arXiv:2301.05066v1 [math.RT] 12 Jan 2023

利用 Mickelsson–Zhelobenko代数研究辛单生成子的分支

David Eelbode 和 Guner Muarem

摘要。本文研究辛狄拉克算子的（多项式）解空间（重点关注 1 次齐次解）。该空间构成辛李代数 $\mathfrak{sp}(2m)$ 的一个无限维表示空间。由于 $\mathfrak{so}(m) \subset \mathfrak{sp}(2m)$，这引出了一个分支问题，它是调和分析中经典 Fischer 分解的推广。由于辛狄拉克算子的解空间具有无限维性，这并非一个简单的问题：分解中出现的各个直和项及其显式嵌入因子，都将通过适当的 Mickelsson–Zhelobenko代数来确定。

数学主题分类（2010）。主要分类：15A66，17B10；次要分类：00A00。

关键词。分支、辛狄拉克算子、Mickelsson–Zhelobenko代数、单纯调和函数。

1. 引言

狄拉克算子是一种作用于旋量值函数的一阶微分算子，它将 Δ 上的拉普拉斯算子 $\mathbb{R}^m$分解。狄拉克最初提出这一算子，是为了尝试分解波算子这一著名问题，由此得到薛定谔方程的相对论不变形式。此后，这一算子在表示论和 Clifford 分析等数学领域中发挥了关键作用。后者是一种多维函数理论，常被描述为调和分析的精细化以及复分析的推广。它以狄拉克所引入算子的推广为核心（他的算子 $\partial\!\!\!/$ 定义在 4 维空间中），可以看作克利福德代数的生成元 e_k （作为所谓旋量上的自同态起作用）与相应偏导数 ∂_{x_k}之间的一种收缩。更准确地说，通过以下定义关系引入克利福德代数

$\{e_a, e_b\} = e_a e_b + e_b e_a = -2\delta_{ab}$（其中 $1 \leq a$、$b \leq m$）狄拉克算子定义为

$$\underline{\partial}_x = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_m \end{pmatrix} \mathrm{Id}_m \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} e_j \partial_{x_j} \ ,$$

其中，添加了 $(m \times m)$–单位矩阵 Id_m，以说明“缩并”的含义。$\underline{\partial}_x$ 的零解称为单子，可视为全纯函数的推广。通常首先研究狄拉克算子的 k 次齐次多项式解，它们属于空间 $\mathcal{M}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{S})$，其中 $\mathbb{S}$ 表示前述旋量空间。

通过在将代数生成元与偏导数缩并时使用不同于 Id_m 的矩阵，可以得到算子 $\underline{\partial}_x$ 的一种显然推广。一个重要例子是辛狄拉克算子，它定义在辛空间而非正交空间上（例如参见 Habermann 的工作 [5]）。该算子记为 D_s，定义为辛克利福德代数的生成元与偏导数之间的缩并，所用矩阵为斜对称矩阵 Ω_0（而非 Id_m）。辛克利福德代数生成元满足海森堡关系$[\partial_{z_j}, z_k] = \delta_{jk}$（这是上文生成元 e_k 所满足的克利福德关系的辛类比）。请注意，这里符号 z_j 表示实变量，之所以选用这些符号，是因为本文还将出现变量集（实变量） x_j 和 y_j。与正交情形形成鲜明对比的是，辛克利福德代数不再是有限维的。这一趋势还体现在相应的辛旋量空间 $\mathbb{S}_0^\infty$也变成了无限维空间。

本文研究由辛狄拉克算子的解（广义单生成子函数）定义的无限维空间。这些空间可以通过代数方式定义

$$\mathbb{S}_k^\infty = \mathcal{M}_k^s(\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{S}_0^\infty) := \mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{C}) \boxtimes \mathbb{S}_0^\infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

这里，$\boxtimes$ 表示 $\mathfrak{sp}(2m)$表示 $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2m}, \mathbb{C})$、基本向量表示的 k次对称幂（由多项式构成）以及辛旋量空间 $\mathbb{S}_0^\infty$（也称为 Segal-Shale-Weil 表示）的嘉当积。这些空间包含辛狄拉克算子的 k次齐次 $\mathbb{S}_0^\infty$值解。作为 $\mathfrak{sp}(2m)$表示时，这些空间的性质已为人所知（例如参见 [1] 及其中的参考文献）；但本文将把这些空间视为正交表示空间。这是因为 $\mathfrak{so}(m) \subset \mathfrak{sp}(2m)$，这意味着我们讨论的是一个分支问题。

一般而言，分支问题可以描述如下：给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 及其子代数 $\mathfrak{h}$，我们希望了解表示 ρ 作为 $\mathfrak{h}$-表示时的性质。这个受限表示 $\rho|_{\mathfrak{h}}$ 将不再是不可约的，而会分解为 $\mathfrak{h}$-不可约表示。随后，分支法则会描述其中出现的不可约

分量及其重数。对于辛旋量（即空间 $\mathbb{S}_0^\infty$），这给出了调和分析中的 Fischer分解，也就是说，关于 $\mathbb{S}_k^\infty$ 的分支问题将引出相应的推广。为了描述无限维辛表示空间 $\mathbb{S}_k^\infty$ 在包含关系 $\mathfrak{so}(m) \subset \mathfrak{sp}(2m)$ 下的分支，我们将使用一种称为 Mickelson-Zhelobenko 代数的二次代数（一般构造及其性质见 [9] ）。

