arXiv:2301.05076v1 [math.SP] 12 Jan 2023

扰动笼目晶格与扰动超笼目晶格上平带的稳健性

¨JOACHIM KERNER、MATTHIAS TAUFER 和 JENS WINTERMAYR

Abstract. 我们研究二维阿基米德镶嵌上受扰动的离散拉普拉斯算子的谱性质。扰动体现为引入非平凡的边权重。我们聚焦于未扰动拉普拉斯算子具有平带的两种晶格，即 $(3.6)^2$ 笼目晶格和 $(3.12)^2$ “超笼目”晶格。我们刻画了所有能够产生平带的边权重取值。此外，我们还讨论了谱方面的后果，例如新带隙的出现。我们的主要发现之一是，在对扰动作出符合物理实际的假设时，平带具有稳健性；我们还完整描述了扰动—谱相图。我们证明，超笼目晶格中的两条平带甚至表现出一种“全有或全无”现象：不存在仅能破坏一条平带而保留另一条平带的扰动。

1. Introduction

本文研究阿基米德镶嵌上的离散薛定谔算子。这类周期性二维晶格早在约翰内斯·开普勒的著作中就已有探讨¨Kep19。它们是二维纳米材料几何结构的自然候选；随着这一领域的发展，尤其是石墨烯的出现，这类晶格日益受到关注。

许多研究致力于理解这类（新型）材料的物理性质 [SYY22, TFGK22, dLFM19]。最重要的是，可以预期其基础几何结构，也就是特定的晶格，是决定系统物理性质的关键特征。事实上，尤其是在数学物理文献中，探讨系统几何（或拓扑）与相关哈密顿量谱性质之间联系的研究已十分普遍。此处的经典例子包括所谓的量子波导 [EK15, Exn20, Exn22] 以及量子图 [BK13, BE22]；另请参阅 [KP07] ，其中有一篇与本文主题相关、相对较新的参考文献。

一个密切相关的研究方向是超导性：边界的存在会使超导体中出现边界态，其临界温度高于体材料的临界温度 [SB20, SB21, HRS]。由此看来，研究阿基米德镶嵌上几何与多体现象之间的相互作用也很有前景。另一项相关研究见 [JBT21, SYY22] ，该研究考察了另一种重要的量子现象，即玻色–爱因斯坦凝聚。事实证明，所谓的平带——也就是哈密顿量无限简并的特征值——对于理解这类多体效应以及其他物理现象都发挥着重要作用 [KFSH19]。本文的核心动机之一，是研究平带在某些自然扰动下的稳健性。

两种阿基米德镶嵌脱颖而出： $(3.6)^2$ 笼目晶格和 (3.12^2) 镶嵌$_1$。我们将在下文中称后者为超笼目晶格，原因也会在文章中逐渐明了

日期：2023年1月13日。[1]我们在第2节说明这些晶格的记号。

：它们是仅有的使离散无权拉普拉斯算子具有平带的阿基米德晶格。尤其是，笼目晶格是物理学中的一个重要模型，近年来受到越来越多的关注 [BM18, MDY22, Dia21]。从数学角度看，我们的论文受到 [PT21] 的启发；该文详细研究了阿基米德镶嵌上离散无权拉普拉斯算子的平带，并明确计算了积分态密度。

乍看之下，笼目晶格和超笼目晶格上的平带现象似乎对扰动非常敏感：如果用边权重周期性选取的变体替代邻接矩阵或拉普拉斯算子，通常会破坏平带。然而，本文的结果表明，若考察尊重镶嵌某些自然对称性的、恰当且有意义的离散拉普拉斯算子变体（我们在定义 3 中称之为单体型拉普拉斯算子），那么平带就会持续存在。由于单聚体性是一个在物理上有充分依据的假设，这有力地表明，平带是一种稳健的现象，仅由晶格几何决定，并且是这两种晶格所特有的，见定理 6 和 10。

关于周期图，其他值得关注的问题包括谱带及其间隙的存在性、持续性，以及宽度估计 [KS19, KS19, MW89]。对于这些情形，我们将完整确定谱随扰动的变化，见定理 8 和 11，以及图 3 和 5。这为基于阿基米德镶嵌、且离散拉普拉斯算子可能呈现平带的所有纳米材料提供了详尽描述。

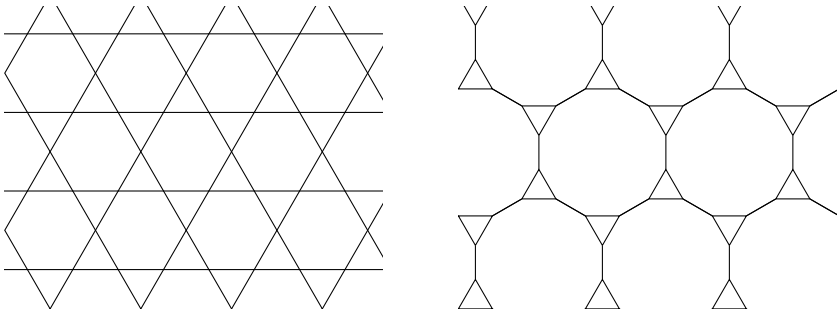
本文结构如下：第 2 节和第 3 节为导论性质，介绍阿基米德镶嵌的概念，并阐述其重要性，同时定义一种适用于非均匀边权重的离散拉普拉斯算子的恰当概念。第 3 节还介绍平带的概念，并说明为何只需关注 $(3.6)^2$ 笼目晶格和 (3.12^2) 超笼目晶格。第 4 节和第 5 节分别给出我们关于笼目晶格和超笼目晶格的主要结果。本文的贡献如下：

(i) 我们确定，笼目晶格和超笼目晶格是唯一能够使一类自然的周期加权拉普拉斯算子具有平带的阿基米德镶嵌（命题 5）。(ii) 我们描述了所有能使笼目晶格和超笼目晶格上的能带数达到最大可能值的周期边权重，并证明这等价于边权重具有所谓的单聚体性（定理 6 和定理 10）。(iii) 我们完整描述了单体型笼目晶格和超笼目晶格的谱（定理 8 和定理 11）。特别是，单体超 Kagome 晶格具有出人意料地丰富的谱-扰动相图（图 5），这可能与各种应用相关。(iv) 在超笼目晶格中，在一种比单聚体性更弱的条件下，即常数顶点权重条件下，我们明确描述了所有其余只有一条平带的“伪”边权重。我们描述了该集合在参数空间中的拓扑，并特别证明它与单体型双平带集合不连通（定理 12）。

2. Archimedean tilings

阿基米德、开普勒或正则铺砌是由正凸多边形构成的欧几里得平面边对边镶嵌，其中每个顶点周围都排列着相同模式的相邻多边形。我们将采用 [GS89] 的记法，并以围绕顶点排列的多边形（按逆时针顺序）作为镶嵌的符号（该符号在循环排列下唯一，见

图 1 中的 (3.6)^2 笼目晶格和 (3.12^2) 超级笼目晶格；本文将研究这两种晶格。



(3.6)^2 笼目晶格　　(3.12^2) 超笼目晶格

FIGURE 1. 本文主要研究的两种阿基米德镶嵌 e.

自 1619年 起，首次系统研究这一问题的是开普勒，他识别出了全部 11 种此类镶嵌 [Kep19][2]。最重要的是，阿基米德镶嵌为二维纳米材料的几何结构提供了天然的候选方案，因为它们由单一构件构成，并在每个顶点处自然形成对称排列。事实上，这些晶格可见于许多天然材料中 [FK58, FK59, KHZ+20]。

从物理角度来看，石墨烯等二维材料颇具研究价值，因为它们具有所谓的狄拉克点，这些点与材料电子能带结构的某种特定行为有关 [FW12,LWL13, HC15]。

还要注意，这些晶格上的拉普拉斯算子、渗流与自避免行走之间存在深刻联系，相关研究也已十分广泛 [SE64, Kes80, Nie82, SZ99, Ves04, Par07, Jac14, JSG16]。在此背景下，一个重要的量是所谓的连接常数，但目前仅在少数情况下已知其值，例如六角晶格上的连接常数 [DCS12]。

3. Defining a suitable Hamiltonian

每个阿基米德镶嵌都可以视为一个无限离散图 $G = (V, E)$，其顶点集 V 和边集 E 均为可数集。若顶点 $v \sim w$ 与 v由一条边相连，我们记作 w ，并将

$$|v| := \#\{w \in V : v \sim w\}$$

顶点 v 的顶点度（对于阿基米德晶格图而言，该度数与 v无关）。阿基米德晶格具有 $\mathbb{Z}^2$-周期性，并存在一个余有限的 $\mathbb{Z}^2$-作用

$$\mathbb{Z}^2 \ni \beta \mapsto T_\beta : V \to V \ ,$$

这是一个图同构群（直观上可理解为平移群），与群 $\mathbb{Z}^2$同构。令 $Q \subset V$ 为该作用的一个极小（尤其是有限）基本域，即 V 在由同构群 $(T_\beta)_{\beta\in\mathbb{Z}^2}$生成的等价关系下的商。

