u) = = \phi_t(u)$；而如果 $u \notin A_{t-1}$，则算法不会使用 $\phi_t(u)$。

以下引理适用于任意图 $G = (V, E)$，概率陈述假设我们知道第 t 轮结束时顶点的状态（即给定 B_t 或 W_t ）。第一个引理

指出，一个具有 k 个活跃邻居的活跃顶点 u，在接下来的 $O(\log k)$ 轮次内变为稳定黑色的概率为 $\Omega(1/k)$。

引理 6. 如果 $u \in A_t$ 和 $|N(u) \cap A_t| = k \geq 1$，那么 $u \in I_{t+\log(k+1)}$ 的概率至少为 $(2ek)^{-1}$。

证明。令 $r = \lceil \log(k+1) \rceil$。$u \in I_{t+r}$ 的概率下界为以下概率：$\phi_{t+1}(v) = \cdots = \phi_{t+r}(v) =$ 对 $v = u$ 成立，且对任何 $v \in N(u) \cap A_t$ 均不成立；该概率为

$$(1/2)^r \cdot (1-(1/2)^r)^k \geq (1/2)^r \cdot e^{-k/(2^r-1)} \geq (1/2k) \cdot (1/e). \tag{1}$$

对于第一个不等式，我们用到了这样一个事实：$(1-1/n)^{n-1} \geq e^{-1}$；对于第二个不等式，我们用到了 $\log(k+1) \leq r \leq \log(k) + 1$。 □

下面的结论是引理 6 向多个活跃顶点的推广 $u_1, \ldots, u_\ell$。我们将把这个结果应用于顶点 u 的活跃邻居集合，以给出 u 在经过对数数量的轮次后稳定的概率下界（因为一个邻居会变成稳定黑色）。证明见 附录 A.1。

引理 7. 假设对每个 $1 \leq i \leq \ell$，u_1、……、$u_\ell \in A_t$，且 $|N(u_i) \cap A_t| = k_i > 0$。那么，$\{u_1, \ldots, u_\ell\} \cap I_{t+\log(\max_i k_i + 1)} \neq \emptyset$ 的概率至少为 $(1/5) \cdot \min\left\{1, \sum_i (2k_i)^{-1}\right\}$。

3 二状态 MIS 过程的几个简单界

我们给出二状态 MIS 过程在若干图族上的稳定时间的一些简单界，具体包括完全图和树（或更一般地，有界树深度的图）。我们还给出了一般图上关于最大度的一个基本上界。

定理 8. 完全图 $K_n = (V, E)$ 上二状态 MIS 过程的稳定时间，期望为 $O(\log n)$，且以高概率为 $O(\log^2 n)$。更具体地说，对任意 $k > 0$，稳定时间至少为 $k \cdot \log n$，其发生概率为 $2^{-\Theta(k)}$。

证明。我们称轮次 t 为关键轮次，如果 $|B_t| \leq 1$；如果 $|B_t| = 1$，则称其为稳定。设 p_a 为已知 $|A_t| = a \geq 2$ 时下一关键轮次稳定的概率。注意，在图 K_n 中，若 $|B_t| > 1$，则 $A_t = B_t$；若 $|B_t| = 1$，则 $A_t = \emptyset$；若 $B_t = \emptyset$，则 $A_t = V$；因此 $|A_t| \neq 1$。我们论证，对于任意 $a \geq 2$，

$$2/3 \leq p_a \leq 17/21.$$

下界由以下观察得出：对于任意 $i \geq 2$ 和 $j \geq 1$，已知轮次 j 为关键轮次且 $|A_{j-1}| = i$ 时，该轮次稳定的条件概率为 $\binom{i}{1}2^{-i}\binom{i}{1}2^{-i+2^{-i}} = \frac{i}{i+1} \geq 2/3$，因为 $i \geq 2$。对于上界，我们观察到，对于任意 $i \geq 3$ 和 $j \geq 1$，已知 $|B_j| \leq 2$ 且 $|A_{j-1}| = i$ 时，$|B_j| \in \{2, 0\}$ 的条件概率为 $\binom{i}{2}2^{-i+2^{-i}}\binom{i}{2}2^{-i+2^{-i}} = \frac{i^2-i+2}{i^2+i+2} \geq 4/7$。此外，$p_2 = 2/3 < 17/21$。于是，对于任意 $a \geq 3$，有 $1 - p_a \geq (4/7) \cdot (1-p_2)$，这意味着 $p_a \leq 17/21$。

接下来，考虑从某个非稳定关键轮次（此时所有节点均为白色）到下一个关键轮次之间的轮次数 r。$r > k$ 的概率下界和上界分别为

$$1 - e^{-n2^{-k}} \leq 1 - (1-2^{-k})^n \leq n2^{-k}.$$

综合上述结果可得：(i) 从任意给定的非稳定轮次出发，在至多 $k = \log n + 1$ 轮次内到达稳定轮次的概率至少为 $2/3 - n2^{-k} \geq 1/6$；(ii) 从任意给定的非稳定关键轮次出发，下一个关键轮次为非稳定轮次且在超过 $k = \log\ n - 2$ 轮次后才到达的概率至少为 $1 - 17/24 - e^{-n2^{-k}} > 1/6$；(iii) 假设轮次 $t = 0$ 不是关键轮次，则第一个关键轮次为非稳定轮次的概率至少为$1 - 17/24$。这些结论共同表明，稳定时间至少为 $k \log n$ 的概率为 $2^{-\Theta(k)}$。由此可得期望界和高概率界。

□

备注9：根据定理 8，立即可知，二状态 MIS 过程的期望稳定时间为 $\Theta(\log^2 n)$，其中图 G 是不相交并$\sqrt{n}$ 团 $K_{\sqrt{n}}$。以高概率也成立同样的上界。

备注10：对定理 8进行类似的分析可得，$O(\log n)$是三状态MIS 过程在 K_n上的稳定时间上界，且无论从期望意义上还是以高概率均成立。原因在于，一旦 $B_t \neq \emptyset$，那么 $B_{t'} \neq \emptyset$ 对于所有 $t' \geq t$（因此下一个关键轮次是稳定的）。

定理 11。任意有界森林度图 $G = (V, E)$ 上二状态 MIS 过程的稳定时间为 $O(\log n)$，以高概率成立（例如，G 是树）。

证明。回顾可知，图 λ 的森林度是将其边划分为若干森林所需的最小数量，并且与任意子图中的最大平均度相差至多一个 2 的因子 [26]。设 G 的任意子图的平均度至多为 $d \leq 2\lambda$。令 S_t 为V_t 中由所有满足 $u \in V_t$ 且 $|N(u) \cap V_t| \leq d$的顶点组成的子集。则 $|S_t| \geq |V_t|/(d+1)$。如果 $u \in S_t \setminus A_t$且 $|N(u) \cap V_t| = d_u$，则 $N(u) \subseteq W_{t+1}$的概率为 $2^{-d_u} \geq 2^{-d}$。因此，对于每个 $u \in S_t$，$u \in A_t \cup A_{t+1}$ 的概率至少为 2^{-d}。而如果 $u \in A_t \cup A_{t+1}$，引理 6 表明 $u \in I_{t+\log(d+1)+1}$ 以至少 $(2ed)^{-1}$的概率成立。由此可得

$$\mathbb{E}\left[|V_{t+\log(d+1)+1}| \;\middle|\; |V_t|\right] \leq |V_t| - (2ed)^{-1} \cdot 2^{-d} \cdot |V_t|/(d-1) \leq (1-\epsilon) \cdot |V_t|,$$

对于某个常数 $\epsilon = \epsilon(d)$。令 $r = \log(d+1) + 1$。对上述不等式反复应用，我们得到 $\mathbb{E}[|V_{rt}|] \leq (1-\epsilon)^r n \leq e^{-\epsilon r} n$。因此，当 $t = 3\epsilon^{-1} \ln n$ 时，$\mathbb{E}[|V_{rt}|] \leq n^{-2}$，由马尔可夫不等式可得 $\mathbb{P}[|V_{rt}| \geq 1] \leq n^{-2}$，这就证明了该引理。 □

定理 12. 在任意最大度为 Δ 的图 $G = (V, E)$ 上，二状态 MIS 过程的稳定时间以高概率至多为 $O(\Delta \log\ n)$。

证明。我们注意到，如果 $u \in V_t$，那么 $N^+(u) \cap A_t \neq \emptyset$。令 $u \in V_0$，并令 (v_1, t_1)、(v_2, t_2)、(v_3, t_3).....为如下定义的顶点-轮次对随机序列：令 $t_0 = 0$。对于每个 $i \geq 1$，若$u \in V_{t_{i-1}}$，则 v_i是集合 $N(u) \cap A_{t_{i-1}}$ 中任意一个顶点，且 $t_i = \min\{j > t_{i-1} : v_i \notin A_j\}$；若 $u \notin V_{t_{i-1}}$，则 $(v_i, t_i) = (u, t_{i-1})$。

我们关注上述序列的前 $r = 6e\Delta \log\ n$ 个元素。我们对 $u \in V_{t_r}$ 的概率进行上界估计。对于每个 $1 \leq i \leq r$，在给定 $v_i \in I_{t_{i+1}}$（因此 $u \notin V_{t_{i+1}}$）以及 v_i 和 B_{t_i}的条件下，$v_i \in I_{t_{i+1}}$（因此 $u \notin V_{t_{i+1}}$）的条件概率至少为 $1/(2e\Delta)$，由 引理 6 可得。因此

$$\mathbb{P}[u \in V_{t_r}] \leq (1 - 1/(2e\Delta))^r \leq e^{-r/(2e\Delta)} = n^{-3}.$$

接下来，我们对 t_r 的值进行上界估计。对于每个 $1 \leq i \leq r$ 和 $t \geq t_{i-1}$，如果 $v_i \in A_t$，那么在给定 (v_i, t_i) 和 B_t 的条件下，$v_i \notin A_{t+1}$的条件概率恰好为 $1/2$（在所有情况下）。因此，$t_r > 4r$ 的概率上界为：由 $4r$ 次公平抛硬币组成的序列中，正面少于 r 次的概率。于是，根据切尔诺夫界，

$$\mathbb{P}[t_r > 4r] \leq e^{-(1/2)^2 2r/2} = e^{-e\Delta \log n} < n^{-3}.$$

结合上述结果，我们得到 $\mathbb{P}[u \notin V_{4r}] \geq \mathbb{P}[\{u \notin V_{t_r}\} \cap \{t_r \leq 4r\}] \geq 1 - 2n^{-3}$.（回想一下，$r = 6e\Delta \log\ n$。）最后，对所有 $u \in V$应用并集界，完成证明。 □

4 随机图上的二状态 MIS 过程

我们首先展示二状态 MIS 过程的一些额外性质，这些性质对任意图都成立，但只有在相邻顶点的公共邻居不多时才有用。接着，我们展示 $G_{n,\ p}$ 随机图的一些结构性质。最后，我们利用这些性质，证明二状态 MIS 过程在 $G_{n,\ p}$ 随机图上的稳定时间上界为 $\mathrm{poly}(\log n)$。

4.1 二状态 MIS 过程的改进性质

如果一个顶点 k处于活跃状态，且其活跃邻居不超过 k 个，我们称其为 k-活跃顶点。引 t

$$A_t^k = \{u \in A_t \colon |N(u) \cap A_t| \le k\}$$

设 k为第 t 轮结束时的 引理 6表明， k-活跃顶点在接下来的 $1/k$ 轮（log O) k 内成为稳定黑色的概率至少为 $\Omega(k)$。因此，希望 k 取较小值时能有更多的活跃顶点。

本节将给出下界，估计给定顶点 u 在接下来的 r 轮中的某个时刻变为 k-活跃的概率，并将其表示为如下概率的函数：在这 r 轮中的某个特定子区间内，顶点 u 处于活跃状态（但其活跃邻居可能多于 k 个）的概率。

接下来的关键引理是本节其他所有结果的基础。它给出了一个非活跃且非稳定的白色顶点 u 在单轮之后变为 k-活跃的概率 q 的下界。该下界用两轮之后 u 处于活跃白色状态的概率 p 表示。 k 的值取决于 u 的活跃邻居数量，更关键的是，还取决于这些邻居与 u 的公共邻居数量。

引理 13. 假设 $u \in V_t \setminus A_t$[8]，并令 $\theta = |N(u) \cap N^+(A_t \cap N(u))|$ 表示在第 t 轮结束时， u 的邻居中处于活跃状态或与 u 的某个活跃邻居相邻的顶点数量。令 p 为 $u \in A_{t+2} \cap W_{t+2}$ 的概率， q 为 $u \in A_{t+1}^k$ 的概率，其中 $k = \theta + \lceil \log(1/p) \rceil$。那么 $q \ge p^\alpha$，其中 $\alpha = 1/\log(4/3) \le 2.41$。