2. 辛狄拉克算子与单子

我们将在辛空间 $\mathbb{R}^{2m}$ 中工作，使用坐标 $(\underline{x}, \underline{y})$，并配备典范辛形式 $\omega_0 = \sum_{j=1}^m dx_j \wedge dy_j$。该辛形式的矩阵表示为

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_m \\ -\mathrm{Id}_m & 0 \end{pmatrix}.$$

由所有保持这一非退化斜对称双线性形式的可逆线性变换构成的群称为辛群，其形式化定义如下：

$$\mathsf{Sp}(2m, \mathbb{R}) = \{M \in \mathsf{GL}(2m, \mathbb{R}) \mid M^T \Omega_0 M = \Omega_0\}.$$

这是一个维数为 $2m^2 + m$ 的非紧群。其（实）李代数记作 $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$。在正交情形中，由以下序列确定的自旋群

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Spin}(m) \to \mathsf{SO}(m) \to 1$$

在狄拉克算子 $\underline{\partial}_x$ 的不变性以及旋量 $\mathbb{S}$ 的定义中发挥着至关重要的作用。在辛情形中，发挥这一作用的是由正合序列确定的亚辛群 $\mathsf{Mp}(2m, \mathbb{R})$

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathsf{Mp}(2m, \mathbb{R}) \to \mathsf{Sp}(2m, \mathbb{R}) \to 1.$$

尽管存在这些类比，但两者仍有一些根本区别：

(i) 首先，群 $\mathsf{SO}(m)$ 是紧的，而 $\mathsf{Sp}(2m, \mathbb{R})$ 则不是。这对表示论有重要影响。事实上，亚辛群不是矩阵群，也不存在（忠实的）有限维表示。

(ii) 正交旋量 $\mathbb{S}$ 可以实现为克利福德代数中的一个极大左理想，但辛旋量并非如此。后者通常被建模为无限维 Segal-Shale-Weil 表示中的光滑向量（参见 [7] 及其中的参考文献）。也可以将辛旋量空间 $\mathbb{S}_0^\infty$ 认作由变量 $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ 构成的多项式空间 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$；本文将采用这种方法。

定义 2.1. 设 (V, ω) 为一个辛向量空间。辛克利福德代数 $\mathsf{Cl}_s(V, \omega)$ 定义为张量代数 $T(V)$ 关于双边理想 $\mathcal{I}_\omega := \{\underline{v} \otimes \underline{u} - \underline{u} \otimes \underline{v} + \omega(\underline{v}, \underline{u})$ 的商代数：

$\underline{u},\underline{v}\in V\}$. 换言之，$\mathrm{Cl}_s(V,\omega):=T(V)/\mathcal{I}_\omega$ 是由 V 生成、满足关系 $[\underline{v},\underline{u}]=-\omega(\underline{v},\underline{u})$ 的代数，其中省略了张量积符号。

定义 2.2。记 $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle:=\sum_{k=1}^m u_kv_k$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的典范内积（其中我们允许偏导数作为系数出现，见下文的算子）。接下来，我们定义作用于 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C})$ 上的多项式函数的以下算子：

(i) 辛狄拉克算子 $D_s=\langle\underline{z},\underline{\partial}_y\rangle-\langle\underline{\partial}_x,\underline{\partial}_z\rangle$。(ii) 关于辛 Fischer 内积的伴随算子 $X_s=\langle\underline{y},\underline{\partial}_z\rangle+\langle\underline{x},\underline{z}\rangle$（更多详情见 [2] 第 5 节）。(iii) 欧拉算子 $\mathbb{E}=\sum_{j=1}^m(x_j\partial_{x_j}+y_j\partial_{y_j})=\mathbb{E}_x+\mathbb{E}_y$，用于测量基变量 $(\underline{x},\underline{y})\in\mathbb{R}^{2m}$中的齐次次数。

请注意，有些作者使用记号 $\langle\nabla_x,\nabla_y\rangle$ 表示诸如$\sum_k\partial_{x_k}\partial_{y_k}$这样的表达式，但这里我们将使用狄拉克算子符号，而不是 nabla 算子。

引理 2.3。这三个算子 $X=\sqrt{2}D_s$, $Y=\sqrt{2}X_s$ 及其交换子 $H=[X,Y]=-2(\mathbb{E}_x+\mathbb{E}_y+m)$ 构成了李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 的一个副本。

现在很容易看出，辛狄拉克算子不过是 Weyl代数生成元 (z_k,∂_{z_k}) 与向量场 $(\partial_{x_k},\partial_{y_k})$ 之间通过典范辛形式 Ω_0进行的收缩，其中 $k=1,\ldots,m$。

定义 2.4。 k 次齐次辛单生成子的空间定义为 $\mathbb{S}_k^\infty:=\ker(D_s)\cap\big(\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{C})\otimes\mathcal{P}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})\big)$，其中向量变量 $\underline{z}\in\mathbb{R}^m$ 中的空间 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})$ 扮演着辛旋量空间$\mathbb{S}_0^\infty$的角色。

注意，作为一个 $\mathfrak{sp}(2m,\mathbb{R})$-模，$\mathbb{S}_k^\infty$可约，并分解为两个不可约部分：$\mathbb{S}_k^\infty=\mathbb{S}_{k,+}^\infty\oplus\mathbb{S}_{k,-}^\infty$，其最高权为

$$\mathbb{S}_{k,+}^\infty\longleftrightarrow\left(k-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}\right)\quad\text{and}\quad\mathbb{S}_{k,+}^\infty\longleftrightarrow\left(k-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{3}{2}\right).$$

