梯度 TRIX

CHRISTOPH LENZEN,CISPA 亥姆霍兹信息安全中心，德国SHREYAS SRINIVAS, CISPA 亥姆霍兹信息安全中心，德国，以及德国萨尔大学计算机科学研究生院

arXiv:2301.05073v1 [cs.DC] 12 Jan 2023

梯度时钟同步（GCS）算法将直径为 D、规模为 n 的分布式网络中节点间最坏情况下的时钟偏差降至最低。它们在局部（即相邻节点之间）实现最优偏移量 $\Theta(\log D)$，并在全局实现 [18], $\Theta(D)$ [2]。正如 [3], 所示，这是一种极具前景的方法，可用于改进大规模同步片上系统（SoC）的时钟方案。遗憾的是，在大型系统中，故障会妨碍这些算法的实际应用。最先进的容错梯度时钟同步 [4] 存在一个在此情境下致命的缺点：它依赖节点和边复制。对于 $f = 1$，这意味着至少需要进行 16 倍的边复制，并设置高度数节点；而要容忍多达 f 个故障邻居，最优值为 $2f + 1 = 3$，两者相去甚远。

本文提出了一种适用于网格状有向图的自稳定 GCS 算法，该算法具有最优的节点入度和出度 3，并可容忍 1 个故障入邻居。若节点以相互独立的概率 $p \in o(n^{-1/2})$发生故障，则该算法以 $1 - o(1)$ 的概率实现渐近最优的局部偏斜 $\Theta(\log D)$；在链路延迟和时钟速度变化满足一般最坏情况假设，且其变化速度相对于系统速度较慢的条件下，这一结论仍然成立。该故障概率是在以 $1 - o(1)$ 的概率确保每个节点至多有一个入邻居发生故障的前提下所能达到的最大值。现代硬件的时钟速度已达吉赫兹级别，而该算法在每个时钟周期内可同时承受因故障导致的常数数量的任意变化，因此能够提供足够的鲁棒性，大幅扩大可靠同步时钟片上系统的规模。

CCS 概念：• **硬件 → 超大规模集成电路设计**；**超大规模集成电路设计**；
• **计算方法 → 分布式算法**；

其他关键词和短语：时钟同步、容错、超大规模集成电路、自稳定

1 引言

在其于 2004 [7], 年发表的开创性工作中，Fan 和 Lynch 提出了梯度时钟同步（GCS）这一任务。在一个时钟同步网络中，该任务要求将邻居之间最坏情况下的时钟偏差降至最低。两项关键见解促使人们致力于最小化这种局部偏斜：

- 在许多应用中，相邻节点之间的偏斜是衡量质量的恰当指标。
- 全局偏斜，即网络中任意一对节点之间的最大时钟偏移量，会随网络直径 D 线性增长 [2]。

与许多人的直觉相反，Fan 和 Lynch 证明，局部偏斜的下界为 $\Omega(\log D/\log\log D)$。后续研究进一步表明，这一界已非常接近最优：可实现的最佳局部偏斜为 $\Theta(\log D)$ [18]。全局偏斜与局部偏斜之间的这一指数级差距，强烈表明采用这种同步方法的系统具有更好的可扩展性。

然而，在这些成果发表十多年后，我们仍未发现有人尝试将这些技术应用于产品中。这并不是因为没有需求！为了进一步说明这一点，不妨考虑同步硬件的时钟控制。概念上，采用同步运行的先进硬件会使用树形网络从单一源分发时钟信号，例如参见 [9, 21]。然而，对于覆盖方形网格的任何树形网络，都将存在相邻的网格点，其在树中的距离与网格的边长成正比 [8]。因此，由时钟树驱动时钟的计算机芯片，其最坏情况下的局部偏斜必然会随芯片边长线性增长 [2]。事实上，这些理论结果也反映在硬件供应商的现实情况中。现代系统已经放弃维持全局同步运行，转而进行通信

作者地址：Christoph Lenzen，lenzen@cispa.de，德国萨尔布吕肯的 CISPA 亥姆霍兹信息安全中心；Shreyas Srinivas，shreyas.srinivas@cispa.de，德国萨尔布吕肯的 CISPA 亥姆霍兹信息安全中心，以及德国萨尔布吕肯的萨尔大学萨尔布吕肯计算机科学研究生院。

在多个时钟岛之间进行异步通信 [1]。这会带来高昂的代价，既体现在通信延迟 [12] ，也体现在设计难易度方面。

那么，是什么障碍阻碍了应用？至少在上述设定中，既不是隐藏常数过大，也不是算法过于复杂。恰恰相反，近期的研究表明，实现工作量很容易控制，而且对于中等规模的系统来说，已经能够带来回报 [3]。真正的主要障碍是故障。要理解这是关键问题，不妨回想一下，如今的硬件包含数量极其庞大的独立组件。近期的现成硬件晶体管数量已超过 100 亿 [22], ，这就要求故障率极低，或者具备一定程度的容错能力。在由多个异步交互的时钟岛构成的系统中，这些时钟岛是天然的故障遏制区域。因此，每个时钟岛都可以采用无法承受故障的时钟方案，并将时钟子系统的故障视为相应时钟岛的故障。相比之下，当各时钟岛的时钟子系统通过时钟同步算法相互交互时，我们必须确保单个时钟岛发生时钟故障不会导致整个系统崩溃！

容错时钟。 在对硬件进行时钟同步时，高连通性网络无法扩展。这限制了可承受的并发故障数量，因为要容忍多达 f 个故障，节点连通度必须达到 $2f+1$。在 [4], 中，通过增强任意网络，使其以容错方式模拟 [18] 中的 GCS 算法，可渐近地达到这一界限。这里，增强是指将原网络中的每个节点替换为一个大小为 $3f+1$ 的团，并将每条边替换为一个二部团。随后，团内部使用经典的 Lynch-Welch 算法 [10], 进行同步，并将由此产生的局部输出视为联合簇时钟（的近似值），再在其上模拟 [18] 中的非容错 GCS 算法。

遗憾的是，由于边的开销过大，这种方法并不实用。暂且不论渐近复杂度——相较于原图，边的开销为 $\Theta(f^2)$，而非 $O(f)$ ——即使对于 $f=1$ 这一重要特例，节点度也至少要达到 15。这与当前分布式技术的简洁性相去甚远，而且是 $2f+1=3$ 的最小节点度的 5 倍。对理论学家而言看似“适中的常数”，不仅会让工程师头疼：他们必须用较少的层和精确的时序来布设所有这些边；还会显著增加通信延迟不确定性。反过来，这会直接导致偏斜增大，使其与现有技术的盈亏平衡点超出实际相关范围。

总而言之，关键在于尽可能接近所需的最小连通性。这一思路促成了对低度网络中容错时钟分配的研究 [6, 20]。这两项工作有一个共同点：都假设时钟信号由中心位置生成。因此，这些方法能够通过非常简单的脉冲转发方案实现自稳定，并容忍孤立故障。其基本思想是逐层传播信号：每个节点等待两个节点发出时钟脉冲后，再在本地生成并转发自己的脉冲。此外，研究假设在没有故障时，延迟随时间变化缓慢。因此，使输入频率与网格层之间的预期延迟相匹配，就能让相邻层之间的时钟脉冲保持良好同步。

上述工作所采用的网格结构（图 1）以及给出的偏斜界各不相同：

- 设 $d-u$ 和 d 分别表示端到端通信延迟的最小值和最大值，则在宽度为 D [6] 的网格中，局部偏斜的上界为 $d+O(u^2D/d)$。由于实际中 $d \gg u$，这是一个非平凡的界。遗憾的是，$d \gg u$ 这一事实也意味着该界对于应用而言过大。更糟的是，每发生一次故障，该界就会增加 d。

- 在 [20], 中，每个故障最多会使局部偏斜增加 u。请注意，所用网格也具有所需的最小连通性，因为每个节点仅有 3 条入边和 3 条出边。

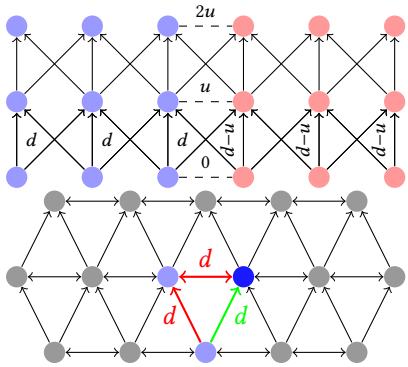


图 1。TRIX [20]（顶部）和 HEX [6]（底部）网格。TRIX 采用朴素的脉冲转发方案，即等待每个脉冲的第二个副本到达后再转发。我们可以看到，TRIX 网格可能累积出Θ（uD）的偏斜。在 HEX 网格中，每个节点会等待来自入邻居的两个脉冲副本。然而，4 个入邻居中的 2 个位于同一层；如果前一层的某个邻居发生故障，就会导致 d 的偏斜。

遗憾的是，这些优势是以最坏情况下的偏斜随层数增加而扩展不佳为代价的：在第 ℓ 层，相邻节点的脉冲最多可能相差 $u\ell$ 时间。

请注意，为了容忍任意组件的故障，时钟源也必须进行复制，并且这些副本必须以容错且自稳定的方式保持同步。然而，在此可以采用适用于全连接网络的技术 [11, 19]；将其用于单个位置的 $f = 1$ 并不会带来可扩展性问题。

鉴于上述情况，本文提出以下问题

“能否在最小连通性的条件下，以容错方式实现较小的局部偏斜？”

我们的贡献

对于 $f = 1$ 这一特殊情况，我们对上述问题给出了肯定的回答。我们沿用 [20], 中的同一网格，但采用不同的脉冲转发规则来实现这一点。我们提出的算法旨在成为 [18] 中 GCS 算法的离散且容错的对应版本。

要实现这一点，需要在概念和技术层面进行重大创新。在概念层面，我们的算法在最小度为 2 的任意基图上，模拟了 GCS 算法的一个离散化变体（该算法并不具备容错能力！）[18] 。具体而言，图的每个副本（称为层）代表 GCS 算法的一个“时间步”。对于每个节点，在某一层上的副本与下一层上它自身及其邻居的副本之间都存在一条边。沿这些边转发的脉冲具有两种截然不同的功能：

- 发送给邻居副本的脉冲消息，对应于 GCS 算法中用于估计时钟偏移量的消息。
- 在同一节点的各个副本之间发送的脉冲消息，会将其中一个副本的本地时间传递给下一个副本。

请注意，这会使网格中的一个永久故障节点转变为仅在单个时间步内发生故障的模拟节点。这一点至关重要，因为它使我们能够依赖文献 [18]中 GCS 算法的自稳定性。这些性质在 [13]中有所隐含展示；在本研究的不同设定下，我们将对其进行明确证明。

然而，仅凭这一点并不能保证正确节点之间的偏斜有界，因为我们还需要限制此类“瞬时”故障对所模拟算法状态的影响。

否则，故障将任意增大偏斜，从而实际上破坏下游节点：对于任意给定节点，来自前一层邻居的脉冲被接收的最早或最晚时间可能由故障节点决定。如果至多有一个故障入邻居，我们就可以克服这一问题。控制故障节点对脉冲时间影响的关键观察在于，它实际上只能影响以下三个时间中的一个：来自前一层邻居副本的脉冲被接收的最早时间或最晚时间或节点自身副本发出的脉冲被接收的时间。特别是，这三个时间的中位数位于正确入邻居脉冲时间所跨越的区间内。通过施加额外约束，始终将脉冲生成的时间紧密绑定到该中位数，我们可以限制故障对偏斜的局部影响。

总而言之，我们希望同时模拟 [18]，中 GCS 算法的离散时间变体，并保证脉冲转发时间与中位接收时间加上一个固定偏移量后相同，误差足够小。遗憾的是，现有的任何能够实现较小局部偏斜 [14, 15, 17, 18] 的 GCS 算法都无法直接用于此目的，因为它们的决策规则与上述“遵循中位数”的要求相冲突。

作为我们的主要技术贡献，我们解决了这一冲突，并同时将所得算法调整为离散情形。为此，我们确定了 [15] 中引入的慢速和快速条件的适当弱化离散变体。本质上，对于脉冲时间领先于所有邻居脉冲时间的模拟节点，我们允许其将下一个脉冲延迟一段时间，该时长等于它与最快邻居之间的差值；对于脉冲时间晚于所有邻居的节点，也采用类似规则。从 [18]，中 GCS 算法的角度看，这相当于一次幅度可能任意大的时钟“跳跃”。我们利用这一点来实现遵循中位数的要求，即使故障节点可能任意改变其脉冲消息的时序。为防止相邻节点朝相反方向“跳跃”而产生不受控制的振荡行为，我们引入了一个额外条件，称为跳跃条件。该条件本质上会略微限制跳跃幅度，以避免消息延迟和本地时钟速度的不确定性导致节点“过冲”，进而可能造成任意大的偏斜，参见图 5。

一次调整如此多的参数，意味着无法确定这种方案是否可行。事实上，要界定这一新颖算法的偏斜非常具有挑战性，因为那些延迟脉冲而非加速脉冲的跳变，使此前所有工作中都存在的“时钟以至少 1 的速率推进”这一基本假设失效了 [14, 15, 17, 18]。因此，主要的技术难点和贡献最终变成了：在无故障情形下，证明同一层中的邻居之间的局部偏斜 L_ℓ ℓ 的界。

定理 2。 如果不存在故障，那么 $\mathcal{L}_\ell \leq 4\kappa(2+\log D)$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$均成立。

这里，将输入时钟频率设为 $1/(2d)$，得到 $\kappa \in \Theta(u + (\vartheta - 1)d)$，其中假设本地时钟的运行速率介于 1 和 $\vartheta > 1$之间。我们的所有结果都要求$d \gg u + (\vartheta - 1)d$，或者等价地说，局部偏斜相对于 d保持较小。请注意，如果该条件不成立，我们就超出了所关注的参数范围：此时，在理想条件下，偏斜相对于一个时钟周期的长度会变得很大，因此必须大幅降低时钟频率。

为应对故障，我们通过限制故障对时序的影响程度来进行界定。由于前述的遵循中位数规则，我们可以用局部偏斜来界定故障对时序的局部影响。然而，反复应用这一论证时，偏斜会随着故障数量的增加呈指数增长。虽然容忍固定数量的故障当然好于完全不容忍故障，但这仍然不能令人满意，因为故障入邻居这一要求以概率 $1 - o(1)$ 成立，而独立概率 $p \in o(1/\sqrt{n})$ 相当高。鉴于我们最

感兴趣的拓扑大致是一个方形网格，即大约有 $\sqrt{n}$ 层，因此，除非 p 非常接近 $1/n$，否则上述朴素方法无法对偏斜给出非平凡的界。

我们给出了一种改进的分析，利用了我们的基图几乎是一条直线这一点。因此， d跳邻域会随 d线性增长，进而影响第 ℓ 层节点脉冲时间的第 $\ell' \in [\ell - n^{1/12}, \ell]$ 层节点数为 $\Theta(n^{1/6})$。因此，如果节点以$p \in o(1/\sqrt{n})$的概率发生故障，那么距离 $n^{1/12}$ 内影响给定节点的故障节点超过 2 个的概率为 $o(1/n)$。直观地说，这为模拟算法的自稳定性争取了足够的时间，使其能够再次降低局部偏斜，避免局势失控。

定理 5。 以概率 $1 - o(1)$，$\mathcal{L}_\ell \in O(\kappa \log D)$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 均成立。

最后一步是将这一层内局部偏斜的界扩展为涵盖不同层中相邻节点的界。当我们逐层传播脉冲时，无法期望不同层之间第 k个脉冲的脉冲时间相匹配。我们改为将输入周期与脉冲在每一层上所花费的标称时间相匹配。只要连续脉冲之间的消息延迟、时钟速度以及故障节点的行为没有变化 ，这种方法就能顺利奏效。

定理 7。 如果故障节点不会改变其输出脉冲的时序，那么以概率 $1 - o(1)$，$\mathcal{L} \in O(\kappa \log D)$。

在很大程度上，这一强假设在我们的特定情境中是合理的。现代系统的时钟速度处于吉赫兹范围内，而单个时钟周期内发生的时序变化量，远小于系统整个生命周期内的变化量 [23]。同样，最常见的时序故障是固定型故障，即下游节点观测到的信号始终为逻辑 0 或 1，以及连接中断。从接收节点的角度来看，这分别等同于提前或延迟到达的脉冲，且脉冲之间没有任何变化。

当然，时序仍会缓慢变化；上述良性故障会在某个时刻发生，在此之前节点工作正常，而且有些故障可能更严重。再次利用故障节点对时序的影响受局部偏斜限制这一点，定理 7 中的界可推广至每个脉冲中存在常数个任意故障，同时延迟和硬件时钟速度发生小幅变化的情况。

推论 7。 以概率 $1-o(1)$，即使在每个脉冲中，*(i)* 有常数个故障节点改变其输出行为和时序，*(ii)* 链路延迟变化幅度最大为 $n^{-1/2}u \log D$，且 *(iii)* 硬件时钟速度变化幅度最大为 $n^{-1/2}(\vartheta - 1) \log D$，仍有 $\mathcal{L} \in O(\kappa \log D)$。

最后，如果其他方法都失败，我们还可以依靠脉冲传播算法从任意瞬态故障中恢复的能力。与模拟的 GCS 算法相比，由于传播具有方向性，实现脉冲传播方案本身的自稳定非常简单。

定理 6。 脉冲传播算法可以通过自稳定方式实现。它会在 $O(\sqrt{n})$ 个脉冲内稳定下来。

鉴于这些结果，我们认为这项工作是在硬件时钟分配的实际场景中同时实现高性能和强鲁棒性的重要一步。与本研究所探讨的理论问题相一致，在节点以概率 $o(n^{-1/2})$ 发生故障的假设下，我们以最小可能的节点度实现了渐近最优的局部偏斜。

本文结构。 在第2节中，我们讨论系统模型，介绍运行同步算法所依托的图，并说明我们的建模选择及其非标准之处。随后，我们提出该算法的简化版本，以更清晰地展现其

概念方法；附录 B 展示了完整算法及其在不存在故障前驱节点时的等价性。接着，我们在第4节中对偏斜界进行形式化推导。

2 建模

我们采用的模型并非常规模型，因为它是针对引言中概述的特定场景量身定制的。因此，在适当之处，我们将着重说明并讨论模型的选择。

场景。 回想一下，我们的目标是为大型片上系统提供同步时钟信号。从物理角度来说，这意味着我们需要将时钟信号提供到一个矩形区域；为简单起见，我们假定该区域为正方形。我们希望在正方形区域内为均匀网格的节点提供这一信号，这些节点随后将作为相对较小的本地时钟树的根，为低层组件提供时钟信号。如果这些时钟树造成的最大时钟偏斜为 Δ，且相邻网格点之间的偏斜至多为 L，那么根据三角不等式，片上系统中相邻组件之间的最坏情况偏斜不超过 $L + 2\Delta$。本地时钟树可以采用标准方法设计。因此，以下我们将只关注这些时钟树根节点构成的网格。

我们的一项关键假设是，正确的相邻节点之间的通信延迟随时间变化缓慢。这使我们能够通过使输入频率与相邻层之间传播时间的倒数相匹配，在所有网格节点处生成同步脉冲。这一假设有两个依据：

- 传播延迟不确定性的主要来源是元件制造误差、老化，以及温度和频率变化；相对于输入时钟脉冲穿过整个大型片上系统所需的时间，这些因素的变化都较为缓慢。 [23]
- 一对相邻层之间所有 链路的延迟变化幅度即使高达 δ，偏斜界最多也只会增加 δ，参见引理22。

为了在第 0 层的节点处生成足够同步的脉冲，一种直接的方法是使用冗余路径，即由3-团构成且相邻团之间完全二部连接的路径，沿芯片的一条边从时钟参考源传播脉冲。正如推论 6 所示，这样可以产生局部偏斜足够小的输入脉冲。对于每个团，其中一个节点将作为第 0 层节点，向附近的第 1 层节点提供输出脉冲。

在理想网格中，每一层都应由一条路径构成。不幸的是，这会带来一个问题：路径的端点各少一个邻居，因此在前一层和后一层中都只有两个相邻节点。一种简单的解决方案是在边界节点之间添加额外的边，使该层变成一个环，并使整个图变成一个圆柱面（对第 0 层进行一些特殊处理）。然而，在正方形上实现这种方案，会导致边界节点之间的边过长，或者基本上需要复制每一层，从而使图中的节点数和边数都翻倍。

相反，我们选择只复制边界节点，从而为下一层提供“缺失”的输入。请注意，这会使边界节点旁边的节点的度增加 1。为此，我们采用一般性分析，允许各层是一个最小度为 2 的任意基图的副本。在图 2 和图 3 中，我们展示了基图，以及在我们假设的设置下，同步网络中相邻层之间节点的连通性。

网络图。给定一个最小度为 2、直径为 $D \in \mathbb{N}_{>0}$ 的简单连通基图 $H = (V, E)$。对于 $v, w \in V$，用 $d(v, w) \leq D$ 表示 H 中从 v 到 w 的距离。为了导出用于同步的图 $G = (V_G, E_G)$，我们为每个 $\ell \in \mathbb{N}$ 创建 V 的一个副本 V_ℓ。将 V_ℓ 中 $v \in V$ 的副本记为 (v, ℓ)，定义 $E_\ell := \{((v, \ell), (w, \ell + 1)) \mid \{v, w\} \in E \vee v = w\}$。现在，令 $V_G := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} V_\ell$ 且 $E_G := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} E_\ell$，即可得到 G。也就是说，对于每一层 $\ell \in \mathbb{N}$，我们都有一个副本

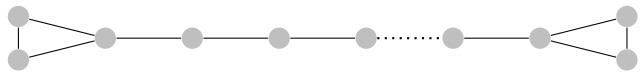


图 2. 本文使用的基图 H。我们没有使用环（否则会形成 TRIX 网格），而是复制直线两端的节点，以确保最小度为 2。另一种方法是使用直线，并利用以下事实：$O(\sqrt{n})$ 个边界节点之一发生故障的概率为 $o(1)$。

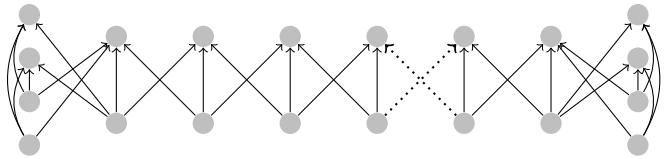


图 3. Layer 结构由我们选择的 H 产生 G。大多数节点的入度和出度均为 3，部分节点 4.