证明. 令 $D = N(u) \cap A_t$。在第 $t+1$ 轮中，每个 $v \in D$ 都将其状态更新为一个随机状态，而每个 $v \in N(u) \setminus D$ 保持白色。令 $Z = N(u) \cap A_{t+1} \setminus N^+(D)$ 表示在第 $t+1$ 轮结束时，距离集合 D 至少为两的 u 的活跃邻居集合。显然， Z 不取决于顶点 $v \in D$ 在第 $t+1$ 轮中的随机选择。

我们有， $u \in A_{t+1}$ 当且仅当所有 $v \in D$ 在第 $t+1$ 轮将其状态更新为白色，即，$\phi_{t+1}(v)$ =白色。[9]此外， $|N(u) \cap A_{t+1}| \le |N(u) \cap N^+(D)| + |Z| = \theta + |Z|$。由此可得

$$q \ge (1/2)^d \cdot \mathbb{P}[|Z| \le \lambda],$$

其中 $d = |D|$ 且 $\lambda = \lceil \log(1/p) \rceil$。

我们有， $u \in A_{t+2} \cap W_{t+2}$ 仅当 $\phi_{t+1}(v)$ 或 $\phi_{t+2}(v)$ 对每个 $v \in D$ 都为白色，且$\phi_{t+2}(v)$ 对每个 $v \in Z$ 都为白色。由此可得

$$p \le (3/4)^d \cdot \sum_{i \ge 0} \mathbb{P}[|Z| = i]/2^i. \tag{2}$$

令 $\varepsilon = \mathbb{P}[|Z| \le \lambda]$。则

$$p \le (3/4)^d \cdot \left(\varepsilon + (1-\varepsilon)/2^{\lambda+1}\right) \le (3/4)^d \cdot (\varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot p/2)\,.$$

[8]注意， $u \in V_t \setminus A_t$ 意味着 $u \in W_t \cap W_{t+1}$。 [9]回顾关于抛硬币的讨论 $\phi_t(v)$，见第 2.1 节。

这意味着 $p \le \varepsilon + (1-\varepsilon)\cdot p/2$，因此 $p \le 2\varepsilon/(1+\varepsilon)$，代入上式可得

$$p \le (3/4)^d \cdot (\varepsilon + (1-\varepsilon)\cdot \varepsilon/(1+\varepsilon)) = (3/4)^d \cdot \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

最后，由于 $(3/4)^{d\alpha} = (1/2)^d$，且对于所有 $x \in [0,1]$，$\left(\frac{2x}{1+x}\right)^\alpha \le \left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 = x \cdot \frac{4x}{1+x} \le x$，

$$p^\alpha \le (3/4)^{d\alpha} \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^\alpha \le (1/2)^d \cdot \varepsilon \le q. \qquad \square$$

接下来，我们使用上述 引理 13 证明在一系列 r 轮次中类似的结果。对于任意顶点 $u \in V$和 $i \ge 1$，令

$$\theta_u(i) = \max\{|N(u) \cap N^+(S)| \colon S \subseteq N(u),\ |S| \le i\}. \tag{3}$$

引理 14。假设 $u \in V_t \setminus A_t$，并令 $d = |N(u) \cap A_t|$。令 p_r 为$u \in A_{t+1} \cup \cdots \cup A_{t+r}$的概率，并令 q_r为 $u \in A^k_{t+1} \cup \cdots \cup A^k_{t+r-1}$的概率，其中

$$k = \theta_u\left(\alpha \log\left(\frac{4r}{p_r - 2^{-d}}\right)\right) + \left\lceil \log\left(\frac{4r}{p_r - 2^{-d}}\right)\right\rceil,$$

且 $\alpha = 1/\log(4/3)$。那么，对于任意 $r \ge 2$, $q_r \ge r^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{p_r - 2^{-d}}{2}\right)^\alpha$。

证明。对于 $i \ge 0$，令 $d_i = |N(u) \cap A_{t+i}|$，并定义以下事件： $\mathcal{W}_i$ 表示$u \in W_{t+i}$这一事件； $\mathcal{A}_i$ 表示 $u \in A_{t+i}$这一事件； $\mathcal{A}^k_i$表示 $u \in A^k_{t+i}$这一事件；以及 $\mathcal{H}_i = \bar{\mathcal{A}}_0 \cap \bar{\mathcal{A}}_1 \cap \cdots \cap \bar{\mathcal{A}}_i$。另令 $\mathcal{X}_i$ 表示这样一个事件：第 $t+i$ 轮结束时，顶点的状态满足 $\mathcal{A}_{i+2} \cap W_{i+2}$ 的条件概率至少为 $\frac{p_r - p_1}{4r}$。令 $r \ge 2$和 $\lambda = \lfloor \alpha \log\left(\frac{4r}{p_r - p_1}\right)\rfloor$。于是

$$\begin{aligned}
p_r &= \sum_{1 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{H}_{i-1}] \\
&= p_1 + \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{H}_{i-1}] \\
&= p_1 + \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{H}_{i-1}] \quad (\text{since } \mathcal{A}_i \cap \mathcal{H}_{i-1} \text{ implies } \mathcal{W}_i) \\
&\le p_1 + \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{H}_{i-2}] \quad (\text{since } \mathcal{H}_{i-1} \text{ implies } \mathcal{H}_{i-2}) \\
&\le p_1 + \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2} \le \lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}] \\
&\quad + \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2} > \lambda\}] + \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \bar{\mathcal{X}}_{i-2}].
\end{aligned}$$

上面的最后两个求和各自至多为 $\frac{p_r - p_1}{4}$，因为对于每个非零的求和项，都有

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2} > \lambda\}] \le \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \mid \mathcal{H}_{i-2},\ d_{i-2} > \lambda] \le \left(\frac{3}{4}\right)^{\lambda+1} \le \frac{p_r - p_1}{4r},$$

与(2)类似，$\bar{\mathcal{X}}_{i-2}$和 $\mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{X}_{i-2}] \le \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \mid \mathcal{X}_{i-2}] \le \frac{p_r - p_1}{4r}$. 应用上述结果可得 s

$$\begin{aligned}
\frac{p_r - p_1}{2} &\le \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \cap \mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2} \le \lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}] \\
&= \sum_{2 \le i \le r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \mid \mathcal{H}_{i-2},\ d_{i-2} \le \lambda,\ \mathcal{X}_{i-2}] \cdot \mathbb{P}[\mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2} \le \lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}].
\end{aligned}$$

接下来我们给出 q_r 的下界。我们有

$$\begin{aligned} q_r &\geq \sum_{1\leq i\leq r-1} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i^k \cap \mathcal{H}_{i-1}] \\ &= \sum_{2\leq i\leq r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_{i-1}^k \cap \mathcal{H}_{i-2}] \\ &\geq \sum_{2\leq i\leq r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_{i-1}^k \cap \mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2}\leq\lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}] \\ &= \sum_{2\leq i\leq r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_{i-1}^k \mid \mathcal{H}_{i-2},\, d_{i-2}\leq\lambda,\, \mathcal{X}_{i-2}] \cdot \mathbb{P}[\mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2}\leq\lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}]. \end{aligned}$$

由引理 13，应用于第 $t+i-2$ 轮，利用 $p \geq \frac{p_r-p_1}{4}$和 $\theta \leq \theta_u(\lambda)$，并注意到 $p_1 = 2^{-d}$，我们得到

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}_{i-1}^k \mid \mathcal{H}_{i-2},\, d_{i-2}\leq\lambda, \mathcal{X}_{i-2}] \geq (\mathbb{P}[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{W}_i \mid \mathcal{H}_{i-2},\, d_{i-2}\leq\lambda, \mathcal{X}_{i-2}])^{\alpha}.$$

将其代入上面的前一个等式，然后利用詹森不等式完成证明：设
$\nu = \sum_{2\leq i\leq r} \mathbb{P}[\mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2}\leq\lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}] \leq r$。

$$\begin{aligned} q_r &\geq \sum_{2\leq i\leq r} \Big(\mathbb{P}[\mathcal{A}_i^k \mid \mathcal{H}_{i-2},\, d_{i-2}\leq\lambda,\ \ \mathcal{X}_{i-2}]\Big)^{\alpha} \cdot \mathbb{P}[\mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2}\leq\lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}] \\ &\geq \nu \cdot \left(\sum_{2\leq i\leq r} \mathbb{P}[\mathcal{A}_i^k \mid \mathcal{H}_{i-2},\, d_{i-2}\leq\lambda,\, \mathcal{X}_{i-2}] \cdot \mathbb{P}[\mathcal{H}_{i-2} \cap \{d_{i-2}\leq\lambda\} \cap \mathcal{X}_{i-2}]/\nu\right)^{\alpha} \\ &\geq \nu \cdot \left(\frac{p_r-p_1}{2\nu}\right)^{\alpha} \geq r \cdot \left(\frac{p_r-2^{-d}}{2r}\right)^{\alpha}. \end{aligned}$$

□

引理 14 假设顶点 u 最初不活跃。下一个引理针对 u 最初活跃的情况给出了类似结果。在这种情况下，我们不使用概率 p_r（即 u 在区间 $\{t+1,\ldots,t+r\}$内某个时刻变为活跃的概率），而使用概率 b_r（即 u在子区间 $\{t+\ell,\ldots,t+r\}$内某个时刻变为黑色的概率）。证明通过考察 t 之后的第一轮展开，此时 u 的黑色邻居不超过 k，或者 u 为白色。如果满足第一个条件，那么u 为黑色的概率是 $1/2$，因此其为 k-活跃的概率也是如此。如果只满足第二个条件，那么我们就处于引理 14所述的情形。证明见附录A.2。

引理 15. 假设 $u \in A_t$。令 $\ell \geq 2$ 和 $r \geq \ell+2$，令 b_r 为 $u \in B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}$ 的概率，并假设 $b_r \geq 1/2^{\ell-2}$。令 q_r 为 $u \in A_t^k \cup \cdots \cup A_{t+r-1}^k$ 的概率，其中

$$k = \theta_u\big(\alpha \log(32r/b_r)\big) + \log(32r/b_r) + \log(1/b_r) + 3.$$

则 $q_r \geq r^{1-\alpha} \cdot (b_r/16)^{\alpha}$，其中 $\alpha = 1/\log(4/3)$。

在本节的最后一个引理中，我们考虑这样一种情况：引理 14 未能为 q_r 给出足够大的下界，尽管 p_r 很大，因为差值 $p_r - 2^{-d}$ 很小。我们基本上通过将这种情况归约为 引理 15 的情况来处理，只需经过一轮。证明见 附录A.3。

引理 16. 假设 $u \in V_t \setminus A_t$，并令 $d = |N(u) \cap A_t|$。令 $\ell \geq 5$ 和 $r \geq \ell+2$，令 p_r 为 $u \in A_{t+1} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}$的概率，令 b_r为 $u \in B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}$的概率，并且

假设 $b_r \geq 1/2^{\ell-4}$ 和 $b_r \geq 2(p_r - 2^{-d})$。令 q_r 为 $u \in A_t^k \cup \cdots \cup A_{t+r-1}^k$ 的概率，其中

$$k = \theta_u\big(\alpha \log\left(128r/b_r\right)\big) + \log\left(128r/b_r\right) + \log(4/b_r) + 3.$$

那么 $q_r \geq r^{1-\alpha} \cdot (b_r/64)^{\alpha}$，其中 $\alpha = 1/\log(4/3)$。

4.2 $G_{n,p}$ 与良图的结构性质

我们将描述图必须具备的一些结构性质，才能使后续各节中的分析得以顺利进行。满足这些性质的图称为良图。然后我们证明，随机 $G_{n,p}$ 图以高概率是良图。

定义 17（良图）。设 n 为正整数，且 $0 < p < 1$。若图 $G = (V, E)$ 有 n 个顶点，并满足以下所有性质，则称其为 (n,p)-良图：

(P1) 对任意集合 $S \subseteq V$，诱导子图 $G[S]$ 的平均度至多为 $\max\{8p|S|, 4\ln n\}$。

(P2) 对任意大小为 $|S| \geq 40\ln(n)/p$ 的集合 $S \subseteq V$，

$$|\{u \in V \setminus S : |N(u) \cap S| < p|S|/2\}| \leq |S|/2.$$

(P3) 对任意三个不相交集合 $S, T, I \subseteq V$，使得 $|S| \geq 2|T|$ 和 $(S \cup T) \cap N(I) = \emptyset$，

$$|N(T) \setminus N^+(S \cup I)| \leq |N(S) \setminus N^+(I)| + 8\ln^2(n)/p.$$

(P4) 对任意两个 d 不相交集合 $S, T \subseteq V$，使得 $|S| \geq |T|$ 和 $|T| \leq \ln(n)/p$, $|E(S,T)| \leq 6|S|\ln n$。

