arXiv:2301.05078v1 [math.AG] 12 Jan 2023

分歧情形下希尔伯特簇的分层

DIEGO BERGER

摘要。本文研究 Hilbert 情形下志村簇的 Pappas-Rapoport 模型的特殊纤维的几何。具体而言，我们证明，由霍奇多边形诱导的分层是一个良好的分层；对于 $g \geq 2$，这一结论在希尔伯特-西格尔情形下并不成立。随后，我们利用关于仿射格拉斯曼簇卷积积的已知结果，描述各分层的维数，并证明到 Kottwitz 的 PEL 模型的遗忘态射限制在 Hodge 分层上是平坦的。

目录

1. 引言2. 预备知识 3. 仿射格拉 1
斯曼簇 4. 局部模型 5. 整模型 4
6. 霍奇分层 7. 部分哈斯不变量 11
8. 猜想 参考文献 19
24
28
35
45
48

1. 引言

1.1. 动机。研究希尔伯特模簇在 p 模约化下的几何是一个广泛的课题，并产生了许多算术方面的影响。本文聚焦于希尔伯特模簇。它们是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的簇，可视为带有某些附加数据的阿贝尔簇模空间。这些簇有若干定义在 $\mathbb{Z}_p$ 上的模型。Kottwitz 模型记为 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$，它是初始模问题在 $\mathbb{Z}_p$ 上的延拓。更具体地说，$\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 定义为四元组 $(A, \lambda, \iota, \kappa)$ 的模空间，其中 A 是维数为 $d > 0$ 的阿贝尔簇，$\lambda : A \to A^t$ 是一个 $\mathbb{Z}^\times_{(p)}$-极化，$\iota : \mathrm{O}_F \to \mathrm{End}(A)$ 是一个全实数域 $F/\mathbb{Q}$ 的整数环的作用于 A，满足 $[F : \mathbb{Q}] = d$，而 κ 是 p 之外的水平结构。当扩张 $F/\mathbb{Q}$ 是分歧的，模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 在谱 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_p$ 上不再光滑。Pappas 和 Rapoport 在 [PR02] 中定义了一个在谱 $\mathrm{Spec}\,\mathrm{O}_K$ 上光滑的模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$，其中 K 是一个包含所有伽罗瓦闭包的扩张

扩张 F_v，其中 $v|p$。该模型通过局部模型的奇点消解定义。它是分类五元组 $(A, \lambda, \iota, \kappa, \mathrm{Fil}(\omega))$ 的模空间，其中 $(A, \lambda, \iota, \kappa)$ 是 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 的一个四元组，而 $\mathrm{Fil}(\omega)$ 是余法丛层的一个滤过，并满足某些性质（详情参见 5.8）。研究希尔伯特模簇在 p 模约化下的几何，其目标之一是定义具有良好性质的分层。文献中有许多关于模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 在 p 模约化下的分层的研究（例如参见 [VW13]）。关于模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$，[DK22], [RX14] 中定义了若干分层。本文将研究 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$ 的霍奇分层。该分层通过余法丛层的霍奇多边形定义。

1.2. **主要结果**。为避免记号过于繁复，我们将在 $L/\mathbb{Q}_p$ 全分歧扩张（扩张 $L/\mathbb{Q}_p$ 起到 $F_v/\mathbb{Q}_p$的作用）的框架下陈述本文的主要结果。除定理 1.3外，以下结果均适用于一般的全实扩张 $F/\mathbb{Q}$，且证明也在此框架下进行，对 p处的分歧没有任何限制。

设 $L/\mathbb{Q}_p$ 是一个次数为 e的全分歧扩张。记$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 为 Kottwitz 模型的特殊纤维，$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$ 为希尔伯特模簇的 Pappas-Rapoport 模型的特殊纤维（见定义 5.1、5.3.4）。遗忘滤过诱导出一个态射：

$$\pi : \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} \longrightarrow \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$$

PEL 模型具有一种称为 Kottwitz-Rapoport（KR）分层的分层：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}} = \coprod_{\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K} \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{\lambda}$$

其中$\mathrm{Adm}(\mu)_K$ 表示 μ-可容许集（见注 4.5）。在 Hilbert 情形中，$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 的（KR）分层与按霍奇多边形分层一致（见注 6.1）。自然会想到，这种分层是否会在 2.8)）的意义下诱导出一种（良好）分层（见定义 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$。本文证明答案是肯定的：