其出边指向 $\ell+1$ 层上它自身及其所有邻居的副本。[1] 由于 V_G 是有向无环图，我们将出邻居称为**后继节点**，将入邻居称为**前驱节点**。

故障模型。 未知子集 $F \subset V_G$ 中的节点是拜占庭式故障节点，这意味着这些节点可能以任意方式违反协议。边故障会映射为节点故障，即如果边 $((v,\ell),(w,\ell+1))$发生故障，我们就改为认为 (v,ℓ)发生故障。我们施加如下约束：任何节点都没有两个故障前驱节点。形式化地，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 和 $v \in V$，$|(\{(v,\ell)\} \cup \bigcup_{\{v,w\}\in E}\{(w,\ell)\}) \cap F| \le 1$。分析存在随机故障的系统时，我们假设每个节点都以概率 $p \in o(1/\sqrt{n})$ 独立发生故障，从而确保上述约束以概率 $1-o(1)$ 得到满足。此外，我们还限制：在连续的脉冲之间，改变时序行为的此类故障节点至多为常数个。

通信。 每个节点都能够通过其出边广播脉冲消息。若节点 $v_\ell \in V_\ell$ 在时间 $t_{v,\ell}$广播消息，其后继节点会在时间 $[t_{v,\ell}+d-u, t_{v,\ell}+d]$收到该消息（各后继节点收到的时间可能不同）。最大端到端延迟 d包括计算所导致的任何延迟。通常，延迟不确定性 u 远小于 d。如上所述，我们假设延迟是静态的，即每条边 $e=((v,\ell),(w,\ell+1))$都有一个未知但固定的关联延迟 $\delta_e \in [d-u,d]$，该延迟适用于从 (v,ℓ) 发送到 $(w,\ell+1)$ 的每个脉冲。

请注意，故障节点可以在任意时间发送脉冲，而无需进行广播；即使物理节点实现不允许点对点通信，边故障仍可能导致这种行为。

本地时钟与计算。 每个节点都能够借助本地时间基准近似测量时间的流逝。我们将此建模为节点 (v,ℓ) 可以查询硬件时钟 $H_{v,\ell}\colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 满足

$$\forall t < t' \in \mathbb{R}_{\ge 0},\ t'-t \le H_{v,\ell}(t') - H_{v,\ell}(t) \le \vartheta(t'-t).$$

对于某些 $\vartheta > 1$。我们不假设硬件时钟之间存在已知的相位关系。算法只会利用它们测量本地事件之间经过了多长时间。与延迟类似，我们假设硬件时钟速度是静态的。对于延迟，这一假设同样有充分的理由。

[1] 这是符号滥用，因为在一个由 $n := |V_G|$ 个节点组成的（近似）方形网格中，有 $\Theta(\sqrt{n})$ 层。由于 n（即网格的大小）只会在进行概率性陈述时起作用，因此我们选择了这种更方便的记法。

计算是确定性的。不过，除了接收消息之外，硬件时钟达到算法预先确定的某个时间值，也可以触发计算，并可能广播一个脉冲。

输出和偏斜。该算法的目标是同步正确节点生成的脉冲。我们假设第 0 层上的正确节点在时刻 $t_{v,0}^k$ 生成同步良好的脉冲，频率由我们控制。在附录 A 中，我们将详细讨论如何实现这一假设。所有其他正确节点则根据从其前驱节点收到的脉冲消息生成脉冲 $t_{v,\ell}^k$，$k \in \mathbb{N}_{>0}$。

我们衡量质量的标准是该算法所保证的最坏情况下的局部偏斜。我们将局部偏斜定义为同一层上相邻节点的第 k 个脉冲之间的最大偏移量，或第 ℓ 层和第 $\ell+1$ 层上相邻节点的脉冲 k 和 $k+1$ 之间的最大偏移量，取其中较大者。形式上，对于 $\ell \in \mathbb{N}$，我们定义

$$\mathcal{L}_\ell := \sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{\substack{\{v,w\}\in E\\(v,\ell),(w,\ell)\notin F}} \{|t_{v,\ell}^k - t_{w,\ell}^k|\}, \quad \mathcal{L}_{\ell,\ell+1} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \max_{\substack{((v,\ell),(w,\ell+1))\in E_\ell\\(v,\ell),(w,\ell+1)\notin F}} \{|t_{v,\ell}^k - t_{w,\ell+1}^{k+1}|\},$$

和 $L := \sup_{\ell\in\mathbb{N}} \max\{L_\ell, L_{\ell,\ell+1}\}$。这与局部偏斜的标准定义有所不同：

- 该定义调整为脉冲同步，它可视为时钟同步的一种本质上等价的离散时间变体 [16]。
- 在相邻层之间，我们对相邻脉冲进行同步。初始化完成后（即第一个脉冲已传播通过这个实际上有限的网格），这等价于根据层对脉冲编号进行偏移。

3 算法

本节讨论脉冲转发算法。我们给出该算法的一个简化版本；只要执行节点的前驱节点正确，该版本的行为就与完整算法相同。完整算法需要处理故障节点可能发送多条消息或完全不发送消息的情况。这会使记账和循环控制变得复杂，从而分散对算法运行原理的关注。因此，我们将完整算法放在附录 B 中，并在其中证明：当前驱节点没有故障时，完整算法与简化变体等价。

3.1 简化的脉冲转发算法

该算法按脉冲进行迭代。在每次迭代中，节点 (v, ℓ)

（1）使用其硬件时钟为前驱节点的脉冲记录到达时间；（2）根据这些时间戳确定校正值 $C_{v,\ell}$；（3）在接收到来自 $v_{\ell-1}$ 的脉冲后，按其硬件时钟计时，经过 $\Lambda - d - C_{v,\ell}$ 时间后转发该脉冲。

如果所有接收时间彼此接近，那么 $C_{v,\ell}$ 就会很小。考虑到消息大约需要 d 时间进行传输，这意味着 Λ 是脉冲从第 $\ell-1$ 层传播到第 ℓ 层的标称时间。我们需要选择足够大的 Λ，以确保始终能够实现上述流程。也就是说，我们需要考虑来自前一层的消息的接收时间可能相差多远，并确保 $\Lambda - d$ 大于这个值与由此产生的 $C_{v,\ell}$ 之和。

假设此前提成立，算法 1 将上述方法付诸实现。在每次循环迭代中，它会将三个接收时间初始化为 ∞：

- $H_{\text{自有}}$，它存储来自 $(v,\ell-1)$ 的脉冲到达时间。从模拟 GCS 算法的角度来看，这反映了由 (v,ℓ) 模拟的节点 $v \in V$ 的状态，$\ell \in \mathbb{N}$。
- $H_{\text{最小值}}$，用于存储来自邻居 $w_{\ell-1}$ $w \neq v$的脉冲的最小到达时间。这对应于本次迭代中从邻居 w v 在 G 收到的第一个脉冲。

算法 1 节点 (v, ℓ) 上的离散 GCS 简化伪代码，$\ell > 0$。如引理 29 所示，在没有故障的情况下，此代码等价于算法 3。参数 Λ 和 κ 将根据分析在稍后确定。

循环 $H_{\text{own}}, H_{\min}, H_{\max} := \infty$ **执行 如果收到来自** $(v, \ell-1)$ **的脉冲，则** $H_{\text{own}} := H_{v,\ell}(t)$ **如果收到来自第一个** $(w, \ell-1)$ **、** $\{v, w\} \in E$ **的脉冲，则** $H_{\min} := H_{v,\ell}(t)$ **如果收到来自最后一个** $(w, \ell-1)$ **、** $\{v, w\} \in E$ **的脉冲，则** $H_{\max} := H_{v,\ell}(t)$ **直到** $H_{\text{own}}, H_{\min}, H_{\max} < \infty$ $\mathbf{C}_{v,\ell} := \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \kappa/2$ **如果** $\mathbf{C}_{v,\ell} < 0$，**则** $\mathbf{C}_{v,\ell} := \min\{H_{\text{own}} - H_{\min} - \kappa/2 + 2\kappa, 0\}$ **否则，如果** $\mathbf{C}_{v,\ell} > \vartheta\kappa$，**则** $\mathbf{C}_{v,\ell} := \max\{H_{\text{own}} - H_{\max} - \kappa/2 - \kappa, \vartheta\kappa\}$ **等待直到** $H_{v,\ell}(t) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - \mathbf{C}_{v,\ell}$ **广播脉冲**

- $H_{\text{最大值}}$，用于存储来自邻居 $w_{\ell-1}, w \neq v$的脉冲的最大到达时间。这对应于本次迭代中从邻居 $w$of $v$in G收到的最后一个脉冲。

执行直到循环会为这些变量填入正确的值。算法的核心是计算$C_{v,\ell}$。如果没有故障，我们总是可以计算出

$$\Delta := \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2}$$

然后从范围 $[0, \vartheta\kappa]$中选择最接近的值，也就是说，令

$$C_{v,\ell} := \begin{cases} \Delta & \text{if } \Delta \in [0, \vartheta\kappa], \\ 0 & \text{if } \Delta < 0, \text{ and} \\ \vartheta\kappa & \text{if } \Delta > \vartheta\kappa. \end{cases}$$

为了直观理解这一选择，请注意，当 $H_{\text{own}} - H_{\max} + x = H_{\text{own}} - H_{\min} - x$时，$\min_{x\in\mathbb{R}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\min} - x, H_{\text{own}} - H_{\max} + x\}\}$可取到最小值，这等价于 $x = (H_{\max} - H_{\min})/2$，也就是 $H_{\text{own}} - \Delta = (H_{\max} - H_{\min})/2$。如果时序完全准确，那么脉冲消息的接收时间就可以作为第$\ell - 1$层节点实际脉冲转发时间的精确替代值。在第 k次迭代中，这意味着：如果$(v, \ell - 1)$生成脉冲的时间晚于$\min_{\{v,w\}\in E}\{t^k_{w,\ell-1}\}$和$\max_{\{v,w\}\in E}\{t^k_{w,\ell-1}\}$的平均值，那么就更快地在$(v, \ell)$生成脉冲。因此，任何满足$t^k_{v,\ell-1} - \min_{\{v,w\}\in E}\{t^k_{w,\ell-1}\} > \max_{\{v,w\}\in E}\{t^k_{w,\ell-1}\} - t^k_{v,\ell-1}$的$(v, \ell)$都会选择$C_{v,\ell} > 0$，试图将$\max_{\{v,w\}\in E}\{|t^k_{v,\ell} - t^k_{w,\ell}|\}$降低到比$\max_{\{v,w\}\in E}\{|t^k_{v,\ell-1} - t^k_{w,\ell-1}|\}$更低。这可以看作是通过贪心策略来降低局部偏斜。

遗憾的是，这种朴素策略未能考虑消息延迟的不确定性和漂移的硬件时钟所导致的误差。尽管如此，我们仍会采用这一策略，直至偏差达到 $O(\kappa)$。附加项的作用如下：

- 仅考虑 $x \in 4\kappa\mathbb{N}$ 的离散选择，而非任意的 $x \in \mathbb{R}$，这是算法方法得以成功的关键，参见 [15]。从本质上说，这是必要的，因为我们无法精确确定 $t_{v_{\ell-1},\,k} - t_{w_{\ell-1},\,k}$。以 $\kappa \in \Theta(u + (\vartheta - 1)(\Lambda - d))$ 为单位对观测到的偏斜进行离散化，可以实现一种精巧的策略：交替高估偏斜，以便在本地更早地产生下一个脉冲，从而“赶上”其他节点；再低估偏斜，以便“等待”其他节点赶上。
- 减去 $\kappa/2$，可用于补偿测量偏斜时产生的误差；这些误差是由消息延迟和硬件时钟速度的不确定性造成的。
- 为了限制故障前驱节点对 $(v,\ \ell)$ 造成的损害，我们确保 $(v,\ \ell)$ 生成脉冲时与 $t_{v,\ \ell-1}$、$\min\{t^k_{w,\ \ell-1} \mid (v,\ w) \in E\}$ 和 $\max\{t^k_{w,\ \ell-1} \mid (v,\ w) \in E\}$ 的中位数（再加上 Λ 的名义偏移量）之间的偏差不会过大。具体做法是允许进行校正 C_v：如果 $(v,\ \ell-1)$ 明显早于 $\min\{t^k_{w,\ \ell-1} \mid (v,\ w) \in E\}$ 生成脉冲，则进行 $\ell < 0$；如果它明显晚于 $\max\{t^k_{w,\ \ell-1} \mid (v,\ w) \in E\}$ 生成脉冲，则进行 $C_{v,\ \ell} > \vartheta\kappa$。

为了进一步说明最后一点，请注意，$(v,\ \ell)$ 的前驱节点中至多有一个故障节点。单个故障前驱节点只能任意影响三个值 H_{own}、$H_{\min}$ 和 $H_{\max}$ 中的一个：可以将 H_{own} $H_{\min}$ 设得小于来自正确节点 $(w,\ \ell-1)$、$\{v,\ w\} \in E$ 的最小接收时间，也可以将 $H_{\max}$ 设得大于来自正确节点 $(w,\ \ell-1)$、$\{v,\ w\} \in E$ 的最大接收时间。因此，确保脉冲生成时相对于中位数 $\{H_{\text{own}},\ H_{\min},\ H_{\max}\} + \Lambda - d$ 只有很小的偏移量，确实能限制故障造成的损害。

要实现所有期望的性质并非易事，因此需要相当复杂地选择 $C_{v,\ \ell}$。可以将其视为同时实现宽松的快条件和慢条件（如 [15] 中所述）、为使 GCS 算法在这些宽松的快条件和慢条件下正常运行所需的额外跳跃条件，以及尽可能贴近前驱节点脉冲时间中位数的要求。在第 4.2 节中，我们将明确说明（宽松的）慢条件和快条件，以及跳跃条件，并证明该算法实现了这些条件。引理 19 和 20 表明，该算法还确保偏离正确前驱节点所跨越的时间区间（偏移量为 Λ）的程度很小。

参数的选择有一定自由度。为简单起见，我们固定一个合适的选择 κ，并指出 d 必须满足下界 $B \in O(\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\{\mathcal{L}_\ell\} + \kappa)$。请注意，这一约束只是意味着偏斜界具有实用价值：如果偏斜与最大端到端延迟大小相近，就需要大幅降低系统速度。最后，Λ 必须至少为 $d + O(\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\{\mathcal{L}_\ell\})$；由于前述约束，对于例如 $\Lambda = 2d$ 这样的选择，这一条件是成立的。形式上，对于足够大的常数 C，[2]

$$\kappa := 2\left(u + \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)(\Lambda - d)\right), \tag{1}$$

$$\Lambda \geq C\vartheta(\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\{\mathcal{L}_\ell\} + u) + d, \text{ and} \tag{2}$$

$$d \geq C(\vartheta(\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\{\mathcal{L}_\ell\} + u) + \kappa). \tag{3}$$

完整算法。 完整算法不能等待所有前驱节点的消息来确定何时发送脉冲，因为如果故障节点届时不发送脉冲，就会导致其所有后继节点死锁。如上所述，下一次脉冲时间的硬件时钟时间与中位数 $\{H_{\text{own}},\ H_{\min},\ H_{\max}\} + \Lambda - d$ 相差不大，但在某些情况下确实取决于 $\max\{H_{\min},\ H_{\text{own}},\ H_{\max}\}$。不过，我们将证明 $\mathcal{L}_{\ell-1}$ 足够小，因此所有正确节点发出的脉冲消息都能及时收到。因此，只需根据 $H_{v,\ \ell}$ 等待至中位数 $\{H_{\text{own}},\ H_{\min},\ H_{\max}\} + \vartheta\mathcal{L}_{\ell-1}$（或更晚）即可。只要 $\Lambda - d$ 足够大，这就意味着任何用于

[2] 本文不尝试优化常数。

计算 $C_{v,\ell}$ 时，缺失的消息是由故障导致的；事实上，在这一点变得明确时，$C_{v,\ell}$ 已经确定，无论该消息会延迟多久才到达。

完整算法与算法 1 的区别在于，它涵盖了信号未能及时到达的情况。直观地说，可以将相应的消息到达时间（H_{own} 或 $H_{\max}$，$H_{\min}$ 是不可能的）视为 ∞，同时允许这样的 ∞ 在减法中抵消：

- 如果 $H_{\text{本地}} = \infty$，那么 $C_{v,\ell} \in H_{\text{本地}} - H_{\text{最大}} - O(\kappa)$，且 (v, ℓ) 将在本地时间 $H_{\text{本地}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} \in H_{\text{最大}} + \Lambda - d + O(\kappa)$ 生成其脉冲。
- 如果 $H_{\text{最大}} = \infty$ 且 $H_{\text{本地}} \geq H_{\text{最小}}$，那么 $C_{v,\ell} \in H_{\text{本地}} - H_{\text{最小}} \pm \Theta(\kappa)$ 和 (v, ℓ) 将在本地时间 $H_{\text{本地}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} \in H_{\text{最小}} + \Lambda - d \pm O(\kappa)$ 生成其脉冲。
- 如果 $H_{\text{最大}} = \infty$ 且 $H_{\text{本地}} < H_{\text{最小}}$，那么 $C_{v,\ell} \in [0, 2\kappa]$ 和 (v, ℓ) 将在本地时间 $H_{\text{本地}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} \in H_{\text{本地}} + \Lambda - d - O(\kappa)$ 生成其脉冲。

请注意，在所有情况下，脉冲都是在中位接收时间的 $\Lambda - d - \Theta(\kappa)$ 偏移量处生成的。完整算法遵循上述思路，利用了这样一个事实：无需无限期等待即可判断第三个信号是否迟到，详见附录 B。

最后但同样重要的是，我们希望使脉冲转发算法具备自稳定性 [5]。由于设计上选择沿有向无环图从单一源传播时钟信号，只要时钟生成也具备自稳定性，整个方案便会立即具备自稳定性。这一点很容易实现，因为可以假设来自前一层的信号已经实现良好同步。因此，节点只需检测除至多一个（故障）脉冲信号外的所有信号是否在相近的时间内到达，以确定何时清除内存并开始主循环的新一轮迭代。在附录 B.1 中，我们概述了如何使用标准技术实现这一点。

4 分析

现在，我们在假设第 0 层生成同步脉冲的前提下，分析脉冲传播方案。我们在附录 A 中讨论实现这一目标的合适方法。我们的分析按以下思路展开：

（1）我们证明，如果局部偏斜相对于 Λ 足够小，即公式（2）成立，那么所有正确节点都会按预期执行迭代。也就是说，第 $\ell > 0$ 层上的每个正确节点都会在其第 k 次循环迭代中，接收到其正确前驱节点发出的第 k 个脉冲。证明推迟到附录 B。随后，我们将在这一结论成立的假设下继续分析；待证明局部偏斜有界后，这一假设也将得到追溯性论证。（2）由于延迟和硬件时钟速度（近似地）是静态的，连续脉冲的相对时序若发生（显著）变化，必然是由故障节点导致。因此，将局部偏斜界定为有界的问题，归结为界定单个脉冲的层内偏斜 L_ℓ，因为这样的界必须考虑故障节点引入的全部变化。相关论证推迟到附录 C。（3）我们基于势函数，在没有故障的情况下分析 L_ℓ。结果不仅表明偏斜有界，还表明当势意外变大时会恢复。（4）我们证明故障节点对势的影响有限。结合上述恢复性质，我们得出结论：即使存在故障，偏斜也会呈现良好的表现。

如上所述，我们推理过程的前两个步骤将在附录中给出。主要难点在于界定单个脉冲的 L_ℓ。根据第一步，我们知道，正确节点的第 k 个脉冲仅取决于其前驱节点的第 k 个脉冲（引理 28）。因此，在下文中固定 k，并将正确的 $(v, \ell) \in V_G$ 的第 k 个脉冲时间记为 $t_{v,\ell}$。

回顾一下，对于 $v, w \in V$，我们用 $d(v, w)$ 表示它们在基图 H 中的距离。我们的分析围绕以下势函数展开。

定义 1（势函数）. 设 $v, w \in V$ 和 $s, \ell \in \mathbb{N}$。定义

$$\begin{aligned}\psi^s_{v,w}(\ell) &:= t_{v,\ell} - t_{w,\ell} - 4s\kappa d(v,w),\\ \Psi^s(\ell) &:= \max_{v,w\in V}\{\psi^s_{v,w}(\ell)\},\\ \xi^s_{v,w}(\ell) &:= t_{v,\ell} - t_{w,\ell} - (4s-2)\kappa d(v,w), \text{ and}\\ \Xi^s(\ell) &:= \max_{v,w\in V}\{\Xi^s_{v,w}(\ell)\}.\end{aligned}$$

对 $\Psi^s(\ell)$ 的界可直接转化为对 L_ℓ 的界。

观察 1。 若对于 $s, \ell \in \mathbb{N}$ 以及某个 $\Psi^s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$，有 $\Psi^s(\ell) \leq \Psi^s$，则 $\mathcal{L}_\ell \leq \Psi^s + 4s\kappa$。

证明。固定 $k \in \mathbb{N}$，并假设 $\{v, w\} \in E$ 使 $|t_{v,\ell} - t_{w,\ell}|$ 达到最大值。不失一般性，假设 $t_{v,\ell} \geq t_{w,\ell}$。由于 $\{v, w\} \in E$，我们有 $d(v, w) = 1$。因此，

$$|t_{v,\ell} - t_{w,\ell}| = t_{v,\ell} - t_{w,\ell} = \psi^s_{v,w}(\ell) + 4s\kappa \leq \Psi^s(\ell) + 4s\kappa \leq \Psi^s + 4s\kappa.$$

由于 $k \in \mathbb{N}$ 是任意的，因此可得 $\mathrm{L}_\ell \leq \Psi^s + 4s\kappa$。 □

总之，我们分析的目标是：对于满足 $4s\kappa \in O(u \log D)$ 的某个 s，将 $\Psi^s(\ell)$ 限制在较小的值内。

我们首先研究无故障时算法的行为。因此，除第 4.4 节外，本节所有陈述均默认不存在故障。注意，根据引理 29，这也意味着我们可以默认所有层 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ 中的节点都运行算法 1。在第 4.4 节中，我们将界定故障层对势函数的影响。