(P5) 任意两个顶点 $u, v \in V$ 的公共邻居数均不超过 $\max\{6np^2, 4\ln n\}$。

(P6) 若 $p \geq 2(\ln(n)/n)^{1/2}$，则 $\mathrm{diam}(G) \leq 2$。

引理 18. 从 G_n 中抽取的随机图 $G = (V, E)$，p 以概率 $1 - O(n^{-2})$ 是 (n,p)-良好的。

引理 18 的证明可见于附录 A.4。

4.3 $G_{n\,上p}$的二状态 MIS 过程分析

本节将证明关于随机$G_{n\,p}$ 图上二状态 MIS 过程稳定时间的以下界。

定理 19. 从 $G_{n\,p}$中抽取的随机图上，二状态 MIS 过程的稳定时间为 $O(\log^{5.5} n)$，其概率为 $1 - O(n^{-2})$；其中 $p = O(\sqrt{\log(n)/n})$ 或 $p = \Omega(1/\log^{2.5} n)$。

该定理结合引理18 和下一个引理即可得出，后者分析了良图上的二状态 MIS 过程。

引理 20. 对任意 (n,p)-良图 $G = (V, E)$，其上的二状态 MIS 过程的稳定时间为 $O(\log^{5.5} n)$，其概率为 $1 - O(n^{-2})$；其中 $p = O(\sqrt{\log(n)/n})$ 或 $p = \Omega(1/\log^{2.5} n)$。

通过调整稳定时间界中 $\log n$ 的指数，可以很容易地扩展上述结论，使其适用于任意所需的 $\mathrm{poly}(\log n)$ 项，从而得到 $p \leq \mathrm{poly}(\log n) \cdot n^{-1/2}$ or $p \geq 1/\mathrm{poly}(\log n)$。

4.3.1 引理 20 的证明

我们证明，从任意顶点状态向量出发，经过 $\text{poly}(\log n)$ 轮次后，过程会取得足够进展，其中进展以变为稳定的顶点的期望数量来衡量。以下所有引理都假设 $G=(V,E)$ 是任意的 (n,p)-良图，而概率陈述则假设我们知道第 t 轮结束时各顶点的状态。第一个引理考虑活跃顶点数量较大的情形，即 $|A_t|=\Omega(\log(n)/p)$。

引理 21. 若 $|A_t| \geq 80\ln(n)/p$，则存在一个常数 $\epsilon>0$，使得 $\mathbb{E}[|V_{t+\log n}|] \leq (1-\epsilon)\cdot|V_t|$.

证明。根据良图的 (P1) 性质，定义 17 中，诱导子图的平均度 $G[A_t]$ 至多为 $k=$最大值$\{8p|A_t|, 4\ln n\}=8p|A_t|$。

令 S 为 A_t 的一个子集，该子集由$G[A_t]$中度最小的 $|A_t|/2$ 个顶点 $u\in A_t$ 组成，即对于任意两个顶点 $u\in S$和 $u'\in A_t\setminus S$，$|N(u)\cap A_t|\leq|N(u')\cap A_t|$。由此可得，对于所有 $u\in S$，$|N(u)\cap A_t|\leq 2k$；因此 $S\subseteq A_t^{2k}$。令 $R=\{u\in V\setminus S:\ |N(u)\cap S|<p|S|/2\}$。由于$|S|=|A_t|/2\geq 40\ln(n)/p$，定义 17 中的性质 (P2) 推出 $|R|\leq|S|/2$。那么，满足 $|N(u)\cap S|\geq p|S|/2$ 的顶点 $u\in V_t$ 至少有

$$|V_t\setminus(S\cup R)|\geq|V_t|-(|S|+|R|)\geq|V_t|-3|S|/2=|V_t|-3|A_t|/4\geq|V_t|/4.$$

由于这些顶点中的每一个 u 在$S\subseteq A_t^{2k}$中至少有 $p|S|/2$ 个邻居，因此引理 7 给出：在第$t+$ 轮结束时，u 至少有一个邻居是稳定黑色（因此 u 也稳定）的 n 的概率至少为

$$(1/5)\cdot\min\left\{1,\ (p|S|/2)\cdot(4k)^{-1}\right\}=(1/5)\cdot\min\left\{1,\ (p|A_t|/4)\cdot(32p|A_t|)^{-1}\right\}=1/640.$$

那么，顶 点中在第 $t+\log n$ 轮结束时不稳定的顶点的期望数量为

$$\mathbb{E}[|V_{t+\log n}|]\leq|V_t|-(|V_t|/4)\cdot 1/640\leq|V_t|-|V_t|/2560.$$ □

下一个引理考虑不稳定顶点数量较大的情形，即 $|V_t|=\Omega(\ln^2(n)/p)$，且 $|A_t|=O(\ln(n)/p)$。

引理 22. 若 $|V_t|\geq 10\ln^2(n)/p$ 且 $|A_t|\leq 80\ln(n)/p$，则存在一个常数 $\epsilon>0$，使得 $\mathbb{E}[|V_{t+\log n}|]\leq(1-\epsilon/\ln n)\cdot|V_t|$.

证明。由 m 性质(P1) 在 定义 17中，图 $G[A_t]$ 的平均度至多为

$$k=\max\{8p|A_t|,\ 4\ln n\}\leq 640\ln n.$$

令 S 为 A_t 的一个子集，由 $G[A_t]$中度最小的 $2|A_t|/3$ 个顶点 $u\in A_t$ 构成，并令 $T=A_t\setminus S$。那么对于所有 $u\in S$，$|N(u)\cap A_t|\leq 3k$；因此 $S\subseteq A_t^{3k}$。

集合 V_t 由以下两部分组成：(i) 所有活跃顶点 $u\in A_t=S\cup T$；(ii) 不在 $N^+(I_t)$ 中的所有非活跃顶点（这些顶点为白色，且至少有一个活跃邻居）。因此，我们可以将 V_t 划分为四个互不相同的集合：S、$N(S)\setminus N(I_t)$、$T\setminus N(S)$ 以及 $N(T)\setminus N^+(S\cup I_t)$。对于这些集合的大小，我们有 $|T\setminus N(S)|\leq|T|<|S|$，并且根据定义 17 中的性质 (P3)，

$$|N(T)\setminus N^+(S\cup I_t)|\leq|N(S)\setminus N(I_t)|+8\ln^2(n)/p.$$

利用这两个不等式、上述四个集合的大小之和为 $|V_t|$这一事实，以及假设 $|V_t|\geq 10\ln^2(n)/p$，可得

$$|S|+|N(S)\setminus N(I_t)|\geq(|V_t|-8\ln^2(n)/p)/2\geq|V_t|/10.$$

因此，至少有 $|V_t|/10$ 个顶点 $u \in V_t$ 位于 S 中，或与来自 S 的某个顶点相邻。根据 引理 6，每个 $u \in S \subseteq A_t^{3k}$在第 $t+\log n$ 轮结束时为稳定黑色（且其所有邻居均为稳定白色）的概率至少为 $1/(6ek)$。由此可得

$$\mathbb{E}[|V_{t+\log n}|] \le |V_t| - (|V_t|/10)\cdot 1/(6ek) \le |V_t| - |V_t|/(1.1\cdot 10^5 \ln n). \qquad \square$$

在下一个引理中，我们分析剩下的情形，其中 $|V_t| = O(\ln^2(n)/p)$ 且 $|A_t| = O(\ln(n)/p)$。事实上，该引理不要求对 $|A_t|$ 给出界限。不过，与前面的引理不同，它要求 $p = O(\sqrt{\log(n)/n})$。

引理 23. 若 $|V_t| \le 10\ln^2(n)/p$ 且 $p \le c\sqrt{\log(n)/n}$，其中 $c > 0$ 为某个常数，则存在常数 $\epsilon = \epsilon(c) > 0$，使得 $\mathbb{E}[|V_{t+2\log n}|] \le \left(1 - \epsilon/\ln^{3.5} n\right)\cdot |V_t|$.[10]

证明。 根据(P1) 中的定义 17，图 $G[V_t]$ 的平均度至多为

$$k = \max\{8p|V_t|,\, 4\ln n\} \le 80\ln^2 n.$$

令 T 为 V_t 的一个子集，该子集由 $G[V_t]$ 中度最大的 $\min\{\ln(n)/p,\, |V_t|/2\}$ 个顶点 $u \in V_t$ 组成，并令 $S = V_t \setminus T$。则 $|S| \ge |T|$，且对于所有 $u \in S$，$|N(u) \cap V_t|$ 至多为

$$d = k|V_t|/|T| \le k\cdot \max\{p|V_t|/\ln n,\, 2\} \le 800\ln^3 n.$$

根据 (P4) 和 定义 17，S 与 T 之间的边数为 $|E(S,\, T)| \le 6|S|\ln n$。令 $R = \{u \in S:\ |N(u) \cap T| \le 12\ln n\}$。则 $|R| \ge |S|/2 \ge |V_t|/4$。我们将证明存在某个常数$\epsilon' = \epsilon'(c)$，使得

$$\mathbb{P}[u \notin V_{t+2\log n}] \ge \epsilon' \ln^{-\alpha-1} n\cdot(\ln\ln n)^{-\alpha},\quad \text{for all } u \in R. \tag{4}$$

由此可得 $\mathbb{E}[|V_{t+2\log n}|] \le |V_t| - (|V_t|/4)\cdot\epsilon'\ln^{-\alpha-1} n\cdot(\ln\ln n)^{-\alpha}$. 由于 $\alpha = 1/\log(4/3) \le 2.41$，上述结果蕴含该引理。为了完成证明，还需证明 (4)。

令 $u \in R$。我们将 u 在 $G[V_t]$ 中的邻居划分为集合 $N(u) \cap S$和 $N(u) \cap T$，并令

$$x = \mathbb{P}[N(u) \cap S \cap A \ne \emptyset] \quad \text{and} \quad y = \mathbb{P}[N(u) \cap T \cap B \ne \emptyset],$$

其中 $A = A_t \cup \cdots \cup A_{t+r-2}$、$B = B_{t+r-2} \cup B_{t+r-1} \cup B_{t+r}$ 和 $r = \log(48\ln n) + 6$。我们区分以下三种情况：$x + y \le 1/2$、$x \ge 1/4$ 和 $y \ge 1/4$。

情况 $x + y \le 1/2$：以至少 $1 - (x + y) \ge 1/2$ 的概率，我们有 $N(u) \cap S \cap A = \emptyset$和 $N(u) \cap T \cap B = \emptyset$。若 $N(u) \cap S \cap A = \emptyset$，则 $N(u) \cap S \subseteq W_{t+r-2}$（容易看出，$N(u) \cap S \cap I_{t+r-2} = \emptyset$）。类似地，若 $N(u) \cap T \cap B = \emptyset$，则显然有 $N(u) \cap T \subseteq W_{t+r-2}$。因此，以至少 $1/2$ 的概率，我们有 $N(u) \subseteq W_{t+r-2}$。若 $N(u) \subseteq W_{t+r-2}$，则要么 $u \in A_{t+r-2} \cap W_{t-r-2}$，要么 $u \in I_{t+r-2}$。因此，以至少 $1/2$ 的概率，要么 $u \notin V_{t+r-2}$，要么 $u \in A_{t+r-2}$。若 $u \in A_{t+r-2}$，则 $u \in A^d_{t+r-2}$，因为 $|N(u) \cap V_t| \le d$；根据引理 6，$u \in I_{t+r-2+\log n}$ 的概率至少为 $(2ed)^{-1}$。结合最后两条陈述可得，$u \notin V_{t+r-2+\log n}$ 的概率至少为 $(1/2)\cdot(2ed)^{-1} \ge (8700\ln^3 n)^{-1}$，由此推出（4）。

情形 $x \ge 1/4$：以至少 $1/4$ 的概率，存在一对 v, j，使得 $v \in N(u) \cap S, 0 \le j \le r-2$，且 $v \in A_{t+j}$。并且，如果 $v \in A_{t+j}$，那么 $v \in A^d_{t+j}$，因为 $|N(v) \cap V_t| \le d$；根据引理 6，$v \in I_{t+j+\log n}$ 的概率至少为 $(2ed)^{-1}$。因此，$u \in N^+(I_{t+r-2+\log n})$ 的概率至少为 $(1/4)\cdot(2ed)^{-1} \ge (17400\ln^3 n)^{-1}$，这就推出了 (4)。