[2]全部 11 种阿基米德镶嵌分别是：(4^4) 矩形镶嵌、(3^6) 三角形镶嵌、(6^3) 六边形镶嵌、(3.6^2) 笼目晶格、(3.12^2) 超笼目晶格、(3^3.4^2) 镶嵌、(4.8^2) 镶嵌、(3^2.4.3.4) 镶嵌、(3.4.6.4) 镶嵌、(4.6.12) 镶嵌，以及 (3^4.6) 镶嵌。

在无权情形下，哈密顿量的一种自然且归一化的选择是离散拉普拉斯算子

$$(\Delta f)(v) := \frac{1}{|v|}\sum_{w\sim v}(f(v)-f(w)) = f(v) - \frac{1}{|v|}\sum_{w\sim v} f(w)\ , \tag{1}$$

例如在 [PT21] 中所采用的形式。它可写为 $\Delta f = \mathrm{Id} - \frac{1}{|v|}\Pi$ 其中 Π 是邻接矩阵，即若 $v\sim w$，则 $\Pi(v,w) = 1$，否则为 0。以下是标准结论：

引理 1. 具有一致有界顶点度的无权归一化拉普拉斯算子 (1) 具有以下性质：

(i) 将 Δ 限制在有限多个顶点上所得的矩阵均为实对称 M 矩阵，即其非对角元素非正，且所有特征值均非负。(ii) Δ 的谱下确界为 0。(iii) Δ 的所有行和列之和均为零。

此外，谱始终包含于区间 $[0,2]$ 内。

引入非平凡边权重后，我们希望保留一种具有拉普拉斯算子形式且能维持性质 (i) 至 (iii) 的算子。一个自然的候选形式与 [KS], 中的公式 (2.11) 类似：

$$(\Delta_\gamma f)(v) := \frac{1}{\sqrt{\mu(v)}}\sum_{w\sim v}\gamma_{vw}\left(\frac{f(v)}{\sqrt{\mu(v)}} - \frac{f(w)}{\sqrt{\mu(w)}}\right) \tag{2}$$

whe其中，边权重 $\gamma_{vw} = \gamma_{wv} > 0$ 和顶点权重 $\mu(v)$ 满足关系

$$\sum_{w\sim v}\gamma_{vw} = \mu_v \quad \text{for every } v\in V. \tag{3}$$

只要顶点权重 $\mu(v)$（因此 γ_{vw}也）一致有界，就会得到一个具有性质 (i) 至 (iii) 且谱包含于 $[0,2]$ 的算子。

注 2. 文献中常见的定义是

$$(\Delta_\gamma f)(v) = \frac{1}{\mu(v)}\sum_{w\sim v}\gamma_{vw}\left(f(v)-f(w)\right)$$

它被称为归一化离散拉普拉斯算子。注意，只要对于某个 $v\sim w$， $\mu(v)\neq\mu(w)$，就不会得到自伴算子；不过，可以在适当加权的 $\ell^2(V)$-空间上使其成为自伴算子，参见 [KLW21]。若所有 $\mu(v)$ 都相同，则此定义与 (2) 一致，并可简化为

$$(\Delta_\gamma f)(v) = f(v) - \frac{1}{\mu}\sum_{w\sim v}\gamma_{wv} f(w)\ . \tag{4}$$

现在，可以规定底层阿基米德晶格的各种对称性由拉普拉斯算子保持：

定义 3. 考虑一个阿基米德镶嵌 (V,E)，其边权重 $\gamma_{vw} = \gamma_{wv} > 0$ 具有周期性，即对于所有 v、$w\in V$ 和 $\beta\in\mathbb{Z}^2$，$\gamma_{vw} = \gamma_{T_\beta v T_\beta w}$，且相应的顶点权重为 $\mu(v) = \sum_{w\sim v}\gamma_{vw}$。定义拉普拉斯算子 Δ_γ 如 (2) 所示。于是，我们称带有拉普拉斯算子 Δ_γ 的阿基米德镶嵌

(1) 具有常数顶点权重，当且仅当存在 $\mu>0$，使得对所有 $v\in V$， $\mu(v) = \mu$。(2) 若对所有顶点 $v\in V$，按环绕 v 的顺序排列的边权重列表都相同（至多相差循环排列），则称其为单体型。

显然，(2) 比 (1) 更强。不过，无论哪种情况，拉普拉斯算子都简化为 (4)。

“单体型”一词的灵感来自这样一个事实：相关算子可以解释为描述纳米材料性质的算子，而这类纳米材料由一种单体型构件组成，并将该构件放置在阿基米德镶嵌的每个顶点上。显然，阿基米德晶格上的单体型拉普拉斯算子具有常数顶点权重，但反过来一般并不成立。不过，我们将在定理 6 和定理 10 中看到，在笼目晶格和超笼目晶格上，逆命题成立等价于所有平带的存在（或持续存在）。此外，对于纳米材料而言，单聚体性似乎是一个在物理上合理的假设，这表明平带的出现虽然先验地对算子中系数的扰动非常敏感，但在物理相关算子这一类中仍可能具有稳健性。

接下来，令 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 为平坦环面，并对每个 $\theta \in \mathbb{T}^2$ 定义 $|Q|$维希尔伯特空间

$$\ell^2(V)_\theta := \{f : V \to \mathbb{C} \mid f(T_\beta v) = e^{i\langle\theta,\beta\rangle} f(v)\}$$

配备内积

$$\langle f, g\rangle_\theta := \sum_{v\in Q} f(v)\overline{g(v)} \, .$$

给定 $\ell^2(V)$ 上具有定义 3 所述性质的拉普拉斯算子 (4)，我们在 $\ell^2(V)_\theta$ 上定义算子

$$(\Delta_\gamma^\theta f)(v) := f(v) - \frac{1}{\mu}\sum_{w\sim v} \gamma_{wv} f(w) \, . \tag{5}$$

显然，(5) 可表示为一个 $|Q|$ 维厄米矩阵。根据 Floquet 理论，我们有

$$\sigma(\Delta_\gamma) = \bigcup_{\theta\in\mathbb{T}^2} \sigma(\Delta_\gamma^\theta) \, ,$$

并且以下陈述成立。

命题 4（参见 [PT21] 及其中的参考文献）。设 $E \in \mathbb{R}$。则以下各条件等价：

(i) 对所有 $\theta \in \mathbb{T}^2$，$E \in \sigma(\Delta_\gamma^\theta)$。(ii) 对 $\theta \in \mathbb{T}^2$ 的一个正测度子集，$E \in \sigma(\Delta_\gamma^\theta)$。(iii) 存在 Δ_γ 的一个无限正交归一族特征函数，其对应特征值为 E。其中每个特征函数均可选为支撑在有限个顶点上。

如果满足 (i) 至 (iii) 中的任意一项，我们就称 Δ_γ 具有平带（能量为 E）。

请注意，在 $\ell^\infty(V)$ 的设定中，而非 $\ell^2(V)$ 的设定中，这类无限简并特征值也称为“黑洞特征值” [BL09]。此外，平带的存在可以解释为唯一延拓原理失效 [PTV17]。

在希尔伯特空间 $\ell^2(V)$ 的设定中，已知对于常数边权重，离散拉普拉斯算子只有在 11 种阿基米德晶格中的两种晶格上存在平带，即 $(3.6)^2$笼目晶格和 (3.12^2) 超笼目晶格 [PT21]。在转而讨论这两种晶格的扰动版本之前，应先确认其他晶格不会出现意外情况：

命题 5. 对于阿基米德晶格 (4^4)、(3^6)、(6^3)、$(3^3.4^2)$、(4.8^2)、$(3^2.4.3.4)$、(3.4.6.4)、(4.6.12)、$(3^4.6)$，不存在任何一种周期性（相对于晶格的基本胞）的边权重 $\gamma_{vw} = \gamma_{wv} > 0$，能使加权邻接矩阵

矩阵

$$\Pi_\gamma(v,w) = \begin{cases} \gamma_{vw} & if\ v \sim w, \\ 0 & else \end{cases}$$

存在平带。因此，在这些晶格上，具有常数边权重或单体边权重的拉普拉斯算子也不存在平带。

命题 5 的证明通过一系列直接但稍显冗长的计算完成：计算相应的特征多项式，并利用命题 4 证明不存在与 θ 无关的根（这可与下文定理 6 和定理 10 的证明相比较）。为简洁起见，此处略去这些计算。无论如何，命题 5 说明，从现在起我们只需关注（受扰动的）笼目晶格和超笼目晶格。