这些权项由 Cartan代数 $\mathfrak{h}=\mathrm{Alg}(X_{jj}:1\leq j\leq m)$ 固定，其中元素 X_{jj} 将在下文的引理中定义。本文将省略宇称符号，并用 $\mathbb{S}_k^\infty$作为一种同时涵盖正旋量和负旋量的记号（在我们的模型中，这对应于变量 $\underline{z}\in\mathbb{R}^m$的偶次或奇次幂，见下文，因此必要时总能轻松地将其“分解”为不可约分量）。

可以证明，引理 2.3 中的三个算子在辛李代数的作用下是不变的，也就是说，它们与以下生成元对易（另见 [3] 中的引理 3.3）：

引理2.5。辛李代数 $\mathfrak{sp}(2m)$ 在辛旋量值多项式空间 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{2m},\mathbb{C})\otimes\mathbb{S}_0^\infty$ 上有如下实现:

$$\begin{cases} X_{jk}=x_j\partial_{x_k}-y_k\partial_{y_j}-(z_k\partial_{z_j}+\frac{1}{2}\delta_{jk}) & 1\le j,k\le m\\ Y_{jk}=x_j\partial_{y_k}+x_k\partial_{y_j}-\partial_{z_j}\partial_{z_k} & 1\le j<k\le m\\ Z_{jk}=y_j\partial_{x_k}+y_k\partial_{x_j}+z_jz_k & 1\le j<k\le m\\ Y_{jj}=x_j\partial_{y_j}-\frac{1}{2}\partial_{z_j}^2 & 1\le j\le m\\ Z_{jj}=y_j\partial_{x_j}+\frac{1}{2}z_j^2 & 1\le j\le m \end{cases} \tag{2.1}$$

将 $\mathbb{S}_0^\infty$ 视为正交李代数 $\mathfrak{so}(\mathfrak{m})\subset\mathfrak{sp}(2m)$ 的表示空间时，其分支法则导出关于变量 $\underline{z}\in\mathbb{R}^m$ 的 $\mathbb{C}$ 值多项式的 Fischer分解（见下文）。请注意，$\mathfrak{so}(m)$ 由算子 $X_{jk}-X_{kj}$（其中 $1\le j<k\le m$）生成，由此得到量子力学中无处不在的著名角动量算子（通常记作 L_{ab}，其中 $1\le a<b\le m$）。因此，在我们先前的论文 [3]，中，我们研究了下一个情形 $k=1$，因为这是上述 Fischer分解的一种自然推广。我们的分支法则（定理5.6，见 [3]）的主要问题在于，这些 $\mathfrak{so}(m)$ 空间以无限重数出现，而这些重数并不总是容易追踪。因此，本文的主要目标是展示如何在一个代数框架中组织这些对象；该框架也适用于 k 的其他取值，并使用某种二次代数。

3. 三个向量变量中的单纯调和函数

本节将介绍三个向量变量中调和多项式的一种推广。我们将通过一组“自然”的 $\mathfrak{so}(m)$-不变微分算子的解空间来实现这一点。相应的 Howe 对偶对将有助于解决上文讨论的分支问题。为求完整起见，我们回顾以下基本定义:

定义 3.1. 若函数 $f(\underline{x})$ 定义在 $\mathbb{R}^m$ 上，且满足 $\Delta f(\underline{x})=0$，则称其为调和函数。k 次齐次调和多项式定义为 $\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m,\mathbb{C}):=\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})\cap\ker(\Delta)$。对于所有 $k\in\mathbb{Z}^+$，这些空间都给出 $\mathfrak{so}(m)$ 的不可约表示，其最高权为 $(k,0,\dots,0)$。

众所周知，k-齐次多项式空间 $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})$ 作为 $\mathfrak{so}(m)$-模是可约的（例如参见 [4]），并且可分解为调和多项式。事实上，整个多项式空间的分解称为前文提到的 Fischer分解，表示为

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^m,\mathbb{C})=\bigoplus_{k=0}^{\infty}\bigoplus_{p=0}^{\infty}|\underline{z}|^{2p}\mathcal{H}_k(\mathbb{R}^m,\mathbb{C}).$$

这一切都可以推广到多个向量变量的情形（有时也称为“矩阵变量”）：对于 $\mathfrak{so}(m)$ 的任意最高权，都存在一个由单纯调和函数（半整数表示对应的单子）构成的（多项式）模型。更多详情请参阅 [8] 。在本文中,

我们将考察由三个整数 (a,b,c) 刻画的 $\mathfrak{so}(m)$-权对应的这些空间，其中 $a \geq b \geq c \geq 0$。另请注意，从现在起，权记号中的末尾零将省略，因此例如 $(k,0,\ldots,0)$ 将写作 (k)。首先，我们考察三个向量变量 $(\underline{z};\ \underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^{3m}$ 上的齐次多项式 $P_{a,\ b,\ c}(\underline{z};\ \underline{x},\underline{y})$。这里我们使用记号 $(\underline{z};\ \underline{x},\underline{y})$，以强调变量 $\underline{z}$（旋量变量，指 $\mathbb{S}_0^\infty$ 中的一个元素）与另外两个变量 $(\underline{x},\underline{y}) \in \mathbb{R}^{2m}$ 之间的区别，后两者是“普通”变量。参数 (a,b,c) 则表示关于 $(\underline{z};\ \underline{x},\underline{y})$ 的齐次次数。这些多项式承载着正交群的正则表示（或者说，承载着上文通过角动量算子给出的导出 $\mathfrak{so}(m)$-作用 L_{ab} ）。