4.1 基本陈述

我们首先给出三个基本引理。第一个引理将脉冲的本地接收时间与实际发送时间联系起来，并将误差界定为 κ。

引理 1. 对于 $(v, \ell) \in V_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$，令 $t_{\min} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$，并令 $t_{\max} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$。那么

$$\begin{aligned}t_{v,\ell-1} - t_{\max} - \kappa \leq H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} \leq t_{v,\ell-1} - t_{\max}\\ t_{v,\ell-1} - t_{\min} - \kappa \leq H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2} \leq t_{v,\ell-1} - t_{\min}.\end{aligned}$$

证明。我们证明第一个不等式；第二个不等式的证明类似。令 $t'_{v,\ell-1}$ 和 $t'_{\max}$ 分别表示在 v_ℓ 接收到于 $t_{v,\ell-1}$ 和 $t_{\max}$ 时刻发送的脉冲消息的时间。根据消息延迟的界限，可得

$$\begin{aligned}t_{v,\ell-1} + d - u \leq t'_{v,\ell-1} \leq t_{v,\ell-1} + d \text{ and}\\ t_{\max} + d - u \leq t'_{\max} \leq t_{\max} + d.\end{aligned}$$

因此，

$$t_{v,\ell-1} - t_{\max} - u \leq t'_{v,\ell-1} - t'_{\max} \leq t_{v,\ell-1} - t_{\max} + u.$$

利用硬件时钟速率的界限，我们得到

$$|t'_{v,\ell-1} - t'_{\max} - (H_{\text{own}} - H_{\max})| \leq (\vartheta - 1)|t'_{v,\ell-1} - t'_{\max}| \leq (\vartheta - 1)(|t_{v,\ell-1} - t_{\max}| + u).$$

应用公式（2），我们推断出

$$\begin{aligned}|t_{v,\ell-1} - t_{\max} - (H_{\text{own}} - H_{\max})| &\le |t'_{v,\ell-1} - t'_{\max} - (H_{\text{own}} - H_{\max})| + u\\ &\le (\vartheta-1)|t_{v,\ell-1} - t_{\max}| + \vartheta u\\ &\le (\vartheta-1)\mathcal{L}_{\ell-1} + \vartheta u\\ &\le (\vartheta-1)\left(\frac{\Lambda-d}{\vartheta} - u\right) + \vartheta u\\ &= \left(1-\frac{1}{\vartheta}\right)(\Lambda-d) + u.\end{aligned}$$

最后，利用方程（1），我们得出

$$\begin{aligned}t_{v,\ell-1} - t_{\max} - \kappa &\le t_{v,\ell-1} - t_{\max} - 2\left(\left(1-\frac{1}{\vartheta}\right)(\Lambda-d) + u\right)\\ &\le H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2}\\ &\le t_{v,\ell-1} - t_{\max}.\end{aligned}$$

□

第二个引理表明，校正不会太大。

引理 2. 对于所有 $v \in V$ 和 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$，$C_{v,\ell} \le \Lambda - d$。

证明。简记

$$\Delta = \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2}.$$

我们区分三种情况。

- $\Delta < 0$。然后，算法 1 设置

$$C_{v,\ell} \le \min\left\{H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2} + 2\kappa, 0\right\} \le 0.$$

  根据公式（2），$\Lambda \ge d$，引理的结论在此情况下成立。
- $0 \le \Delta \le \vartheta\kappa$。然后，使用引理 1 的记号，

$$\begin{aligned}C_{v,\ell} = \Delta &< \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2}\\ &\le \min_{s\in\mathbb{N}}\left\{\max\{t_{v,\ell-1} - t_{\max} + 4s\kappa, t_{v,\ell-1} - t_{\min} - 4s\kappa\}\right\}\\ &\le \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{\mathcal{L}_{\ell-1} + 4s\kappa, \mathcal{L}_{\ell-1} - 4s\kappa\}\}\\ &= \mathcal{L}_{\ell-1},\end{aligned}$$

  根据公式（2），这小于 $\Lambda - d$。
- $\Delta > \vartheta\kappa$。注意，此时

$$\vartheta\kappa < \Delta \le \max\{H_{\text{own}} - H_{\max}, H_{\text{own}} - H_{\min}\} - \frac{\kappa}{2} = H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2},$$

如 $H_{\max} \geq H_{\min}$。因此，应用引理 2，

$$\begin{aligned} C_{v,\ell} &= \max\left\{H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} - \kappa, \vartheta\kappa\right\} \\ &\leq H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} \\ &\leq t_{v,\ell-1} - t_{\max} \\ &\leq \mathcal{L}_{\ell-1} \\ &< \Lambda - d. \end{aligned}$$

□

Th第三个引理给出了 $(v, \ell-1)$ 与 (v, ℓ) 的脉冲之间的时间差上界。

引理 3. 对于所有 $v \in V$和 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$，均有

$$d - u + \frac{\Lambda - d - C_{v,\ell}}{\vartheta} \leq t_{v,\ell} - t_{v,\ell-1} \leq \Lambda - C_{v,\ell}.$$

证明。令 $t'_{v,\ell-1}$ 表示 (v, ℓ) 在时间 $t_{v,\ell-1}$ 接收到由 $(v, \ell-1)$ 发送的脉冲的时刻。检查算法 1 的代码可知，

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} = H_{v,\ell}(t'_{v,\ell-1}) + \Lambda - d - C_{v,\ell}.$$

由引理 2 可知 $C_{v,\ell} \leq \Lambda - d$，因此 $H_{v,\ell}(t_{v,\ell-1}) \geq H_{v,\ell}(t_{v,\ell})$，从而 $t_{v,\ell} \geq t_{v,\ell-1}$。利用消息延迟和硬件时钟速度的界，可得

$$\begin{aligned} t_{v,\ell} - t_{v,\ell-1} &= t_{v,\ell} - t'_{v,\ell-1} + t'_{v,\ell-1} - t_{v,\ell-1} \\ &\leq H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) - H_{v,\ell}(t'_{v,\ell-1}) + d \\ &= \Lambda - C_{v,\ell} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} t_{v,\ell} - t_{v,\ell-1} &= t_{v,\ell} - t'_{v,\ell-1} + t'_{v,\ell-1} - t_{v,\ell-1} \\ &\geq \frac{H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) - H_{v,\ell}(t'_{v,\ell-1})}{\vartheta} + d - u \\ &= \frac{\Lambda - d - C_{v,\ell}}{\vartheta} + d - u, \end{aligned}$$

整理后即可得到所述不等式。 □

4.2 慢速、快速和跳转条件

在没有故障的情况下，要限制局部偏斜，关键在于平衡两个相互冲突的目标：选择足够大的 $C_{v,\ell}$ 以便“赶上”比 $v_{\ell-1}$ 更早生成脉冲的前驱节点 $w_{\ell-1} \neq v_{\ell-1}$；同时又要足够小，以便“等待”比 $v_{\ell-1}$更晚生成脉冲的前驱节点 $w_{\ell-1} \neq v_{\ell-1}$。下面的条件刻画了我们对后者的要求。

定义 2（慢条件）。对于所有 $s \in \mathbb{N}$、正确层 $\ell - 1 \in \mathbb{N}$ 以及 $v_\ell \in V_\ell \setminus F$，我们要求满足慢条件 **安全条件** (s)：$=$ **SC-1**(s) $\vee$**SC-2**(s) $\vee$**SC-3**，其中

$$\begin{aligned} \textbf{SC-1}(s)&: \frac{C_{v,\ell}}{\vartheta} \leq t_{v,\ell-1} - \max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} + 4s\kappa \\ \textbf{SC-2}(s)&: \frac{C_{v,\ell}}{\vartheta} \leq t_{v,\ell-1} - \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} - 4s\kappa \\ \textbf{SC-3}&: C_{v,\ell} \leq 0. \end{aligned}$$

这可以看作是 [15]，中慢条件的一种变体，通过量化 v_ℓ 可以安全地移动其脉冲的时序幅度，将其调整到我们的设置中。与 [15] 的主要概念区别在于，我们通过添加 **SC-3** 放宽了慢条件。在下文中，当上下文明确时，我们会从记号中省略 s。

引理 4. 对于所有 $s \in \mathbb{N}$ 和 $(v,\ell) \in V_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$，安全条件(s) 在 (v,ℓ) 处成立。

证明。利用引理 29，我们证明算法 1 的结论。令 $t_{\min} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$，且 $t_{\max} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$。若 $\mathsf{C}_{v,\ell} \le 0$，则 SC-3 显然成立。因此，假设 $\mathsf{C}_{v,\ell} > 0$。简记

$$\begin{aligned}\Delta &= \min_{s\in\mathbb{N}} \{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2}\\ &= \max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s_{\min}\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s_{\min}\kappa\} - \frac{\kappa}{2},\end{aligned}$$

其中 $s_{\min} \in \mathbb{N}$ 是取得最小值的索引。

若 $\Delta \le \vartheta\kappa$，则 $\mathsf{C}_{v,\ell} = \Delta$。否则，

$$C_{v,\ell} = \max\left\{H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} - \kappa, \vartheta\kappa\right\} \le \max\{\Delta, \vartheta\kappa\} = \Delta.$$

无论哪种情况，我们都得到 $\mathsf{C}_{v,\ell}/\vartheta < \mathsf{C}_{v,\ell} \le \Delta$。

我们区分两种情况。

- $H_{\text{自身}} - H_{\text{最大值}} + 4s_{\text{最小值}}\kappa \ge H_{\text{自身}} - H_{\text{最小值}} - 4s_{\text{最小值}}\kappa$。然后，对于 $s \in \mathbb{N}, s \ge s_{\text{最小值}}$，根据引理 1，我们有

  $$\Delta \le H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s_{\min}\kappa - \frac{\kappa}{2} \le t_{v,\ell-1} - t_{\max} + 4s\kappa,$$

  也就是说，**SC-1**成立。现在考虑 $s \in \mathbb{N}, s < s_{\min}$。由于 $H_{\text{own}} - H_{\max} - \vartheta u + 4s\kappa < H_{\text{own}} - H_{\max} - \vartheta u + 4s_{\min}\kappa \le \Delta$，但最小值在索引 $s_{\min}$处取得，因此我们必有

  $$\Delta \le H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa - \frac{\kappa}{2} \le t_{v,\ell-1} - t_{\min} - 4s\kappa,$$

  其中第二步再次应用了引理 1。因此，**SC-2**成立。
- $H_{\text{自身}} - H_{\text{最大值}} + 4s_{\text{最小值}}\kappa < H_{\text{自身}} - H_{\text{最小值}} - 4s_{\text{最小值}}\kappa$。在这种情况下，我们类似地推得，对于 $s > s_{\text{最小值}}$，**SC-1**成立；对于 $s \le s_{\text{最小值}}$，**SC-2** 成立。□

快条件是定义 2 的对应条件，旨在解决“追赶”领先邻居的需要。

定义 3（快速条件）。对于所有 $s \in \mathbb{N}_{>0}$、正确层 $\ell - 1 \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $v_\ell \in V_\ell \setminus F$，我们要求满足快速条件 $\mathbf{FC}(s)$：$=\mathbf{FC\text{-}1}(s) \vee \mathbf{FC\text{-}2}(s) \vee \mathbf{FC\text{-}3}$，其中

$$\begin{aligned}\mathbf{FC\text{-}1}(s)&: C_{v,\ell} \ge t_{v,\ell-1} - \max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} + (4s-2)\kappa + \kappa\\ \mathbf{FC\text{-}2}(s)&: C_{v,\ell} \ge t_{v,\ell-1} - \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} - (4s-2)\kappa + \kappa\\ \mathbf{FC\text{-}3}&: C_{v,\ell} \ge \kappa.\end{aligned}$$

这可以视为 [15]，中快速条件的一种变体，它通过量化 v_ℓ 可以安全地移动其脉冲时序的幅度，将该条件调整为适用于我们的情形。与 [15] 的主要概念区别在于，我们通过添加**FC-3**放宽了快速条件。

此外，请注意，存在一个不改变符号的加性项 κ。它的作用是考虑到这样一个事实：我们对 [18] 中 GCS 算法的模拟按对应于各层的离散时间步运行。[14, 15, 18] 中 GCS 算法的连续版本可以将此项任意设小。相比之下，我们需要此项大于一个时间步内累积的最大时间测量误差。我们指出，原则上，可以将此项设为

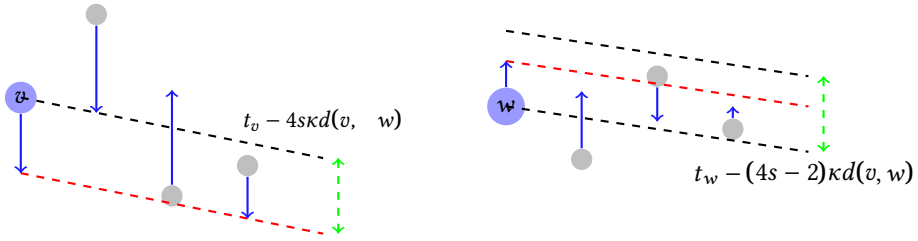


图 4. 慢条件（左）和快条件（右）。SC(s) 旨在确保 $\max_{w\in V}\{\psi^s_{v,w}(\ell)\}$（绿色箭头的长度）不会迅速增长。具有 $C_{w,\ell} \le 0$ 的节点 w（SC-3 成立）无法进行会将其推至红线下方的校正。如果 $C_{w,\ell} > 0$，那么 SC-1 和 SC-2 都会确保存在 w 的一个邻居 x，使得 $t_{w,\ell-1} - C_{w,\ell}/\vartheta$ 到黑线的偏移量不超过 $t_{x,\ell-1}$ 的偏移量。换言之，SC 确保表示 $C_{w,\ell}/\vartheta$ 的蓝色箭头不会延伸到红线下方。这意味着 $\max_{w\in V}\{\psi^s_{v,w}(\ell)\}$ 的任何增加都是由延迟和时钟速率变化造成的，而每层的增幅又被限制在 $\kappa/2$ 以内。类似地，FC(s) 旨在确保 $\max_{v\in V}\{\xi^s_{v,w}(\ell)\}$（绿色箭头的长度）若为正，至少减少 $\kappa/2$。为确保这一点，$C_{w,\ell}$（由蓝色箭头表示）必须足够大，以延伸到红线下方。FC(s) 通过加入额外的“余量”项 κ 实现这一点，该项抵消了不确定性导致的 $\kappa/2$“损失”。

不同于 κ。然而，由于两者都需要满足相同的下界 $u + (1 - 1/\vartheta)(\Lambda - d)$，引入一个独立参数并不会带来渐近增益。

引理 5. 对于所有 $s \in \mathbb{N}$ 以及$(v, \ell) \in V_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$，快速条件(s) 在(v, ℓ)处成立。

证明。利用引理 29，我们证明算法 1 的断言。令 $t_{\min} := $最小值$_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$，且$t_{\max} :=$最小值$_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$。若 $C_{v,\ell} \ge \vartheta\kappa$，则显然满足**FC-3**。因此，假设 $C_{v,\ell} < \vartheta\kappa$。记

$$\begin{aligned}\Delta &= \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2}\\ &= \max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s_{\min}\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s_{\min}\kappa\} - \frac{\kappa}{2},\end{aligned}$$

其中 $s_{\min} \in \mathbb{N}$ 是使最小值达到的索引。

若 $\Delta \ge 0$，则 $C_{v,\ell} = \Delta$。否则，

$$C_{v,\ell} = \min\left\{H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2} + 2\kappa, 0\right\} \ge \Delta.$$

无论哪种情况，我们都得到 $C_{v,\ell} \ge \Delta$。

对于 $s \in \mathbb{N}, s \le s_{\min}$，根据引理 1 和方程（1），有

$$\Delta \ge H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa - \frac{\kappa}{2} \ge t_{v,\ell-1} - t_{\max} + (4s-2)\kappa + \kappa,$$

证明**FC-1** 成立。对于 $s \in \mathbb{N}$、$s > s_{\min}$，由引理 1 和方程（1）可得

$$\Delta \ge H_{\text{own}} - H_{\min} - 4(s-1)\kappa - \frac{\kappa}{2} \ge t_{v,\ell-1} - t_{\min} - (4s-2)\kappa + \kappa,$$

这表明**FC-2** 成立。 □

我们对慢速和快速条件的放宽带来了相当大的复杂性。从 [15], 中算法的时间连续变体来看，我们现在允许时钟发生任意大的“跳变”，而不是限制时钟速率。在我们的离散版本中，[15]中的速率上界对应于 $C_{v,\ell} \in [0, \vartheta\kappa]$。如果没有这一额外约束，慢速和快速条件不足以限制偏斜。

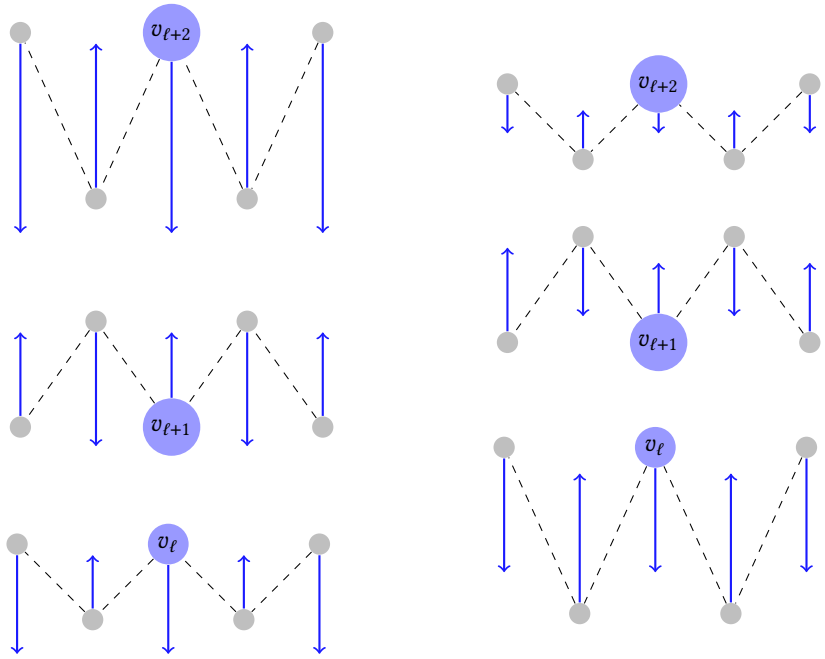


图 5。左图展示了没有**跳跃条件**时偏斜如何增加。虽然**安全条件(0)**不允许这种情况（v, ℓ）使其脉冲速度加快，超出（v, $\ell-1$）与任意（w, $\ell-1$）的最早脉冲相匹配的等效速度，但 $\{v, w\} \in E$，**快速条件** 允许具有慢速（v, $\ell-1$）的节点（v, ℓ）“超调”，即 $C_{v,\ell}$（蓝色箭头所示）变得很大。这会导致振幅不断增大的振荡行为。右图展示了**跳跃条件** 生效时的相同情形。**跳跃条件** 强制校正分别在最早或最晚的邻居之前停止 κ，从而使振荡减弱。

图 5对此进行了说明，其中展示了一次满足**SC** 和**FC**的执行，但其偏斜却会无限增长。关键问题在于，相邻节点可能向相反方向“跳变”，从而产生振荡行为，使测量误差不断累积。为避免这种行为，我们增加了一个额外条件，用于“抑制”此类振荡，同时限制故障前驱节点导致偏斜增加的幅度。

定义 4 （跳跃条件）。对于所有正确层 $\ell-1 \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $v_\ell \in V_\ell \setminus F$，我们要求跳跃条件 **跳跃条件**：$=$**JC-1** $\vee$ **JC-2** $\vee$ **JC-3** 成立，其中

$$\textbf{JC-1}\colon \kappa < \frac{C_{v,\ell}}{\vartheta} \le t_{v,\ell-1} - \max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} - \kappa$$

$$\textbf{JC-2}\colon 0 > C_{v,\ell} \ge t_{v,\ell-1} - \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} + \kappa$$

$$\textbf{JC-3}\colon 0 \le \frac{C_{v,\ell}}{\vartheta} \le \kappa.$$

引理 6. 假设层 $\ell-1 \in \mathbb{N}$ 和 $v_\ell \in V_\ell$ 正确。则 v_ℓ处满足跳跃条件 。

证明。利用引理 29，我们证明算法 1 的结论。令 $t_{\min} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$ 和$t_{\max} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}$。我们区分三种情况。

- $0 \le C_{v,\ell} \le \vartheta\kappa$。那么**跳跃条件-3** 显然成立。

- $C_{v,\ell} < 0$。根据引理 1 和方程（1），则

$$C_{v,\ell} = H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2} + 2\kappa \geq t_{v,\ell-1} - t_{\min} + \kappa,$$

  即，**JC-2** 成立。
- $C_{v,\ell} > \vartheta\kappa$。根据引理 1，接着

$$C_{v,\ell} = H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} - \kappa \leq t_{v,\ell-1} - t_{\max} - \kappa,$$

  即，**JC-3** 成立。 □

4.3 无故障情形下对 Ψ^s 的界定

在确立这些条件后，我们可以研究在无故障情形下 $\Psi^s(\ell)$ 如何演变。对 Ψ^s 进行界定的主要技术挑战在于，如何从 $s-1 \in \mathbb{N}$ 到 s 执行归纳步骤。我们将论证，对于某个 $\bar{\ell}$，若 $\Psi^s(\bar{\ell})$ 很大，那么对于某个 $\ell < \bar{\ell}$，$\Xi^s(\ell)$ 必定也曾很大，且还要加上一个随 $\bar{\ell} - \ell$ 增长的项。

定理 1。 对于 $s \in \mathbb{N}_{>0}$ 和层 $\ell \leq \bar{\ell}$，有

$$\Psi^s(\bar{\ell}) \leq \max\left\{0, \Xi^s(\underline{\ell}) - (\bar{\ell} - \underline{\ell} + 1)\kappa\right\} + (\bar{\ell} - \underline{\ell}) \cdot \frac{\kappa}{2}.$$