4. The perturbed Kagome lattice

本节讨论具有非均匀（周期性）边权重的笼目晶格。笼目晶格的原胞包含三个顶点和六条边（可以将这些边想象成沿六边形排列）。原则上，周期性允许有六种

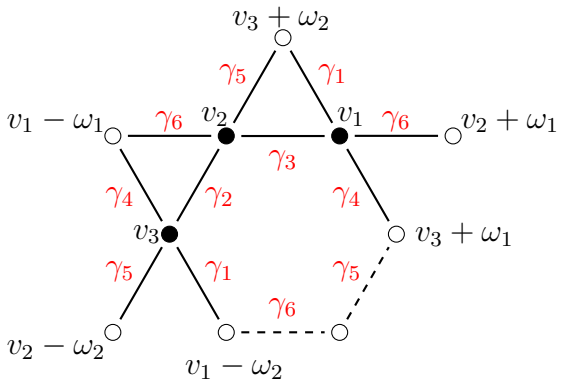


Figure 2. 带有边权重的笼目晶格基本域。在单体情形下，所有朝下三角形周围的边权重为 $\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_6 =: \alpha$，所有朝上三角形上的边权重为 $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 =: \beta$，其中 $2\alpha + 2\beta = \mu$。

边权重 γ_1，...，$\gamma_6 > 0$以及 Floquet 拉普拉斯算子 Δ_γ^θ 可写为厄米矩阵

$$\Delta_\gamma^\theta = \mathrm{Id} - \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 + w\gamma_6 & w\gamma_4 + z\gamma_1 \\ \gamma_3 + \overline{w}\gamma_6 & 0 & \gamma_2 + z\gamma_5 \\ \overline{w}\gamma_4 + \overline{z}\gamma_1 & \gamma_2 + \overline{z}\gamma_5 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中 $w := e^{i\theta_1}$ 且 $z := e^{i\theta_2}$。我们将 Δ_γ^θ 的三个实特征值记为 $\lambda_1(\theta, \gamma) \leq \lambda_2(\theta, \gamma) \leq \lambda_3(\theta, \gamma)$。

请注意，根据以下对称条件，这六个自由度还需进一步约化：

- 如果我们仅假设顶点权重为常数 $\mu > 0$，那么恒等式 (3) 将施加三个额外的线性独立条件

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_4 &= \gamma_2 + \gamma_5\ , \\ \gamma_3 + \gamma_6 &= \gamma_2 + \gamma_5\ , \\ \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_6 &= \mu\ , \end{aligned} \tag{7}$$

最终我们将得到三个自由度。

•如果我们还假设具有单聚体性，那么很容易看出，唯一的选择就是呼吸 Kagome晶格，参见 [HKdP+22]: 所有属于朝上三角形的边的边权重均为 $\alpha > 0$, 所有属于朝下三角形的边的边权重均为 $\beta > 0$ ，其中 2($\alpha + \beta$) $= \mu$。固定顶点权重 μ后，这就只剩下一个自由度。

4.1. 受扰 Kagome 晶格中的平带。

定理 6. 考虑具有拉普拉斯算子 (4) 的受扰 Kagome 晶格，其顶点权重 $\mu > 0$固定，周期边权重为 $\gamma_1, ..., \gamma_6 > 0$，并满足关于顶点权重和边权重的条件 (3)。那么，以下条件等价:

(i) 存在平带。(ii) 顶点权重是单体型的。更明确地说，存在 $\alpha, \beta > 0$ ，使得 2($\alpha + \beta$) $= \mu$ ，满足

$$\gamma_2 = \gamma_4 = \gamma_6 := \alpha,$$
$$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 := \beta.$$

本小节余下部分将用于证明定理 6。我们首先利用加权邻接矩阵来识别平带

$$\Pi_\gamma^\theta := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 + w\gamma_6 & w\gamma_4 + z\gamma_1 \\ \gamma_3 + \overline{w}\gamma_6 & 0 & \gamma_2 + z\gamma_5 \\ \overline{w}\gamma_4 + \overline{z}\gamma_1 & \gamma_2 + \overline{z}\gamma_5 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

该矩阵通过以下关系进行缩放和平移后，在谱上与 Δ_γ^θ 等价 n

$$\Delta_\gamma^\theta = \mathrm{Id} - \frac{1}{\mu}\Pi_\gamma^\theta.$$

为了找到平带，我们将确定 θ无关的 Π_γ^θ特征值的条件，因此计算

$$\det(\lambda\,\mathrm{Id} - \Pi_\gamma^\theta) = -\lambda^3 + \lambda(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2) + 2\Re(A\overline{B}C)$$

其中 $A\colon = \gamma_3 + w\gamma_6$, $B\colon = w\gamma_4 + z\gamma_1$ 且 $C\colon = \gamma_2 + z\gamma_5$。重新排列各项可得

$$\begin{aligned} \det(\lambda\,\mathrm{Id} - \Pi_\gamma^\theta) =& (w + \overline{w})(\lambda\gamma_6\gamma_3 + \gamma_3\gamma_2\gamma_4 + \gamma_6\gamma_5\gamma_1) \\ &+ (z + \overline{z})(\lambda\gamma_5\gamma_2 + \gamma_6\gamma_5\gamma_4 + \gamma_1\gamma_3\gamma_2) \\ &+ (w\overline{z} + z\overline{w})(\lambda\gamma_1\gamma_4 + \gamma_3\gamma_5\gamma_4 + \gamma_6\gamma_2\gamma_1) \\ &+ (-\lambda^3 + \lambda(\gamma_1^2 + ... + \gamma_6^2) + 2(\gamma_4\gamma_6\gamma_2 + \gamma_3\gamma_5\gamma_1)) \ . \end{aligned}$$

前置因子

$$w + \overline{w} = 2\cos\theta_1 \ , \quad z + \overline{z} = 2\cos\theta_2 \ , \quad \text{and} \quad w\overline{z} + z\overline{w} = 2\cos(\theta_1 - \theta_2) \ ,$$

作为 θ 在 $\mathbb{T}^2$ 上的可测函数线性无关。因此，由于所有 γ_i 都为正， θ-独立特征值存在，当且仅当每一行中 w 和 z-独立的项均为零。这只有在 λ 为负时才可能成立；此时（暂且对 γ_i 和 μ 进行缩放后），可假设其等于 -1。因此，我们得到以下条件

$$\begin{aligned} \gamma_3\gamma_6 &= \gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \gamma_1\gamma_5\gamma_6 \ , \\ \gamma_2\gamma_5 &= \gamma_4\gamma_5\gamma_6 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ , \\ \gamma_1\gamma_4 &= \gamma_3\gamma_4\gamma_5 + \gamma_1\gamma_2\gamma_6 \ , \end{aligned} \tag{9}$$

and

$$1-(\gamma_1^2+\cdots+\gamma_6^2)+2\left(\gamma_2\gamma_4\gamma_6+\gamma_1\gamma_3\gamma_5\right)=0\ . \tag{10}$$

引理 7. 方程 (7)、(9)、(10) 的唯一正解（即所有 γ_i 均非零）为

$$\begin{aligned}\gamma_2=\gamma_4=\gamma_6=x\\ \gamma_1=\gamma_3=\gamma_5=y\end{aligned} \tag{11}$$

其中 x、 $y\in(0,1)$ 和 $x+y=1$。

证明。通过直接计算可知，(11) 满足 (7)、(9)、(10)。

反 之，假设存在正解 γ_1，...， $\gamma_6>0$。由 (9) 得到 n

$$\gamma_3=\frac{\gamma_1\gamma_5\gamma_6}{\gamma_6-\gamma_2\gamma_4}\ ,\quad \gamma_1=\frac{\gamma_3\gamma_4\gamma_5}{\gamma_4-\gamma_2\gamma_6}\ ,$$

这意味着 $\gamma_6>\gamma_2\gamma_4$ 和 $\gamma_4>\gamma_2\gamma_6$。因此，结合两个方程可得 $\gamma_2^2\gamma_6<\gamma_6$，这表明 $\gamma_2<1$。同理可证明，对于其他每个 i，都有 $\gamma_i<1$。

接下来，令 $\gamma_2+\gamma_5:=\Lambda$。由（7）立即可得 $\gamma_1+\gamma_4=\gamma_3+\gamma_6=\Lambda$。现在，将（9）和（10）相加并整理方程，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\gamma_1^2+\cdots+\gamma_6^2-1\right)+\gamma_3\gamma_6+\gamma_2\gamma_5+\gamma_1\gamma_4=&\gamma_2\gamma_4\gamma_6+\gamma_1\gamma_3\gamma_5\\ &+\gamma_2\gamma_3\gamma_4+\gamma_1\gamma_5\gamma_6+\gamma_4\gamma_5\gamma_6\\ &+\gamma_1\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_4\gamma_5+\gamma_1\gamma_2\gamma_6\ .\end{aligned}$$

经过反复因式分解，右侧可化简为

$$\gamma_1\gamma_3(\gamma_2+\gamma_5)+\gamma_3\gamma_4(\gamma_2+\gamma_5)+\gamma_1\gamma_6(\gamma_2+\gamma_5)+\gamma_4\gamma_6(\gamma_2+\gamma_5)=\Lambda^3, \tag{12}$$

而对于左侧，有

$$\frac{1}{2}\left(\gamma_1^2+\cdots+\gamma_6^2-1\right)+\gamma_3\gamma_6+\gamma_2\gamma_5+\gamma_1\gamma_4=\frac{3\Lambda^2-1}{2}\ ,$$