我们进一步将三种向量变量中的 Weyl代数定义为由变量及其对应导数生成的代数：

$$\mathcal{W}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}) := \mathsf{Alg}(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma, \partial_{x_\delta}, \partial_{y_\varepsilon}, \partial_{z_\zeta}) \ \text{ with } \alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta \in \{1,\ldots,m\}\ .$$

与经典 Fischer分解的情形类似，其中李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 作为 Howe对偶伙伴出现，这里也有一个李代数出现。具体而言，它是李代数 $\mathfrak{sp}(6)$ $= \mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_{+2}$，其抛物子代数为 $\mathfrak{p} := \mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_0$，Levi子代数为 $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{gl}(3)$。子空间 $\mathfrak{g}_{\pm 2}$各包含六个“纯”算子（即仅含变量、作为乘法算子作用，或仅含导数）。更具体地说，这些子空间由以下 SO(m)-不变算子张成：

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{-2} &:= \mathrm{span}(\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\langle\underline{\partial}_x,\underline{\partial}_y\rangle,\langle\underline{\partial}_y,\underline{\partial}_z\rangle,\langle\underline{\partial}_x,\underline{\partial}_z\rangle)\\
\mathfrak{g}_0 &:= \mathrm{span}(\langle\underline{x},\underline{\partial}_y\rangle,\langle\underline{y},\underline{\partial}_x\rangle,\langle\underline{x},\underline{\partial}_z\rangle,\langle\underline{z},\underline{\partial}_x\rangle,\langle\underline{y},\underline{\partial}_z\rangle,\langle\underline{z},\underline{\partial}_y\rangle,\mathbb{E}_x,\mathbb{E}_y,\mathbb{E}_z)\\
\mathfrak{g}_{+2} &:= \mathrm{span}(|\underline{x}|^2,|\underline{y}|^2,|\underline{z}|^2,\langle\underline{x},\underline{y}\rangle,\langle\underline{y},\underline{z}\rangle,\langle\underline{x},\underline{z}\rangle)
\end{aligned}$$

定义 3.2。变量 $(\underline{z},\underline{x},\underline{y})$ 中次数为 (a,b,c) 的 Howe调和多项式空间定义为 $\mathcal{H}^*_{a,\ b,\ c}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}) := \mathcal{P}_{a,\ b,\ c}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}) \cap \ker(\mathfrak{g}_{-2})$。

在下文中，记号 $\ker(A_1,\ldots,A_n)$ 表示 $\ker(A_1)\cap\ldots\cap\ker(A_n)$，因此 $\ker(\mathfrak{g}_{-2})$ 意味着单纯调和函数被 $\mathfrak{sp}(6)$ 中所有（纯微分）算子湮灭。作为 $\mathfrak{so}(m)$ 的一个表示空间，空间 $\mathcal{H}^*_{a,\ b,\ c}$ 并非不可约。为了得到一个不可约（子）空间，我们必须施加额外条件。

定义 3.3. 变量 $(\underline{z},\underline{x},\underline{y})$ 中次数为 (a,b,c) 的单纯调和函数向量空间定义为

$$\mathcal{H}_{a,b,c}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}) := \mathcal{H}^*_{a,b,c}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}) \cap \ker\left(\langle\underline{z},\underline{\partial}_x\rangle,\langle\underline{z},\underline{\partial}_y\rangle,\langle\underline{x},\underline{\partial}_y\rangle\right)\ .$$

如 [8], 所示，这定义了 $\mathfrak{so}(m)$的一个不可约表示空间，其最高权为（a,b,c），其中必须满足支配权条件 $a \geq b \geq c$。由此得到上述结果（三个向量变量下的 Fisher 分解）的一般化：

定理3.4。三个向量变量（取值于 $\mathbb{R}^m$）上的复值多项式空间 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C})$，在 $\mathfrak{sp}(6)\times \mathrm{SO}(m)$的作用下具有如下无重数分解：

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{a\geq b\geq c} \mathbb{V}^{\infty}_{a,b,c}\otimes \mathcal{H}_{a,b,c}(\mathbb{R}^{3m},\mathbb{C}),$$

其中我们在求和中使用了支配权条件。这里的记号$\mathbb{V}^{\infty}_{a,\ b,\ c}$ 指的是一个关于 $\mathfrak{sp}(6)$ 的 Verma模（例如参见 [6]）。