证明策略。直观而言，我们打算论证：如果 $\Psi^s(\bar{\ell})$ 很大，那么 $\Xi^s(\ell)$ 也必然很大。为追溯其原因，我们证明在每一步中，$\Xi^s(\ell-1)$ 至少比 $\Xi^s(\ell)$ 大 $\kappa/2$。由于 $\Xi^s(\bar{\ell}) \geq \Psi^s(\bar{\ell})$，且对于所有 v、w、s 和 ℓ，$\psi^s_{v,w}(\ell) \geq \xi^s_{v,w}(\ell)$，因此可得出该结论。为形式化说明 $\Xi^s(\ell)$ 必然一直在减小，我们试图证明：满足 $\xi^s_{v^\ell,w^\ell}(\ell)$ 足够大的节点 $v^\ell, w^\ell \in V$ 所在的最小层 ℓ 是 ℓ。为此，我们找出节点 w 和 v——它们可能就是 w^ℓ 和 v^ℓ 本身，也可能是它们的邻居——这些节点在层 $\ell-1$ 上具有较大的偏斜，从而导致层 ℓ 上出现较大的偏斜。此过程基于安全条件 (s) 和快速条件 (s)；当 $w = v^\ell$ 和 $v = w^\ell$ 时这一特殊情形则由跳跃条件处理。

一个关键障碍是，如果 w 是 w^ℓ 的邻居，那么偏斜差会比 v 是 v^ℓ 的邻居时更大，即 $4s\kappa$ 与 $(4s-2)\kappa$。因此，当 w 比 w^ℓ 更接近 v^ℓ 时，相对于层 ℓ 上的偏斜界，我们会“损失” 2κ。对于 $d(v^{\bar{\ell}}, w^{\bar{\ell}})$ 步，我们可以根据 $v^{\bar{\ell}}$ 与 $w^{\bar{\ell}}$ 之间的初始偏斜进行补偿，但无法补偿更多步。为了解决这个问题，基本上我们需要证明：每多走一步“朝向” v^ℓ，就会相应地有一步“远离” v^ℓ，从而相对于层 ℓ 上的偏斜界，我们会额外“获得” 2κ。

如果校正总是正数，这就很简单：朝向 v^ℓ 的步也会是朝向 $v^{\bar{\ell}}$ 的步，而在 $w^\ell = v^{\bar{\ell}}$ 时，我们就会得出与所示偏斜界矛盾的结论。遗憾的是，负校正使这一简单论证无法成立。为了解决这个问题，我们引入第三个“证明者”节点 p^ℓ，其中 $p^{\bar{\ell}} = v^{\bar{\ell}}$，且它到 w^ℓ 的距离始终不会增加；如果 p^ℓ 执行负校正，那么 p 就是 p^ℓ 的一个邻居，而且它离 w^ℓ 更近。由此，我们可以从偏斜界推断出 $p \neq w$。

这种方法面临的一个主要难题是特殊情形 $p = w^\ell$ and $w = p^\ell$。同样，**跳跃条件** 也会发挥作用，表明 p and w 之间存在足够大的偏斜。不过，现在从 v 的角度来看，p 位于 w“后方”。之后，重复出现 $p = w^\ell$ and $w = p^\ell$ 这一情形会使情况反转，导致 w 离 v^ℓ 更远；然而，$d(p,w) = d(p^\ell, w^\ell)$。证明通过在上述情况出现奇数次时，将额外的 $(4s-2)\kappa$ 加到偏斜界限中，来涵盖这种情形。

最后，出于类似的原因，我们希望避免出现 $v = p^\ell$ 和 $p = v^\ell$ 的情况。幸运的是，这里我们可以利用 v^ℓ 和 w^ℓ 之间的偏斜界比 p^ℓ 和 w^ℓ 之间的偏斜界更强这一点，这意味着在这种情况下，我们只需改为选择 $p = v$。在证明中，只要

v 位于连接 p^ℓ 和 w^ℓ 的路径上，而我们会保留这条路径以跟踪构造中的跳数。□

定理 1 的证明。反设，对于最小的 $\bar{\ell}$，定理 1 的陈述不成立，即存在 $v^{\bar{\ell}}$ 和 $w^{\bar{\ell}}$，使得

$$\psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}} > (\bar{\ell}-\underline{\ell})\cdot\frac{\kappa}{2} \tag{4}$$

$$\text{and}\quad \psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}} > \Xi^s(\underline{\ell})-(\bar{\ell}-\underline{\ell})\cdot\frac{\kappa}{2}-\kappa \tag{5}$$

并且不存在更小的 $\bar{\ell}'$，使得对某一对节点满足这一条件。

设 $\ell\in[\underline{\ell},\bar{\ell}]$ 为最小值，使得存在 v^ℓ，p^ℓ，$w^\ell\in V$、一条从 p^ℓ 到 v^ℓ、位于 H 中的路径 Q^ℓ，以及一条从 p^ℓ 到 w^ℓ、位于 H 中的路径 P^ℓ，满足以下性质：

(P1) $w^\ell\neq p^\ell$。

(P2) $w^\ell\neq v^\ell$。

(P3)

$$t_{p^\ell,\ell}-t_{w^\ell,\ell}-4s\kappa|P^\ell|\geq\psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}}(\bar{\ell})-(\bar{\ell}-\ell)\cdot\frac{\kappa}{2}>0.$$

(P4) 分别用 $|P^\ell|$ 和 $|Q^\ell|$ 表示 P^ℓ 和 Q^ℓ 的长度。采用简写

$$\Delta^\ell:=\begin{cases}|P^\ell|+|Q^\ell|-1 & \text{if } P^\ell \text{ and } Q^\ell \text{ have the same first edge}\\ |P^\ell|+|Q^\ell| & \text{else,}\end{cases}$$

成立的是

$$t_{v^\ell,\ell}-t_{w^\ell,\ell}-(4s-2)\kappa\Delta^\ell\geq\psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}}(\bar{\ell})+(\bar{\ell}-\ell)\cdot\frac{\kappa}{2}+2\kappa|P^\ell|.$$

(P5) 若 $v^\ell\in P^\ell$，则 $p^\ell=v^\ell$。

为证明这样的索引确实存在，令

- $p^{\bar{\ell}}:=v^{\bar{\ell}}$，
- $P^{\bar{\ell}}$ 是 H 中从 $p^{\bar{\ell}}$ 到 $w^{\bar{\ell}}$ 的一条最短路径，

且

- $Q^{\bar{\ell}}:=(p^{\bar{\ell}})=(v^{\bar{\ell}})$，即从 $p^{\bar{\ell}}$ 到 $v^{\bar{\ell}}$ 的零长度路径。

此选择满足

- (P1) 和 (P2)，因为 $\Psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}}(\bar{\ell})\neq 0$ 意味着 $v^{\bar{\ell}}\neq w^{\bar{\ell}}$；
- (P4)，因为

$$t_{v^{\bar{\ell}},\bar{\ell}}-t_{w^{\bar{\ell}},\bar{\ell}}-(4s-2)\kappa\Delta^{\bar{\ell}}=t_{v^{\bar{\ell}},\bar{\ell}}-t_{w^{\bar{\ell}},\bar{\ell}}-(4s-2)\kappa|P^{\bar{\ell}}|=\psi_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}}+2\kappa|P^{\bar{\ell}}|;\ \text{and}$$

- (P3) 和 (P5)，因为 $p^{\bar{\ell}}=v^{\bar{\ell}}$（即 $t_{p^{\bar{\ell}},\bar{\ell}}=t_{v^{\bar{\ell}},\bar{\ell}}$ 和 $\Delta^{\bar{\ell}}=|P^{\bar{\ell}}|$），且 (P4) 成立。

推论 2 证明了事实上 $\ell=\underline{\ell}$。请注意

$$\begin{aligned}d(v^{\underline{\ell}},w^{\underline{\ell}})&\leq\begin{cases}|P^{\underline{\ell}}|+|Q^{\underline{\ell}}|-2 & \text{if } P^{\underline{\ell}} \text{ and } Q^{\underline{\ell}} \text{ share the first edge}\\ |P^{\underline{\ell}}|+|Q^{\underline{\ell}}| & \text{else}\end{cases}\\&\leq\Delta^{\underline{\ell}}\end{aligned}$$

并且，根据（P1），$|P^\ell| \geq 1$。因此，由（P4）可得

$$\begin{aligned}\Xi^s(\underline{\ell}) &\geq t_{v^{\underline{\ell}},\underline{\ell}} - t_{w^{\underline{\ell}},\underline{\ell}} - (4s-2)\kappa d(v^{\underline{\ell}}, w^{\underline{\ell}}) \\ &\geq t_{v^{\underline{\ell}},\underline{\ell}} - t_{w^{\underline{\ell}},\underline{\ell}} - (4s-2)\kappa\Delta^{\underline{\ell}} \\ &\geq \psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}}(\bar{\ell}) + (\bar{\ell}-\underline{\ell})\cdot\frac{\kappa}{2} + 2\kappa|P^{\underline{\ell}}| \\ &\geq \psi^s_{v^{\bar{\ell}},w^{\bar{\ell}}}(\bar{\ell}) + (\bar{\ell}-\underline{\ell})\cdot\frac{\kappa}{2} + 2\kappa,\end{aligned}$$

这与公式（5）矛盾，并完成了证明。 □

第 4.3 节的其余部分用于证明推论 2，这是定理 1 证明中缺失的一步。为此，直到第 4.3 节结束，我们都考虑定理 1 证明中的情形，并假设反证所需的条件为 $\ell > \ell$。我们注意到一些直接的推论。 –

观察 2. 对于任意固定的索引 ℓ，有以下推论：

- (P3) ⇒ (P1)
- (P4) ⇒ (P2)
- $(v^\ell = p^\ell \wedge$ (P4)$)$ ⇒ (P3).

此外，

$$\psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\ell) - (\bar{\ell}-\ell)\cdot\frac{\kappa}{2} > 0.$$

证明。我们分别证明每个蕴含关系。

- 由 (P3)，$t_{p^\ell,\,\ell} - t_{w^\ell,\,\ell} > 4s\kappa|P^\ell| \geq 0$。这意味着 $t_{p^\ell,\,\ell} > t_{w^\ell,\,\ell}$因此 $w^\ell \neq p^\ell$，即 (P1)。
- 注意到 $\Delta^\ell \geq 0$、$|P^\ell| \geq 0$ 和 $4s-2>0$。因此，(P4) 和公式（4）意味着

$$t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} \geq \psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\bar{\ell}) > 0.$$

由此可得 $w^\ell \neq v^\ell$，即 (P2)。

- 如果 $v^\ell = p^\ell$，那么 $t_{v^\ell,\,\ell} = t_{p^\ell,\,\ell}$、$|Q^\ell| = 0$ 和 $\Delta^\ell = |P^\ell|$。因此，(P4) 意味着

$$t_{p^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} - (4s-2)\kappa|P^\ell| \geq \psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\bar{l}) + (\bar{\ell}-\ell)\cdot\frac{\kappa}{2} + 2\kappa|P^\ell| \geq \psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\bar{l}) - (\bar{\ell}-\ell)\cdot\frac{\kappa}{2} + 2\kappa|P^\ell|,$$

整理后可得 (P3)。 □

构造中的一步。现在，我们确定适合在层 $\ell-1$ 上充当 v^ℓ、p^ℓ 和 w^ℓ 的节点。这些节点可以是它们本身，也可以是它们在 H 中的邻居，其中 **快速条件(*s*)**、**安全条件(*s*)** 和 **跳跃条件** 用于关联相应的脉冲时间。

引理 7。存在一个节点 $v \in V$，使得

$$t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} \leq t_{v,\ell-1} - (4s-2)\kappa\Delta_v - \kappa,$$

其中

$$\Delta_v = \begin{cases} 0 & \text{and } v = v^\ell, \\ -1 & \text{and } \{v, v^\ell\} \text{ is the last edge of } Q^\ell \text{ or the first edge of } P^\ell, \text{ or} \\ 1 & \text{and } \{v^\ell, v\} \in E. \end{cases}$$

证明。根据引理 5，v^ℓ 满足快条件。因此，对于 v^ℓ，以下三种情况之一成立。

- **快速条件-1(*s*)** 成立。在这种情况下，令 $v = \arg\max_{\{x,v^\ell\}\in E}\{t_{x,\ell-1}\}$ 并设上界

$$t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} \leq \max_{\{x,v^\ell\}\in E}\left\{t_{x,\ell-1}\right\} - (4s-2)\kappa - \kappa = t_{v,\ell-1} - (4s-2)\kappa - \kappa,$$

也就是说，引理的结论对 $\Delta_v = 1$ 成立。

- **FC-2**(s) 成立。在这种情况下，令 $\{v, v^\ell\}$ 为 Q^ℓ 的最后一条边（若 $|Q^\ell| \neq 0$），否则为 P^ℓ 的第一条边；后一种情况是可行的，因为此时 $v^\ell = p^\ell$，且根据 (P1)，$|P^\ell| \neq 0$。我们得到

$$t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} \leq \min_{\{x,v^\ell\}\in E} \left\{t_{x,\ell-1}\right\} + (4s-2)\kappa - \kappa \leq t_{v,\ell-1} + (4s-2)\kappa - \kappa.$$

  因此，引理的结论在 $\Delta_v = -1$ 下成立。
- **FC-3**成立。在这种情况下，

$$t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} \leq t_{v^\ell,\ell-1} - \kappa,$$

  也就是说，引理的结论在 $\Delta_v = 0$ 下成立。 □

引理 8。 存在一个节点 $w \in V$ 使得

$$t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} \geq t_{w,\ell-1} + 4s\kappa\Delta_w,$$

其中

$$\Delta_w = \begin{cases} 0 & \textit{and } w = w^\ell, \\ -1 & \textit{and } \{w, w^\ell\} \textit{ is the last edge of } P^\ell, \textit{ or} \\ 1 & \textit{and } \{w^\ell, w\} \in E. \end{cases}$$

证明。根据引理 4，w^ℓ 满足**安全条件**。我们根据**SC-1**、**SC-2**和**SC-3** 中哪一项适用来分类讨论。

- **SC-1**(s)成立。设$\{w, w^\ell\}$为 P^ℓ的最后一条边；根据 (P1)，$|P^\ell| \neq 0$，即这条边存在。于是

$$t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,l}}{\vartheta} \geq \max_{\{x,w^\ell\}\in E} \{t_{x,\ell-1}\} - 4s\kappa \geq t_{w,\ell-1} - 4s\kappa,$$

  也就是说，取 $\Delta_w = -1$时，引理的结论成立。
- **SC-2**(s)成立。在这种情况下，令 $w = \arg\min_{\{x,v^\ell\}\in E}\{t_{x,\ell-1}\}$，并给出界

$$t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{Cw^\ell,\ell}{\vartheta} \geq \min_{\{x,w^\ell\}\in E} \{t_{x,\ell-1}\} + 4s\kappa = t_{w,\ell-1} + 4s\kappa.$$

  因此，取 $\Delta_w = 1$时，引理成立。
- **SC-3** 成立。于是

$$t_{w^\ell,\ell-1} - C_{w,\ell} \geq t_{w^\ell,\ell-1},$$

  也就是说，该引理的结论对 $\Delta_w = 0$ 成立。 □

引理 9. 存在一个节点 $p \in V$，使得

$$t_{p^\ell,\ell-1} - C_{p^\ell,\ell} \leq \begin{cases} t_{p,\ell-1} & \textit{and } p = p^\ell, \textit{ or} \\ t_{p,\ell-1} - \kappa & \textit{and } \{p^\ell, p\} \textit{ is the first edge of } P^\ell. \end{cases}$$

证明。若 $C_{p^\ell,\ell} \geq 0$，则结论对 $p = p^\ell$ 成立。因此，假设 $C_{p^\ell,\ell} < 0$。令 $\{p^\ell, p\}$ 为 P^ℓ 的第一条边；这样的边确实存在，因为由 (P1) 可知 $p^\ell \neq w^\ell$，进而有 $|P^\ell| \neq 0$。根据引理 6，p^ℓ 满足 **跳跃条件**。由于 $C_{p^\ell,\ell} < 0$，必须应用 **JC-2** 。由此可得

$$C_{p^\ell,\ell} \geq t_{p^\ell,\ell-1} - \min_{\{x,p^\ell\}\in E} \left\{t_{x,\ell-1}\right\} + \kappa \geq t_{p^\ell,\ell-1} - t_{p,\ell-1} + \kappa.$$

重新整理各项，即可得出所需的不等式。 □

下文中，令 (v,p,w) 为引理 7 至 9 所保证的节点三元组。用 $\circ$ 表示路径拼接，用 $\mathrm{prefix}(R,x)$ 表示路径 R 中终止于节点 $x \in R$ 的前缀，用 $\mathrm{suffix}(R,x)$ 表示路径 R 中起始于节点 $x \in R$ 的后缀。令

$$p' = \begin{cases} v & \text{if } v \text{ lies on } \mathrm{suffix}(P^\ell, p), \\ p & \text{else,} \end{cases}$$

$$P := \begin{cases} \mathrm{prefix}(P^\ell, w) & \text{if } w \text{ lies on } P^\ell, \\ P^\ell \circ (w^\ell, w) & \text{else,} \end{cases}$$

$$P' := \begin{cases} \mathrm{suffix}(P, p') & \text{if } p' \text{ lies on } P, \\ (p', w) & \text{else,} \end{cases}$$

$$Q := \begin{cases} \mathrm{prefix}(Q^\ell, v) & \text{if } v \text{ lies on } Q^\ell, \\ Q^\ell \circ \{v^\ell, v\} & \text{else,} \end{cases}$$

$$Q' := \begin{cases} \mathrm{suffix}(Q, p') & \text{if } p' \text{ lies on } Q, \\ (p', p^\ell) \circ Q & \text{else.} \end{cases}$$

为方便记号，仿照 Δ^ℓ，我们也定义

$$\Delta := \begin{cases} |P'| + |Q'| - 1 & \text{if } P' \text{ and } Q' \text{ have the same first edge} \\ |P'| + |Q'| & \text{else.} \end{cases}$$

我们将证明，对于层 $\ell - 1$，此构造满足性质 (P1) 至 (P5)，其中 $v^{\ell-1} = v$、$p^{\ell-1} = p'$、$w^{\ell-1} = w$、$P^{\ell-1} = P$，和 $Q^{\ell-1} = Q'$；这将构成所需的矛盾。

不过，我们首先指出，事实上 P，和 Q' 是 H 中分别从 p' 到 w 和 v 的路径。为此，我们先讨论 p' 不在 P 上的特殊情况。

观察 3. 若 p' 不在 P 上，则 $p' = w^\ell$ 和 $w = p^\ell$ 或 $p' = v$。

证明。根据引理 9，p 位于 P^ℓ 的第一条边上。因此，如果 $p' = p$，则 p' 位于 P 上，除非 $\mathrm{prefix}(P^\ell, w)$ 不包含这条边。根据引理 8，只有当 P^ℓ 的第一条边也是最后一条边时才会出现这种情况，即 $P^\ell = (p^\ell, w^\ell) = (w, p')$。

还需考虑以下情形：$p' \neq p$，即 $p' = v$。同样，根据引理 8，P^ℓ 除最后一条边外的所有边也都包含在 P 中。因此，$p' = v = w^\ell$。□

观察 4. P，是 H 中从 p' 到 w 的一条路径，而 Q' 是 H 中从 p' 到 v 的一条路径。

证明。为证明 P，是从 p' 到 w 的一条路径，注意根据引理 8，P 是 H 中的一条路径，按定义其终点为 w。因此，如果 P，$= \mathrm{suffix}(P, p')$，那么 P，就是 H 中从 p' 到 w 的一条路径。否则，根据观察 3，$p' = w^\ell$，并且根据引理 8，$\{p', w\} = \{w^\ell, w\} \in E$。

为证明 Q' 是从 p' 到 v 的一条路径，注意根据引理 7，Q 是 H 中的一条路径，按定义其终点为 v。如果 $p' = p$，那么根据引理 9 Q' 也属于 H 中的一条路径，按定义其起点为 p'，且终点与 Q 相同，即 v。另一方面，如果 $p' = v$，$\mathrm{suffix}(Q, p') = \mathrm{suffix}(Q, v) = (v)$，即从 $p' = v$ 到其自身的零长度路径。□

证明这些性质。为证明推论 2，我们证明元组 (v, p', w, P', Q') 满足层 $\ell - 1$ 的性质 (P1) 至 (P5)，从而与 ℓ 的极小性矛盾。根据观察 4，P' 和 Q' 确实分别是从 v 到 w 和 p' 的路径。接下来，我们将反复使用这一事实，以及如下性质：对于 $x \in \{v, w, p\}$，只要 $x \neq x^\ell$，就有 $\{x^\ell, x\} \in E$；无需明确援引观察 4 及引理 7 至 9。

我们首先排除 $v = w^\ell$ 和 $w = v^\ell$ 的特殊情况。

引理 10. $v = w^\ell$ 和 $w = v^\ell$ 的情况是不可能的。

证明。反设 $v = w^\ell$ 和 $w = v^\ell$。我们利用 (P4)、引理 3 和引理 8 来界定

$$\begin{aligned}
-C_{w,\ell} &\geq t_{w,\ell} - t_{w,\ell-1} - \Lambda \\
&= t_{v^\ell,\ell} - (t_{w,\ell-1} - 4s\kappa) - \Lambda - 4s\kappa \\
&\geq t_{v^\ell,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) - \Lambda - 4s\kappa \\
&= t_{v^\ell,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} + d - u + \frac{\Lambda - d - C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) - \frac{\kappa}{2} - 4s\kappa \\
&\geq t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} - 4s\kappa - \frac{\kappa}{2} \\
&\geq \psi_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) - (\bar\ell - \ell + 1)\frac{\kappa}{2} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

因此，由**跳跃条件**可知

$$t_{w,\ell-1} \leq t_{w^\ell,\ell-1} + C_{w,\ell} - \kappa.$$

注意，由 (P1)，$|P^\ell| \neq 0$，因此 $|P^\ell|$，$\Delta^\ell \geq 1$。因此，由 (P4) 和公式（4）

$$t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} - 4s\kappa \geq \psi^s_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) + (\bar\ell - \ell)\frac{\kappa}{2} \geq \psi^s_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) > 0.$$

我们区分两种情况。

- $C_{w^\ell,\ell} \leq \vartheta\kappa$。然后由引理 3

$$\begin{aligned}
4s\kappa &< t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} \\
&= t_{w,\ell} - t_{w^\ell,\ell} \\
&\leq t_{w,\ell-1} - C_{w,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) + u + \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)(\Lambda - d) \\
&\leq u + \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)(\Lambda - d) \\
&< \kappa,
\end{aligned}$$