于是得到多项式 $\Lambda^3-\frac{3\Lambda^2}{2}+\frac{1}{2}=0$，其唯一的正解为 $\Lambda=1$。最后，将（9）的前两个方程相加，得到

$$\gamma_3\gamma_6+\gamma_2\gamma_5=(\gamma_6\gamma_5+\gamma_2\gamma_3)(\gamma_1+\gamma_4)=\gamma_6\gamma_5+\gamma_2\gamma_3$$

由此可得 $\gamma_5=\gamma_3$。此外，将最后两个方程相加，得到

$$\gamma_2\gamma_5+\gamma_1\gamma_4=(\gamma_4\gamma_5+\gamma_1\gamma_2)(\gamma_3+\gamma_6)=\gamma_4\gamma_5+\gamma_1\gamma_2$$

从而得到 $\gamma_4=\gamma_2$。因此，条件（7）给出 $\gamma_1=\gamma_5$ 和 $\gamma_6=\gamma_2$。这就证明了该结论。□

现在我们可以证明定理 6。

定理 6 的证明。比较 Π_γ^θ 和 Δ_γ^θ，我们得出结论： Δ_γ^θ 具有边权重为 $\gamma_1,...,\gamma_6$ 的平带，当且仅当存在 $\delta>0$，使得 Π_γ^θ 具有边权重为 $\delta\gamma_1,...,\delta\gamma_6$ 的平带。考虑到引理 7，该结论可由此直接得出。

□

4.2. 单体 Kagome 晶格中的谱与带隙。在受扰 Kagome 晶格存在平带的情况下，我们进一步研究其余谱的结构。我们再次强调，根据定理 6，平带的存在等价于权重为单体型。

例如，正如 [PT21]，所示，在所有边权重都相等的情况下，由另外两个依赖于 θ 的特征值 Δ_γ^θ 生成的另外两条谱带在 $E = 3/4$ 处相接，并且积分态密度在 $E = 3/4$ 处的导数为零——这表明 $3/4$ 处的谱密度足够稀薄，因此扰动后会形成谱隙。确实，这正是下一个定理的结论，该定理还刻画了谱隙的宽度。

定理 8（受扰 Kagome 晶格中的带隙）。考虑顶点权重固定为 $\mu > 0$、单体边权重为 α、$\beta > 0$ 的受扰笼目晶格，其中这些权重满足定理 6 所刻画的 $2(\alpha + \beta) = \mu$。那么，谱为

$$I_1 \cup I_2 := \left[0, \frac{3}{4} - \left|\frac{3\alpha}{\mu} - \frac{3}{4}\right|\right] \bigcup \left[\frac{3}{4} + \left|\frac{3\alpha}{\mu} - \frac{3}{4}\right|, \frac{3}{2}\right].$$

此外，始终存在一条位于 $\frac{3}{2}$ 处的平带。

注 9. 定理 8 指出，只要 $\alpha \neq \beta$，或者 $\alpha \neq \frac{\mu}{4}$，宽度为

$$\left|\frac{6\alpha}{\mu} - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{\mu}|\alpha - \beta|$$

就会在 $\frac{3}{4}$ 周围形成谱隙，另见图 3。位于 $\frac{3}{2}$ 的平带始终与其下方的能带相连，这意味着在单体扰动这一类扰动中，$\frac{3}{2}$ 处平带的“接触”受到保护。

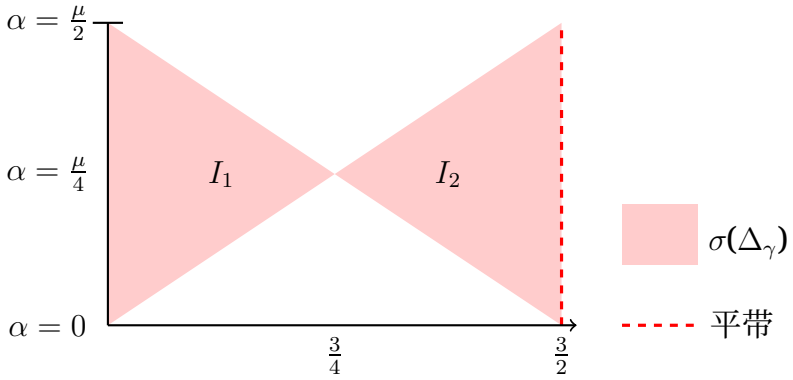


FIGURE 3. 顶点权重为 $\mu > 0$ 的单体型 $(3^2.6^2)$ Kagome 晶格的谱，随参数 $\alpha \in (0, \frac{\mu}{2})$ 变化；该参数描述与朝下三角形相邻的边上的边权重。

证明。计算可知，按定理 6 中的选择 $2(\alpha + \beta) = \mu$，Δ_γ^θ 的特征值为

$$\lambda_{1,2}(\theta, \gamma) = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{1 + 8\left(1 + (F(\theta) - 3)\left(\frac{2\alpha}{\mu} - \frac{4\alpha^2}{\mu^2}\right)\right)}$$

and

$$\lambda_3(\theta, \gamma) = \frac{3}{2}$$

其中 $F(\theta) := \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1 - \theta_2)$。函数 $\mathbb{T}^2 \ni \theta \mapsto F(\theta)$ 取遍 $[-3/2, 3]$ 中的所有值，参见 [PT21], 中的引理 3.1，因此 $\lambda_1(\theta, \gamma)$ 和 $\lambda_2(\theta, \gamma)$ 分别取遍以下区间中的所有值

$$\left[0, \frac{3}{4} - \left|\frac{3\alpha}{\mu} - \frac{3}{4}\right|\right], \quad \text{and} \quad \left[\frac{3}{4} + \left|\frac{3\alpha}{\mu} - \frac{3}{4}\right|, \frac{3}{2}\right], \quad \text{respectively.} \qquad \square$$

5. The perturbed Super-Kagome lattice

本节中，我们研究阿基米德镶嵌（3.12^2），并将其称为超笼目晶格。其最小基本单胞包含六个顶点和九条边：朝上三角形上的三条边、朝下三角形上的三条边，以及构成两个十二边形边界的三条边，见图 4。

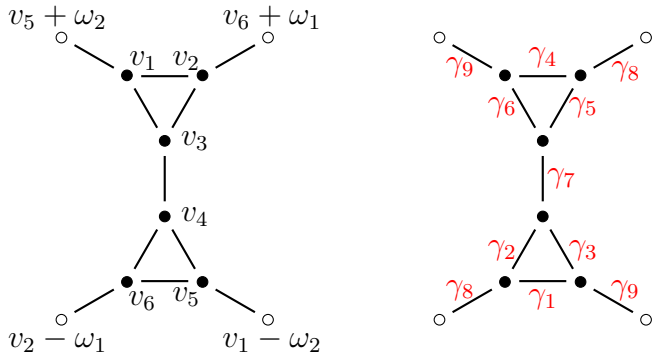


Figure 4. 带边权重的（3.12^2）镶嵌的基本域。在单体情形下，三角形周围的所有边权重均为 $\gamma_1 = \cdots = \gamma_6 =: \alpha$ 其余权重为 $\gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 =: \beta$。

给定常数顶点权重 $\mu > 0$，Floquet 拉普拉斯算子 (5) 是一个 6×6 矩阵，其形式为

$$\Delta_\gamma^\theta = \mathrm{Id} - \frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} 0 & \gamma_4 & \gamma_6 & 0 & z\gamma_9 & 0 \\ \gamma_4 & 0 & \gamma_5 & 0 & 0 & w\gamma_8 \\ \gamma_6 & \gamma_5 & 0 & \gamma_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_7 & 0 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \overline{z}\gamma_9 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \overline{w}\gamma_8 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

其中 $w := e^{i\theta_1}$, $z := e^{i\theta_2}$。

- 若固定常数顶点权重 $\mu > 0$，则条件 $\sum_{w \sim v} \gamma_{vw} = \mu$ 对所有 $v \in V$ 成立，可得

$$\begin{aligned} \mu = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_7 = \gamma_5 + \gamma_6 + \gamma_7 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_8 = \gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_8 \\ = \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_9 = \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_9. \end{aligned} \tag{14}$$

可以看出，这是一个含有 9 个未知数、由 6 个线性无关方程组成的线性方程组，因此解空间是 3 维的。更具体地说，通过适当相加，我们可推出以下三个恒等式

$$\begin{aligned} 2\gamma_1 + \gamma_8 + \gamma_9 &= 2\gamma_7 + \gamma_2 + \gamma_3, \\ 2\gamma_4 + \gamma_8 + \gamma_8 &= 2\gamma_7 + \gamma_5 + d\gamma_6, \\ \gamma_2 + \gamma_3 &= \gamma_5 + \gamma_6 \end{aligned} \tag{15}$$

由此可得 $\gamma_1 = \gamma_4$。恒等式 $\gamma_2 = \gamma_5$ 和 $\gamma_3 = \gamma_6$ 则可通过完全类似的计算得出。这样便有 6 个独立变量 γ_1、γ_2、γ_3 以及 γ_7、γ_8、γ_9，但它们仍须满足以下三个条件

$$\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_7 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_8 = \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_9 = \mu$$