情形 $y \ge 1/4$：存在某个 $v^* \in N(u) \cap T$使得

$$\mathbb{P}[v^* \in B] \ge y/|N(u) \cap T| \ge (4\cdot 12\ln n)^{-1} = (48\ln n)^{-1}.$$

[10]如果 c 是超常数，那么证明给出 $\mathbb{E}[|V_{t+2\log n}|] \le \left(1 - \epsilon/(c^2\ln^{3.5} n)\right)\cdot|V_t|$。

若 $v^* \in A_t$，则我们可以应用 引理 15，对于 $\ell = r-2 \geq \log(48\ln n)+2$ 和 $b_r \geq (48\ln n)^{-1}$，得到 $v^* \in A_t^{\lambda} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}^{\lambda}$ 的概率至少为 $q = r^{1-\alpha}\cdot(16\cdot 48\ln n)^{-\alpha}$，其中

$$\lambda = \theta_{v^*}\big(\alpha \log(32r\cdot 48\ln n)\big) + \log(32r\cdot 48\ln n) + \log(48\ln n) + 3.$$

现在假设 $v^* \in V_t \setminus A_t$，并令

$$p^* = \mathbb{P}[v^* \in A_{t+1} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}] - 2^{-|N(v^*)\cap A_t|}.$$

若 $p^* \geq \mathbb{P}[v^* \in B]/2 \geq (96\ln n)^{-1}$，则可以应用 引理 14 (用 $r-1$ 代替 r)，从而得到 $v^* \in A_t^{\lambda'} \cup \cdots \cup A_{t+r-2}^{\lambda'}$，其概率至少为 $q' = r^{1-\alpha}\cdot(p^*/2)^{\alpha} \geq r^{1-\alpha}\cdot(192\ln n)^{-\alpha}$，其中

$$\lambda' = \theta_{v^*}\big(\alpha \log(4r\cdot 96\ln n)\big) + \log(4r\cdot 96\ln n).$$

若 $p^* < \mathbb{P}[v^* \in B]/2$，则可以对 引理 16应用 $\ell = r-2 \geq \log(48\ln n)+4$ 和 $b_r = \mathbb{P}[v^* \in B] \geq (48\ln n)^{-1}$，从而得到 $v^* \in A_t^{\lambda''} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}^{\lambda''}$，其概率至少为$q'' = r^{1-\alpha}\cdot(64\cdot 48\ln n)^{-\alpha}$，其中

$$\lambda'' = \theta_{v^*}\big(\alpha \log(128r\cdot 48\ln n)\big) + \log(128r\cdot 48\ln n) + \log(4\cdot 48\ln n) + 3.$$

在以上所有设置中，对于某些常数 $\varepsilon, \beta > 0$，我们有 $q, q', q'' \geq \varepsilon \ln^{-\alpha} n \cdot (\ln\ln n)^{1-\alpha}$ 以及 $\lambda, \lambda', \lambda'' \leq \beta \ln n \cdot \ln\ln n$；其中，关于 $\lambda, \lambda', \lambda''$ 的界成立，是因为性质 (P5) 和假设$p \leq c\sqrt{\log(n)/n}$ 蕴含：对于任意 $v \in V$, $\theta_v(i) \leq i\cdot(6c^2+4)\log n$ （回忆一下 (3) 中 θ_v的定义）。因此，在 $\{t, \ldots, t+r-1\}$ 中的某一轮结束时， v^* 为 $(\beta\cdot\ln n\cdot\ln\ln n)$-活跃状态的概率至少为 $\varepsilon\cdot\ln^{-\alpha} n\cdot(\ln\ln n)^{1-\alpha}$；根据引理 6，$v^* \in I_{t+r-1+\log n}$ 的概率至少为 $\varepsilon\cdot\ln^{-\alpha} n\cdot(\ln\ln n)^{1-\alpha}\cdot(2e\beta\cdot\ln n\cdot\ln\ln n)^{-1}$。因此，以至少该概率，我们有 $u \notin V_{t+r-1+\log n}$。至此，(4) 的证明完成。 □

整合各部分。首先，假设对于某个常数 $c > 0$， $p \leq c\sqrt{\log(n)/n}$。由引理 21 到23， $\mathbb{E}[|V_{t+2\log n}|] \leq \big(1-\epsilon/\ln^{3.5} n\big)\cdot\mathbb{E}[|V_t|]$，对任意 $t \geq 0$ 均成立。迭代应用此不等式可得，对任意 $i \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|V_{2i\log n}|] \leq \big(1-\epsilon/\ln^{3.5} n\big)^i \cdot n.$$

代入 $i = 3\ln^{4.5} n/\epsilon$ 可得 $\mathbb{E}\left[|V_{(6/\epsilon)\log n\cdot\ln^{4.5} n}|\right] \leq n^{-2}$，再由马尔可夫不等式可知$\mathbb{P}[|V_{(6/\epsilon)\log n\cdot\ln^{4.5} n}| \geq 1] \leq n^{-2}$.

若对于某个常数 $\varepsilon > 0$， $p \geq \varepsilon/\ln^{2.5} n$，则我们如上所述使用引理 21 和引理 22，得到 $\mathbb{P}[|V_t| \geq 10\ln^2(n)/p] \leq n^{-2}$，其中 $t = O(\log^3 n)$。我们还注意到，若 $|V_t| < 10\ln^2(n)/p$，则图 $(V, E(V_t))$ 的最大度为 $\Delta < |V_t| \leq 10\ln^2(n)/p \leq 10\ln^{4.5}(n)/\varepsilon$，而定理 12 给出的界为 $O(\Delta\log n) = O(\log^{5.5} n)$。结合这两者即可完成引理 20 的证明。

备注 24。 通过更仔细的分析，可以消去部分对数因子。例如，使用“流水线”论证，可以改进 $|V_t|$ 由 引理 23得到的 $O(\log n\cdot\ln^{3.5} n)$ 上界，使其从 $O(\log n + \ln^{3.5} n)$ 降至此值，从而节省一个对数因子。

5 对数切换与 3-颜色极大独立集过程 ss

我们提出了二状态 MIS 过程的一种扩展，称为三色 MIS 过程。该过程使用一种额外的颜色——灰色，并包含一个称为对数切换的子过程，该子过程与主过程并行运行。随后，我们分析三色 MIS 过程在 $G_{n,\,p}$ 随机图上的表现。

5.1 对数开关过程

我们首先通过说明其性质来介绍一个抽象的对数开关过程。随后，我们描述一个实际的随机图过程，该过程以高概率并以自稳定方式满足这些性质，并且每个顶点使用 6 个状态。

定义25（对数开关过程）。在 $G=(V,E)$ 上的 (a,b)-对数开关过程会为每个顶点 $u\in V$生成一个二进制序列 $\sigma_0(u)\ \sigma_1(u)\ldots$，其中对于每个 $t\geq 0$，$\sigma_t(u)\in\{\text{on,off}\}$，并且对所有 $u\in V$，以下性质均成立。

(S1) 每个连续的 序列 $\sigma_0(u)\ \sigma_1(u)\ldots$ 中连续 off 值的游程长度至多为 $a\ln n$.

(S2) 如果 $\text{diam}(G)\leq 2$，那么序列 $\sigma_t(u)\ \sigma_{t+1}(u)\ldots$ 中每个连续 off 值的游程长度至少为 $\frac{a}{6}\ln n$，其中 $t=\min\{i\geq\frac{a}{6}\ln n\colon\ \sigma_i(u)=\text{on}\}$。

(S3) 如果 $\text{diam}(G)\leq 2$，那么序列 $\sigma_t(u)\ \sigma_{t+1}(u)\ldots$ 中每个连续 on 值的游程长度至多为 b，其中 t 是一个与 n 无关的常数。

定义 26（随机对数开关）。在 $G=(V,E)$ 上的随机对数开关过程中，每个顶点 $u\in V$都有一个称为层级的状态，其取值属于集合 $\{0,1,\ldots,5\}$。u 的初始层级值 $\text{level}_0(u)$ 可以是任意值；在每一轮 $t\geq 1$ 中，u 的层级按照以下规则更新，该规则使用一个全局参数 $0<\zeta<1$。

如果 $\text{level}_{t-1}(u)=5$，则选择一个随机比特 $b_t(u)$，使得
$\mathbb{P}[b_t(u)=0]=\zeta$结束如果 ($\text{level}_{t-1}(u)=5$且 $b_t(u)=1$)
或 $\text{level}_{t-1}(u)=0$，则设置 $\text{level}_t(u)=5$；否则，设置
$\text{level}_t(u)=\max\{\text{level}_{t-1}(v)\colon\ v\in N^+(u)\}-1$

最后，我们定义如下映射，将层级映射为二进制开/关值（见定义25）。对于每个 $u\in V$和 $t\geq 0$,

$$\sigma_t(u)=\begin{cases}\texttt{on} & \text{if } level_t(u)\leq 2\\ \texttt{off} & \text{if } level_t(u)\geq 3.\end{cases}$$

引理27。对于任意图 $G=(V,\ E)$，参数为$0<\zeta\leq 1/2$ 的随机对数开关过程以概率 $1-O(n^{-2})$ 在前 n轮次中，对 $a=4/\zeta$和 $b=3$满足性质 *(S1)* 至*(S3)*。

证明。令 $u\in V$，并令 $S_v\subseteq V$ 为与 u 的距离至多为 2 的顶点集合。如果 u 在所有轮次 $t,\ldots,t+a\ln n$ 中的层级都至少为 3，那么没有顶点 $v\in S_u$ 会在轮次 $t+2,\ldots,t+a\ln n$ 中处于层级 0；并且至少有一个顶点 $v\in S_u$ 必须在所有轮次 $t+2,\ldots,t+a\ln n-2$ 中处于层级 5。因此，存在某个 $u\in V$ 和 $t\leq n$，使得 u 在所有轮次$t,\ldots,t+a\ln n$ 中的层级都至少为 3 的概率至多为

$$n^2(1-\zeta)^{a\ln n-4}\leq n^{2-a\zeta}/(1-\zeta)^4\leq 16\cdot n^{-2},$$

当 $a\zeta=4$时。因此，性质 (S1) 以至少 $1-O(n^{-2})$ 的概率成立。

接下来，我们假设直径$(G)\leq 2$。其余证明与 [12]中的类似。注意，必定存在一个顶点 v和一轮次$t^*\leq 5$，使得层级$_{t^*}(u)=5$。从轮次t^*+2结束时起，所有顶点都会以这样的方式“同步”：一旦某个顶点在某一轮次达到层级 2，所有顶点都会在该轮次达到层级 2；接着它们都会在下一轮次达到层级 1，然后达到层级 0，再达到 5。因此，从轮次(S3) 开始，性质 $b=3$成立。该性质以概率 1 成立，并且对轮次 $t^*+2\leq 7$之后的所有轮次都成立，而不仅仅是第一个 t^*+2。n

如上所述，顶点同步后，所有 n 顶点每次都会同时从层级 0 移动到层级 5。发生这种情况时，直到层级 5 上不再有顶点所需的轮次数大于 $a\ln n-6$ 的概率至多为

$$n(1-\zeta)^{a\ln n-6}\le 64\cdot n^{-3},$$

与之前一样；并且其小于 $r=\frac{a}{6}\ln n$ 的概率至多为

$$(1-(1-\zeta)^r)^n\le e^{-n(1-\zeta)^r}\le e^{-n4^{-\zeta r}}=e^{-n4^{-(a\zeta/6)\ln n}}\le e^{-n^{0.07}}=O(n^{-3}).$$

结合上述结果，并使用并集界，可得性质 (S2) 成立的概率为$1-O(n^{-2})$。

□

5.2 三色 MIS 过程

我们现在定义三色极大独立集过程，它是二状态极大独立集过程的扩展 .