定理 1.1。

(1) 分层 $(\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda})_{\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 构成$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$的良好分层。换言之，对任意 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，有闭包关系

$$\overline{\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda}} = \bigcup_{\lambda' \leq \lambda} \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda'}$$

(2) 对任意 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，分层 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda}$是维数为$\langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda \rangle$的光滑拟射影簇。

这个定理令人惊讶，因为在比 Hilbert 情形更一般的情况下，它并不成立（见 [BH22b]）。第（2）点的证明依赖于 Haines（[Hai06]）关于仿射 Grassmannian 范畴中卷积态射的几何的研究

。他的研究也使我们得以证明以下关于态射 π 的几何的定理：

定理 1.2. 对于每个 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，限制映射

$$\pi : \mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}} \to \mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}}$$

是一个平坦态射。

Haines 的工作对约化群没有限制，因此上述定理实际上在更一般的希尔伯特-西格尔情形下也成立。

在[RX14] 中，作者定义了部分哈斯不变量 $(m_i)_{1\le i\le e}$，并在[DK22]中证明，由这些截面的零点轨迹定义的局部闭子概形构成$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$ 的良好分层：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} = \coprod_{T\subset\{1,\dots,e\}} \mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}}$$

其中，$\mathrm{S}h_T^{\mathrm{PR}}$是由 $(m_i)_{i\in T}$ 的零点以及 $(m_i)_{i\notin T}$的可逆性定义的局部闭子概形。因此，研究按霍奇多边形分层与由这些部分哈斯不变量定义的分层之间的相互作用是很自然的。对于每个$\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)$以及每个 $T \subset \{1,\dots,e\}$，记 $\mathrm{S}h_{(\lambda,T)}^{\mathrm{PR}}$ 为分层 $\mathrm{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}}$与分层 $\mathrm{S}h_T^{\mathrm{PR}}$的交。我们在 $e = 4$ 情形下证明以下结果：

定理 1.3. 对于次数为 $e = 4$ 的 $L/\mathbb{Q}_p$ 全分歧情形，分层：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} = \coprod_{(\lambda,T)\in\mathscr{A}_{\mu\bullet}} \mathcal{S}h_{(\lambda,T)}^{\mathrm{PR}}$$

是一个良好分层，其闭包关系由 $\mathscr{A}_{\mu\bullet}$ 上的朴素偏序关系给出。

在上述定理中，集合 $\mathscr{A}_{\mu\bullet}$ 表示满足分层 $\mathrm{S}h_{(\lambda,T)}^{\mathrm{PR}}$ 非空的有序对 $(\lambda,\ T)$ 所构成的子集。一般而言，计算这个子集似乎很困难。

致谢。我谨向 Stéphane Bijakowski 表示感谢，感谢他鼓励我撰写本文，并向我解释了第一节中的变形结果。我还要感谢 Benoit Stroh、Thibault Alexandre 和 Arnaud Eteve，感谢他们与我进行的所有讨论，这些讨论帮助我完成了本文。最后，我要感谢 Xu Shen 提出的评论和意见。

2. 预备知识

在下文中，我们固定一个素数 $p > 0$。

这一部分主要回顾晶体 Dieudonné 理论。我们介绍变形一个群所需的全部工具 p-可除群，使其沿着态射 $k[\![t]\!] \to k$ 其中 k 是一个特征为p的域。我们将用到晶体 Dieudonné 理论 [BBM82]，、Zink 和 Lau 的 display 理论 [Zin02], [Lau09], [Lau 14] 以及 Grothendieck-Messing 理论 [Mes72]。事实上，我们只需使用 display 理论，因为它涵盖了剩余域完美的完备局部环，例如 $k^{\mathrm{perf}}[\![t]\!]$（其中 k^{perf} 表示 k的完美化），这完全足以处理我们的变形问题。

2.1. 晶体 Dieudonné 理论。

2.1.1. 设 k 为特征 p 的完美域，且 S 为 k上的概形。设 $A \to S$为一个阿贝尔概形。记 $G = A[p^\infty]$ 为相应的 p-可除群。记 Σ =谱 $(W(k))$，并记 $\underline{G}$ 为由 S/Σ诱导的晶体站点 Cris(G上的层。沿用 [BBM82] 的记号，记：

$$\mathscr{E}(G) := \mathscr{E}\mathrm{xt}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