由 (14) 可知。因此，我们还剩下三个自由度。

- 如果进一步规定单聚体性，很容易看出只有一个自由度：三角形周围的所有边权重均为 $\alpha > 0$，其余边（分隔两个十二边形）均为 $\beta > 0$，且满足条件 $2\alpha + \beta = \mu$。

5.1. 受扰动的超 Kagome 晶格中的平带。

定理 10. 考虑具有拉普拉斯算子 (4)、固定顶点权重 $\mu > 0$ 以及周期边权重 γ_1、……、$\gamma_9 > 0$ 的受扰动的超 Kagome 晶格，其中顶点权重和边权重满足条件 (3)。那么，以下命题等价：

(i) 恰好存在两个平带。(ii) 超笼目晶格是单体型的。更明确地说，存在 α、$\beta > 0$，使得 $2\alpha + \beta = \mu$ 连同

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \alpha\ ,$$
$$\gamma_7 = \gamma_8 = \gamma_9 = \beta\ .$$

证明。回想一下，在常数顶点权重的情形下，我们有

$$\gamma_1 = \gamma_4\ ,\quad \gamma_2 = \gamma_5\ ,\quad \text{and}\quad \gamma_3 = \gamma_6\ ,$$

并考虑加权邻接矩阵

$$\Pi_\gamma^\theta := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_4 & \gamma_6 & 0 & z\gamma_9 & 0 \\ \gamma_4 & 0 & \gamma_5 & 0 & 0 & w\gamma_8 \\ \gamma_6 & \gamma_5 & 0 & \gamma_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_7 & 0 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \overline{z}\gamma_9 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \overline{w}\gamma_8 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_3 & 0 & z\gamma_9 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & w\gamma_8 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & 0 & \gamma_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_7 & 0 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \overline{z}\gamma_9 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & \overline{w}\gamma_8 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

它是 Δ_γ^θ 的平移和缩放版本。我们计算得

$$\begin{aligned} \det(\lambda\,\mathrm{Id} - \Pi_\gamma^\theta) &= \lambda^6 - \lambda^4\left(2\gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 + 2\gamma_3^2 + \gamma_7^2 + \gamma_8^2 + \gamma_9^2\right) - 4\lambda^3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ &+ \lambda^2\big(\gamma_1^4 + \gamma_2^4 + \gamma_3^4 + 2\gamma_1^2\gamma_2^2 + 2\gamma_2^2\gamma_3^2 + 2\gamma_3^2\gamma_1^2 + 2\gamma_1^2\gamma_7^2 + 2\gamma_2^2\gamma_9^2 + 2\gamma_3^2\gamma_8^2 + \\ &\qquad + \gamma_7^2\gamma_8^2 + \gamma_8^2\gamma_9^2 + \gamma_9^2\gamma_7^2\big) \\ &+ 4\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2\right) \\ &- \gamma_1^4\gamma_7^2 - \gamma_2^4\gamma_9^2 - \gamma_3^4\gamma_8^2 - \gamma_7^2\gamma_8^2\gamma_9^2 + 4\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 \\ &- (w + \overline{w})\left(\lambda^2\gamma_2^2\gamma_7\gamma_8 + 2\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_7\gamma_8 + \gamma_1^2\gamma_3^2\gamma_7\gamma_8 - \gamma_2^2\gamma_7\gamma_8\gamma_9^2\right) \\ &- (z + \overline{z})\left(\lambda^2\gamma_3^2\gamma_7\gamma_9 + 2\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_7\gamma_9 + \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_7\gamma_9 - \gamma_3^2\gamma_7\gamma_8^2\gamma_9\right) \\ &- (w\overline{z} + \overline{w}z)\left(\lambda^2\gamma_1^2\gamma_8\gamma_9 + 2\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_8\gamma_9 + \gamma_2^2\gamma_3^2\gamma_8\gamma_9 - \gamma_1^2\gamma_7^2\gamma_8\gamma_9\right). \end{aligned}$$

由于 $w + \overline{w} = 2\cos(\theta_1)$、$z + \overline{z} = 2\cos(\theta_2)$ 和 $w\overline{z} + \overline{w}z = 2\cos(\theta_1 - \theta_2)$ 在$\mathbb{T}^2$上是线性相关的，λ 是一个与 θ无关的特征值，当且仅当满足以下条件

$$\begin{aligned}\lambda^2\gamma_2^2+2\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3+\gamma_1^2\gamma_3^2-\gamma_2^2\gamma_9^2=0,\\ \lambda^2\gamma_3^2+2\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3+\gamma_1^2\gamma_2^2-\gamma_3^2\gamma_8^2=0,\\ \lambda^2\gamma_1^2+2\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3+\gamma_2^2\gamma_3^2-\gamma_1^2\gamma_7^2=0,\end{aligned} \tag{17}$$

以及

$$\begin{aligned}&\lambda^6-\lambda^4\left(2\gamma_1^2+2\gamma_2^2+2\gamma_3^2+\gamma_7^2+\gamma_8^2+\gamma_9^2\right)-4\lambda^3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\\ &+\lambda^2\big(\gamma_1^4+\gamma_2^4+\gamma_3^4+2\gamma_1^2\gamma_2^2+2\gamma_2^2\gamma_3^2+2\gamma_3^2\gamma_1^2+2\gamma_1^2\gamma_7^2+2\gamma_2^2\gamma_9^2+2\gamma_3^2\gamma_8^2+\\ &\qquad+\gamma_7^2\gamma_8^2+\gamma_8^2\gamma_9^2+\gamma_9^2\gamma_7^2\big)\\ &+4\lambda\gamma_1\gamma_2\gamma_3\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2\right)\\ &-\gamma_1^4\gamma_7^2-\gamma_2^4\gamma_9^2-\gamma_3^4\gamma_8^2-\gamma_7^2\gamma_8^2\gamma_9^2+4\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2=0\end{aligned} \tag{18}$$

成立。条件 (17) 意味着，矩阵 Π_γ^θ 的任意与 θ 无关的特征值都必须满足

$$\lambda=-\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2}\pm\gamma_9,\quad \lambda=-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}\pm\gamma_8,\quad \text{and}\quad \lambda=-\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}\pm\gamma_7.$$

由于所有 γ_i 均为正数，这三个方程具有相同解集（也就是说存在两条平带）的唯一可能情形是

$$-\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2}+\gamma_9=-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}+\gamma_8=-\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}+\gamma_7 \tag{19}$$

并且

$$-\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2}-\gamma_9=-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}-\gamma_8=-\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}-\gamma_7. \tag{20}$$

这意味着，只有当存在α、$\beta>0$ 使得 Π_γ^θ 时，矩阵 Π_γ^θ 才可能只有两个与 θ 无关的特征值

$$\alpha=\gamma_7=\gamma_8=\gamma_9\qquad\text{and}\qquad\beta=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3,$$

也就是单体情形，而这些特征值唯一可能的候选值为 $-\beta\ \pm\alpha$。通过明确计算可以验证，条件 (18) 也成立，从而确认它们确实是特征值。这就证明了上述等价关系。

□

接下来，我们将进一步描述单体超笼目晶格的谱。

定理 11（受扰动的超 Kagome 晶格的带隙）。考虑拉普拉斯算子为 (4) 的受扰动超 Kagome 晶格，其顶点权重固定为 $\mu>0$，单体边权重为 α、$\beta>0$，并满足定理 10 中所述的 $2\alpha+\beta=\mu$。则其谱为

$$I_1\cup I_2:=\left[0,\left(1-\frac{\alpha}{2\mu}\right)-\frac{|3\alpha-2\beta|}{2\mu}\right]\bigcup\left[\left(1-\frac{\alpha}{2\mu}\right)+\frac{|3\alpha-2\beta|}{2\mu},2-\frac{\alpha}{\mu}\right]$$

其中，$\frac{3\alpha}{\mu}$和 $2-\frac{\alpha}{\mu}$处有平带。

谱及平带的位置已绘于图 5。一般而言，谱由两个不同的区间（能带）组成，但在 $3\alpha=2\beta$ 的情况下除外，即 $\alpha=\frac{2\mu}{7}$，此时两个能带相接，谱由一个区间构成，其中间嵌有一个平带，且其最大值处也有一个平带。这种情况 $\alpha=\frac{2\mu}{7}$ 连接了谱图不同的两个区域：

[3]正如我们稍后将看到的，尽管 (18) 颇为复杂，但它不会施加额外限制，并且在所有相关情形下均成立。这似乎是晶格和算子对称性的结果。

- 如果 $\alpha > \frac{2\mu}{7}$ 谱由两个区间组成，其中上方的区间在两个端点处各有一个平带。对于均匀边权这一特殊情况（即 $\alpha = \frac{\mu}{3}$，例如在 [PT21] 中已观察到这一现象。

- 若 $\alpha < \frac{2\mu}{7}$，谱将再次由两个区间组成，每个区间的最大值处都有一个平带。有些令人惊讶的是，在经过临界参数 $\alpha = \frac{2\mu}{7}$ 后，下方的平带如今附着在下方区间 I_2 上。