定义 28（三色极大独立集过程）。该过程由两个在 $G=(V,E)$ 上并行运行的（子）过程组成。第一个是一个 $(a,3)$-对数切换过程，其中 $a=512$ 为每个顶点 $u\in V$ 在每一轮 $t\ge 0$ 生成一个值 $\sigma_t(u)\in$ {开、关} 。第二个是二状态极大独立集过程的一个变体，其中每个顶点 $u\in V$ 都有一个状态 $c_t(u)\in$ {黑色、白色、灰色}， $c_0(u)$ 可以是任意值，并且在每一轮 $t\ge 1$ 中， u 的状态按如下方式更新。

令 $\mathrm{NC}_t(u)=\{c_{t-1}(v):v\in N(u)\}$若 $c_{t-1}(u)=$为黑色且 $\mathrm{NC}_t(u)\ni$为黑色，则令 $c_t(u)$为从 {黑色、灰色}中均匀随机选取的状态；否则若 $c_{t-1}(u)=$为白色且 $\mathrm{NC}_t(u)\not\ni$为黑色，则令 $c_t(u)$为从 {黑色、白色}中均匀随机选取的状态；否则若 $c_{t-1}(u)=$为灰色且 $\sigma_{t-1}(u)=$为开，则将 $c_t(u)=$设为白色；否则将 $c_t(u)=c_{t-1}(u)$设为

与二状态 MIS 过程相比，上述更新规则恰有两处不同：黑色顶点若有黑色邻居，则以概率 1/2变为灰色，而非白色；灰色顶点若其开关值为开，则变为白色。注意，灰色顶点的处理方式与非活跃白色顶点类似。

若一个顶点为黑色且没有黑色邻居，或者该顶点不是黑色且有一个稳定黑色邻居，则称该顶点为稳定。除此之外，其余定义和记号与二状态 MIS 过程相同，即活跃顶点、稳定化时间、 B_t、 W_t、 A_t、 A_t^k、 I_t和V_t。我们还用 $\Gamma_t=V\setminus(B_t\cup W_t)$ 表示第 t 轮结束时灰色顶点的集合。

上述三色 MIS 过程的定义假设使用任意的对数开关过程。我们可以使用定义 26中的随机对数开关，它为每个顶点使用 6 个状态，从而得到一个总共使用 $6\cdot 3=18$ 个状态的三色 MIS 过程。随机开关的概率参数为 $\zeta=4/a=2^7$，因此每个顶点每轮最多需要 7 个随机比特（每个活跃顶点还需额外 1 个）。

注意到引理 6 和7 及其证明可以直接沿用到三色 MIS 过程中，无需修改。我们还将使用下面两个专用于三色 MIS 过程的简单引理。回顾一下， $a=512$ 是对数开关的一个参数。

引理 29. 若 $t\ge a\ln n$ 且 $u\in\Gamma_t$，则 $u\in A_{t-a\ln n}\cup\cdots\cup A_{t-1}$。

证明。 根据 (S1) 中 定义25 关于对数切换的性质，顶点最多连续处于灰色$a\ln n$轮次。此外，如果一个顶点在第 $j>0$ 轮变为灰色，那么在第 $j-1$轮结束时，它必定是活跃黑色。结合这两个事实即可得出该引理。 □

引理 30. 若 $\mathrm{diam}(G) \le 2$, $u \in V$, $t \ge \frac{a}{6}\ln n$，且 $t' = t + \frac{a}{6}\ln n$，则 u 在轮次 t 和 t' 之间处于活跃黑色状态的期望次数为 $\mathbb{E}\left[|\{j\colon u \in B_j \cap V_j\} \cap \{t,\dots,t'\}| \mid B_t, W_t\right] \le 4$.

证明。根据(S2)和(S3)以及定义25中的性质，很容易看出，序列 $c_t(u)\dots,c_{t'}(u)$至多包含两段连续的黑色状态。此外，每段黑色连续段的前缀长度（直到 u 变为稳定黑色或该连续段结束（此时 u 变为灰色））的期望值为 2。因此， u 在期望意义下至多有 4 轮处于非稳定黑色状态。 □

引理 13和14 对于三色 MIS 过程也成立，此时 $u \in V_t \setminus (A_t \cup \Gamma_t)$，因此$u \in W_t$。[11] 下一个简单引理将与引理 14一起使用。

引理 31。设 $t \ge 0$、 $u \in V$ 和 $d > 0$。设 $t' \ge t$ 为以下情况首次发生的轮次： u 为白色且至少有 d 个黑色邻居，或 u 稳定。 $t < j < t'$ 为 u 为黑色且至少有 d 个黑色邻居的轮次，其期望数量至多为 3。

证明。该引理基于以下观察得出：每当 u 的状态从白色变为黑色时，它保持白色的可能性相同；并且当 u 为活跃黑色时，它在下一步以概率 $1/2$ 变为灰色。 □

5.3 $G_{n,\ p}$上的三色 MIS 过程分析

我们证明，对于 $G_{n,\ p}$ 随机图的完整取值范围，三色 MIS 过程的稳定时间为 $\mathrm{poly}(\log n)$。

定理32。从$G_{n,\ p}$ 中抽取的随机图上，三色 MIS 过程的稳定时间为 $O(\log^6 n)$，其概率为 $1 - O(n^{-2})$。

与之前一样，只需证明上述界对良图成立，并应用引理 18。

引理 33。对于任意 (n,p)-良图 $G=(V,E)$，三色 MIS 过程的稳定时间以概率 $1-O(n^{-2})$ 为 $O(\log^6 n)$。

5.3.1引理 33的证明

证明策略与引理 20的证明类似：对于第t轮结束时的任意顶点状态向量，我们证明该过程在 $\mathrm{poly}(\log n)$ 轮内在期望上取得足够进展。主要区别在于，我们现在证明，即使在 $|V_t| = O(\log^2(n)/p)$ 的情形下，当 $\mathrm{diam}(G) \le 2$ 时，该结论仍然成立。这对应于 ~~$p = \Omega(\sqrt{\log(n)/n})$~~ 的情形，根据(P6) 这一性质，该性质见于定义 17。这正是我们在分析二状态最大独立集过程中无法处理的情形。相关引理是引理 36。

我们首先注意到引理 21，该引理考虑 $|A_t| = \Omega(\log(n)/p$ 的情形，可直接推广到三色 MIS 过程，证明无需任何改动。

接下来我们考虑以下情形： $|A_t| = O(\ln(n)/p)$、 $|V_t| = \Omega(\ln^2(n)/p$，以及 $|\Gamma_t| = O(\ln^2(n)/p)$。下面的引理与引理 22非常相似，但还要求对 $|\Gamma_t|$给出一个界。回想一下， $a = 512$ 是对数切换的一个参数。

[11]这些证明只需稍作修改，主要是将若干处“白色”替换为“非黑色”或“灰色”。

引理 34. 若 $|V_t| \geq 82a\ln^2(n)/p$, $|A_t| \leq 80\ln(n)/p$, 且 $|\Gamma_t| \leq 80a\ln^2(n)/p$, 则存在一个常数 $\epsilon > 0$, 使得 $\mathbb{E}[|V_{t+\log n}|] \leq (1-\epsilon/\ln n)\cdot|V_t|$.

证明。 证明与引理 22的证明非常相似。与之前一样，根据(P1) 在定义 17中的性质， $G[A_t]$ 的平均度至多为 $k = \max\{8p|A_t|, 4\ln n\} \leq 640\ln n$. 令 S 为 A_t 中由 $2|A_t|/3$ 个度最小的顶点 $u \in A_t$ 组成的子集 $G[A_t]$, 并令 $T = A_t \setminus S$。于是对所有 $u \in S$, $|N(u) \cap A_t| \leq 3k$, 因此 $S \subseteq A_t^{3k}$。

集合 V_t 由以下部分构成：(i) 所有活跃顶点， $u \in A_t = S \cup T$；(ii) 所有至少有一个活跃邻居的非活跃非稳定顶点；以及 (iii) 所有没有活跃邻居的非活跃非稳定顶点（这些顶点为灰色）。因此，我们可以将 V_t 划分为五个互不相同的集合： S、 $N(S) \setminus N(I_t)$、 $T \setminus N(S)$、 $N(T) \setminus N^+(S \cup I_t)$, 以及 $V_t \setminus N^+(T \cup Sf) \subseteq \Gamma_t$。我们有 $|V_t \setminus N^+(T \cup S)| \leq |\Gamma_t| \leq 80a\ln^2(n)/p$、 $|T \setminus N(S)| \leq |T| < |S|$, 并且根据定义 17 中的性质 (P3),

$$|N(T) \setminus N^+(S \cup I_t)| \leq |N(S) \setminus N(I_t)| + 8\ln^2(n)/p.$$

利用这三个不等式、上述五个集合的大小之和为 $|V_t|$ 这一事实、假设 $|V_t| \geq 82a\ln^2(n)/p$, 以及 $a \geq 8$, 我们得到

$$|S| + |N(S) \setminus N(I_t)| \geq (|V_t| - (80a+8)\ln^2(n)/p)/2 \geq (|V_t| - 81a\ln^2(n)/p)/2 \geq |V_t|/82a.$$

因此，至少有 $|V_t|/82a$ 个顶点 $u \in V_t$ 位于 S 或与 S相邻。此外，根据 引理 6，每个 $u \in S \subseteq A_t^{3k}$以至少 $I_{t+\log n}$的概率属于 $1/(6ek)$。由此可得

$$\mathbb{E}[|V_{t+\log n}|] \leq |V_t| - (|V_t|/82a)\cdot 1/(6ek) \leq |V_t| - |V_t|/(1.1\cdot 82a\cdot 10^4\ln n).$$ □

接下来，我们假设 $|A_t| = O(\ln(n)/p)$ 且 $|V_t| = \Omega(\ln^2(n)/p)$，与前一个引理中的情形相同，但现在$|\Gamma_t| = \Omega(\ln^2(n)/p$。我们利用 引理 29 将此情形归约到前述情形。

引理 35。若 $|V_t| \geq 83a\ln^2(n)/p$、 $|A_t| \leq 80\ln(n)/p$ 且 $|\Gamma_t| > 80a\ln^2(n)/p$, 则存在一个常数 $\epsilon > 0$, 使得 $\mathbb{E}[|V_{t+a\ln n+\log n}|] \leq (1-\epsilon/\ln n)\cdot|V_t|$.

证明。令 $\tau = \min\{j \geq t: |V_j| \leq 82a\ln^2(n)/p \text{ or } |A_j| \geq 80\ln(n)/p \text{ or } |\Gamma_j| \leq 80a\ln^2(n)/p\}$.我们有 $\tau \leq t + a\ln n$, 因为如果$|\Gamma_{t+a\ln n}| > 80a\ln^2(n)/p$, 那么 引理 29 意味着存在某个 $j \in \{t, \ldots, t+a\ln n - 1\}$, 使得$|A_j| \geq |\Gamma_{t+a\ln n}|/(a\ln n) \geq 80\ln(n)/p$。根据 τ定义中哪个条件最先满足，我们分三种情况讨论。如果 $|V_\tau| \leq 82a\ln^2(n)/p$, 那么

$$|V_{t+a\ln n}| \leq |V_\tau| \leq 82a\ln^2(n)/p \leq (1-1/83)\cdot|V_t|.$$

如果 $|A_\tau| \geq 80\ln(n)/p$, 那么 引理 21 得出 $\mathbb{E}[|V_{t+a\ln n+\log n}|] \leq \mathbb{E}[|V_{t+\tau+\log n}|] \leq (1-\epsilon)\cdot|V_t|$.最后，如果 $|\Gamma_\tau| \leq 80a\ln^2(n)/p$ 且另外两个条件均不成立，那么 引理 34 给出$\mathbb{E}[|V_{t+a\ln n+\log n}|] \leq (1-\epsilon/\ln n)\cdot|V_t|$. □

接下来的两个引理讨论 $|V_t| = O(\ln^2(n)/p)$ 的情况。第一个引理假设 $\text{diam}(G) \leq 2$，因此根据 $p = \Omega(\sqrt{\log(n)/n})$ 的性质 (P6)，涵盖了定义 17中的情形；而第二个引理假设 $p = O(\sqrt{\log(n)/n})$, 与引理 23类似。

引理 36。对于任意 $t \geq \frac{a}{6}\ln n$, 如果 $|V_t| \leq 83a\ln^2(n)/p$ 且 $\text{diam}(G) \leq 2$，那么存在一个常数 $\epsilon > 0$, 使得 $\mathbb{E}[|V_{t+\frac{7}{6}a\log n+\log n}|] \leq (1-\epsilon/\ln^3 n)\cdot|V_t|$.