4. Mickelsson-Zhelobenko代数（一般设定）

我们现在已经引入了 21 个微分算子，它们在 Weyl代数中（作用于$\mathbb{R}^m$中的 3 个向量变量）给出了李代数 $\mathfrak{sp}(6)$ 的一个实现。本节中，我们构造一个相关的代数，即所谓的 Mickelsson-Zhelobenko代数（也称为传递向量代数或步进代数） $\mathcal{Z}$。设 $\mathfrak{g}$ 为一个李代数，$\mathfrak{s}\subset\mathfrak{g}$ 为一个约化子代数。于是我们有分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{t}$，其中 $\mathfrak{t}$ 在交换子作用下承载一个 $\mathfrak{s}$作用（即$[\mathfrak{s},\mathfrak{t}]\subset\mathfrak{t}$）。对于 $\mathfrak{s}$，我们接着固定一个三角分解 $\mathfrak{s}=\mathfrak{s}^-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{s}^+$，其中 $\mathfrak{s}^{\pm}$ 由相对于 Cartan子代数 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{s}$的正根（分别为负根）组成。我们还通过 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{s}^+$在泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$中定义一个左理想 $J\subset\mathcal{U}(\mathfrak{g})$。由此可以定义 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$的一个特定子代数，称为正规化子：

$$\mathrm{Norm}(J):=\{u\in\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mid Ju\subset J\}.$$

关键在于，J 是 Norm(J) 的双边理想，因此我们可以定义商代数 $\mathcal{S}(\mathfrak{g},\mathfrak{s})=\mathrm{Norm}(J)/J$，它称为 Mickelsson 代数。

在构造的最后一步，我们将 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 扩张到一个适当的局部化 $\mathcal{U}'(\mathfrak{g})$，其定义如下：

$$\mathcal{U}'(\mathfrak{g})=\mathcal{U}'(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}\mathrm{Frac}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))\ ,$$

其中 Frac($\mathcal{U}(\mathfrak{h})$) 是 Cartan代数（的包络代数）中的分式域。对于这一扩张，也可以引入理想 J'（方法完全类似），相应的商代数 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g},\mathfrak{s}):=\mathrm{Norm}(J')/J'$ 即为 Mickelsson-Zhelobenko代数。由于有如下关系，这两个代数自然同构：

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g},\mathfrak{s})=\mathcal{S}(\mathfrak{g},\mathfrak{s})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})}\mathrm{Frac}(\mathcal{U}(\mathfrak{h}))\ .$$

请注意，这个代数有时也称为“传矢量代数”，下文中我们通常会使用这一称呼。

5. Mickelsson-Zhelobenko代数 $\mathcal{Z}(\mathfrak{sp}(6)\ \mathfrak{so}(4))$

现在我们将给出上述构造的一个具体示例，以帮助我们理解 $\mathbb{S}^{\infty}_k$ 的分支方式。首先，我们注意到：

引理 5.1. 这三个（正交不变）算子

$$L := \langle \underline{x}, \underline{\partial}_y \rangle - \frac{1}{2}\Delta_z \qquad R := \langle \underline{y}, \underline{\partial}_x \rangle + \frac{1}{2}|\underline{z}|^2 \qquad \mathcal{E} := \mathbb{E}_y - \mathbb{E}_x + \mathbb{E}_z + \frac{n}{2}$$

由此又得到李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 的另一个副本。该李代数与李代数 $\mathfrak{sl}(2) \cong \mathrm{Alg}(D_s, X_s)$ 对易。

因此，这意味着我们现在已经为李代数 $\mathfrak{so}(4) \cong \mathrm{Alg}(D_s, X_s) \oplus \mathrm{Alg}(L, R) \cong \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ 得到了一个具体实现，它是 $\mathfrak{sp}(6)$ 的一个子代数。该代数将扮演第 4 节中 $\mathfrak{s}$ 的角色。因此，我们来考察 $\mathfrak{so}(4)$ 中的最低权向量：

$$Y_1 = D_s = \langle \underline{z}, \underline{\partial}_y \rangle - \langle \underline{\partial}_z, \underline{\partial}_x \rangle \quad \text{and} \quad Y_2 = L = \langle \underline{x}, \underline{\partial}_y \rangle - \frac{1}{2}\Delta_z \ .$$

我们将关注同时满足两个最低权向量条件的解，即 $\ker(D_s, L)$。请注意，$\mathfrak{sp}(6)$ 中的算子不一定在该空间上作为自同态作用，但横向向量框架允许我们用（相关的）传矢量代数生成元“替换”这些算子，而这些生成元确实作为自同态作用。我们首先证明代数 $\mathfrak{so}(4)$ 在 $\mathfrak{sp}(6)$ 中的约化性。

引理 5.2. 李代数 $\mathfrak{so}(4)$ 在 $\mathfrak{sp}(6)$ 中是约化的。

证明. 我们需要证明 $\mathfrak{sp}(6)$ 分解为 $\mathfrak{so}(4) + \mathfrak{t}$，其中子空间 $\mathfrak{t}$ 承载着 $\mathfrak{so}(4)$ 的作用。为此，我们引入以下 15 个（线性无关的）微分算子：

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_x & \langle \underline{z}, \underline{\partial}_x \rangle & \langle \underline{y}, \underline{\partial}_x \rangle - |\underline{z}|^2 & \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle & |\underline{y}|^2 \\ \langle \underline{\partial}_x, \underline{\partial}_y \rangle & \langle \underline{z}, \underline{\partial}_y \rangle + \langle \underline{\partial}_z, \underline{\partial}_x \rangle & \mathbb{E}_x - \mathbb{E}_y + 2\mathbb{E}_z + m & \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle - \langle \underline{y}, \underline{\partial}_z \rangle & \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \\ \Delta_y & \langle \underline{\partial}_y, \underline{\partial}_z \rangle & \langle \underline{x}, \underline{\partial}_y \rangle + \Delta_z & \langle \underline{x}, \underline{\partial}_z \rangle & |\underline{x}|^2 \end{array}$$