另一个值得注意的观察是，区间 I_1 和 I_2 内均未出现间隙，尽管它们由两个不同的 Floquet特征值 生成，且能带内部某一点处的态密度测度为零；再次参见 [PT21] 中常数边权重情形下积分态密度的图示。特别是，这使单体型超 Kagome 晶格区别于单体 Kagome 晶格；在后者中，谱密度为零的点处，谱内确实会出现这样的间隙。

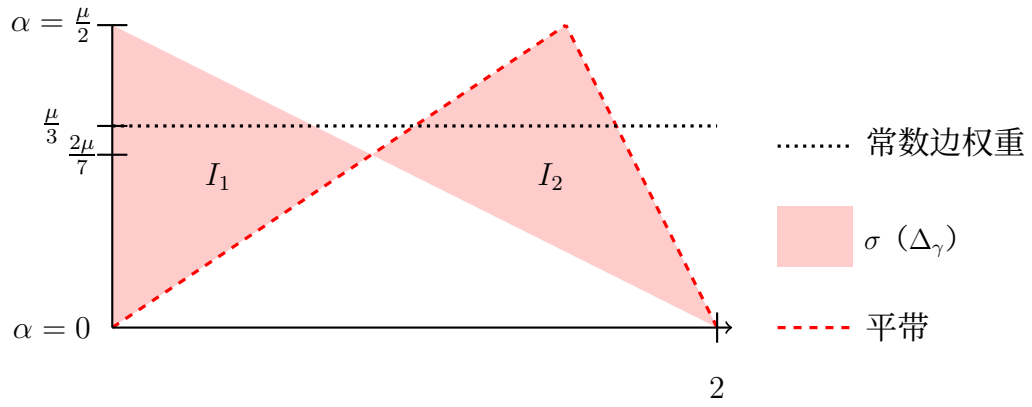


FIGURE 5. 顶点权重为 $\mu > 0$ 的单体型（3.12^2）“Super-Kagome”晶格的谱，作为参数 $\alpha \in (0, \frac{\mu}{2})$ 的函数；该参数描述三角形相邻边上的边权重。

定理 11 的证明。在单体情形下，矩阵 Π_γ^θ 的特征多项式 $\det(\lambda \mathrm{Id} - \Pi_\gamma^\theta)$ 化简为

$$((\alpha+\lambda)^2-\beta^2)\cdot$$
$$(\lambda^4 - 2\alpha\lambda^3 - (3\alpha^2+2\beta^2)\lambda^2 + (4\alpha^3+2\alpha\beta^2)\lambda + 4\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 F(\theta_1,\theta_2)) \ ,$$

其中 $F(\theta_1,\theta_2) = \cos(\theta_1) + \cos(\theta_2) + \cos(\theta_1+\theta_2)$。它的六个根为

$$\left\{-\alpha \pm \beta, \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{9\alpha^2+4\beta^2 \pm 4\alpha\beta\sqrt{3+2F(\theta_1,\theta_2)}}\right)\right\} \ ,$$

因此，Δ_γ^θ 的特征值为

$$\lambda_1(\theta,\gamma) = 1 - \frac{1}{2\mu}\left(\alpha + \sqrt{9\alpha^2+4\beta^2+4\alpha\beta\sqrt{3+2F(\theta_1,\theta_2)}}\right) \ ,$$
$$\lambda_2(\theta,\gamma) = 1 - \frac{1}{2\mu}\left(\alpha + \sqrt{9\alpha^2+4\beta^2-4\alpha\beta\sqrt{3+2F(\theta_1,\theta_2)}}\right) \ ,$$
$$\lambda_3(\theta,\gamma) = 1 + \frac{\alpha-\beta}{\mu} = \frac{3\alpha}{\mu} = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha-|3\alpha-2\beta|}{2\mu} & \text{if } 3\alpha \geq 2\beta \ , \\ 1 - \frac{\alpha-|3\alpha-2\beta|}{2\mu} & \text{if } 3\alpha < 2\beta \ , \end{cases}$$

$$\lambda_4(\theta,\gamma) = 1 - \frac{1}{2\mu}\left(\alpha - \sqrt{9\alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta\sqrt{3+2F(\theta_1,\theta_2)}}\right) ,$$
$$\lambda_5(\theta,\gamma) = 1 - \frac{1}{2\mu}\left(\beta - \sqrt{9\alpha^2 + 4\beta^2 + 4\alpha\beta\sqrt{3+2F(\theta_1,\theta_2)}}\right) ,$$
$$\lambda_6(\theta,\gamma) = 1 + \frac{\alpha+\beta}{\mu} = 2 - \frac{\alpha}{\mu} .$$

利用映射 $\mathbb{T}^2 \ni (\theta_1,\theta_2) \mapsto F(\theta_1,\theta_2)$ 取遍区间（$-3/2, 3$）中的所有值，我们得出：由 $\lambda_1(\theta,\gamma)$ 和 $\lambda_2(\theta,\gamma)$ 生成的能带，以及由 $\lambda_4(\theta,\gamma)$ 和 $\lambda_5(\theta,\gamma)$ 生成的能带始终相接，且谱由以下两个区间组成

$$\begin{aligned}
&\left[\min_{\theta\in\mathbb{T}^2}\lambda_1(\theta,\gamma), \max_{\theta\in\mathbb{T}^2}\lambda_2(\theta,\gamma)\right] \bigcup \left[\min_{\theta\in\mathbb{T}^2}\lambda_4(\theta,\gamma), \max_{\theta\in\mathbb{T}^2}\lambda_5(\theta,\gamma)\right] \\
&= \left[0, 1 - \frac{\alpha + |3\alpha - 2\beta|}{2\mu}\right] \bigcup \left[1 - \frac{\alpha - |3\alpha - 2\beta|}{2\mu}, 2 - \frac{\alpha}{2\mu}\right] \\
&= \left[0, \left(1 - \frac{\alpha}{2\mu}\right) - \frac{|3\alpha - 2\beta|}{2\mu}\right] \bigcup \left[\left(1 - \frac{\alpha}{2\mu}\right) + \frac{|3\alpha - 2\beta|}{2\mu}, 2 - \frac{\alpha}{\mu}\right] . \qquad \square
\end{aligned}$$

现在人们或许会想知道，在什么条件下只存在一条平带。下一个定理完整地确定了只存在一条平带时的所有参数：

定理 12。考虑拉普拉斯算子为 (4) 的受扰动的超 Kagome 晶格，固定顶点权重 $\mu > 0$，并取周期边权重 $\gamma_1, \ldots, \gamma_9 > 0$，使其满足顶点权重和边权重的条件 (3)。使得恰好存在一条平带的 (γ_i) 集合由六个连通分支组成；这些分支彼此不相交，且均不与定理 10 中确定的双平带参数集相交。

解空间在与晶格绕 $\frac{2\pi}{3}$ 和 $\frac{4\pi}{3}$ 旋转相对应的 γ_i 排列下保持不变。对这些排列取模后，这两个连通分支可描述如下

- 一个与区间同构的一维子流形，且在方程 (26) 中有明确描述，
- 两个一维子流形分别同构于一个区间，具体描述见式 (28) 和 (30)，且二者交于一点。

定理 12 的证明。回顾本节开头所作的约化，在固定常数顶点权重 $\mu > 0$ 后，边权重空间是 6 维参数空间 $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9 > 0\}$ 中的一个 3 维流形，并满足以下条件

$$\gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_9 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_8 = \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_7 = \mu. \tag{21}$$

此外，由定理 10 的证明可知，Δ_γ 具有平带 λ 当且仅当加权邻接矩阵 Π_γ^θ 具有与 θ 无关的特征值 $\tilde{\lambda} := \mu(1-\lambda)$。特别地，这要求

$$\tilde{\lambda} = -\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2} \pm \gamma_9 = -\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3} \pm \gamma_8 = -\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1} \pm \gamma_7 \tag{22}$$

在某种正负号组合下成立。现在，若等式（22）分别在三个符号全为正或全为负时成立，那么定理 10 证明中的论证表明，这已足以推出边权重为单体型；这些恒等式在取相反符号时也成立，附加条件（18）得到满足，并且存在两条平带。因此，存在

恰好一条平带的唯一可能性，是（22）中 γ_7、γ_8、γ_9 前的符号各不相同。此外，显然，当（22）中符号各不相同时，不可能存在单体型且非零的解，因此解空间至多由六个彼此不相交的分支组成，且这些分支均不与定理 10 中确定的双平带流形相交。

根据对称性，只需研究这六种情况中的两种：

$$\textbf{Case(- + +):} \qquad -\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2}-\gamma_9=-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}+\gamma_8=-\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}+\gamma_7=\tilde{\lambda}\,, \tag{23}$$

and

$$\textbf{Case(+ - -):} \qquad -\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2}+\gamma_9=-\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_3}-\gamma_8=-\frac{\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1}-\gamma_7=\tilde{\lambda}\,. \tag{24}$$