证明。 根据 (P1) 在 定义 17中的性质，诱导子图 $G[V_t]$ 的平均度至多为$k = $最大值$\{8p|V_t|, 4\ln n\} \leq 664a\ln^2 n$. 令 T为 V_t中由最小的$\{\ln(n)/p$个顶点组成的子集， $|V_t|/2\}$

度最大的顶点 $u \in V_t$，属于 $G[V_t]$，并令 $S = V_t \setminus T$。则 $|S| \geq |T|$，且所有 $u \in S$,$|N(u) \cap V_t|$ 至多为

$$d = k|V_t|/|T| \leq k \cdot \max\{p|V_t|/\ln n, 2\} \leq 55112 \ln^3 n.$$

根据性质(P4)，由定义 17可知，$|E(S,T)| \leq 6|S| \ln n$。令 $R = \{u \in S : |N(u) \cap T| \leq 12 \ln n\}$。那么 $|R| \geq |S|/2 \geq |V_t|/4$。我们将证明，存在某个常数 $\epsilon' > 0$,

$$\mathbb{P}[u \notin V_{t+\frac{7}{6}a \ln n + \log n}] \geq \epsilon' \ln^{-3} n, \quad \text{for all } u \in R. \tag{5}$$

由此可得$\mathbb{E}[|V_{t+\frac{7}{6}a \ln n + \log n}|] \leq |V_t| - (|V_t|/4) \cdot \epsilon' \ln^{-3} n.$。为完成该引理的证明，还需证明(5)。

令 $u \in R$，并假设 $u \notin \Gamma_t$（最后再处理 $u \in \Gamma_t$ 的情形）。根据引理 30，$\sum_{t \leq j \leq t+\frac{a}{6}\ln n} |(N(u) \cap T) \cap (B_j \cap V_j)|$ 的期望值，也就是顶点 $v \in N(u) \cap T$ 在第 t 轮至 $\frac{a}{6}\ln n$ 轮之间处于活跃黑色状态的总次数，至多为 $4 \cdot |N(u) \cap T| \leq 4 \cdot 12 \ln n$。于是，根据马尔可夫不等式，该次数以至少 $1/5$ 的概率至多为 $5 \cdot 12 \ln n$。又因为 $\frac{a}{6} > 5 \cdot 12$，可知以至少 $1/5$ 的概率，存在某个 $j \in \{t, \ldots, t + \frac{a}{6}\ln n\}$，使得 $(N(u) \cap T) \cap (B_j \cap V_j) = \emptyset$。

接下来我们声称，若对于某个 $j \geq t$，$(N(u) \cap T) \cap (B_j \cap V_j) = \emptyset$，则 (i) $u \notin V_j$，或 (ii) 对于某个 $t \leq j' < j$，$u \in A_{j'}$，或 (iii) $(N^+(u) \cap S) \cap A_j \neq \emptyset$。事实上，假设 (i) 和 (ii) 均不成立，即 $u \in V_j$且 $u \notin A_t \cup \cdots \cup A_{j-1}$。由 $u \in V_j$ 可得 $N^+(u) \cap I_j = \emptyset$。由 $u \notin A_t \cup \cdots \cup A_{j-1}$ 和假设 $u \notin \Gamma_t$ 可得 $u \in W_j$。于是，若 $(N(u) \cap S) \cap B_j \neq \emptyset$，则每个顶点 $v \in (N(u) \cap S) \cap B_j$ 都属于 A_j；而若 $(N(u) \cap S) \cap B_j = \emptyset$，则 $N(u) \cap B_j = \emptyset$ 且 $u \in A_j$。因此 (iii) 成立。

由上述可知，以至少 $1/5$ 的概率，存在某个 $t \leq j \leq t + \frac{a}{6}\ln n$，使得 $u \notin V_j$或 $(N^+(u) \cap S) \cap A_j \neq \emptyset$。并且，如果 $v \in (N^+(u) \cap S) \cap A_j$，那么 $v \in A_j^d$，由引理 6可知，$v \in I_{j+\log n}$ 的概率至少为 $1/(6ed)$。因此我们得到

$$\mathbb{P}[u \notin V_{t+\frac{a}{6}\ln n + \log n}] \geq (1/5) \cdot 1/(6ed) \geq (4.5 \cdot 10^6 \ln^3 n)^{-1},$$

这意味着 (5)。

最后，如果 $u \notin \Gamma_t$，我们考虑满足条件 $j > t$ 的第一个轮次 $u \notin \Gamma_j$。根据性质 (S1)，$j \leq t + a \ln n$。然后我们应用前一种情况的结果，完成（5）的证明。 □

引理 37. 如果 $|V_t| \leq 83a \ln^2(n)/p$ 且 $p \leq c\sqrt{\log(n)/n}$，其中某个常数为 $c > 0$，那么存在一个常数 $\epsilon = \epsilon(c) > 0$，使得 $\mathbb{E}[|V_{t+\log^{1.1} n}|] \leq (1 - \epsilon/\ln^{3.9} n) \cdot |V_t|$.

证明概要。我们定义集合 S，T，R 以及度阈值 k，d 与 引理 36的证明中相同，并证明

$$\mathbb{P}[u \notin V_{t+\log^{1.1} n}] \geq \epsilon' \ln^{-3.9} n, \quad \text{for all } u \in R, \tag{6}$$

这就推出了该引理。接下来我们证明 (6)。

设 $u \in R$，并假设 $u \notin \Gamma_t$（我们将在最后讨论情形 $u \in \Gamma_t$）。对于每个 $v \in N(u) \cap T$，令 $t_v \geq t$ 为满足以下条件之一的第一轮：v 为白色且至少有 $\ell = \ln n$ 个黑色邻居，或者处于稳定状态；令 x_v为满足以下条件的轮次数：$t \leq j \leq \min\{t_v, t+r\}$，且 v为黑色并至少有ℓ个黑色邻居，其中 $r = 12 \ln n \cdot \ln^2 \ln n$。根据引理 31，对于所有 v，$x_v \leq \ln^2 \ln n$的概率至少为 $1 - |N(u) \cap T| \cdot e^{-\Omega(\ln^2 \ln n)} = 1 - e^{-\omega(\ln \ln n)}$。对于每个 $v \in N(u) \cap T$，令 p_v为在给定 B_t、W_t 的条件下，$v \in B_{t_v+1} \cup \cdots \cup B_{t+r}$ 的条件概率。

如果 $\sum_{v \in N(u) \cap T} p_v \leq 1/2$，那么以至少 $1/2 - e^{-\omega(\ln \ln n)} > 1/3$ 的概率，至少有一个 $v \in N(u)$ 为黑色且至少有 ℓ 个黑色邻居的轮次总数至多为

至多为 $|N(u)\cap T|\cdot\ln^2\ln n\le 12\ln n\cdot\ln^2\ln n\le r$，因此存在某个 $j\in\{t,\dots,t+r\}$，使得没有任何 $v\in N(u)$ 为黑色且拥有至少 ℓ 个黑色邻居。然后，我们可以推断，以至少 $1/3$ 的概率，$N^+(u)$ 中的某个顶点在 $\{t,\dots,t+r\}$ 的某一轮中是稳定黑色或处于 d-活跃状态；推理方式与引理 36 的证明相同。随后使用引理 6 得到 (6)。

如果 $\sum_{v\in N(u)\cap T}p_v>1/2$，那么存在某个 $v^*\in N(u)\cap T$，使得 $p_{v^*}\ge(2|N(u)\cap T|)^{-1}\ge(24\ln n)^{-1}$。然后，我们可以应用引理 14，在第 t_{v^*} 轮 v^*，从而证明顶点 v^* 在 $\{t,\dots,t+r\}$ 中的某一轮变为 z-活跃的概率至少为 $r^{1-\alpha}\cdot\left(\frac{p_{v^*}-2^{-\ell}}{2}\right)^{\alpha}=\Omega(\ln^{3.9}n)$，其中 $z=\theta_u\left(\alpha\log\frac{4r}{p_{v^*}-2^{-\ell}}\right)+\log\frac{4r}{p_{v^*}-2^{-\ell}}=O(\log n\cdot\log\log n)$。$\alpha\le 2.41$ 再次使用引理 6 得到 (6)。

最后，与之前一样，如果 $u\notin\Gamma_t$，我们考虑第一轮 $j>t$ 使得 $u\notin\Gamma_j$，并应用前一种情况的结果，完成(6)的证明。 □

现在，我们可以像证明引理 33时证明引理 20那样，得出引理 33的证明结论。由引理 21 和 34 到 37可知，对于任意$t\ge\frac{a}{6}\ln n$，$\mathbb{E}[|V_{t+\log^{1.1}n}|]\le\left(1-\epsilon/\ln^{3.9}n\right)\cdot\mathbb{E}[|V_t|].$。反复应用该不等式，并利用马尔可夫不等式，可像之前一样得到$\mathbb{P}[|V_{c'\ln^6 n}|\ge 1]\le n^{-2}$，其中常数 $c'>0$足够大。这就完成了引理 33的证明。

附录

A 省略的证明

A.1 引理 7 的证明

我们假设 $k_1\le k_2\le\cdots\le k_\ell$。对于 $1\le i\le\ell$，令 $r_i=\lceil\log(k_i+1)\rceil$，令 $\mathcal{E}_i$表示事件$\phi_{t+1}(u_i)=\cdots=\phi_{t+r_i}(u_i)$ 为 $=$ 黑色，并令 $\mathcal{E}=\bigcup_i\mathcal{E}_i$。那么

$$\mathbb{P}[\mathcal{E}]=1-\prod_i\left(1-\frac{1}{2^{r_i}}\right)\ge 1-\prod_i\left(1-\frac{1}{2k_i}\right)\ge\left(1-e^{-\sum_i\frac{1}{2k_i}}\right)\ge(1-e^{-1})\cdot\min\left\{1,\sum_i\frac{1}{2k_i}\right\}.$$

假设 $\mathcal{E}$发生，并令 j为满足 $\mathcal{E}_j$发生的最小索引，即 $\mathcal{E}_1\cap\cdots\cap\mathcal{E}_{j-1}\cap\mathcal{E}_j$发生。若 $g_j=|N(u_j)\cap\{u_1,\dots,u_{j-1}\}|$，则在所有 k_j顶点中，没有任何一个 $v\in N(u_j)\cap A_t$满足 $\phi_{t+1}(v)=\cdots=\phi_{t+r_j}(v)$ 为 $=$ 黑色的概率为

$$(1-2^{-r_j})^{k_j-g_j}\ge(1-2^{-r_j})^{k_j}\ge e^{-1},$$

类似于 (1)。将此结果与前一个不等式结合，我们得到：对于至少一个顶点，$u_i\in I_{t+r_i}$ $u_i\in\{u_1,\dots,u_\ell\}$的概率至少为 $e^{-1}\cdot(1-e^{-1})\cdot$最小值 $\left\{1,\sum_i\frac{1}{2k_i}\right\}\ge\frac{1}{5}\cdot$最小值 $\left\{1,\sum_i\frac{1}{2k_i}\right\}$.

A.2 证明引理 15

设 $\mathcal{B}$为事件 $u\in B_{t+\ell}\cup\cdots\cup B_{t+r}$；则 $\mathbb{P}[\mathcal{B}]=b_r$。设

$$\tau=\min\{j>t\colon u\in W_j\text{ or }|N(u)\cap B_j|\le k\}$$

是第一个轮次 $j>t$ 在该轮次结束时 u 为白色，或至多有 k 个黑色邻居。由于 $\tau>t+\ell$ 意味着 $\phi_{t+1}(u)=\cdots=\phi_{t+\ell}(u)$ 个黑色邻居，因此有 $\mathbb{P}[\tau>t+\ell]\le 2^\ell\le b_r/4$。于是 $\mathbb{P}[\tau\le t+\ell]\ge 1-b_r/4$。令

$$x=\mathbb{P}[|N(u)\cap B_\tau|\le k\mid\tau\le t+\ell].$$

我们区分两种情况： $x \geq b_r/4$ 和 $x \leq b_r/4$。

首先，假设 $x \geq b_r/4$。对于任意给定的 $j > t$,

$$\mathbb{P}[u \in A_j \mid \tau = j, |N(u) \cap B_\tau| \leq k] = 1/2.$$

原因是，当 $\tau = j > t+1$ 时， $u \in B_{j-1}$ 和 $|N(u) \cap B_{j-1}| > k > 0$；当 $\tau = j = t+1$ 时， $u \in A_t = A_{j-1}$。在这两种情况下， $u \in A_{j-1}$，因此 u 在第 j 轮结束时的状态是均匀随机选取的，且独立于第 j 轮中的其余选择。特别地，当 $0 < |N(u) \cap B_j| \leq k$ 时， u 为黑色的概率是 $1/2$；当 $|N(u) \cap B_j| = 0$ 时， u 为白色的概率是 $1/2$。由此可得

$$\mathbb{P}[\{u \in A_\tau\} \cap \{|N(u) \cap B_\tau| \leq k\} \cap \{\tau \leq t+\ell\}] \geq (1/2) \cdot x \cdot (1 - b_r/4) \geq 3b_r/32.$$

由于左侧事件意味着 u 在第 $\tau \leq t+\ell < t+r$ 轮结束时处于 k-活跃状态，并且 $3b_r/32$ 大于 q_r 所需的下界，因此引理在这种情况下成立。