现在，直接计算即可验证，对于这些算子中的每一个，它与 $\mathfrak{so}(4)$ 中某个算子的交换子仍是上述算子的线性组合。□

为了构造代数 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}, \mathfrak{s})$ 关于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(6)$ 和 $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(4)$ 的生成元，我们需要以下内容：

定义 5.3. 李代数 $\mathfrak{sl}(2) = \mathrm{Alg}(X, Y, H)$ 的极值投影算子是由以下（形式）表达式给出的幂等算子 π

$$\pi := 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{\Gamma(H+2)}{\Gamma(H+2+j)} Y^j X^j \ . \tag{5.1}$$

此算子满足 $X\pi = \pi Y = 0$ 和 $\pi^2 = \pi$。

请注意，该算子定义在前文所定义的泛包络代数的扩张 $\mathcal{U}'(\mathfrak{sl}(2))$ 上，因此，分母中含有算子 H 的形式级数是良定义的（实际上，总能化为有限项求和）。

引理 5.4. 极值投影算子 $\pi_{\mathfrak{so}(4)}$ 可表示为李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 的极值投影算子的乘积，即 $\pi_{\mathfrak{so}(4)} = \pi_{D_s}\pi_L = \pi_L\pi_{D_s}$（此处作为指标出现的算子指所用的 $\mathfrak{sl}(2)$ 实现）。

证明。这是因为两个 $\mathfrak{sl}(2)$ 副本彼此对易。 □

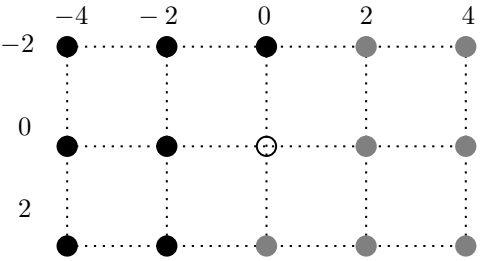
因此，算子 $\pi_{\mathfrak{so}(4)}$ 的具体形式为

$$\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{\Gamma(\mathbb{E}+2)}{\Gamma(\mathbb{E}+2+j)}X_s^jD_s^j\right)\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\frac{\Gamma(\mathcal{E}+2)}{\Gamma(\mathcal{E}+2+j)}R^jL^j\right)$$

并满足 $D_s\pi_{\mathfrak{so}(4)} = L\pi_{\mathfrak{so}(4)} = 0 = \pi_{\mathfrak{so}(4)}X_s = \pi_{\mathfrak{so}(4)}R$。这意味着我们现在有一个自然的对象，可用于将多项式投影到算子 D_s 和 L 的核的交集上。

$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{sp}(6)$ 中的 15 个算子本身并不保持这个核空间（因为这些算子未必与 D_s 和 L 对易），但它们的投影属于 $\mathrm{End}(\ker(D_s, L))$。下文中，我们将使用记号 $Q_{a,\,b}$，其中 $a \in \{\pm2, 0\}$ 和 $b \in \{\pm4, \pm2, 0\}$，来表示 $\mathfrak{t}$ 中的算子（见引理 5.2 及下方示意图）。对于每个算子 $Q_{a,\,b}$，我们还定义一个与之对应的算子 $\mathbb{P}_{a,\,b} := \pi_{\mathfrak{so}(4)}Q_{a,\,b}$。例如，$\mathbb{P}_{4,\,-2} = \pi_{\mathfrak{so}(4)}|\underline{y}|^2$。

随后将使用 $\mathbb{P}$-算子来定义传矢量代数的生成元。因此，下图应视为上文给出的 15 个算子 $Q_{a,\,b}$ 按 5×3 矩形排列的对应图示，其中每个算子 $\alpha \in \mathfrak{t}$ 都带有一个标签。标签（a，b）的含义源于以下观察：$\mathfrak{t} \cong \mathbb{V}_4 \otimes \mathbb{V}_2$ 作为 $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ 的一个表示，其中 $\mathbb{V}_n$ 是维数为（$n+1$）的不可约表示的标准记法。因此，给定算子 $\alpha \in \mathfrak{t}$，便可将数值 a 和 b 视为 $\mathfrak{so}(4)$ 中嘉当元素的对易子作用的特征值来确定。注意，投影算子 $\mathfrak{so}(4)$与这些嘉当元素对易（也就是说，算子$Q_{a,\,b}$ 和 $\mathbb{P}_{a,\,b}$ 确实带有相同的标签）。



尽管 $\mathcal{Z}(\mathfrak{sp}(6)\ \mathfrak{so}(4))$ 不是李代数，我们仍以一种可以使用“正根”和“负根”概念的方式组织了这些算子。更准确地说：黑点（分别地，灰点）表示负算子（分别地，正算子），白点则扮演“嘉当元素”的角色（这一类比在下文会派上用场）。这 7 个黑

点（分别地，7 个灰点）将分别称为 ρ^- 中（分别地，ρ^+ 中）的算子。再加上算子$\mathbb{P}_{0,\,0}$，我们便得到集合

$$\mathcal{G}_{\mathcal{Z}} = \{\mathbb{P}_{a,b} : a \in \{\pm 2, 0\}, b \in \{\pm 4, \pm 2, 0\}\},$$