为求解情形(- + +)，结合(21)和(23)中的第二个恒等式，可推得

$$\gamma_3-\gamma_1=\frac{\gamma_2}{\gamma_1\gamma_3}(\gamma_1^2-\gamma_3^2)$$

结合 $\gamma_i>0$可知，只有在 $\gamma_1=\gamma_3$时这才可能成立。但此时，根据(23)，有 $\gamma_7=\gamma_8$。令$\alpha':=\gamma_2$，以及 $\beta':=\gamma_9$，利用(21)还可进一步表示为

$$\gamma_1=\gamma_3=\frac{\mu-\beta'}{2},\quad \text{and}\quad \gamma_7=\gamma_8=\frac{\mu+\beta'}{2}-\alpha'. \tag{25}$$

接下来, 我们利用(23)中尚未使用的第一个恒等式求解 β'，得到

$$\begin{aligned} -\frac{(\mu-\beta')^2}{4\alpha'}-\beta' &= -\alpha'+\frac{\mu+\beta'}{2}-\alpha' \\ \Leftrightarrow\quad \beta' &= \mu-3\alpha'\pm\sqrt{17\alpha'^2-8\alpha'\mu}. \end{aligned}$$

只有当 $\alpha'>\frac{8}{17}\mu>\frac{1}{3}\mu$ 时，该式才有实数解，因此只有

$$\beta'=\mu-3\alpha'+\sqrt{17\alpha'^2-8\alpha'\mu}.$$

可以是正解。此外，我们需要 $\beta'\in(0,\mu)$，当且仅当以下条件成立时，这一点才成立：

$$\gamma_2=\alpha'\in\left(\frac{\mu}{2},\mu\right).$$

因此，我们得到单参数解集

$$\textbf{Case (- + +)}\quad \begin{cases} \gamma_1=\gamma_3 & =\frac{\mu-\beta'}{2}, \\ \gamma_2=\alpha' & \in\left(\frac{\mu}{2},\mu\right), \\ \gamma_7=\gamma_8 & =\frac{\mu+\beta'}{2}-\alpha', \\ \gamma_9=\beta' & :=\mu-3\alpha'+\sqrt{17\alpha'^2-8\alpha\mu} \end{cases} \tag{26}$$

其能量为

$$\tilde{\lambda}=-\gamma_2+\gamma_7=-2\alpha'+\frac{\mu+\beta'}{2}=-2\alpha'+\frac{2\mu-3\alpha'+\sqrt{17\alpha'^2-8\alpha'\mu}}{2}.$$

最后，经过显式计算可知，取这些参数时，(18) 确实成立。对于 Case(+ - -)，我们将 (21) 中的第二个恒等式与 (24) 中的第二个恒等式结合，推出

$$\gamma_3-\gamma_1=\frac{\gamma_2}{\gamma_1\gamma_3}(\gamma_3^2-\gamma_1^2)\,. \tag{27}$$

恒等式 (27) 有两类解：

情形(+ - -)(a)：$\gamma_1=\gamma_3$。

与前面一样，我们得到 $\gamma_7 = \gamma_8$。令 $\alpha' := \gamma_2, \beta' := \gamma_9$，并将 (24) 中剩余的第一个恒等式与 (25) 联立，解出 β'，得到

$$\begin{aligned} &-\frac{(\mu-\beta')^2}{4\alpha'} + \beta' = -\frac{\mu+\beta'}{2} \\ \Leftrightarrow \quad &\beta' = \mu + 3\alpha' \pm \sqrt{9\alpha'^2 + 8\alpha'\mu}. \end{aligned}$$

只有该解

$$\beta' = \mu + 3\alpha' - \sqrt{9\alpha'^2 + 8\alpha'\mu}$$

有可能属于 $(0, \mu)$，而且当且仅当以下条件成立时，确实如此

$$\gamma_2 = \alpha' \in \left(0, \frac{\mu}{2}\right).$$

我们得到单参数解集

$$\textbf{Case}(+\ -\ -)\textbf{(a)} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \gamma_3 & = \frac{\mu-\beta'}{2}, \\ \gamma_2 = \alpha' & \in \left(0, \frac{\mu}{2}\right), \\ \gamma_7 = \gamma_8 & = \frac{\mu+\beta'}{2} - \alpha', \\ \gamma_9 = \beta' & := \mu + 3\alpha' - \sqrt{9\alpha'^2 + 8\alpha'\mu} \end{cases} \tag{28}$$

其能量为

$$\tilde{\lambda} = -\gamma_2 - \gamma_7 = -\frac{\mu+\beta'}{2} = -\frac{2\mu + 3\alpha' - \sqrt{9\alpha'^2 + 8\alpha'\mu}}{2}.$$

再次通过显式计算可知，(18) 得以满足。

情况(+ - -)(b)：(27)的另一个解为

$$\gamma_1\gamma_3 = \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3).$$

令 $\alpha'' := \gamma_1, \beta'' := \gamma_3$，由此可得

$$\gamma_2 = \frac{\alpha''\beta''}{\alpha'' + \beta''},$$

并利用 (21) 推得

$$\gamma_7 = \mu - \frac{2\alpha''\beta'' + \beta''^2}{\alpha'' + \beta''}, \quad \gamma_8 = \mu - \frac{\alpha''^2 + 2\alpha''\beta''}{\alpha'' + \beta''}, \quad \gamma_9 = \mu - \alpha'' - \beta''. \tag{29}$$

将 (29) 代入 (24) 中尚未使用的第一个恒等式，得到

$$\begin{aligned} &-(\alpha'' + \beta'') + \mu - \alpha'' - \beta'' = -\frac{\alpha''^2}{\alpha'' + \beta''} - \mu + \frac{\alpha''^2 + 2\alpha''\beta''}{\alpha'' + \beta''} \\ \Leftrightarrow \quad &\beta'' = \frac{\mu - 3\alpha'' \pm \sqrt{(\mu - 3\alpha'')^2 + 4\alpha''(\mu - \alpha'')}}{2} = \frac{\mu - 3\alpha'' \pm \sqrt{\mu^2 - 2\alpha''\mu + 5\alpha''^2}}{2} \end{aligned}$$

我们观察到，只有取正号的解才有可能为正，而且很容易看出，对于所有 $\alpha'' \in (0, \mu)$，该解的取值都在 $(0, \mu)$ 内。由此得到单参数解集

$$\textbf{Case } (+\ -\ -) \textbf{ (b)} \quad \begin{cases} \gamma_1 = \alpha'' & \in (0, \mu), \\ \gamma_2 & = \frac{\alpha''\beta''}{\alpha''+\beta''}, \\ \gamma_3 = \beta'' & := \frac{\mu - 3\alpha'' + \sqrt{\mu^2 - 2\alpha''\mu + 5\alpha''^2}}{2}, \\ \gamma_7 & = \mu - \frac{2\alpha''\beta'' + \beta''^2}{\alpha''+\beta''}, \\ \gamma_8 & = \mu - \frac{\alpha''^2 + 2\alpha''\beta''}{\alpha''+\beta''}, \\ \gamma_9 & = \mu - \alpha'' - \beta'' \end{cases} \tag{30}$$

能量处

$$\tilde{\lambda} = -\frac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2} + \gamma_9 = \mu - 2\alpha'' - 2\beta'' = \alpha - \sqrt{\mu^2 - 2\alpha''\mu + 5\alpha''^2}.$$

再次，通过显式计算可以验证，采用这些选择后，式 (18) 得以满足。

最后，为了得出关于这些流形的拓扑性质的结论，我们需要验证：当且仅当以下条件成立时，情形(+ - -)(a)中的解空间 (28) 与情形(+ - -)(b)中的解空间 (30) 相交

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_7 = \gamma_8 = \frac{2\mu}{5}, \quad \gamma_2 = \gamma_9 = \frac{\mu}{5}.$$ □

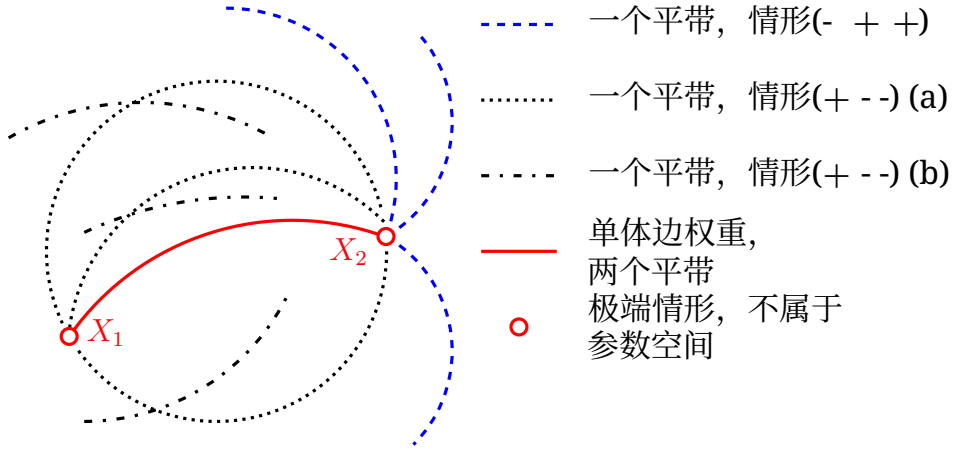


FIGURE 6. 六个“伪”单平带解集，以及常顶点权重参数空间内单体双平带流形的拓扑示意图。Case(- + +) 解在参数范围的一端渐近趋近于双平带流形的极限点，而 Case(+ - -) (a) 解则在参数范围的两端都渐近趋近于该流形。