现在假设 $x \leq b_r/4$。那么

$$\mathbb{P}[\mathcal{B} \cap \{|N(u) \cap B_\tau| > k\} \cap \{\tau \leq t+\ell\}] \geq \mathbb{P}[\mathcal{B}] - \mathbb{P}[\tau > t+\ell] - x \geq b_r - b_r/4 - b_r/4 = b_r/2.$$

如果 $\tau \leq t+\ell$ 且 $|N(u) \cap B_\tau| > k$（因此根据 τ 的定义有 $u \in W_\tau$），我们定义以下事件：$\mathcal{A}^k$ 是指 $u \in A^k_{\tau+1} \cup \cdots \cup A^k_{t+r-1}$ 的事件； $\mathcal{A}$ 是指 $u \in A_{\tau+1} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}$ 的事件；而 $\mathcal{X}$ 是指这样一个事件：第 τ 轮结束时，给定顶点的状态以及 τ， $\mathcal{A}$ 的条件概率至少为 $b_r/4$。

如果 $\tau \leq t+\ell$ 且 $|N(u) \cap B_\tau| > k$，那么事件 $\mathcal{B}$ 蕴含 $\mathcal{A}$，因为顶点 u 在第 τ 轮结束时为非活跃白色，在首先变为活跃之前不可能变为黑色。因此，由上面的最后一个不等式可得

$$\mathbb{P}[\mathcal{A} \cap \{|N(u) \cap B_\tau| > k\} \cap \{\tau \leq t+\ell\}] \geq b_r/2.$$

Also

$$\mathbb{P}[\mathcal{A} \cap \mathcal{X} \cap \{|N(u) \cap B_\tau| > k\} \cap \{\tau \leq t+\ell\}] \geq b_r/2 - b_r/4 = b_r/4.$$

现在我们可以应用 引理 14，从第 $\tau \leq t+\ell$ 轮开始，使用 $d > k \geq \log(1/b_r) + 3$ 和 $p_r \geq b_r/4$，得到

$$\mathbb{P}[\mathcal{A}^k \cap \mathcal{X} \cap \{|N(u) \cap B_\tau| > k\} \cap \{\tau \leq t+\ell\}] \geq r^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{b_r/4 - 2^k}{2}\right)^\alpha \geq r^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{b_r/4 - b_r/8}{2}\right)^\alpha.$$

由此可得 $q_r = \mathbb{P}[\mathcal{A}^k] \geq r^{1-\alpha} \cdot \left(\frac{b_r/4 - b_r/8}{2}\right)^\alpha$，这就完成了这一情形的证明。

A.3 引理 16的证明

证明。我们有 $\mathbb{P}[u \in A_{t+1}] = 2^{-d}$ 和 $\mathbb{P}[u \in (A_{t+2} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}) \setminus A_{t+1}] = p_r - 2^{-d}$。我们还注意到，如果 $u \notin A_{t+1}$，那么 $u \in W_{t+1}$；而 u 只有在变为活跃后，才可能在后续轮次变为黑色。因此

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\{u \in (B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}) \cap A_{t+1}] &= b_r - \mathbb{P}[u \in (B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}) \setminus A_{t+1}] \\
&\geq b_r - \mathbb{P}[u \in (A_{t+2} \cup \cdots \cup A_{t+r-1}) \setminus A_{t+1}] \\
&\geq b_r - (p_r - 2^{-d}) \\
&\geq b_r/2.
\end{aligned}$$

令 $\mathcal{X}$ 表示这样一个事件：在第 $t+1$ 轮结束时，顶点的状态使得 $u \in B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}$ 的条件概率至少为 $b_r/4$。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\{u \in (B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}) \cap A_{t+1}\} \cap \mathcal{X}] &\geq b_r/2 - \mathbb{P}[\{u \in (B_{t+\ell} \cup \cdots \cup B_{t+r}) \cap A_{t+1}\} \cap \bar{\mathcal{X}}] \\ &\geq b_r/4.\end{aligned}$$

现在可以应用 引理 15，从轮次 $t+1$ 开始，并使用 $b_r/4$ 替代 b_r，从而得到

$$\mathbb{P}[\{u \in (A^k_{t+1} \cup \cdots \cup A^k_{t+r-1}) \cap A_{t+1}\} \cap \mathcal{X}] \geq r^{1-\alpha} \cdot (b_r/64)^{\alpha}.$$

这就证明了该引理。 □

A.4 引理 18的证明

证明由一系列引理组成。在所有这些引理中，所考虑的图 $G = (V, E)$ 都是从 $G_{n,\ p}$ 中抽取的随机图。

性质 (P1) 对大小为 S、规模为 $k \leq 4\ln n$ 的集合显然成立。下一个引理（对所有$k > 4\ln n$ 应用，然后使用并集界合并结果）表明，G 以至少 $1 - n^{-\Omega(\log n)}$ 的概率满足该性质对于所有更大的集合也成立。

引理 38. 设 $G = (V, E)$ 是从 $G_{n,\ p}$ 中抽取的随机图，并设 $k \geq 1$。以至少 $1 - n^{-k}$ 的概率，G 上的所有包含 k 个顶点的子图至多有 $\max\{4pk^2, 2k\ln n\}$ 条边。

证明。存在一个含有 k 个顶点且至少有 $r = \max\{2k\ln n, 4pk^2\}$ 条边的子图的概率至多为

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k^2/2}{r} \cdot p^r \leq n^k \cdot \left(\frac{ek^2}{2r}\right)^r \cdot p^r = e^{k\ln n - r\ln\frac{2r}{epk^2}} \leq e^{k\ln n - 2k\ln n\cdot\ln\frac{8pk^2}{epk^2}} \leq n^{-k}.$$ □

下一个引理表明 G 以概率 (P2) 满足性质 $1 - n^{-\Omega(\log n/p)}$

引理 39。设 $G = (V, E)$ 是从 $G_{n,p}$ 中抽取的随机图，且 $k \geq 40\ln(n)/p$。以至少 $1 - n^{-k}$ 的概率，每个大小为 $|S| = k$ 的集合 $S \subseteq V$ 都满足

$$|\{u \in V : |N(u) \cap S)| < pk/2\}| \leq k/2.$$

证明。对于任意大小为 k 的集合 S 和任意顶点 $u \in V \setminus S$，u 在 S 中的邻居期望数量为 pk。根据切尔诺夫界，u 在 S 中的邻居少于 $pk/2$ 个的概率至多为$e^{-pk/8}$. 。那么，存在某个大小为 k 的集合 S，使得至少有 $k/2$ 个顶点 $u \in V \setminus S$ 在 S 中的邻居少于 $pk/2$ 个的概率至多为

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k/2} \cdot e^{-(k/2)\cdot pk/8} \leq n^k \cdot n^{k/2} \cdot e^{-pk^2/16} = e^{(3/2)k\ln n - pk^2/16} \leq n^{-k}.$$ □

引理 40. 设 $G = (V, E)$ 是从 $G_{n,p}$ 中抽取的随机图，并设 $k = 3\ln(n)/p$。其概率至少为 $1 - n^{-k}$，使得每个大小为 $|S| \geq k$ 的集合 $S \subseteq V$ 都满足 $|V \setminus N^+(S)| \leq k$。

证明。存在一个大小为 k 的集合 S，满足 $|V \setminus N^+(S)| \geq k$ 的概率至多为

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{k} \cdot (1-p)^{k^2} \leq n^k \cdot n^k \cdot e^{-pk^2} = e^{2k\ln n - pk^2} = n^{-k}.$$ □

下一个 xt 引理表明 G 满足性质 (P3) 的概率为 $1 - n^{-\Omega(\log n/p)}$.

引理 41. 设 $G=(V,E)$ 是从 $G_{n,p}$ 中抽取的随机图。以至少 $1-n^{-\ln(n)/p}$ 的概率，任意满足 $|S|\geq 2|T|$ and $(S\cup T)\cap N(I)=\emptyset$ 的不相交集合三元组 $S,T,I\subseteq V$，均满足

$$|N(T)\setminus N^+(S\cup I)|-|N(S)\setminus N^+(I))|\leq 8\ln^2(n)/p. \tag{7}$$

证明。根据 引理 40，以至少 $1-n^{-3\ln(n)/p}$ 的概率，所有满足 $|S\cup I|\geq 3\ln(n)/p$ 的集合 S，$I\subseteq V$ 均满足 $|V\setminus N^+(S\cup I)|\leq 3\ln(n)/p$，因此

$$|N(T)\setminus N^+(S\cup I)|\leq |V\setminus N^+(S\cup I)|\leq 3\ln(n)/p,$$

这意味着 (7)。

接下来假设 $|S\cup I|\leq 3\ln(n)/p$。由于 $|S|\geq 2|S|$，我们有 $|S\cup T\cup I|\leq 4.5\ln(n)/p$，因此至多有 $n^{4.5\ln(n)/p}$ 个不同的三元组 S,T,I。在揭示 G 的边之前，先选择这样一个三元组 S,T,I。然后揭示与顶点 $u\in I$ 相 incident 的边；这确定了 $N(I)$。令 $U=V\setminus(S\cup T\cup N^+(I))$。随后，(7) 左侧的两个集合可表示为$N(T)\setminus N^+(S\cup I)=U\cap N(T)\setminus N(S)$，以及 $N(S)\setminus N^+(I)=U\cap N(S)$。对于每个 $u\in U$，$u\in N(T)\setminus N(S)$ 的概率为

$$p_1=\mathbb{P}[u\in N(T)\setminus N(S)]=\left(1-(1-p)^{|T|}\right)\cdot(1-p)^{|S|},$$

以及 $u\in N(S)$ 的概率为

$$p_2=\mathbb{P}[u\in N(S)]=1-(1-p)^{|S|}.$$

令 $\varepsilon=(1-p)^{|T|}$ 并利用 $|S|\geq 2|T|$，可得 $p_1\leq(1-\varepsilon)\cdot\varepsilon^2$ 以及 $p_2\geq 1-\varepsilon^2$。因此

$$\frac{p_2}{p_1}\geq\frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)\cdot\varepsilon^2}=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\geq 2.$$

由此可知，依次考虑所有顶点 $u\in U$，并在考虑每个 u 时揭示与其关联的所有边 u，我们可以分析差值

$$D=|U\cap N(T)\setminus N(S)|-|U\cap N(S)|=|N(T)\setminus N^+(S\cup I)|-|N(S)\setminus N^+(I)|$$

将其视为一个从 0 开始、以概率p_1 向右移动、以概率 p_2向左移动的整数上的偏置随机游走。已知该（无限）随机游走曾到达值 $i\geq 1$ 的概率为 $(p_1/p_2)^i\leq 2^{-i}$。因此，$\mathbb{P}[D\geq i]\leq 2^{-i}$. 而对于至少一个可能的三元组 S,T,I，$D\geq 8\ln^2(n)/p$ 的概率至多为

$$n^{4.5\ln(n)/p}\cdot 2^{-8\ln^2(n)/p}\leq n^{-\ln n/p}.$$ □

对于大小为 $k\leq 6\ln n$ 的集合 S，性质 (P4) 显然成立，因为 $|S|\geq|T|$。下一个引理（对所有 $k>6\ln n$ 应用）表明，对于所有更大的集合，G 以至少 $1-n^{-\Omega(\log n)}$ 的概率满足该性质。

引理 42. 设 $G=(V,E)$ 是从 $G_{n,p}$ 中抽取的随机图，且设 $k\geq 1$。以至少 $1-n^{-2k}$ 的概率，任意一对不相交集合 $S,T\subseteq V$，只要满足 $|S|=k\geq|T|$ 且 $|T|\leq\ln(n)/p$，就有 $|E(S,T)|\leq 6k\ln n$。

证明。对于任意给定的一对 S,T，$|E(S,T)|$ 的期望值为 $p\cdot|S|\cdot|T|\leq k\ln n$；根据切尔诺夫界，$|E(S,T)|\geq 6k\ln n$ 的概率至多为 $2^{-6k\ln n}$。那么，至少存在一对 S,T，使得 $|E(S,T)|\geq 6k\ln n$ 的概率至多为

$$n^{|S|}\cdot n^{|T|}\cdot 2^{-6k\ln n}\leq n^{2k}\cdot 2^{-6k\ln n}\leq n^{-2k}.$$ □

我们最后的1引理意味着性质 (P5) 和 (P6) 以概率 $1 - O(n^{-2})$成立。

引理 43. 在从 $G_{n,p}$ 中抽取的随机图 G 中，任意两个顶点都没有 k 公共邻居的概率至少为 $1 - n^2 \cdot (ep^2 n/k)^k$。并且，$\mathrm{diam}(G) \leq 2$ 至少为 $1 - n^2 \cdot e^{-p^2(n-1)}$ 的概率为。