  这是矛盾的，因为 $s \geq 1$。

- $C_{w^\ell,\ell} > \vartheta\kappa$。根据**跳跃条件**，可得

$$t_{w^\ell,\ell-1} \geq t_{w,\ell-1} + \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} + \kappa,$$

  由此根据引理 3 可得

$$\begin{aligned}
t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1} &= t_{w^\ell,\ell-1} - t_{w,\ell-1} \\
&\geq t_{w,\ell-1} + \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} + \kappa - (t_{w^\ell,\ell-1} + C_{w,\ell} - \kappa) \\
&= t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) + 2\kappa \\
&\geq t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} + 2\kappa - \frac{\kappa}{2} \\
&> t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} + \frac{\kappa}{2}.
\end{aligned}$$

回顾一下，根据 (P1)，$|P^\ell| \neq 0$，因此 $|P^\ell|,\ \Delta^\ell \geq 1$。此外，$d(v,\ w) = d(w^\ell,\ w) \leq 1$，因为根据引理，$8\ w$要么是 w^ℓ，要么是 w^ℓ的邻居。因此，(P4) 意味着

$$\begin{aligned}\psi^s_{v,w}(\ell-1) &= t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1} - 4s\kappa d(v,w)\\ &> t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} - 4s\kappa|P^\ell| + \frac{\kappa}{2}\\ &\geq \psi^s_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) + (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2}.\end{aligned}$$

因此，v和 w满足公式（4）和公式（5），其中索引 $\bar\ell$替换为索引 $\ell-1<\bar\ell$，这与 $\bar\ell$的最小性矛盾。□

接下来，我们证明一个辅助引理，在 $p'=w^\ell$和 $w=p^\ell$这一特殊情形下，通过比引理 8 更强的界，将$t_{w^\ell,\ \ell}$与 $t_{w,\ \ell-1}$联系起来。这与前一个引理的推理类似。然而，这并不能立即导出矛盾，因为我们需要依赖 (P3) 给出的较弱界。

引理 11. 如果 $p'=w^\ell$和 $w=p^\ell$，那么

$$t_{w^\ell,\ell} - t_{w,\ell-1} > d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta}.$$

证明。我们使用 (P3) 和引理 3 来界定

$$\begin{aligned}-C_{w,\ell} &\geq t_{w,\ell} - t_{w,\ell-1} - \Lambda\\ &= t_{p^\ell,\ell} - (t_{w,\ell-1} - 4s\kappa) - \Lambda - 4s\kappa\\ &\geq t_{p^\ell,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) - \Lambda - 4s\kappa\\ &= t_{p^\ell,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} + d - u + \frac{\Lambda - d - C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) - \frac{\kappa}{2} - 4s\kappa\\ &\geq t_{p^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} - 4s\kappa - \frac{\kappa}{2}\\ &\geq \psi_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) - (\bar\ell - \ell + 1)\frac{\kappa}{2}\\ &> 0.\end{aligned}$$

因此，根据 **跳跃条件**，有

$$t_{w,\ell-1} \leq t_{w^\ell,\ell-1} - \kappa.$$

我们区分两种情况。

- $C_{w^\ell,\ell} \leq \vartheta\kappa$。那么

$$\begin{aligned}t_{w^\ell,\ell} - t_{w,\ell-1} &\geq t_{w^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell-1} + \kappa\\ &\geq d - u + \frac{\Lambda - d - C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} + \kappa\\ &\geq d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta}.\end{aligned}$$

- $C_{w^\ell,\ \ell} > \vartheta\kappa$。由**跳跃条件**可得

$$t_{w^\ell,\ell-1} \geq t_{w,\ell-1} + \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} + \kappa,$$

从而得到

$$\begin{aligned} t_{w^\ell,\ell} - t_{w,\ell-1} &\geq t_{w^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell-1} + \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} + \kappa \\ &> d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta}. \end{aligned}$$

□

利用引理 11，我们证明了 $p' = w^\ell$ 和 $w = p^\ell$ 这一特殊情形下的 (P4)。注意，这意味着 w 更接近 p^ℓ，但 P 并不比 P^ℓ 短。定义 Δ^ℓ 时通过情形划分考虑了这一差异。

L理 12. 若 $p' = w^\ell$ 和 $w = p^\ell$，则 (P4) 对 $v, p', w, |P'|, |Q'|$ 以及层 $\ell - 1$ 成立。

证明。记满足下式的值为 $\Delta_v \in \{-1, 0, 1\}$：

$$t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} \leq t_{v,\ell-1} - (4s-2)\kappa\Delta_v - \kappa$$

根据引理 7。由引理 3 和引理 11，

$$\begin{aligned} & t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1} \\ &> t_{v,\ell-1} - t_{w^\ell,\ell} + d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta} \\ &\geq t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} + (4s-2)\kappa\Delta_v + \kappa - t_{w^\ell,\ell} + d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta} \\ &\geq t_{v^\ell,\ell} - \Lambda + (4s-2)\kappa\Delta_v + \kappa - t_{w^\ell,\ell} + d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta} \\ &= t_{v^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} + (4s-2)\kappa\Delta_v + \frac{\kappa}{2} \\ &\geq (4s-2)\kappa(\Delta^\ell + \Delta_v) + \psi^s_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) + (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2} + \kappa_s|P^\ell|. \end{aligned}$$

我们断言 $\Delta \leq \Delta^\ell + \Delta_v$。注意，将其代入上述不等式可得

$$t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1} \geq (4s-2)\kappa\Delta + \psi^s_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) + (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2} + \kappa_s|P'|,$$

也就是说，对 $v, p', w, |P'|, |Q'|$ 和层 $\ell - 1$，(P4) 成立，正如所需。因此，证明上述断言即可完成证明。

为证明该断言，我们首先注意到 $P' = (p', w) = (w^\ell, p^\ell)$。由于 $w = p^\ell$，根据引理 8，我们还有 $P^\ell = (p^\ell, w^\ell) = (w, p')$。特别地，$|P^\ell| = |P'|$。我们分两种情况讨论。

- P^ℓ 和 Q^ℓ 共享第一条边。因此 $|Q^\ell| \geq 2$；否则 $v^\ell = w^\ell$，这与 (P2) 矛盾。若 $v = p'$，则

$$|Q'| = |Q| = |(v)| = 0 \leq |Q^\ell| - 2 \leq |Q^\ell| + \Delta_v - 1.$$

  否则，Q 的第一条边就是 Q^ℓ 的第一条边，因此 P^ℓ。这条边是 $\{p^\ell, w^\ell\} = \{p^\ell, p'\}$。因此，$|Q'| = |\text{后缀}(Q, p')| \leq |Q| - 1 = |Q^\ell| + \Delta_v - 1$。无论哪种情况，我们都得到

$$\Delta \leq |P'| + |Q'| \leq |P^\ell| + |Q^\ell| + \Delta_v - 1 = \Delta^\ell + \Delta_v.$$

- P^ℓ 和 Q^ℓ 不共享第一条边，但 P' 和 Q' 共享。于是

$$\Delta = |P'| + |Q'| - 1 \leq |P^\ell| + |Q^\ell| + \Delta_v - 1 = \Delta^\ell + \Delta_v.$$

- P^ℓ 和 Q^ℓ 不共享第一条边，P' 和 Q' 也不共享。由于 P' 的第一条（也是唯一一条）边是 $\{p', w\} = \{p', p^\ell\}$，这意味着 $Q' = $ 是 Q, p' 的后缀。我们区分两种子情况。$- \ |$ 是 Q, p' 的后缀。$| \leq |Q| - 1$。那么

$$\Delta = |P'| + |Q'| \leq |P^\ell| + |Q| - 1 \leq |P^\ell| + |Q^\ell| + \Delta_v = \Delta^\ell + \Delta_v.$$

– $|$是Q, p'的后缀，$| = |Q|$和 $v^\ell \neq w$。那么 p'是 Q上的最后一个节点，即 $v = p'$。根据观察， $4\,Q$，是从 p'到 v的一条路径，因此可知 $|Q'| = 0 < |Q^\ell|$。我们得出结论：

$$\Delta = |P'| + |Q'| \leq |P^\ell| + |Q^\ell| + \Delta_v = \Delta^\ell + \Delta_v.$$

– $|$后缀$(Q,\ p')| = |Q|$和 $v^\ell = w$。与前一个子情况一样，由于 $w = p^\ell$且 $p' = v = w^\ell$，这与引理 10 矛盾。 □

在继续讨论 $v \neq w^\ell$或 $w \neq v^\ell$的情况之前，我们先证明另一条辅助结论，以排除 $v \neq p' = w$这一特定情况。

引理 *13*。 *</style}* $v \neq p' = w$是不可能的。

证明。反设 $v \neq p' = w$成立，则 $p' = p$。由引理 8 和引理 9 可得

$$t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta} \geq t_{w,\ell-1} - 4s\kappa \text{ and}$$
$$t_{p^\ell,\ell-1} - C_{p^\ell,\ell} \leq t_{p',\ell-1}.$$

利用 (P3) 和引理 3，可得

$$\begin{aligned}
0 &= t_{p',\ell-1} - t_{w,\ell-1} \\
&\geq t_{p^\ell,\ell-1} - C_{p^\ell,\ell} - \left(t_{w^\ell,\ell-1} - \frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right) - 4s\kappa \\
&\geq t_{p^\ell,\ell} - t_{w^\ell,\ell} - 4s\kappa - \frac{\kappa}{2} \\
&\geq \psi^s_{v^{\bar\ell},w^{\bar\ell}}(\bar\ell) - (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

从而得到所需的矛盾。 □

现在我们证明在 $v \neq w^\ell$ 或 $w \neq v^\ell$ 的情况下 (P4) 成立。

引理 14. 若 $p' \neq w^\ell$ 或 $w \neq p^\ell$，则对 $v, p', w, |P|, |Q|$以及第 $\ell - 1$层，(P4)成立。

证明。记满足以下条件的值为 $\Delta_w, \Delta_v \in \{-1, 0, 1\}$

$$t_{w^\ell,\ell-1} - C_{w^\ell,\ell} \geq t_{w,\ell-1} + 4s\kappa\Delta_w$$
$$t_{v^\ell,\ell-1} - C_{v^\ell,\ell} \leq t_{v,\ell-1} - (4s-2)\kappa\Delta_v - \kappa$$

根据引理 7 和引理 8。利用 (P4) 和引理 3，我们对其进行界定：

$$\begin{aligned}
&t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1} \\
&\geq t_{v^\ell,\ell-1} - \frac{C_{v,\ell}}{\vartheta} + (4s-2)\kappa\Delta_v + \kappa - (t_{w^\ell,\ell-1} - C_{w,\ell} - 4s\kappa\Delta_w) \\
&\geq t_{v^\ell,\ell} + (4s-2)\kappa\Delta_v + \kappa - t_{w^\ell,\ell} + 4s\kappa\Delta_w - \frac{\kappa}{2} \\
&\geq (4s-2)\kappa(\Delta^\ell + \Delta_v + \Delta_w) + (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2} + \kappa_s(|P^\ell| + \Delta_w) \\
&\geq (4s-2)\kappa(\Delta^\ell + \Delta_v + \Delta_w) + (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2} + \kappa_s|P'|,
\end{aligned}$$

其中最后一步利用了 $|P'| = |$后缀$(P,\ p')| \leq |P| \leq |P^\ell| + \Delta_w$。我们声称 $\Delta \leq \Delta^\ell + \Delta_v + \Delta_w$。证明这一点即可完成证明，因为根据上述不等式，

$$t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1} \geq (4s-2)\kappa\Delta + (\bar\ell - (\ell-1))\frac{\kappa}{2} + \kappa_s|P'|,$$

即，对于 v、 p'、 w、 $|P'|$、 $|Q'|$ 和层 $\ell-1$，(P4) 成立。

根据观察 3 和引理的前提条件， $P'=\text{suffix}(P,p')$ 或 $p'=v=w^\ell$。为涵盖 $P'=\text{suffix}(P,p')$ 的可能性，我们区分几种情况：

- $p'=p^\ell$。那么 $P'=P$且 $Q'=Q$，因为 p'是 P和 Q的第一个节点。因此，

$$|P'|+|Q'|=|P|+|Q|\le|P^\ell|+|Q^\ell|+\Delta_w+\Delta_v.$$

  我们区分三种子情况。
  - P^ℓ 和 Q^ℓ 没有共用第一条边。那么

$$\Delta\le|P'|+|Q'|=|P^\ell|+|Q^\ell|+\Delta_w+\Delta_v=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

  - P^ℓ、 Q^ℓ和 Q'共用同一条第一条边。根据引理 13， $w\neq p'$。因此， $P'=P\neq(p')$，这意味着 P^ℓ和 P'也共用同一条第一条边。因此， Q'和 P'也共用同一条第一条边，并且

$$\Delta=|P'|+|Q'|-1=|P^\ell|+|Q^\ell|-1+\Delta_w+\Delta_v=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

  - P^ℓ和 Q^ℓ具有相同的第一条边，但 Q'则没有。由于 $Q^\ell\neq(p^\ell)$，我们有 $v^\ell\neq p^\ell$。由 (P5) 可知，这意味着 $v^\ell\notin P^\ell$。特别地， v^ℓ不可能是 Q^ℓ和$|Q^\ell|\ge 2$的第一条边的一部分。由于 $p'=p^\ell$， Q和 Q'都以 p'开头。因此， Q'是 Q^ℓ 的前缀。然而，Q^ℓ与 P^ℓ具有相同的第一条边，而 Q'则没有。因此， $|Q'|=0\le|Q^\ell|+\Delta_v-1$。我们得出结论：

$$\Delta=|P'|+|Q'|\le|P^\ell|+|Q^\ell|-1+\Delta_w+\Delta_v=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

- $v=p'\neq p^\ell$。于是 $Q'=(p')$。此外，根据该引理的前提条件， $P'=$后缀(P,p')。由于 $p'\neq p^\ell$，我们有 $|$后缀$(P,p')|\le|P|-1$。根据构造， $|Q'|\le|Q|+1$。总之，

$$\Delta\le|P'|+|Q'|\le|P|-1+|Q|+1=|P^\ell|+\Delta_w+|Q^\ell|+\Delta_v=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

- $v\neq p'\neq p^\ell$。因此， $p'=p$，并且根据引理 9，$\{p^\ell,\ p'\}$ 是 P^ℓ 的第一条边。因此， $|P'|=$后缀$(P,\ p')|\le|P|-1\le|P^\ell|+\Delta_w-1$。我们区分两种子情况。
  - P^ℓ 和 Q^ℓ 不共享它们的第一条边。于是

$$\Delta\le|P'|+|Q'|\le|P^\ell|+\Delta_w+|Q^\ell|+\Delta_v=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

  - P^ℓ和 Q^ℓ共享它们的第一条边。由于 $v\neq p'$， Q与 Q^ℓ有相同的第一条边，即 $\{p^\ell,\ p'\}$。因此， $|Q'|=|$后缀$(Q,\ p'|=|Q|-1\le|Q^\ell|+\Delta_v-1$。我们得出结论：

$$\Delta\le|P'|+|Q'|\le|P^\ell|+\Delta_w+|Q^\ell|+\Delta_v-2<\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

接下来考虑 $P'\neq$是$P,\ p')$ 的后缀且 $p'=v=w^\ell$ 的情况。于是 $|Q'|=(v)$ 且$|P'|=|(p',\ w)|=1$，这意味着 $\Delta=1$。根据 (P2)， $v^\ell\neq w^\ell=v$。如果 $\Delta_v=1$，那么

$$\Delta=1\le\Delta^\ell\le\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$

根据引理 7，剩下的情况是， $\Delta_v=-1$ and $\{v,v^\ell\}$ 是 Q^ℓ 的最后一条边，或是 P^ℓ 的第一条边。根据引理 10， $v=w^\ell$ 不可能，因此这条边必定是 Q^ℓ 的最后一条边，且不同于 P^ℓ 的第一条边。此外，根据该引理的前提条件， $p^\ell\neq w$，因此必有$|P^\ell|\ge 2$。总之，以下两种情况之一成立

- $|Q^\ell|\ge 2$ 和

$$\Delta=1\le|P^\ell|+|Q^\ell|-3\le\Delta^\ell-2=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v,\text{ or}$$

- $|Q^\ell|=1$ 和 Q^ℓ 与 P^ℓ 不共用第一条边，因此得到

$$\Delta=1\le|P^\ell|+|Q^\ell|-2=\Delta^\ell-2=\Delta^\ell+\Delta_w+\Delta_v.$$ □

推论 1. (P4) 和 (P2) 对 $v,\ p',\ w,\ |P'|,\ |Q'|$ 以及第 $\ell-1$ 层成立。

证明。由引理 12、引理 14 和观察 2 可得。 □

剩下的工作是证明 (P3)。

引理 15. (P3) 对 v、 p'、 $|P'|$ 和第 $\ell-1$ 层成立。

证明。若 $v=p'$，则该结论可由推论 1 和观察 2 直接推出。因此，以下假设 $v\neq p'$，从而 $p'=p$。记 $\Delta_w\in\{-1,0,1\}$ 为满足以下条件的值

$$t_{w^\ell,\ell-1}-C_{w^\ell,\ell}\geq t_{w,\ell-1}+4s\kappa\Delta_w$$
$$t_{p^\ell,\ell-1}-C_{p^\ell,\ell}\leq t_{p',\ell-1}$$

根据引理 8 和引理 9。

由 (P3) 和引理 3 可得

$$\begin{aligned}t_{p',\ell-1}-t_{w,\ell-1}&\geq t_{p^\ell,\ell-1}-C_{p^\ell,\ell}-\left(t_{w^\ell,\ell-1}-\frac{C_{w^\ell,\ell}}{\vartheta}\right)+\Delta_w 4s\kappa\\&\geq t_{p^\ell,\ell}-t_{w^\ell,\ell}+4s\kappa\Delta_w-\frac{\kappa}{2}\\&\geq 4s\kappa(|P^\ell|+\Delta_w)+\psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\bar{\ell})-(\bar{\ell}-(\ell-1))\frac{\kappa}{2}.\end{aligned}$$

若 $P'=$是P,p'的后缀，则由上述不等式可直接推出 $|P'|\leq|P|\leq|P^\ell|+\Delta_w$以及 (P3) 对 $v,p',|P'|$和层 $\ell-1$成立。

否则，根据假设 $v\neq p'$ 以及观察 3，可得 $p'=w^\ell$和 $w=p^\ell$，且 $|P'|=|P^\ell|$。结合引理 3 和引理 11 以及 (P3)，我们得到

$$\begin{aligned}t_{p',\ell-1}-t_{w,\ell-1}&\geq t_{p',\ell-1}-t_{w^\ell,\ell}+\left(d-u+\frac{\Lambda-d}{\vartheta}\right)\\&\geq t_{p^\ell,\ell-1}-C_{p^\ell,\ell}-t_{w^\ell,\ell}+\left(d-u+\frac{\Lambda-d}{\vartheta}\right)\\&\geq t_{p^\ell,\ell}-t_{w^\ell,\ell}-\frac{\kappa}{2}\\&\geq 4s\kappa|P^\ell|+\psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\bar{\ell})-(\bar{\ell}-(\ell-1))\frac{\kappa}{2}\\&\geq 4s\kappa|P'|+\psi^s_{v^\ell,w^\ell}(\bar{\ell})-(\bar{\ell}-(\ell-1))\frac{\kappa}{2},\end{aligned}$$

即 (P3) 对 $v,p',|P'|$和层 $\ell-1$成立。 □

最后，利用这些结果不难证明 (P5) 也成立。

引理 16. (P5) 对 $v,p',|P'|$和层 $\ell-1$成立。

证明。假设 v位于 P'上。根据推论 1， $v\neq w$。因此，若 $P'=(p',w)$，则 $v=p'$，即 (P5) 对 $v,p',|P'|$和层 $\ell-1$成立。

否则， $P'=\mathrm{suffix}(P,p')$，这意味着 v位于 $\mathrm{suffix}(P,p')$ 上。由于 $v\neq w$，这意味着 v 位于 P^ℓ 上。反设 $v\neq p'=p$，根据引理 9，我们有 $\mathrm{prefix}(P,p')=\mathrm{prefix}(P^\ell,p')$，它等于 $(p^\ell)=(p')$ 或 (p^ℓ,p')。因此，上述内容意味着 v实际上位于 $\mathrm{suffix}(P^\ell,p')=\mathrm{suffix}(P^\ell,p)$ 上。于是，由于 $p'=v$，这就产生矛盾，因此我们确实必须有 $p'=v$。 □

推论 2. 在定理 *1* 的证明中，必须满足$\ell=\ell$。

证明。反设 $\ell > \ell$，由推论 1、引理 15 和 16 以及观察 2 可知，对于某些 $v^{\ell-1}$，$p^{\ell-1}$，$w^{\ell-1}$以及路径$P^{\ell-1}$、$Q^{\ell-1}$，层 $\ell-1$ 也满足性质 (P1) 至 (P5)，这与 ℓ的极小性矛盾。□

偏差界。有了用于界定 Ψ^s 的工具后，只需对 $s \in \mathbb{N}_{>0}$ 进行归纳即可完成证明。为了将归纳的起点设在 $s=1$，我们利用 $\Psi^1(\ell) \le \Xi^1(\ell) + 2\kappa D$。

引理 17。

$$\Psi^1(\ell) \le \begin{cases} \Xi^1(0) & \text{if } \ell < 4\Xi^1(0)/\kappa \\ 4\kappa D & \text{else.} \end{cases}$$

证明。回顾 $\kappa = 2(u + (1-1/\vartheta)(\Lambda - d))$。注意，对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，均有 $\Xi^1(\ell) \le \Psi^1(\ell) + 2\kappa D$。因此，根据定理 1，对于任意 $\ell \le \bar{\ell}$，我们有

$$\begin{aligned} \Psi^1(\bar{\ell}) &\le \max\left\{0, \Xi^1(\underline{\ell}) - (\bar{\ell} - \underline{\ell} + 1)\kappa\right\} + (\bar{\ell} - \underline{\ell})\frac{\kappa}{2} \\ &\le \max\left\{0, \Psi^1(\underline{\ell}) + 2\kappa D - (\bar{\ell} - \underline{\ell} + 1)\kappa\right\} + (\bar{\ell} - \underline{\ell})\frac{\kappa}{2}. \end{aligned}$$