注13. 定理10和定理12表明，六个单平带分支与双平带分支彼此不相交。然而，对公式(26)、(28)和(30)中的极端情形以及单体情形进行更仔细的分析可知，当参数趋于其极端值时，与 Case(+ - -) (a) 对应的三个一维流形以及双平带流形的解收敛到这两个点

$$X_1 := \left(0, 0, 0, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \quad and \quad X_2 := \left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, 0, 0, 0\right),$$

它们本身已不再属于可容许参数空间。同样，式（26）中 Case(+ - -) 对应于 $\alpha' = \frac{\mu}{2}$ 的解的极限对应于点 X_2，另见图6。

致谢。JK谨向伍珀塔尔贝吉施大学致谢，本项目部分工作是在其从哈根远程大学休假期间完成的。JK和MT还感谢欧洲合作项目 CA18232通过在布雷根茨举办的暑期学校“热核与几何：从流形到图”提供支持。MT谨向米塔-莱夫勒研究所致谢，本研究的部分工作是在该所举办的三个月项目“数学物理中的谱方法”期间启动的。

References

[BE22] M. Baradaran和P. Exner，具有优选方向顶点耦合的Kagome网络，《数学物理杂志》63（2022），第8期，083502。[BK13] G. Berkolaiko和P. Kuchment，《量子图导论》，美国数学学会，2013。[BL09] J. von Below和J. A. Lubary，等谱无限图与网络及无限重数的特征值，《网络与异质介质》4（2009），第3期，453–468。[BM18] T. Bilitewski和R. Moessner，笼目晶格上的无序平带，《物理评论B》98（2018），235109。[DCS12] H. Duminil-Copin和S. Smirnov，蜂窝晶格的连接常数等于$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，《数学年刊》175（2012），1653–1665。[Dia21] D. P. Dias，广义Kagome晶格材料中平带的拓扑性质，KTH工程科学学院（SCI）博士论文，2021。[dLFM19] F. C. de Lima、G. J. Ferreira和R. H. Miwa，二维阿基米德晶格中的拓扑平带、狄拉克费米子与量子自旋霍尔相，《物理化学化学物理》21（2019），第40期，22344–22350。[EK15] P. Exner和H. Kova ˇr´ık，《量子波导》，施普林格国际出版社，2015。[Exn20] P. Exner，软量子波导的谱性质，《物理学杂志A》53（2020），第35期，355302。[Exn22] ———，三维软量子波导，《数学物理杂志》63（2022），第4期，042103。[FK58] F. C. Frank和J. S. Kasper，将复杂合金结构视为球堆积。I. 定义与基本原理，《晶体学报》11（1958），184–190。[FK59] ———,将复杂合金结构视为球堆积。II. 代表性结构的分析与分类，《晶体学报》12（1959），483–499。[FW12] C. L. Fefferman和M. I. Weinstein，蜂窝晶格势与狄拉克点，《美国数学会杂志》25（2012），第4期，1169–1220。[GS89] B. Gr ¨unbaum和G. C. Shephard，《镶嵌与图案》，数学科学丛书，W. H. Freeman and Company，纽约，1989。[HC15] J-M. Hou和W. Chen，蜂窝晶格上的隐藏对称性与狄拉克点保护，《科学报告》5（2015），17571。[HKdP+22] M. A. J. Herrera、S. N. Kempkes、M. Blanco de Paz、A. Garc´ıa-Etxarri、I. Swart、C. Morais Smith和D. Bercioux，呼吸Kagome晶格的角态：起源与稳健性，arXiv:2201.07576 [cond-mat.mes-hall], 2022.[HRS] C. Hainzl、B. Roos和R. Seiringer，BCS模型中的边界超导性，arXiv:2201.08090 [math-ph], 2022.[Jac14] J. L. Jacobsen，利用图多项式求高精度渗流阈值和Potts模型临界流形，《物理学杂志A：数学与理论》47（2014），135001。[JBT21] A. Julku、G. M. Bruun和P. T ¨orm ¨a，量子几何与平带玻色–爱因斯坦凝聚，《物理评论快报》127（2021），第17期。[JSG16] J. L. Jacobsen、C. R. Scullard和A. J. Guttmann，方格晶格自避免行走的增长常数，《物理学杂志A：数学与理论》49（2016），第49期，494004。[Kep19] J. Kepler，《世界的和谐》，Johann Plack，1619年。[Kes80] H. Kesten，方格晶格键渗流的临界概率等于1 2，《数学物理通讯》74（1980），第1期，41–59。MR 575895[KFSH19] A. J. Koll´ar、M. Fitzpatrick、P. Sarnak和A. A. Houck，线图晶格：欧几里得与非欧几里得平带及其在电路量子电动力学中的实现，《数学物理通讯》376（2019），第3期，1909–1956。[KHZ+20] A. A. Kulkarni、E. Hanson、R. Zhang、K. Thornton和P. V. Braun，模板定向共晶凝固中涌现的阿基米德晶格，《自然》577（2020），第7790期，355–358。[KLW21] M. Keller、D. Lenz和R. K. Wojciechowski，《图与离散狄利克雷空间》，施普林格自然瑞士股份公司，2021。[KP07] P. Kuchment和O. Post，碳纳米结构的谱，《数学物理通讯》275（2007），第3期，805–826。[KS] E. Korotyaev和N. Saburova，周期图上薛定谔算子总带宽的双侧估计，arXiv:2106.08661 [math.SP], 2021。

[KS19] E. Korotyaev 和 N. Saburova, 《周期离散图上薛定谔算子的谱估计》, 圣彼得堡数学杂志 30 (2019), no. 4, 667–698.[LWL13] Z. Liu, J. Wang 和 J. Li, 《二维系统中的狄拉克锥：从六角晶格到正方晶格》, Phys. Chem. Chem. Phys. 15 (2013), 18855–18862.[MDY22] C. Mielke, D. Das 和 JX. 等, Yin, 《笼目超导体中的时间反演对称性破缺电荷序》, 《自然》602 (2022), 245–250.[MW89] B. Mohar 和 W. Woess, 《无限图的谱综述》, 《伦敦数学学会通报》21 (1989), no. 3, 209–234.[Nie82] B. Nienhuis, 《二维中 O(n) 模型的精确临界点和临界指数》, Phys. Rev. Lett. 49 (1982), 1062–1065.[Par07] R. Parviainen, 《阿基米德晶格上键渗流阈值的估计》, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007), 9253–9258.[PT21] N. Peyerimhoff 和 M. T¨aufer, 《阿基米德镶嵌上的特征函数与积分态密度》, J. Spectr. Theory 11 (2021), 461–488.[PTV17] N. Peyerimhoff、M. T¨aufer 和 I. Veseli´c, 《组合图、量子图及连续空间中薛定谔特征函数的唯一延拓原理及其失效》, Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics (2017), 216–230.[SB20] A. Samoilenka 和 E. Babaev, 《巴丁–库珀–施里弗超导体中临界温度升高的边界态》, 《物理评论B》101 (2020), no. 13.[SB21] A. Samoilenka 和 E. Babaev, 《重新审视金兹堡–朗道理论中超导体–绝缘体边界条件的微观推导：有磁场和无磁场时边界处超导性的增强》, 《物理评论B》103 (2021), 224516.[SE64] M. F. Sykes 和 J. W. Essam, 《二维中点问题和键问题的精确临界渗流概率》, 《数学物理杂志》5 (1964), 1117–1127.[SYY22] M. Shi、F. Yu、Y. Yang 等, 《具有狄拉克节点线和压力诱导超导性的新型双层笼目晶格化合物》, 《自然·通讯》2773 (2022).[SZ99] P. N. Suding 和 R. M. Ziff, 《阿基米德晶格的点渗流阈值》, Phys. Rev. E 60 (1999), no. 1, 275–283.[TFGK22] T. Tarnai、P. W. Fowler、S. D. Guest 和 F. Kov´acs, 《等负泊松比铰接阿基米德镶嵌》, Symmetry 14 (2022), 232.[Ves04] I. Veseli´c, 《渗流哈密顿量的谱分析》, Math. Ann. 331 (2004), no. 4, 841– 865.

Joachim Kerner, Lehrgebiet Analysis, Fakultät Mathematik und Informatik, Fern-Universität in Hagen, D-58084 Hagen, Germany电子邮箱地址：joachim.kerner@fernuni-hagen.de

Matthias Täufer, Lehrgebiet Analysis, Fakultät Mathematik und Informatik, Fern-Universität in Hagen, D-58084 Hagen, Germany电子邮箱地址：matthias.taeufer@fernuni-hagen.de

Jens Wintermayr, Bergische Universität Wuppertal, Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften, 42119 Wuppertal, Germany电子邮箱地址：wintermayr@uni-wuppertal.de