证明. 存在一对顶点至少有 k 个公共邻居的概率至多为$\binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{k} \cdot p^{2k} \leq n^2 \cdot \left(\frac{ep^2 n}{k}\right)^k$. 。存在一对没有公共邻居且彼此不相邻的顶点的概率为 $\binom{n}{2} \cdot (1-p) \cdot (1-p^2)^{n-2} \leq n^2 \cdot e^{-p^2(n-1)}$。

□

B 其他相关工作

1985 年，Luby[24] 提出了一种简单的分布式随机化算法，可在 $O(\log n)$ 时间内以高概率找到一个极大独立集。与此同时，Alon 等人 [3] 提出了一种性能相同的类似算法。这两种算法使用 $O(\log n)$ 位消息，并且每轮需要使用 $O(\log n)$ 个随机比特。

由于无线传感器网络中的各种应用，人们提出了受限的分布式通信模型，并在其中广泛研究最大独立集问题。在 Cornejo 和 Kuhn [9], 提出的蜂鸣模型中，节点不了解网络的局部或全局结构，也无法使用同步时钟，节点间的通信则完全依赖载波侦听（如引言所述）。Afek 等人 [1] 证明，在蜂鸣模型的一种变体中，节点初始处于休眠状态并由对手唤醒，此时不可能在次多项式时间内局部收敛到极大独立集。因此，他们考虑了对模型的多种放宽，并提出了能在多对数轮数内收敛到极大独立集的算法。具体而言，如果节点知道网络规模的一个上界，或者蜂鸣节点由邻居的蜂鸣声唤醒，则可在 $O(\log^3 n)$ 时间内以高概率找到极大独立集。如果节点具有同步时钟，则可在 $O(\log^2 n)$ 时间内以高概率找到极大独立集。值得注意的是，作者仅在第一种设置下提供了自稳定算法，即节点已知网络规模的一个上界。此外，在所有算法中，节点的状态数均为超常数，并且可以使用超常数个随机比特。

在具有同步时钟、冲突检测和同时唤醒机制的蜂鸣模型版本中，Afek 等人 [2] 此前已证明，最大独立集问题可通过一种生物过程在时间 $O(\log^2 n)$ 内以高概率得到解决。 [1] 证明了，即使不知道网络规模的上界，也同样可以达到这一界。Jeavons 等人 [23] 改进了这些结果，证明可以在时间 $O(\log n)$ 内以高概率找到一个极大独立集。Ghaffari [16]对该算法的局部复杂度进行了更深入的分析。在不具备冲突检测功能的同一蜂鸣模型版本中，Holzer 和 Lynch 于 [21], 提出了 [15], 算法的一个变体，并证明该算法在最大度为 Δ的网络上，以至少 $1 - \varepsilon$ 的概率在时间 $O((\log \Delta + \log 1/\varepsilon) \cdot \log 1/\varepsilon)$ 内实现局部收敛。所有这些算法每轮都需要超常数空间和随机比特。

Emek 等人 [13] 提出了石器时代模型，其灵感源自生物细胞网络或微处理器设备网络。在该模型中，节点可以通过发送属于有限通信字母表的消息进行通信。节点在异步环境中通信，通信模式由对手决定，而且它们不知道网络的规模。在石器时代模型中，[13, 12]研究了最大独立集问题。 [13], 中给出了一种算法，可在 $O(\log^2 n)$ 轮次内计算出一个极大独立集。然而，该算法假设所有节点的初始状态相同，因此不是自稳定的。在 [12], 中，他们

提出了一种自稳定算法，可在时间 $O((D+\log n)\log n)$ 内以高概率稳定；每个节点可能的状态数为 $O(D)$，其中 D 是图的直径。

在 [25], 中，作者提出了一种随机化分布式算法，可在$O(\log n)$ 时间内以高概率求得极大独立集。具体而言，该算法改编自 Luby 算法，仅使用 1 位消息。作者考虑的是匿名网络，但在其设定中，顶点能够区分各自的邻居，并且每个顶点所需的状态数取决于 n和节点度。

极大独立集算法也受到自稳定领域的广泛关注。关于这些算法的综述，请参见 [19]。

我们首先介绍适用于非匿名网络（即顶点具有标识符）的自稳定算法。在 [18], 中，作者给出了一种简单的确定性分布式算法，在同步模型下，该算法可在 $O(n)$ 时间内、经过 $O(n^2)$ 次移动后（即状态改变的总次数）稳定于一个极大独立集。在 [22], 中，作者提出了一种确定性的双状态算法，可在分布式调度器下运行（对手在每个时刻任意选择一组进程执行）。这两种算法都可在 $O(n^2)$ 时间内稳定。在 [29], 中，Turau 提出了一种三状态自稳定算法，在分布式调度器下经过 $O(n)$ 次移动后稳定。Barenboim 等人取得了突破，他们在同步模型下提出了一种用于极大独立集及其他相关问题的自稳定算法。作者证明，该算法在 $O(\Delta+\log^* n)$ 轮后稳定。

假设网络是匿名的，Shukla 等人 [28] 提出了两种确定性的双状态自稳定算法，它们在集中式调度器（每轮选择一个进程执行的对手）下运行，并在 $O(n)$ 轮内稳定。在 [30], ，Turau 提出了一种用于极大独立集的同步随机化自稳定算法，该算法以高概率在 $O(\log n)$ 轮内稳定。节点可能的状态数为 $O(\log n)$。

接下来，我们简要总结在任意图上使用分布式 LOCAL 模型计算极大独立集的已知最佳上界。Barenboim 等人 [6] 证明，可以通过分布式确定性算法在 $O(\Delta+\log^* n)$ 轮内计算出极大独立集；Ghaffari 等人 [17] 给出了 $O(\log^5 n)$ 的上界。关于分布式随机化算法，Ghaffari [15] 给出了 $O(\log \Delta)+2^{O(\sqrt{\log \log n})}$ 的上界，且以高概率成立。得益于 [27, 17], ，这一结果后来被改进为 $O(\log \Delta+\log^5 \log n)$，且以高概率成立。另见 [14]。

目前已知寻找极大独立集的最佳下界由 Balliu 等人证明。[4], 他们证明，在 LOCAL 模型中，确定性地计算极大独立集需要 $\Omega(\min\{\Delta, \log n/\log\log n\})$ 轮次，而使用随机化算法则需要 $\Omega(\min\{\Delta, \log\log n/\log\log\log n\})$ 轮次。

参考文献

[1] Yehuda Afek、Noga Alon、Ziv Bar-Joseph、Alejandro Cornejo、Bernhard Haeupler 和 Fabian Kuhn。通过蜂鸣构造极大独立集。《分布式计算》，26(4):195–208，2013年。[2] Yehuda Afek、Noga Alon、Omer Barad、Eran Hornstein、Naama Barkai 和 Ziv Bar-Joseph。一个基础分布式计算问题的生物学解决方案。《科学》，331(6014):183—185，2011年1月。[3] Noga Alon、L´aszl´o Babai 和 Alon Itai。用于极大独立集问题的快速简易随机化并行算法。《算法杂志》，7(4):567–583，1986年。[4] Alkida Balliu、Sebastian Brandt、Juho Hirvonen、Dennis Olivetti、Mika¨el Rabie 和 Jukka Suomela。极大匹配与极大独立集的下界。ACM 期刊，68(5):39:1–39:30，2021年。[5] Leonid Barenboim、Michael Elkin 和 Uri Goldenberg。局部迭代分布式 $(\Delta+1)$-着色及其应用。ACM 期刊，69(1):5:1–5:26，2022年。[6] Leonid Barenboim、Michael Elkin 和 Fabian Kuhn。在线性（关于 Δ）时间内进行分布式 $(\Delta+1)$-着色。《SIAM 计算期刊》，43(1):72–95，2014年。

[7] Leonid Barenboim、Michael Elkin、Seth Pettie 和 Johannes Schneider。分布式对称性破缺的局部性。ACM 期刊，63(3):20:1–20:45，2016年。[8] Stephen A. Cook。计算复杂性的概述。《ACM 通讯》，26(6):400–408，1983年。[9] Alejandro Cornejo 和 Fabian Kuhn。利用蜂鸣信号部署无线网络。载于《分布式计算》论文集，第24届国际研讨会（DISC），第148–162页，2010年。[10] Edsger W. Dijkstra。尽管存在分布式控制，系统仍可自稳定。《ACM 通讯》，17(11):643–644，1974年。[11] Shlomi Dolev。《自稳定》。麻省理工学院出版社，2000年。[12] Yuval Emek 和 Eyal Keren。具有故障容错生物网络应用的精简自稳定异步一致算法。载于 ACM 分布式计算原理研讨会论文集（PODC），第93–102页，2021年。[13] Yuval Emek 和 Roger Wattenhofer。石器时代分布式计算。载于 ACM 分布式计算原理研讨会论文集（PODC），第137–146页，2013年。[14] Salwa Faour、Mohsen Ghaffari、Christoph Grunau、Fabian Kuhn 和 V´aclav Rozhon。局部分布式舍入：推广至极大独立集、匹配、集合覆盖等问题。CoRR，abs/2209.11651，2022年。[15] Mohsen Ghaffari。一种改进的极大独立集分布式算法。载于第二十七届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA），第270–277页，2016年。[16] Mohsen Ghaffari。通过全对全通信实现分布式极大独立集。载于 ACM 分布式计算原理研讨会论文集（PODC），第141–149页，2017年。[17] Mohsen Ghaffari、Christoph Grunau 和 V´aclav Rozhon。改进的确定性网络分解。载于 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA），第2904–2923页，2021年。[18] Wayne Goddard、Stephen T. Hedetniemi、David Pokrass Jacobs 和 Pradip K. Srimani。适用于自组网络的极大匹配与极大独立集自稳定协议。载于第17届国际并行与分布式处理研讨会论文集（IPDPS 2003），第162页，2003年。[19] Nabil Guellati 和 Hamamache Kheddouci。图中独立性、支配、着色和匹配问题的自稳定算法综述。《并行与分布式计算期刊》，70(4):406–415，2010年。[20] S.M. Hedetniemi、S.T. Hedetniemi、D.P. Jacobs 和 P.K. Srimani。求极小支配集和极大独立集的自稳定算法。《计算机与数学及其应用》，46(5):805–811，2003年。[21] Stephan Holzer 和 Nancy A. Lynch。快速通过蜂鸣构造极大独立集。CoRR，abs/1704.07133，2017年。[22] Michiyo Ikeda、Sayaka Kamei 和 Hirotsugu Kakugawa。用于极大独立集问题的空间最优自稳定算法。载于第3届国际并行与分布式计算、应用与技术会议论文集（PDCAT），第70–74页，2002年。[23] Peter Jeavons、Alex Scott 和 Lei Xu。来自自然的反馈：用于极大独立集选择和贪心着色的简单随机化分布式算法。《分布式计算》，29(5):377–393，2016年。[24] Michael Luby。一种用于极大独立集问题的简单并行算法。《SIAM 计算期刊》，15(4):1036–1053，1986年。[25] Yves M´etivier、John Michael Robson、Nasser Saheb-Djahromi 和 Akka Zemmari。一种比特复杂度最优的随机化分布式极大独立集算法。《分布式计算》，23(5-6):331–340，2011年。[26] C. St.J. A. Nash-Williams。将有限图分解为森林。《伦敦数学学会期刊》，s1-39(1):12–12，1964年。[27] V´aclav Rozhon 和 Mohsen Ghaffari。多对数时间确定性网络分解与分布式去随机化。载于第52届 ACM SIGACT 理论计算年会论文集（STOC），第350–363页，2020年。

[28] Sandeep K. Shukla、Daniel J. Rosenkrantz 和 Sekharipuram S. Ravi。关于匿名网络自稳定图算法的观察。载于《第二届自稳定系统研讨会论文集》，SSS，1995年。[29] Volker Turau。使用非公平分布式调度器解决独立集和支配集问题的线性自稳定算法。《信息处理快报》，103(3)：88–93，2007年。[30] Volker Turau。使随机化算法实现自稳定。载于《结构信息与通信复杂性——第26届国际研讨会论文集》，SIROCCO，第309–324页，2019年。[31] Volker Turau 和 Christoph Weyer。无线传感器网络的随机化自稳定算法。载于《自组织系统：第一届国际研讨会论文集》、IWSOS，以及《网络架构与服务新趋势：第三届国际研讨会论文集》、EuroNGI，第74–89页，2006年。[32] Leslie G. Valiant。并行计算。载于《第七届IBM计算机科学数学基础研讨会论文集》，1982年。