特别地，我们有

$$\Psi^1(\ell) \le \begin{cases} \max\left\{4\kappa D, \Xi^1(0)\right\} & \text{if } \ell < 8D \\ \max\left\{4\kappa D, \Psi^1(\ell - 8D) - 2\kappa D\right\} & \text{else.} \end{cases}$$

因此，通过对 $k \in \mathbb{N}$进行归纳，我们有

$$\Psi^1(\ell) \le \max\{4\kappa D, \Xi^1(0) - 2k\kappa D\}$$

对所有 $\ell \in [8kD, 8(k+1)D)$。注意到 $\ell \ge 4\Xi^1(0)/\kappa$ 得到 $k \ge \Xi^1(0)/(2\kappa D)$，即可推出引理的结论。□

注意，这个引理表明，Ψ^1 会在 $O(\Xi^1(0)/\kappa)$ 层内自稳定于 [5]。

我们指出，更仔细的分析可得出关于 $\Psi^1(\ell)$ 的一个界，该界会收敛到 $2\kappa D$。我们仅陈述对于我们所保证的小输入偏斜的这一结果。

推论 3. 若 $\mathcal{L}_0 \le 4\kappa$，则对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\Psi^1(\ell) \le 2\kappa D$。

证明。注意

$$\Xi^1(0) = \max_{v,w \in V}\{t_{v,0} - t_{w,0} - 2\kappa d(v,w)\} \le \max_{v,w \in V}\{(\mathcal{L}_0 - 2\kappa)d(v,w)\} \le (\mathcal{L}_0 - 2\kappa)D \le 2\kappa D.$$

在引理 17 的证明中，将归纳法中的 $8D$ 替换为 $4D$，可得

$$\Psi^1(\ell) \le \begin{cases} \max\left\{2\kappa D, \Xi^1(0)\right\} & \text{if } \ell < 4D \\ \max\left\{2\kappa D, \Psi^1(\ell - 4D)\right\} & \text{else,} \end{cases}$$

这意味着 $\Psi^1(\ell) \le 2\kappa D$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$都成立一致的上界。□

为求完整起见，我们还推得 $\sup_{\ell \in \mathbb{N}}\{\Psi^0(\ell)\}$，文献中也称为全局偏斜，其属于 $O(u + (1-1/\vartheta)(\Lambda - d))$. 若 $\Lambda \in O(d + u/(\vartheta - 1))$，则此上界在渐近意义下是最优的 [2]。

推论 4。若$\mathcal{L}_0 \le 4\kappa$，则对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\Psi^0(\ell) \le 6\kappa D \in O(u + (1-1/\vartheta)(\Lambda - d))$。

证明。由推论 3、$\Psi^0(\ell) \le \Psi^1(\ell) + 4\kappa D$这一事实以及 κ的选取可得。□

为了界定局部偏斜，我们现在转而关注 $\Psi^s(\ell)$，其中 $s > 1$。

引理 18. 对于某些 $s \in \mathbb{N}, s > 0$，假设对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，都有 $\Psi^{s-1}(\ell) \leq \Psi^{s-1}$。那么

$$\Psi^s(\ell) \leq \begin{cases} \Xi^s(0) + \frac{\Psi^{s-1}}{2} & \text{if } \ell < \Psi^{s-1}/\kappa \\ \frac{\Psi^{s-1}}{2} & \text{else.} \end{cases}$$

证明。回顾一下 $\kappa = 2(u + (1 - 1/\vartheta)(\Lambda - d))$。对于 $\ell < \Psi^{s-1}/\kappa$，根据定理 1，取 $\bar{\ell} = \ell$ and $\ell = 0$，我们有

$$\Psi^s(\ell) \leq \Xi^s(0) + \frac{\kappa\ell}{2} \leq \Xi^s(0) + \frac{\Psi^{s-1}}{2}.$$

注意，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\Xi^s(\ell) \leq \Psi^{s-1}(\ell) \leq \Psi^{s-1}$。因此，对于 $\ell \geq \Psi^{s-1}/\kappa$，根据定理 1，取 $\bar{\ell} = \ell$ and $\ell = \ell - \lfloor \Psi^{s-1}/\kappa \rfloor$，我们有

$$\Psi^s(\ell) \leq \max\left\{0, \Xi^s\left(\ell - \left\lfloor \frac{\Psi^{s-1}}{\kappa} \right\rfloor\right) - \left(\left\lfloor \frac{\Psi^{s-1}}{\kappa} \right\rfloor + 1\right)\kappa\right\} + \left\lfloor \frac{\Psi^{s-1}}{\kappa} \right\rfloor \frac{\kappa}{2} \leq \frac{\Psi^{s-1}}{2}. \qquad \square$$

利用这个引理，我们可以将局部偏斜界定为 $O(\kappa(1 + \log D)) = O((u + (1 - 1/\vartheta)(\Lambda - d))(1 + \log D))$。

定理 2. 如果没有故障，那么对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\mathcal{L}_\ell \leq 4\kappa(2 + \log D)$。

证明。根据引理 27，$L_0 \leq 4\kappa$。根据推论 3，$\Psi^1(\ell) \leq 2\kappa D$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$成立。根据假设 $L_0 \leq 4\kappa$，对所有 $s > 1$，我们有

$$\Xi^s(0) = \max_{v,w \in V}\{t_{v,0} - t_{w,0} - (4s - 2)\kappa d(v, w)\} \leq \max_{v,w \in V}\{(\mathcal{L}_0 - 6\kappa)d(v, w)\} = 0.$$

因此，归纳应用引理 18 可得 $\Psi^s(\ell) \leq 2^{2-s}\kappa D$。特别地，$\Psi^{\lfloor \log D \rfloor} \leq 8\kappa$。根据观察 1，即可得出结论。$\square$

此外，我们还得到如下自稳定性性质。

Theo推论 3. 若对于 $s, s' \in \mathbb{N}, s \leq s'$，有 $\Psi^s(\ell) \leq \Psi^s$对所有 $\ell \geq \ell \in \mathbb{N}$成立，则对于 $\ell \geq \underline{\ell}$

$$\mathcal{L}_\ell \leq \begin{cases} 4s\kappa + \Psi^s & \text{if } \underline{\ell} \leq \ell < \underline{\ell} + 2\Psi^s/\kappa \text{ and} \\ 4s'\kappa + \frac{\Psi^s}{2^{s'-s}} & \text{if } \ell \geq \underline{\ell} + 2\Psi^s/\kappa. \end{cases}$$

证明。归纳应用[3] 引理 18 可得，对于 $s' \geq s$ 和 $\ell \geq \ell + \sum_{\sigma=s+1}^{s'} \Psi^s/(2^{\sigma-s}\kappa)$，有

$$\Psi^{s'} \leq \frac{\Psi^s}{2^{s'-s}}.$$

由于该和构成一个等比级数，因此这尤其适用于所有 $\ell \geq \ell + 2\Psi^s/\kappa$。现在应用观察 1 即可得出该结论。$\square$

4.4 存在故障时的偏差界

为了分析偏斜如何随故障演变，我们将存在故障的情形与无故障系统的界限联系起来。算法保证的关键性质是，除去一个加性 2κ 后，脉冲时间位于正确前驱节点的脉冲时间所张成的区间内，并加上 Λ。我们首先证明，当某个节点 (v, ℓ) 的 $(v, \ell - 1)$ 是故障节点时，这一结论成立。

[3]照目前的表述，引理仅在 $\ell = 0$时适用。不过，算法以及由此得到的所有陈述在将索引平移 ℓ 后均保持不变。

Lemma 19. 假设 $(v,\ell) \in V_\ell$, $\ell > 0$ 的唯一故障前驱节点是 $(v,\ell-1)$。记

$$t_{\min} := \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} \text{ and}$$
$$t_{\max} := \max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}.$$

Then

$$t_{\min} + \Lambda - 2\kappa \le t_{v,\ell} \le t_{\max} + \Lambda + 2\kappa.$$

Proof. 根据引理的假设，对于所有 $\{v,w\} \in E$，$(w,\ell-1) \notin F$。我们有 tha t

$$\begin{aligned} H_{\text{own}} - H_{\max} &= \min_{s\in\mathbb{N}}\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa\} \\ &\le \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} \\ &\le \max\{H_{\text{own}} - H_{\max}, H_{\text{own}} - H_{\min}\} \\ &= H_{\text{own}} - H_{\min}. \end{aligned}$$

因此，简写为

$$\Delta = \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2},$$

成立

$$H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} \le \Delta \le H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2}.$$

考虑到 情况 $\Delta \notin [0,\vartheta\kappa]$ 下的调整，并利用 $H_{\min} \le H_{\max}$，我们得到 th at

$$H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{3\kappa}{2} \le C_{v,\ell} \le H_{\text{own}} - H_{\min} + \frac{3\kappa}{2}.$$

因此，(v,ℓ) 产生脉冲时的本地时间 $H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell}$ 满足

$$H_{\min} + \Lambda - d - \frac{3\kappa}{2} \le H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) \le H_{\max} + \Lambda - d + \frac{3\kappa}{2}.$$

若 $H_{\min} > H_{v,\ell}(t_{v,\ell})$，则有

$$t_{\min} - t_{v,\ell} \le H_{\min} - H_{v,\ell}(t_{v,\ell}).$$

应用消息延迟的下界和方程（1），可得

$$t_{v,\ell} \ge t_{\min} + d - u + \Lambda - d - \frac{3\kappa}{2} > t_{\min} + \Lambda - 2\kappa.$$

若 $H_{\min} \le H_{v,\ell}(t_{v,\ell})$，消息延迟和硬件时钟漂移的界限与方程（1）共同得出

$$\begin{aligned} t_{v,\ell} &\ge t_{\min} + d - u + \frac{\Lambda - d - 3\kappa/2}{\vartheta} \\ &> t_{\min} + \Lambda - \frac{3\kappa}{2} - u - \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right)(\Lambda - d) \\ &= t_{\min} + \Lambda - 2\kappa. \end{aligned}$$

关于 $t_{v,\ell}$ 的上界，注意到由于 $t_{v,\ell}$ 随 $H_{v,\ell}(t_{v,\ell})$ 增大，要对 $t_{v,\ell}$ 求上界，我们可以假设

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) = H_{\max} + \Lambda - d + \frac{3\kappa}{2} > H_{\max},$$

其中最后一步使用了公式（2）。在这种情况下，

$$t_{v,\ell} - t_{\max} \le H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) - H_{\max} + d \le \Lambda + \frac{3\kappa}{2} < \Lambda + 2\kappa. \qquad \square$$

相似 推理涵盖以下情况：对于某些 $(v,\ell) \in V_\ell$和 $\{v,w\} \in E$，$(w,\ell-1)$ 存在故障 .

引理 20. 假设对于 $(v,\ell) \in V_\ell$, $\ell > 0$，$(v,\ell-1)$ 没有故障，且至多有一个前驱节点发生故障。记作

$$t_{\min} := \min_{\substack{((w,\ell-1),(v,\ell)) \in E_{\ell-1} \\ (w,\ell-1) \notin F}} \{t_{w,\ell-1}\} \text{ and}$$
$$t_{\max} := \max_{\substack{((w,\ell-1),(v,\ell)) \in E_{\ell-1} \\ (w,\ell-1) \notin F}} \{t_{w,\ell-1}\},$$

then

$$t_{\min} + \Lambda - 2\kappa \le t_{v,\ell} \le t_{\max} + \Lambda.$$

证明。根据引理 3，$C_{v,\ell} \ge 0$ 意味着

$$t_{v,\ell} - t_{\min} \le t_{v,\ell} - t_{v,\ell-1} \le \Lambda,$$

而 $C_{v,\ell} \le \vartheta\kappa$ 可得

$$t_{v,\ell} - t_{\max} \ge t_{v,\ell} - t_{v,\ell-1} \ge d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta} - \kappa \ge \Lambda - 2\kappa.$$

接下来只需证明：若 $C_{v,\ell} < 0$ ，则$t_{v,\ell}$ 的上界成立；若 $C_{v,\ell} > \vartheta\kappa$，则下界成立。

首先考虑 $C_{v,\ell} < 0$ 的情况。因此，

$$C_{v,\ell} = H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2} + 2\kappa > H_{\text{own}} - H_{\min}.$$

由此可得

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} \le H_{\min} + \Lambda - d.$$

注意到，来自某个前驱节点的第一条消息的接收时间不晚于来自正确前驱的消息的接收时间，我们得出

$$t_{v,\ell} \le t_{\min} + \Lambda.$$

现在考虑 $C_{v,\ell} > \vartheta\kappa$ 的情况。因此，

$$C_{v,\ell} = H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{\kappa}{2} - \kappa > H_{\text{own}} - H_{\max} - \vartheta u.$$

由此可得，(v,ℓ) 产生其脉冲时的本地时间 H 满足

$$H = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} \ge H_{\max} + \Lambda - d + \vartheta u.$$

注意到，来自某个前驱节点的最新消息的接收时间不早于来自正确前驱的最新消息的接收时间，由方程（1）可得

$$t_{v,\ell} \ge t_{\max} + d + \frac{\Lambda - d}{\vartheta} > t_{v,\ell-1} + \Lambda - \kappa.$$ □

推论 5. 记

$$t_{\min} := \min_{\substack{((w,\ell-1),(v,\ell)) \in E_{\ell-1} \\ (w,\ell-1) \notin F}} \{t_{w,\ell-1}\} \text{ and}$$
$$t_{\max} := \max_{\substack{((w,\ell-1),(v,\ell)) \in E_{\ell-1} \\ (w,\ell-1) \notin F}} \{t_{w,\ell-1}\}.$$

Then

$$t_{\min} + \Lambda - 2\kappa \le t_{v,\ell} \le t_{\max} + \Lambda + 2\kappa.$$

证明. 由引理 19 和 20，以及没有任何节点拥有多个故障前驱节点这一假设，可立即得出。 □

利用这一结果，我们可以通过第 $\ell - 1$ 层附近节点的偏斜界，来界定第 $\ell - 1$ 层发生故障对其后继节点的影响；我们利用这样一个事实：我们给出的所有界，实际上也适用于该节点未发生故障的情况。

引理 21. 设节点 $(v, \ell) \in V_\ell$, $\ell > 0$ 的一个前驱节点发生故障。此外，假设在一个执行中，若仅将 (v, ℓ) 的故障前驱节点改为正确节点，则有 $\max_{\{v,w\}\in E}\{|t_{v,\ell-1} - t_{w,\ell-1}|\} \leq B$。那么，在该前驱节点发生故障的执行中，$(v, \ell)$ 的脉冲时间与之相差至多 $2B + 4\kappa$。

证明. 将未发生前驱节点故障的执行中的值称为标准变量，将发生前驱节点故障的执行中的值称为撇号变量。特别地，对于节点 $(v, \ell) \in V_\ell \setminus F$

$$\begin{aligned}
t_{\min} &:= \min_{((w,\ell-1),(v,\ell))\in E_{\ell-1}} \{t_{w,\ell-1}\},\\
t_{\max} &:= \max_{((w,\ell-1),(v,\ell))\in E_{\ell-1}} \{t_{w,\ell-1}\},\\
t'_{\min} &:= \min_{\substack{((w,\ell-1),(v,\ell))\in E_{\ell-1}\\ (w,\ell-1)\notin F}} \{t_{w,\ell-1}\}, \text{ and}\\
t'_{\max} &:= \max_{\substack{((w,\ell-1),(v,\ell))\in E_{\ell-1}\\ (w,\ell-1)\notin F}} \{t_{w,\ell-1}\}.
\end{aligned}$$

分别表示第 $\ell - 1$ 层上（正确）前驱节点在无故障和有故障情况下的最早与最晚脉冲时间。

注意到

$$t_{v,\ell-1} - B \leq t_{\min} \leq t_{\min'} \leq t_{\max'} \leq t_{\max} \leq t_{v,\ell-1} + B.$$

因此，推论 5（应用于两次执行）表明

$$\begin{aligned}
t_{v,\ell-1} - B - 2\kappa \leq t_{v,\ell} \leq t_{v,\ell-1} + B + 2\kappa \text{ and}\\
t_{v,\ell-1} - B - 2\kappa \leq t'_{v,\ell} \leq t_{v,\ell-1} + B + 2\kappa.
\end{aligned}$$ □

最后，我们注意到，只要没有故障，这种“时间偏移”就会传播，而不会进一步增大。不过，这里有一个细微之处：这仅对时序的界 成立：时序变化可能会为本地时钟的漂移积累留出更多时间；由于我们的最坏情况界包含漂移可能累积的最大时间误差（只要本地偏斜没有变得过大），这一点已由引理 3 给出的界考虑在内。因此，我们得到引理 3 的以下推广版本。

引理 22. 假设 $v \in V$ 和 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ 是(v, ℓ) 的前驱节点，且它们均正确。如果将这些前驱节点的脉冲时间偏移至多 $\delta \in \mathbb{R}$，并且等式 (2) 对偏移后的时间仍然成立，那么

$$d - u + \frac{\Lambda - d - C_{v,\ell}}{\vartheta} - \delta \leq t'_{v,\ell} - t_{v,\ell-1} \leq \Lambda - C_{v,\ell} + \delta,$$

其中，$t'_{v,\ell}$ 表示应用偏移后执行中 (v, ℓ) 的脉冲时间。

证明。脉冲时间是前驱节点脉冲时间的递增函数。因此，要最大化或最小化 $t_{v,\ell}$，我们需要分别最大化或最小化前驱节点的脉冲时间。将所有前驱节点的脉冲时间统一平移 δ，也会使 $t'_{v,\ell}$ 相对于 $t_{v,\ell}$ 平移 δ。接下来的论述与引理 3 的证明类似，只需在所有不等式中传递这一统一平移即可。□

有了这些 具备这些工具后，我们可以得出结论：面对故障时，偏斜不会无限增长。

定理 4. 如果系统中至多有 f 个故障节点，且第 0 层没有故障节点，那么 $\mathcal{L}_\ell \in O(5^f \kappa \log D)$。

证明。我们对存在故障的层数 $i \le f$ 进行归纳，证明偏斜有界于 $B_i := 4\kappa(2+\log D)5^i \sum_{j=0}^{i} 5^{-j} \in O(5^f \kappa \log D)$。根据推论 6，$\mathrm{L}_0 \le \kappa/2 < 4\kappa$。因此，如果第 $\ell > 0$ 层没有故障，根据定理 2，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，我们有 $\mathrm{L}_\ell \le B_0 := 4\kappa(2+\log D)$。

假设我们已完成步骤 $i \in \mathbb{N}$，且 ℓ_{i+1} 是下一个需要添加故障的层。那么，对于所有 $\ell \le \ell_{i+1}$，在向第 $i+1$ 层添加故障之前和之后，均有 $\mathrm{L}_{\ell'} \le B_i = 4\kappa(2+\log D)5^f \sum_{j=0}^{i} 5^{-j}$。根据引理 21，由于添加故障，第 $\ell_{i+1}+1$ 层的脉冲时间变化不会超过 $2B_i + 4\kappa$。根据引理 22，这一结论也适用于我们计算的第 $\ell > \ell_{i+1}$ 层中脉冲时间的所有界限[4]。由于 $D \ge 1$，因此 $\log D \ge 0$，我们得到步骤 $i+1$ 中的局部偏斜有界于

$$5B_i + 4\kappa = 4\kappa(2+\log D)5^{i+1}\sum_{j=0}^{i} 5^{-j} + 4\kappa \le 4\kappa(2+\log D)5^{i+1}\sum_{j=0}^{i+1} 5^{-j} = B_{i+1}. \qquad \square$$

均匀故障分布下的偏差界

定理 4 中的界关于 f 呈指数关系，这似乎表明系统只能支持极少数量的故障，否则局部偏斜就会急剧增大。然而，我们尚未考虑到，整个方法的出发点是假设故障足够稀疏，这意味着许多故障以导致局部偏斜指数级累积的方式聚集在一起的可能性极低。这使得算法的自稳定性能够完全防止这种累积。

下文中，假设每个节点以概率 $o(n^{-1/2})$ 均匀且独立地发生故障。这是在保证任一节点以概率 $1-o(1)$ 不会拥有超过一个故障前驱节点的前提下，我们能够支持的最大错误概率。一个关键观察是，这意味着在相当大的距离 $n^{1/12}$ 范围内，任何节点都不会有超过常数数量的、能够影响它的故障节点。现在我们将对此断言进行形式化并加以证明。

定义 5（距离-δ 祖先节点）。对于节点 $(v,\ \ell) \in V_\ell$ 和 $\delta \in \mathbb{N}$，其距离-δ 祖先节点 是所有满足以下条件的节点 $(w,\ \ell') : \in V_G \setminus \{(v,\ \ell)\}$，在 G 中存在一条从 $(w,\ \ell')$ 到 $(v,\ \ell)$ 的长度至多为 δ 的（有向）路径。

定义 6（距离-δ k-故障）。如果 $k \in \mathbb{N}$ 是满足以下条件的最小值：节点 $(v,\ \ell) \in V_\ell$、$\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ 的距离-δ k-故障 当且仅当其距离-（$(k+1)\delta$）祖先节点中至多有 k 个故障节点 $(v,\ \ell)$。

观察 5。假设 $\delta \le n^{1/12}$。如果节点以概率 $p \in o(1/\sqrt{n})$ 独立发生故障，那么以概率 $1-o(1)$ 所有节点对于 $k \le 2$ 都是距离-δ k-故障的。

证明。为了对 $k > 2$ 而言是距离-δ k-故障的，一个节点在其距离-(3δ) 祖先节点中必须至少有 3 个故障。这些祖先节点的数量上界为 $(3\delta)^2 \in O(n^{1/6})$。由于 $p \in o(1/\sqrt{n})$，这种情况发生的概率上界为 $O(p^3\binom{n^{1/6}}{3}) = O(p^3\sqrt{n}) \subset o(1/n)$。对所有 n 个节点应用并集界即可得出结论。$\square$

[4] 由于硬件时钟会发生漂移，这并不适用于脉冲时间本身。不过，我们依靠引理 3 来证明无故障情况下的界限，而这由引理 22 涵盖。

W我们可以利用这一点，更好地控制故障导致的偏斜增长幅度 r.