包含传矢量代数 $\mathcal{Z}(\mathfrak{sp}(6)\ \mathfrak{so}(4))$ 的所有生成元。

根据 Zhelobenko 的一项一般性结果，这些生成元满足二次关系（即不同于经典李括号）。在下一个定理中，我们将把定义 3.3 中引入的空间 $\mathcal{H}_{a,\,b,\,c}(\mathbb{R}^{3m}, \mathbb{C})$ 与辛狄拉克算子 D_s、降算子 L 以及我们刚刚引入的负“根” ρ^- 的多项式解空间联系起来（即对应于黑点的算子 $\mathbb{P}_{a,\,b}$ ）。

定理 5.5. 关于算子 D_s 和 L 以及负根 $\rho^- \subset \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}$ 的解，若其关于变量 $(\underline{z}, \underline{x}, \underline{y})$ 的次数为 (a, b, c)，则恰好由单纯调和函数 $\mathcal{H}_{a,\,b,\,c}(\mathbb{R}^{3m}, \mathbb{C})$ 给出。换言之，我们有：

$$\mathcal{P}_{a,b,c}(\mathbb{R}^{3m}, \mathbb{C}) \cap \ker(D_s, L, \rho^-) = \mathcal{H}_{a,b,c}(\mathbb{R}^{3m}, \mathbb{C}).$$

证明。这个证明的思路是递归论证：在上面的矩形图式中，黑点的排序从左到右、从下到上（用标签表示，这意味着例如 $(2,-4) > (0,-4) > (2,-2)$）。这样做的原因如下：交换子 $[L, Q_{a,b}]$ 和 $[D_s, Q_{a,b}]$ 给出一个位于我们起始算子$Q_{a,b}$ 下方或左侧的算子。除一个常数因子外，这些算子分别等于 $Q_{a+2,b}$ 和 $Q_{a,b-2}$ （如果参数 a 和 b 不在正确范围内，则结果为零）。这意味着，若我们知道 $Q_{a+2,b}$ 和$Q_{a,b-2}$ 也作用为零，那么形如 $LQ_{a,b}$ 和 D_sQ_{ab} 的组合在核 L 和 D_s中的函数$H(\underline{z}; \underline{x}, \underline{y})$上作用为零。鉴于每个算子 $\mathbb{P}_{a,b} \in \rho^-$ 的形式为

$$\mathbb{P}_{a,b} = \big(1 + \mathcal{O}_1 L\big)\big(1 + \mathcal{O}_2 D_s\big) Q_{a,b}\ ,$$

其中，$\mathcal{O}_j$ 是对来自极端投影算子（除非该算子化为恒等算子，否则其右端总含有算子 L 或 D_s ）的修正项的一种简写。递归方案的要点在于，一旦我们知道 $Q_{a+2,b}$ 和$Q_{a,b-2}$ 平凡作用，这便立即说明 $\mathbb{P}_{a,b}H = 0 \Rightarrow Q_{a,\,b}H = 0$。由于 $\mathbb{P}_{2,-4}H = 0$ 和 $\mathbb{P}_{2,-4} = Q_{-2,4} = \Delta_y$，我们可以立即得出以下算子将平凡作用：

$$\Delta_y \quad \langle \underline{\partial}_x, \underline{\partial}_y \rangle \quad \Delta_x \quad \langle \underline{\partial}_y, \underline{\partial}_z \rangle \quad \langle \underline{z}, \underline{\partial}_y \rangle + \langle \underline{\partial}_x, \underline{\partial}_z \rangle \quad \langle \underline{z}, \underline{\partial}_x \rangle \quad \langle \underline{x}, \underline{\partial}_y \rangle + \Delta_z\ .$$

为了成为单纯调和的，$H(\underline{z}; \underline{x}, \underline{y})$ 应属于 $\mathfrak{sp}(6)$ 中 9 个算子的核（见定义 3.3），但不难看出，可以将这些算子重写为上一行 7 个算子的交换子。例如：$\Delta_x(\langle \underline{x}, \underline{\partial}_y \rangle + \Delta_z)H = 0$ 会得到 $\Delta_z H = 0$，因为$\langle \underline{\partial}_x, \underline{\partial}_y \rangle H = 0$ （等等）。□

6. 应用：分支辛单生成子

现在，我们将使用算子$\mathbb{P}_{a,\ b}$来明确描述k-齐次辛单生成子 $\mathbb{S}_k^\infty$的分支。也就是说，这将为我们提供一种系统的方法，用来定义实现这些空间在 $\mathbb{S}_k^\infty$ 中的同构副本的“嵌入因子”。为此，我们将再次作类比：可以考虑结合代数 $\mathcal{U}(\mathcal{Z})$，即$\mathcal{Z}(\mathfrak{sp}(6)\ \mathfrak{so}(4))$ 的“泛包络代数”。其含义应当很清楚：它是张量代数 $\bigotimes V$（其中 V 是作为底层向量空间的 $\mathcal{G}_\mathcal{Z}$-生成元张成的空间），再模去传矢量代数中“二次关系”所张成的理想。我们将把这个代数中的元素称为可排序的“字母表”中的“单词”。这一陈述应被视为庞加莱–比尔霍夫–维特定理（PBW 定理）的类比，虽需证明，但本文暂不证明。事实上，一般情形 $k \in \mathbb{Z}^+$ 将在一篇即将发表的（篇幅更长的）论文中讨论；本文将以情形 $k = 1$ 为指导性示例。