引理 23. 假设对于所有层 $\ell \geq \bar{\ell}$ 和 $s \in \mathbb{N}$，$\Psi^s(\ell) \leq B_{s,\ell}$ 和 $\mathcal{L}_\ell \leq B$，其中 $\bar{\ell}, \ell \in \mathbb{N}$，若这些层中没有故障。如果某一层 $\ell \geq \bar{\ell}$ 中没有节点的距离为 $(\ell - \bar{\ell})$ 的祖先节点中故障节点超过 2 个，则对于所有 $\ell \geq \bar{\ell}$，$\Psi^s(\ell) \leq B_{s,\ell} + 12B + 24\kappa$。

证明。我们考察在层 $\ell \geq \bar{\ell}$ 上增加故障可能对脉冲时间造成多大影响。对于 $\ell \geq \bar{\ell}$ 和 $(v, \ell) \in V_\ell$，用 $f_{v,\ell} \in \{0, 1, 2\}$ 表示 (v, ℓ) 的距离为 $(\ell - \bar{\ell})$ 的祖先节点中故障节点的数量。对于 $f_{v,\ell} = 0$，$t_{v,\ell}$ 不变。对于 $f_{v,\ell} > 0$，分两种情况讨论。如果 (v, ℓ) 没有故障前驱节点，那么根据引理 22，$t_{v,\ell}$ 的变化至多为其任一前驱节点所发生的最大偏移。另一方面，如果 (v, ℓ) 有故障前驱节点，那么对于 (v, ℓ) 的所有正确前驱节点，$f_{v,\ell} > f_{w,\ell-1}$。因此，根据引理 21，我们可以将偏移界定为 $B_{f_v,\ell}$，其中 $B_0 := 0$ 且 $B_{f+1} := 2(B + B_f) + 4\kappa$。

根据假设，$f_{v,\ell} \leq 2$，因此最大移位量由 $B_2 = 6B + 12\kappa$ 限制。我们得出，$\Psi^s(\ell) \leq B_{s,\ell} + 2B_2 = B_{s,\ell} + 12B + 24\kappa$，如所述。□

结合引理 23，观察 5 表明，偏斜在 $n^{1/12}$ 层内的增幅不超过常数倍。然而，我们需要处理总计 $\Theta(\sqrt{n})$ 层。为此，我们将任务划分为每块包含 $n^{1/12}$ 层的切片，并利用算法的自稳定性。为简便起见，以下假设 $n^{1/12}$ 为整数。由于我们证明的是渐近界，这不会影响结果。

定义 7（切片）。切片 $i \in \mathbb{N}_{>0}$ 由层 $\ell \in [(i-1)n^{1/12},\ in^{1/12} - 1]$ 组成。

注意，由于节点排列在方形网格中，切片数量不超过 $n^{5/12}$。由于第 0 层上的节点以及 $\ell > 0$ 层上的边界节点存在重复，切片的数量实际上是 $n^{5/12} - \Theta(1)$。

作为迈向概率性偏斜界的下一步，我们证明，如果 局部偏斜保持有界，那么对于不太大的级别 s，Ψ^s 仍几乎与没有故障时一样小。首先，我们给出一个宽松的界，它通过逐个切片地累积偏移量，进行朴素估算。

引理 24。 假设

- $L_0 \leq 4\kappa$，
- 每个节点都是距离-$n^{1/12}$ k-故障的，对 $k \leq 2$ 成立，并且
- $\mathcal{L}_\ell \leq B$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 均成立。

那么，对于切片 $i \in \mathbb{N}_{>0}$ 中的每个 $s \in \mathbb{N}$ 和层 ℓ，都有

$$\Psi^s(\ell) \leq 2^{2-s}\kappa D + i(12B + 24\kappa).$$

对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。首先假设没有故障。在这种情况下，类似于定理 2 的证明，我们得到 $\Psi^s(\ell) \leq 2^{2-s}\kappa D$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 均成立。现在我们按切片逐步“加入”故障；根据引理 23，每次都将 $\Psi^s(\ell)$ 的上界增加 $12B + 24\kappa$，对所有切片 $j \geq i$ 均如此。□

当 s、$2^{2-s}\kappa D \ll n^{1/12}$ 的取值较大时，这个朴素的界不足以说明，与无故障情形相比，$\Psi^s(\ell)$ 不会增加太多。不过，利用定理 3，我们可以更进一步。

引理 25. 假设

- $L_0 \leq 4\kappa$，
- 每个节点的距离为 $n^{1/12}$ k，故障数为 $k \leq 2$，并且
- $\mathcal{L}_\ell \leq B \in o(n^{1/12}\kappa/\text{对数 } D)$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 均成立。

接下来，对于[5] $s \in \mathbb{N}_{>0}$， $s \leq$ 对数 $D -$ 对数$(B/\kappa) - 2$ 对数 对数 D，有

$$\Psi^s(\ell) \leq \Psi^s \in (1+o(1))2^{2-s}\kappa D.$$

证明。注意到 $D \in \Theta(n^{1/2})$，因此 $\log\log D \in \omega(1)$。相应地，引理的前提条件确保 $n^{5/12}(B+\kappa) \in o(\kappa D/\log D)$，且 $B+\kappa \in o(\Psi^{s-1}/\log D)$。因此，我们可以固定一个合适的 $\varepsilon \in o(1)$，使得

$$n^{5/12}(12B+24\kappa) \leq \frac{\varepsilon}{\log D}\cdot 2\kappa D \text{ and}$$
$$\left(\left\lceil\frac{\Psi^{s-1}}{n^{5/12}\kappa}\right\rceil+1\right)(12B+24\kappa) \leq \frac{\varepsilon}{4\log D}\cdot\Psi^{s-1}.$$

我们声称，若 n 足够大，使得 $\varepsilon \leq 1$，则有

$$\Psi^s(\ell) \leq \Psi^s := 2^{2-s}\kappa D\cdot\left(1+\frac{\varepsilon s}{\log D}\right),$$

我们通过对 $s \in \mathbb{N}_{>0}$使用归纳法来证明这一点。

对于 $s = 1$的基例，注意到切片数不超过 $n^{5/12}$，由引理 24 可得

$$\Psi^1(\ell) \leq 2\kappa D + n^{5/12}(12B+24\kappa) \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{\log D}\right)2\kappa D,$$

也就是说，确实有 $\Psi^1(\ell) \leq \Psi^1$。

现在假设该命题对 $s-1 \in \mathbb{N}_{>0}$成立。那么，根据引理 24 和归纳假设，对于切片 $i \leq \lceil(\Psi^{s-1}/(n^{1/12}\kappa)\rceil$中的层 ℓ，我们有

$$\Psi^s(\ell) \leq 2^{2-s}\kappa D + \left\lceil\frac{\Psi^{s-1}}{n^{1/12}\kappa}\right\rceil(12B+24\kappa) < \frac{\Psi^{s-1}}{2} + \left(\left\lceil\frac{\Psi^{s-1}}{n^{1/12}\kappa}\right\rceil+1\right)(12B+24\kappa).$$

对于切片 $i > \lceil(\Psi^{s-1}/(n^{1/12}\kappa)\rceil$中的一层 ℓ，首先假设我们只在切片 $j \lhd i - \lceil(\Psi^{s-1}/(n^{1/12}\kappa)\rceil$中添加故障。因此，我们可以应用引理 18，调整层索引，使“第 0 层”成为切片 $i - \lceil(\Psi^{s-1}/(n^{1/12}\kappa)\rceil$的第一层。在这种情况下，我们有 $\Psi^s(\ell) \leq \frac{\Psi^{s-1}}{2}$。现在，我们对切片 $j \in \overline{\lceil i - \lceil(\Psi^{s-1}/(n^{1/12}\kappa)\rceil,\ i]}$归纳地应用引理 23，总计将 $(\lceil\Psi^{s-1}/(n^{1/12}\kappa)\rceil+1)(12B+24\kappa)$ 加入上界，即

$$\begin{aligned}
\Psi^s(\ell) &\leq \frac{\Psi^{s-1}}{2} + \left(\left\lceil\frac{\Psi^{s-1}}{n^{1/12}\kappa}\right\rceil+1\right)(12B+24\kappa)\\
&\leq \left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\varepsilon}{4\log D}\right)\right)\Psi^{s-1}\\
&= \left(\frac{1}{2}+\left(\frac{\varepsilon}{4\log D}\right)\right)2^{2-(s-1)}\kappa D\cdot\left(1+\frac{\varepsilon(s-1)}{\log D}\right)\\
&= 2^{2-s}\kappa D\cdot\left(1+\frac{\varepsilon(s-1/2)}{\log D}+\frac{\varepsilon^2}{2\log^2 D}\right)\\
&\leq 2^{2-s}\kappa D\cdot\left(1+\frac{\varepsilon s}{\log D}\right),
\end{aligned}$$

其中，最后一步假设 n 足够大，使得 $\varepsilon \leq 1$。 □

[5]如果 $D = 1$，我们假设 s 的上界为负，因此该断言显然成立。请注意，我们在 n 中给出的是一个渐近陈述，并且 D 随着 n 增长，所以这种情况实际上无需担心。

我们的目标是将 $\Psi^{\lfloor \log D \rfloor}$限制在 $O(\kappa \log D)$ 以内，因为根据观察 1，这意味着局部偏斜可被限制在$O(\kappa \log D)$ 以内。因此，我们将使用上述引理，并取 $B \in O(\kappa \log D)$，这样距离“目标”层级 $\lfloor \log D \rfloor$ 就只差 $O(\log \log D)$ 层。为弥合剩余差距，我们利用这样一个事实：故障引起的偏差增大后，稳定剩余的 $O(\log \log D)$ 层所需的时间仅为 $\log^{O(1)} D = \log^{O(1)} n \subset o(n^{1/12})$ 层，因为涉及的势有界于 $o(\kappa n^{1/12})$。

引理 26. 假设

- $\mathcal{L}_0 \leq 4\kappa$ 且
- 每个节点都是距离-$n^{1/12}$ k-故障的，对于 $k \leq 2$。

那么 $\mathcal{L}_\ell \in O(\kappa \log D)$。

证明。反设结论不成立，并令 $\bar{\ell} \in \mathbb{N}_{>0}$ 为使 L_ℓ 过大的最小值。因此，对于层 $\ell < \bar{\ell}$，我们可以假设 $\mathrm{L}_\ell \leq C\kappa \log D$，其中 C为充分大的常数。

考虑 $s = \lfloor \log D - \log(B/\kappa) - 2 \log \log D - \log C \rfloor - 5$。根据引理 25，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}, \ell < \bar{\ell}$，都有

$$\Psi^s(\ell) \in \Psi^s := (1 + o(1))2^{2-s}\kappa D \subseteq \left(\frac{1}{4} + o(1)\right) \log^3 D,$$

对于足够大的 n，该值小于 $\lfloor \log^3 D \rfloor/2$。事实上，这个界也适用于层 $\bar{\ell}$，因为层 $\bar{\ell}$ 上节点的脉冲时间仅取决于层 $\bar{\ell} - 1$ 上节点的行为，以及发送给层 $\bar{\ell}$ 上节点的消息延迟。

现在假设 n 足够大。这确保了 $\log^3 D \leq n^{1/12}$，根据引理的前提条件可知，每个节点都是距离-($\log^3 D$) k-故障的，且 $k \leq 2$。考虑相邻正确节点 (v, ℓ)，$(w, \ell) \in V_\ell \setminus F$，其中任意 $\ell \in \mathbb{N}, \ell \leq \bar{\ell}$，以及 $\{v, w\} \in E$。我们首先证明距离-($\log^3 D$) 0-故障节点满足

$$t_{v,\ell} - t_{w,\ell} \in (4 + o(1))\kappa(2 + \log D) \subset O(\kappa \log D). \tag{6}$$

由于不属于某个节点祖先关系的故障不会影响其脉冲时间，因此将定理 3 应用于 $\ell = \ell - \lfloor (\log^3 D) \rfloor \leq \ell - 2\Psi^s$ 和 $s' := \lfloor \log D \rfloor$即可得出这一结论。

为将这一结论推广到距离为-($\log^3 D$) k-故障节点（$k \in \{1,2\}$），我们通过对$k \in \{0, 1, 2\}$进行归纳法证明：与距离为-($\log^3 D$) 0-故障的执行相比，这些节点的脉冲时间偏移不超过 $O(\kappa \log D)$。$k = 0$ 的基例显然成立。

为完成从 $k - 1 \in \{0,1\}$ 到 k 的归纳步骤，反设在某个最小层上存在一个节点 (v, ℓ)，其时间偏移更大。现在考虑一个距离为-($\log^3 D$) k-故障节点 $(v, \ell) \in V_\ell \setminus F, \ell \leq \bar{\ell}$，其所有前驱节点均正确。必定存在 (v, ℓ) 的一个距离为-($\log^3 D$) 的祖先节点发生故障，否则 (v, ℓ) 将是距离为-($\log^3 D$) 0-故障的。令 d为 (v, ℓ) 存在故障祖先节点时的最小距离。那么，(v, ℓ) 在距离 d处的所有祖先节点，对于 $k' < k$ 都是距离为-($\log^3 D$) k'-故障的；否则，(v, ℓ) 对于某个 $k' > k$ 将是 k'-故障的。

考虑与 (v, ℓ) 距离为 $d - 1$ 的一个祖先节点。如果其前驱节点均正确，根据归纳假设和引理 22，它们的脉冲时间相对于一次执行（在该执行中，它们是距离 distance-($\log^3 D$) 0-故障的）偏移了 $O(\kappa \log D)$。如果存在故障前驱节点，则可由归纳假设、公式（6）和引理 21 推出这一点。[6] 如果 $d > 1$，我们现在归纳地应用引理 22，直到将此界扩展到距离 $d - 1$ 以内 (v, ℓ) 的所有祖先节点，最后扩展到 (v, ℓ) 本身。这与 (v, ℓ) 违反了所声称的偏移界相矛盾。

[6]这里 O记号中的常数会发生变化，而引理 22 保持了其前提条件中使用的界。由于我们只进行两步归纳，因此无需跟踪常数增加了多少。

我们得出结论，偏移确实有界于 $O(\kappa \log D)$。由此以及公式（6）可立即得出 $\mathrm{L}_{\bar{\ell}} \in O(\kappa \log D)$。由于 C 足够大，对于足够大的 n，这就构成矛盾。我们得出结论，对于所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\mathrm{L}_\ell \in O(\kappa \log D)$，如前所述。□

综合这些结果，我们得到了所需的局部偏斜界。

定理 5. 以 $1 - o(1)$ 的概率，$\mathcal{L}_\ell \in O(\kappa \log D)$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 均成立。

证明。根据推论 6，以概率 $1 - o(1)$ 有 $\mathrm{L}_0 \le \kappa/2$ 成立。根据观察 5，以概率 $1 - o(1)$，每个节点在 $k \le 2$ 内都是距离-$n^{1/12}$ k-故障节点。根据并集界，这两个事件同时发生的概率为 $1 - o(1)$。因此，应用引理 26 即可得出结论。□

参考文献

[1] B. Bailey。《时钟偏斜加剧》，2022年3月。https://semiengineering.com/clocks-getting-skewed-up/. [2] S. Biaz 和 J. L. Welch。《简单不确定性假设下时钟同步的闭式界》。《信息处理快报》，80:151–157，2001年。[3] J. Bund、M. Függer、C. Lenzen、M. Medina 和 W. Rosenbaum。PALS：近同步与局部同步系统。载于《国际异步电路与系统研讨会》(ASYNC)，第 36–43 页，2020 年。[4] J. Bund 、 C. Lenzen 和 W. Rosenbaum。容错梯度时钟同步。载于《分布式原理研讨会》(PODC)，第 357–365 页，2019年。[5] E. W. Dijkstra。即使存在分布式控制，自稳定系统仍能运行。《美国计算机学会通讯》，17 644，1974年 11 943( ): – 。[6] D. Dolev、M. Függer、C. Lenzen、M. Perner 和 U. Schmid。HEX：扩展蜂窝结构比扩展时钟树更容易。《计算机与系统科学杂志》，82(5):929–956，2016年。[7] R. Fan 和 N. Lynch。梯度时钟同步。载于《分布式计算原理研讨会》(PODC)，第 320–327 页，2004年。[8] A. L. Fisher 和 H. T. Kung。大型 VLSI 处理器阵列的同步。《计算机汇刊》，34 740，1985年 8 734( ): – 。[9] E. G. Friedman。同步数字集成电路中的时钟分配网络。《IEEE 会议录》，89(5):665–692，2001年。[10] Jennifer Lundelius Welch 和 Nancy Lynch。一种新的容错时钟同步算法。《信息与计算》，77(1):1–36，1988年。[11] P. Khanchandani 和 C. Lenzen。具有最优精度的自稳定拜占庭时钟同步。《计算系统理论》，2018年。[12] D. J. Kinniment。《数字系统中的同步与仲裁》。Wiley 出版社，2008年。[13] F. Kuhn、C. Lenzen、T. Locher 和 R. Oshman。动态网络中的最优梯度时钟同步。CoRR，abs/1005.2894，2010年。[14] F. Kuhn、C. Lenzen、T. Locher 和 R. Oshman。动态网络中的最优梯度时钟同步。《分布式计算原理研讨会》(PODC)，2010年。[15] F. Kuhn 和 R. Oshman。使用参考广播实现梯度时钟同步。载于《分布式系统原理会议》(OPODIS)，第 204–218 页，2009年。[16] 时钟同步与对抗性容错，2021年，检索于2023年1月4日。https://www.mpi-inf.mpg.de/ fileadmin/inf/d1/teaching/summer21/csaft/reading-material-ch09.pdf。[17] C. Lenzen、T. Locher 和 R. Wattenhofer。具有有界全局与局部偏差的时钟同步。载于《计算机科学基础研讨会》(FOCS)，第 509–518 页，2008年。[18] C. Lenzen、T. Locher 和 R. Wattenhofer。时钟同步的紧界。《美国计算机学会杂志》，57(2)，2010年。[19] C. Lenzen 和 J. Rybicki。自稳定拜占庭时钟同步几乎与共识一样容易。《美国计算机学会杂志》，66(5)，2019年。[20] C. Lenzen 和 B. Wiederhake。TRIX：用于容错硬件的低偏差脉冲传播，2020年。https://arxiv. org/abs/2010.01415。[21] R. Shelar。用于微处理器网格后时钟分配的带约束路由。《IEEE 集成电路与系统计算机辅助设计汇刊》，29(2):245–249，2010年。[22] 晶体管数量，检索于2022年10月。https://en.wikipedia.org/wiki/Transistor_数量。[23] T. Xanthopoulos，编。《现代 VLSI 系统中的时钟技术》。Springer 美国，2009年。

生成同步输入

在本附录中，我们描述了一种方法，可以在第 0 层生成同步良好的脉冲，频率约为每 Λ 个时间单位一个脉冲。有多种方法可以完成这项任务，但即使目标是实现容错方案，这也是一个简单的问题。原因在于，我们只需在线形拓扑上维持较小的局部偏斜，且节点之间不存在其他传播路径。

由于我们的目标是应对节点故障概率为 $p \in o(n^{-1/2})$ 的情况，事实上，我们只需利用第 0 层最多需要 $\sqrt{n}$ 个节点这一点即可。我们给出一个简单方案，适用于基图 G 为线形（带有复制端点）的特定设置。

算法2 针对节点 $(i, 0)$ 的脉冲转发算法，$i \in \{1, \ldots, D\}$；节点 $(0, 0)$ 是时钟源。参数 Λ 如算法 3 所述。

$H := \infty$ **循环执行：若**从 $(i-1, 0)$ **接收到脉冲，则** $H := H_{i,0}(t)$ **直到** $H_{i,0}(t) = H + \Lambda - d$ **向** $(i+1, 0)$ **以及第** 1 **层中的后继节点广播脉冲**。

引理 27。对于 $k \in \mathbb{N}$，假设节点 $(0, 0)$ 处的时钟源在时刻 $(k-1)\Lambda$ 产生其第 k 个脉冲。若第 0 层中的所有节点均正确，则上述算法中给出的方案会生成局部偏斜为 $\mathcal{L}_0 \le \kappa/2$ 以及 $t_{i,0}^k \in [(k+i-1)\Lambda - i\kappa/2, (k+i-1)\Lambda]$ 的脉冲。此外，它会在瞬态故障后于时间 $D\Lambda$ 内稳定。

证明。首先考虑不存在瞬态故障的情况。我们对 $i \in \mathbb{N}$ 进行归纳法证明该陈述，其中基例由关于节点 0 的假设所涵盖。

对于从 $i-1 \in \mathbb{N}$ 到 i 的步骤，我们对脉冲编号 $k \in \mathbb{N}_{>0}$ 进行归纳。归纳假设是：脉冲 $1, \ldots, k-1$ 已按照引理的断言生成，并且在节点 $i-1$ 发出的第 k 条脉冲消息到达时，节点 i 已完成前 $k-1$ 次循环迭代。注意，我们可以将 $k = 0$ 作为此归纳的基例，此时该断言显然成立。对于从 $k-1 \in \mathbb{N}$ 到 k 的步骤，记 $t'_{i-1,k} \in [t_{i-1,k} + d - u, t_{i-1,k} + d]$ 为节点 $(0, i-1)$ 发送的脉冲消息在节点 $(0, i)$ 处的接收时间。根据硬件时钟速率的界限、方程（1）以及关于 i 的归纳假设，节点 $(0, i)$ 在时刻生成其第 k 个脉冲

$$\begin{aligned} t_{i,k} &\in \left[t_{i-1,k} + d - u + \frac{\Lambda - d}{\vartheta}, t_{i-1,k} + \Lambda \right] \\ &\subseteq \left[t_{i-1,k} + \Lambda - \frac{\kappa}{2}, t_{i-1,k} + \Lambda \right] \\ &\subseteq \left[(k+i-1)\Lambda - \frac{i\kappa}{2}, (k+i-1)\Lambda \right], \end{aligned}$$

除非在此之前它从 $(i-1,0)$ 收到另一条脉冲消息。然而，事实并非如此，因为我们假设消息延迟和硬件时钟速率不会随时间变化，因此这些接收时间彼此相隔 Λ 时间。[7]

[7]注意到，间隔 $\Lambda - d$ 时间就足够了。d 的余量意味着脉冲之间时序的微小变化不会造成问题，我们将在推论 7 中利用这一点。

剩下需要证明的是所声称的稳定时间上界。为此，请注意，节点维护的唯一状态信息是 H。收到脉冲消息后，该状态会被覆盖。这样便能从系统中移除伪造状态。

因此，我们认为可以照原样进行上述归纳法，也就是说，在每个节点生成其第一个脉冲时，系统已经稳定。不过，这里有个微妙之处：一条在时间 0 仍处于传输中的伪消息，可能会在节点 (1，0) 收到来自 (0，0) 的第一条消息之后覆盖节点的状态。于是，节点 (1，0) 会表现得仿佛来自 (0，0) 的第一条消息到得更晚，恰好与伪消息同时到达。由于这类伪消息也会在至多 d 时间内送达，我们可以将此重新解释为节点 (0，0) 发出的第一条消息延迟更长，但仍至多为 d。请注意，这一调整使节点 (1，0) 收到来自节点 (0，0) 的第一个和第二个脉冲的接收时间之差最多缩短 u，但两者之间仍至少相隔 $\Lambda - u \geq \Lambda - d$，也就是说，第二条消息不会在 (1，0) 生成其第一个脉冲之前收到。我们可以对节点 2、……、 D 应用相同的方法，从而得到所需的稳定时间上界。□

推论 **6.** $\mathcal{L}_0 \leq \kappa/2$ 以概率 $1 - o(1)$。它是自稳定的，稳定时间为 ΛD .

我们指出，对于一般的基图 G，要确保局部偏斜较小并非易事。不过，只要 $|V|$ 足够小，使得第 0 层发生故障的概率为 $o(1)$，就可以退而采用非容错的 GCS 算法。这样可达到 $\mathrm{L}_0 \in O(\kappa \log D)$，且不会增大脉冲转发方案的渐近局部偏斜界。

B 全脉冲转发算法

算法 3 节点 $(v,\ \ell)$ 处的离散 GCS，$\ell > 0$。参数 Λ 和 κ 将在后文根据分析确定。

loop
- $H_{\min}, H_{\text{own}}, H_{\max} := \infty$
- **对** $\{v, w\} \in E$ **执行**
  - $r_w := 0$
- **do**
  - **如果**收到来自 $v_{\ell-1}$ 且带有 $H_{\text{own}} = \infty$ 的脉冲，**则**
    - $H_{\text{own}} := H_{v,\ell}(t)$
  - **如果**对于某个 $\{v, w\} \in E$，收到来自 $(w, \ell-1)$ 且带有 $r_w = 0$ 的脉冲，**则**
    - **如果** $r_{w'} = 0$ 对于所有 $\{v,\ w'\} \in E$ **则**
      - $H_{\min} := H_{v,\ell}(t)$
    - $r_w := 1$
    - **如果** $r_{w'} = 1$ 对于所有 $\{v,\ w'\} \in E$ **则**
      - $H_{\max} := H_{v,\ \ell}(t)$
- **直到** $H_{\min} < \infty$ 且 $H_{v,\ \ell}(t) \geq$ 最小$\{H_{\max} + \kappa/2 + \vartheta\kappa,\ \ 2H_{\text{own}} - H_{\min} + 2\kappa)\}$
- **如果** $H_{v,\ \ell}(t) = H_{\max} + \kappa/2 + \vartheta\kappa$ **则**
  - 等待直到 $H_{v,\ \ell}(t) = H_{\max} + 3\kappa/2 + \Lambda - d$
- **else**
  - $C_{v,\ \ell}$:= 分钟$_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa,\ \ H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \kappa/2$
  - **if** $C_{v,\ell} < 0$ **则**
    - $C_{v,\ \ell}$:= 分钟 $\{H_{\text{own}} - H_{\min} + 3\kappa/2,\ \ 0\}$
  - **否则如果** $C_{v,\ell} > \vartheta\kappa$ **则**
    - $C_{v,\ell}$:= 最大 $\{H_{\text{own}} - H_{\max} - 3\kappa/2, \vartheta\kappa\}$
  - 等待，直到 $H_{v,\ell}(t) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell}$
- **广播脉冲**

算法正确运行的一个基本要求是，(v, ℓ) 在算法 3 主循环的第 k 次迭代中，接收到所有正确前驱节点的第 k 个脉冲。

引理 28. 对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及$(v, \ell) \in V_\ell$, $\ell > 0$，节点(v, ℓ) 在算法 *3* 主循环的第 k 次迭代中，接收到所有正确前驱节点的第 k 个脉冲。

证明。我们对 $\ell \in \mathbb{N}_{>0}$ 和 $k \in \mathbb{N}_{>0}$ 使用归纳法，证明 (v, ℓ) 在接收到所有满足 $((w, \ell-1), (v, \ell)) \in E$ 的正确 $(w, \ell-1)$ 发出的第 k 个脉冲后、接收到该节点发出的第 $(k+1)$ 个脉冲之前，广播第 k^{th} 个脉冲。此外，对于所有 $k \geq 2$, $t^k_{v,\ell} - t^{k-1}_{v,\ell} = \Lambda$。

对于关于 ℓ的归纳法，我们以 $\ell = 0$ 为基例，只要求节点以 $1/\Lambda$ 的频率生成脉冲。由于延迟和时钟速度保持不变，这一条件成立。对于从$\ell - 1 \in \mathbb{N}$ 到 ℓ的归纳步骤，我们对 k进行归纳。假设该命题对所有 $k' < k \in \mathbb{N}_{>0}$都成立，并考虑在 $(v,\ \ell)$ 处外层循环的第 k次迭代。

- 内层循环之所以终止，是因为 $H_{v,\ \ell}(t) = H_{\text{最大}} + \kappa/2 + \vartheta\kappa$。于是，当前循环迭代中已收到来自每个节点（$w,\ \ell-1$）、$\{v,\ w\} \in E$的消息。根据关于层 $\ell-1$ 和脉冲 $k-1$的归纳假设，对于这类正确节点而言，这就是第 k条脉冲消息。

  我们需要证明，来自 $(v,\ \ell-1)$ 的第 k 条消息能够及时收到；归纳假设保证了它不会过早收到。由于 G 的最小度为 2，

至少有一个节点 $(w,\ \ell-1)$、$\{v,\ w\}\in E$ 是正确的。如果 $(v,\ \ell-1)$ 也正确，那么它最迟在时间$t_{w,\ \ell-1}+\mathrm{L}_{\ell-1}$发送了脉冲消息。根据消息延迟和时钟速度的界限，该消息在本地时间

$$H \le H_{\max}+\vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1}+u) \le H_{\max}+\Lambda-d < H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^{k}).$$

- 内层循环因 $H_{v,\ \ell}(t)\ =2H_{\text{自有}}-H_{\text{最小}}+2\kappa$ 而终止。由于 $H_{\text{最小}}<\infty$，$H_{\text{自有}}<\infty$ 也成立。利用 $H_{\text{最小}}\le H_{\text{最大}}$，可得

$$\begin{aligned}\Delta &:= \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}}-H_{\max}+4s\kappa, H_{\text{own}}-H_{\min}-4s\kappa\}\}-\frac{\kappa}{2}\\ &\le \max\{H_{\text{own}}-H_{\max}, H_{\text{own}}-H_{\min}\}-\frac{\kappa}{2}\\ &\le H_{\text{own}}-H_{\min}-\frac{\kappa}{2}\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{C}_{v,\ \ell}\le H_{\text{own}}-H_{\min}+3\kappa/2\le 3\kappa/2$。由此可得

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^{k}) \ge \max\{H_{\min}, H_{\text{own}}\}+\Lambda-d-\frac{3\kappa}{2}.$$

我们区分两种子情况。

– $(v,\ \ell-1)$ 是正确的。于是，根据消息延迟和时钟速度的界限，对于每个正确的 $(w,\ \ell-1)$，$\{v,\ w\}\in E$，其第 k 个脉冲消息会在本地时间

$$H \le H_{\text{own}}+\vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1}+u) \le H_{\text{own}}+\Lambda-d-\frac{3\kappa}{2} < H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^{k}),$$

最后一步使用了公式（2）。

– $(v,\ \ell-1)$存在故障，这意味着所有（$w,\ \ell-1$）、$\{v,\ w\}\in E$均正确。于是，根据消息延迟和时钟速度的界，对于每个正确的（$w,\ \ell-1$）、$\{v,\ w\}\in E$，其第 k 个脉冲消息在本地时间

$$H \le H_{\min}+\Lambda-d-\frac{3\kappa}{2} < H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^{k}),$$

其中我们利用了这一点：为了保证 $\Lambda-d\ge\vartheta(2\mathrm{L}_{\ell-1}+u)$（即公式（2）），在与（$v,\ \ell-1$）正确这一情况不同的执行中，该结论也必须成立；在这样的执行中，我们有

$$\max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}-\min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} \le \max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\}-t_{v,\ell-1}+t_{v,\ell-1}-\min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ell-1}\} \le 2\mathcal{L}_{\ell-1}.$$

还需证明（$v,\ \ell$）在从某个正确前驱节点接收到第（$k+1$）个脉冲消息之前生成其脉冲。我们分两种情况讨论。

- $(v,\ \ell-1)$不存在故障。那么（$v,\ \ell$）从正确前驱节点接收到第 k 个脉冲的最早本地时间 H 的下界为

$$H \ge H_{\text{own}}-\vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1}+u).$$

由于延迟和时钟速度不会改变，因此来自正确前驱节点的第（$k+1$）个脉冲的最早消息接收时间会晚 Λ。因此，只需证明$H_{v,\ \ell}(t_{v,\ \ell}^{k})\ \le H+\Lambda$。我们区分三种子情况。

– 内层循环终止，因为在本地时间 $H_{\min}$，(v,ℓ) 收到了来自正确前驱节点 $(w,\ell-1)$ 的消息 $\{v,w\}\in E$，其中 $H_{v,\ell}(t)\ =H_{\max}+\kappa/2+\vartheta\kappa$。因此，

$$H_{\text{own}}+\vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1}+u)+2\kappa \ge 2H_{\text{own}}-H_{\min}+2\kappa \ge H_{\max}+\frac{\kappa}{2}+\vartheta\kappa.$$

并且，根据公式（3），

$$\begin{aligned} H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) &= H_{\max} + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d \\ &\le H_{\text{own}} + \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) + 2\kappa + \Lambda - d \\ &\le H_{\text{own}} - \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) \\ &\le H + \Lambda. \end{aligned}$$

– 内层循环终止的原因是 $H_{v,\ell}(t) = H_{\max} + \kappa/2 + \vartheta\kappa$，并且在本地时间 $H_{\max}$，来自正确前驱节点的消息（$w, \ell-1$），$\{v,w\} \in E$，被（v,ℓ）接收。因此，

$$H_{\text{own}} + \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) \ge H_{\max}$$

并且，根据公式（3），

$$\begin{aligned} H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) &= H_{\max} + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d \\ &\le H_{\text{own}} + \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d \\ &\le H_{\text{own}} - \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) \\ &\le H + \Lambda. \end{aligned}$$

– 内层循环终止的原因是 $H_{v,\ell}(t) = 2H_{\text{own}} - H_{\min} + 2\kappa$，且 $C_{v,\ell} \ge 0$。根据公式（3），于是

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} \le H_{\text{own}} + \Lambda - d \le H + \Lambda.$$

– 内层循环终止的原因是 $H_{v,\ell}(t) = 2H_{\text{own}} - H_{\min} + 2\kappa$，且 $C_{v,\ell} < 0$。于是

$$C_{v,\ell} = H_{\text{own}} - H_{\min} + \frac{3\kappa}{2}$$

and

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} = H_{\min} - \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d.$$

由于 $H_{\min}$ 不超过来自正确节点的消息的最早本地接收时间（$w, \ell-1$），$\{v,w\} \in E$，因此我们有

$$H_{\min} \le H_{\text{own}} + \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u).$$

根据公式（3），我们得出

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) \le H_{\text{own}} + \vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) - \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d < H + \Lambda.$$

- $(v,\ \ell-1)$发生故障。于是 $H = H_{\text{最小值}}$。以类似方式检查所有情况后，我们看到

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) \le H_{\max} + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d.$$

利用这样一个事实：公式（3）也必须适用于 $(v,\ \ell-1)$ 未发生故障的执行，因此 $\max_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ \ell-1}\} - \min_{\{v,w\}\in E}\{t_{w,\ \ell-1}\} \le 2L_{\ell-1}$，由此可得

$$\begin{aligned} H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) &\le H_{\max} + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d \\ &\le H_{\min} + 2\vartheta(\mathcal{L}_{\ell-1} + u) + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d \\ &\le H_{\min} + \Lambda \\ &\le H + \Lambda. \end{aligned}$$

□

我们不　我们准备证明，在没有故障的情况下，算法 3 与算法 1 等价。

引理 29. 假设$(v,\ell) \in V_b, \ell > 0$，以及$(v,\ell)$的前驱节点均正确。那么，运行算法 *1* 而非算法 *3*，会使节点(v,ℓ)的脉冲时间保持不变。

证明。反设该断言不成立。记 $t_{v,\ell}^k$ 和 $(t_{v,\ell}^k)'$ 分别为在延迟、时钟速度和故障节点行为均相同的执行中，算法 1 和算法 3 的脉冲时间。不失一般性，设 $t_{v,\ell}^k$ 是满足 $t_{v,\ell}^k \neq (t_{v,\ell}^k)'$ 的最小值。

考虑节点 (v,ℓ) 上算法 3 的第 k 次循环迭代。根据内层循环终止的原因，分情况讨论。

- 内层循环因 $H_{v,\ell}(t) = H_{\max} + \kappa/2 + \vartheta\kappa$ 而终止。那么在算法 1 中，我们有

$$H_{\text{own}} \geq H_{\max} + \frac{\kappa}{2} + \vartheta\kappa,$$

这意味着

$$\begin{aligned}\Delta &:= \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2}\\ &\geq \min_{s\in\mathbb{N}}\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa\} - \frac{\kappa}{2}\\ &\geq H_{\text{own}} - H_{\min} - \frac{\kappa}{2}\\ &\geq \vartheta\kappa.\end{aligned}$$

因此，算法 1 计算出

$$C_{v,\ell} = H_{\text{own}} - H_{\max} - \frac{3\kappa}{2}$$

并在本地时间生成其第 k个脉冲

$$H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) = H_{\max} + \Lambda - d - C_{v,\ell} = H_{\max} + \frac{3\kappa}{2} + \Lambda - d = H_{v,\ell}((t_{v,\ell}^k)'),$$

矛盾。

- 内层循环终止是因为 $H_{v,\ell}(t) = 2H_{\text{自身}} - H_{\text{最小}} + 2\kappa$。由于 $H_{\text{最小}} < \infty$，算法 3 中也有 $H_{\text{自身}} < \infty$。我们区分两种子情况。
  - 在算法 1 中，我们有

$$\Delta := \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2} < 0.$$

那么算法 3 中也同样成立，因为其中 $H_{\max}$ 与算法 1 中的 ∞相同。因此，两个算法都计算出 $C_{v,\ell} = \min\{H_{\text{own}} - H_{\min} + 3\kappa/2, 0\}$，随后 $H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) = H_{\text{own}} + \Lambda - d - C_{v,\ell} = H_{v,\ell}((t_{v,\ell}^k)')$，矛盾。

  - 在算法 1 中，我们有

$$\Delta := \min_{s\in\mathbb{N}}\{\max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s\kappa\}\} - \frac{\kappa}{2} \geq 0$$

令 $s_{\min} \in \mathbb{N}$ 满足

$$\Delta := \max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s_{\min}\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s_{\min}\kappa\} - \frac{\kappa}{2}.$$

如果 $\Delta = H_{\text{own}} - H_{\min} - 4s_{\min}\kappa - \kappa/2$，那么 H_{own} 和 $H_{\min}$ 在两种算法中相同这一事实，而 $H_{\max}$ 要么也相同，要么在算法 3 中为 $-\infty$，同样会导致

矛盾 $H_{v,\ell}(t_{v,\ell}^k) = H_{v,\ell}((t_{v,\ell}^k)')$。因此，假设算法 1 中 $\Delta = H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s_{\min}\kappa - \kappa/2$。于是，

$$\begin{aligned}
0 &\le \Delta \\
&= H_{\text{own}} - H_{\max} + 4s_{\min}\kappa - \kappa/2 \\
&\le \max\{H_{\text{own}} - H_{\max} + 4(s_{\min}-1)\kappa, H_{\text{own}} - H_{\min} - 4(s_{\min}-1)\kappa\} - \frac{\kappa}{2} \\
&= H_{\text{own}} - H_{\min} - 4(s_{\min}-1)\kappa - \frac{\kappa}{2}.
\end{aligned}$$

因此，

$$2H_{\text{own}} - H_{\min} + 2\kappa \ge H_{\text{own}} + 4s_{\min}\kappa - \frac{3\kappa}{2} \ge H_{\max} - \kappa < H_{\max} - \frac{\kappa}{2} - \vartheta\kappa.$$

这就产生了矛盾，因为这样一来，算法 3 中的内层循环早就应该终止了。□

B.1 自稳定

将算法 3 转换为自稳定算法遵循标准技术。因此，我们仅简要概述实现这一目标的方法。

定理 6. 脉冲传播算法可以通过自稳定方式实现。它会在 $O(\sqrt{n})$ 个脉冲内达到稳定。

证明概要。关键观察是，自稳定可以逐层进行，而推论 6 表明第 0 层能够足够快地稳定下来。因此，我们可以假设前一层的正确节点以稳定的频率 Λ 生成脉冲，并满足分析中得到的偏斜界。

这使我们能够确保该节点的监听循环时序与前一层的脉冲信号相匹配：除一个前驱节点外，其他前驱节点的脉冲信号都必须在内层循环运行期间被接收。此外，内层循环会在 Λ 时间内终止。我们不必根据自身生成的脉冲来重启内层循环，而可以在静默期（例如 $\Lambda/10$）之后收到第一个脉冲时开始一次循环迭代（这样可以滤除故障前驱节点过于频繁的脉冲）。根据公式（2），这样的静默期必定会出现，因此，对于某个 $k \in \mathbb{N}$，这会使循环与正确前驱节点的第 k 个脉冲对齐。

内层循环终止后，我们会等待下一个静默期，并在收到前驱节点发来的下一个脉冲时启动一次新的内层循环，依此类推。每当内层循环正确终止（即并非因超时而终止）时，我们也会像算法 3 那样计算生成下一个脉冲的时间。然而，在准备启动一次新的内层循环之前，我们不会等到脉冲生成。这样一来，即使脉冲 k 对应的内层循环未对齐，我们也能确保不会错过正确前驱节点发来的脉冲 $k+1$ 的第一条脉冲消息。□

C 获取最终偏斜界

回想一下，我们的模型假设消息延迟和时钟速度不会变化。如果故障节点的行为是静态的，即其输出脉冲消息的时序在每个脉冲中也都相同，那么稳定的输入频率 $1/\Lambda$ 会导致每隔 $1/\Lambda$ 时间就重复完全相同的消息模式，且时序也相同。我们可以利用这一点，用 L_ℓ 来界定 $\mathrm{L}_{\ell,\ell+1}$。

定理 7. 如果故障节点不改变其输出脉冲的时序，那么 $\mathcal{L} \in O(\kappa \log D)$以概率 $1 - o(1)$成立。

证明。根据推论 5，对于正确的 $(v,\ell+1) \in V_{\ell+1}$, $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\min_{\substack{((w,\ell),(v,\ell+1))\in E_\ell \\ (w,\ell)\notin F}} \{t_{w,\ell}^k\} + \Lambda - 2\kappa \le t_{v,\ell+1}^k \le \max_{\substack{((w,\ell),(v,\ell))\in E_\ell \\ (w,\ell)\notin F}} \{t_{w,\ell}^k\} + \Lambda + 2\kappa.$$

由于故障节点的行为在脉冲之间不会改变，简单归纳可得，对于所有正确节点 (x,ℓ')，$t_{x,\ell'}^{k+1} = t_{x,\ell'}^k + \Lambda \in V_{\ell'}$, $\ell' \in \mathbb{N}$。特别地，

$$\min_{\substack{((w,\ell),(v,\ell+1))\in E_\ell \\ (w,\ell-1)\notin F}} \{t_{w,\ell}^{k+1}\} - 2\kappa \le t_{v,\ell+1}^k \le \max_{\substack{((w,\ell),(v,\ell+1))\in E_\ell \\ (w,\ell)\notin F}} \{t_{w,\ell}^{k+1}\} + 2\kappa.$$

根据定理 5，$\mathrm{L}_\ell \in O(\kappa \log D)$。请注意，此界对所有执行均一致适用。因此，即使 (v,ℓ) 是故障节点，利用其邻居彼此之间的距离不超过 2，可得

$$\min_{\substack{((w,\ell),(v,\ell+1))\in E_\ell \\ (w,\ell-1)\notin F}} \{t_{w,\ell}^{k+1}\} - \max_{\substack{((w,\ell),(v,\ell+1))\in E_\ell \\ (w,\ell)\notin F}} \{t_{w,\ell}^{k+1}\} \in O(\kappa \log D),$$

这是通过与 (v,ℓ) 为正确节点的执行进行比较得出的。由于 $(v,\ell+1)$ 是任意正确节点，定理的结论便得证。□

还需证明某种变化可以持续维持。

推论 7。 以概率 $1-o(1)$，即使每个脉冲中 *(i)* 有常数个故障节点改变其输出行为和时序，*(ii)* 链路延迟最多变化 $n^{-1/2}u \log D$，且 *(iii)* 硬件时钟速度最多变化 $n^{-1/2}(\vartheta-1)\log D$，仍有 $\mathcal{L} \in O(\kappa \log D)$。

证明。H 中有向路径的最大长度受 $2\sqrt{n}$ 限制：第 0 层中至多有 $D \le \sqrt{n}$ 跳，随后每层之间至多有 $\sqrt{n}$ 条链路。因此，沿路径累积链路延迟和时钟速率变化造成的所有时序变化，会导致 $O((u+(\vartheta-1)(\Lambda-d))\log D) = O(\kappa \log D)$ 的偏差。对于第 0 层，这显然成立；对于脉冲在各层间的传播也同样适用，因为相应的分析依赖于推论 5 和引理 22。为了将数量固定、行为任意的故障节点考虑在内，我们采用与定理 4 的证明类似的推理，即同样依赖于推论 5。□