主要思路如下：对标签 (a, b) 施加字典序，将决定字母在字母表中的排列位置（从左到右），例如 $(4, 0) > (4, -2) > (2, 2)$。令这样的词作为算子作用于单纯调和函数 $H_{a,b,c}(\underline{z};\ \underline{x}, \underline{y})$，显然（由前面的定理可知），只有对应于示意图中灰点的“字母”会起作用（白点相当于常数，而黑点的作用平凡）。考虑到 $\underline{x}$ 和 $\underline{y}$ 中“词”的总次数不应超过 $k = 1$，在我们的例子中只能使用第三列和第四列中的算子 $\mathbb{P}_{a,b}$。请注意，一旦选定算子$\mathbb{P}_{ab}$（即单纯调和函数前面的“词”），这些多项式 $H_{a,b,c}(\underline{z};\ \underline{x}, \underline{y})$ 的次数 (a, b, c) 也就自动确定了：$\underline{z}$ 中的总次数以及 $(\underline{x}, \underline{y})$ 中的总次数分别为 k 和 1。因此，当“词”在 $(\underline{x}, \underline{y})$ 中是一次齐次的时，我们得到形如 $\mathbb{P}_{0,0}\mathcal{H}_{a,1,0}$ 和 $\mathbb{P}_{2,0}\mathcal{H}_{a,1,0}$ 的项；而当所选“词”的次数为零时，我们得到 $\mathbb{P}_{-2,2}\mathcal{H}_{a,0,0}$，$\mathbb{P}_{0,2}\mathcal{H}_{a,0,0}$ 和 $\mathbb{P}_{2,2}\mathcal{H}_{a,0,0}$。最后请注意，我们仍可对上述每个多项式作用升算子 $R \in \mathfrak{sl}(2)$（即在适当的单纯调和函数空间上作用适当的投影算子），从而得到 Verma 模的直和，并将其嵌入 $\mathbb{S}_1^\infty$。这基于一个显而易见却至关重要的观察：$[R, D_s] = 0$，因此作用 R 会保持辛单项解。这意味着，我们现在以一种完全不同的方式解决了 $k = 1$ 的分支问题，得到如下分解

$$\mathbb{S}_1^\infty \Big\downarrow_{\mathfrak{so}(m)}^{\mathfrak{sp}(2m)} \cong \bigoplus_{a\geq 1}\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} R^\ell(\mathcal{H}_{a,1} \oplus \mathbb{P}_{2,0}\mathcal{H}_{a,1}) \\ \oplus \bigoplus_{a\geq 0}\bigoplus_{\ell=0}^{\infty} R^\ell(\mathbb{P}_{-2,2}\mathcal{H}_a \oplus \mathbb{P}_{-2,0}\mathcal{H}_a \oplus \mathbb{P}_{-2,-2}\mathcal{H}_a).$$

总结这一分解背后的思路，我们据此断言， $\mathbb{S}_k^\infty$在以下对象的联合作用下可以分解：

$$\mathfrak{so}(m) \times \mathfrak{sl}(2) \times \mathcal{Z}(\mathfrak{sp}(6), \mathfrak{so}(4)),$$

由此，最终分解将包含如下形式的直和项

$$R^p\left(\mathcal{U}(\rho^+)\mathcal{H}_{a,b,c}\right)$$

其中，代数 $\mathcal{U}(\rho^+)$ 中适当的“字”以及适当的单纯调和函数空间。

致谢
作者 G.M. 得到了 FWO-EoS 项目 G0H4518N 的资助。

参考文献

[1] F. Brackx、R. Delanghe 和 F. Sommen， *Clifford Analysis*。数学研究札记 76，Pitman，伦敦，1982 年。[2] H. De Bie、M. Hol

Basic aspects of symplectic Clifford analysis ıkova、P. *for the symplectic Dirac operator* **27** 2 Somberg，。应用 Clifford 代数进展（）（2017） 1103–1132。[3] D. Eelbode、G. Muarem， *The Orthogonal Branching Problem for Symplectic Monogenics* **33** 3 2022 。应用 Clifford 代数进展（） （）。[4] J. Gilbert、M. Murray， *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis* 1991 。剑桥大学出版社，

[5] K. Habermann、L. Habermann， *Introduction to Symplectic Dirac Operators*。载于数学讲义，施普林格·柏林·海德堡，2006 年。[6] R. Howe， *Remarks on classical invariant theory*。美国数学会汇刊 33(2)（1989），539—570[7] P. Robinson、J. Rawnsley，

The Metaplectic Representation c Structures and ，Mp 。美国数学 *Geometric Quantization* 81， 410, 1989 会回忆录，第 卷，第 期，。[8] P. Van Lancker、F. Sommen、D. Constales， *Models for irreducible representations of m* **11** 2001 271 289 Spin( )。应用 Clifford 代数进展（） ，[9] D. Zhelobenko， *Extremal projectors and generalised Mickelsson algebras over reductive Lie algebras* **33** 1 1989 85 100 。载于苏联数学 （） （），—。

David Eelbode 比利时安特卫普大学数学系 米德尔海姆大道 1 号，2020 安特卫普，比利时 电子邮件：
david.eelbode@uantwerpen.be

Guner Muarem 比利时安特卫普大学数学系 米德尔海姆大道 1 号，2020 安特卫普，比利时 电子邮件：
guner.muarem@uantwerpen.be