的反变 Dieudonné 晶体 G。它是一个 $\mathcal{O}^{S/\Sigma}$-晶体，是秩为 h 的局部自由模，其中 h 表示 G ([BBM82], 推论 1.4.7) 的高度。请注意，按照这一约定，应用：

$$F : \mathscr{E}(G)^{(p)} \to \mathscr{E}(G), \qquad V : \mathscr{E}(G) \to \mathscr{E}(G)^{(p)}$$

（其中 $(\cdot)^{(p)}$ 表示由 Frobenius 给出的扭转）分别由以下映射诱导：

$$F : G \to G^{(p)}, \qquad V : G^{(p)} \to G$$

将此晶体取值于加厚 $(S \xrightarrow{\mathrm{id}} S)$ 上，可得 $\mathcal{O}_S$-局部自由模的滤过 ([BBM82], 推论 3.3.5)

$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathscr{E}(G)_{(S \xrightarrow{\mathrm{id}} S)} \longrightarrow \omega^\vee_{G^D} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

称为霍奇滤过。根据 [BBM82] 命题 3.3.7，可得到一个同构

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \simeq \mathscr{E}\mathrm{xt}^1_{S/\Sigma}(\underline{G}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})$$

将 A/S 的晶体与其 p-可除群的晶体联系起来，并与相应的霍奇滤过兼容。现在结合同构（[BBM82], 命题 2.5.8）：

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^1_{S/\Sigma}(\underline{A}, \mathcal{O}_{S/\Sigma})_{(S \to S)} \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(A/S)$$

我们得到由著名的霍奇谱序列诱导的霍奇滤过：

$$0 \longrightarrow \omega_A \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(A/S) \longrightarrow \omega^\vee_{A^t} \longrightarrow 0$$

2.1.2. 现在考虑如下情形： S =Spec(k) 是一个特征为 p 的完美域k 的谱。记：

$$\mathbb{D}(G) := \mathrm{Hom}_S(G, CW)$$

Fontaine 意义下的逆变 Dieudonné 模（[Fon77] 或 [BBM82] 第 4.2 节）。沿着加厚（$W(k) \twoheadrightarrow k$ 计算我们的晶体，可得到一个 $W(k)$ 模的同构，并且该同构与 F 和 V 在两侧均相容：

$$\mathscr{E}(G)_{(W(k)\twoheadrightarrow k)} \simeq \mathbb{D}(G)^{(p)}$$

(见 [BBM82] 定理 4.2.14）。将此同构模 p 约化后，可得到对 p-扭点的识别：

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^1_{S/\Sigma}(\underline{G[p]}, \mathcal{O}_{S/\Sigma}) \simeq \mathbb{D}(G[p])^{(p)} \simeq (\mathbb{D}(G)/p\mathbb{D}(G))^{(p)}$$

其中 $\mathscr{E}\mathrm{xt}^1_{S/\Sigma}(\underline{G[p]},\mathcal{O}^{S/\Sigma})$ 是与 p-扭点有限平坦群相关的晶体。根据定义， $\mathscr{E}(G)$ 作为晶体与基变换相容，因此上述模 p 约化重新给出了 p-扭点的 Dieudonné 模与第一德拉姆上同调群之间众所周知的识别：

$$\mathscr{E}(G)_{(W(k)\twoheadrightarrow k)} \otimes_{W(k)} k \simeq \mathscr{E}(G)_{(k\to k)} \simeq H^1_{\mathrm{dR}}(A/k)$$

根据 [BBM82] （命题 4.3.10），我们有一个同构：

$$\omega_G^{(p)} \simeq \mathscr{E}(G)_{(S\to S)}/F(\mathscr{E}(G)^{(p)}_{(S\to S)})$$

2.1.3. 我们关注 A/S 带有 $\mathcal{O}_L$ 作用的情形，其中 $L/\mathbb{Q}_p$ 是有限次数扩张。根据 [Far06] ，我们有如下结果：

命题 2.1 ([Far06], 引理 B.1). 设 $\mathscr{E}$ 是一个 F-晶体，其在 $\mathcal{O}^{S/\Sigma}$-模中是局部自由且具有有限秩的，定义在 $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$ 上，并带有 $\mathcal{O}_L$作用。那么 $\mathscr{E}$ 是一个$\mathcal{O}_{S/\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L$-模，在 $\mathrm{Cris}(S/\Sigma)$上局部自由。

注 2.2. 根据 [BBM82] ，我们有一个同构：

$$\omega_G \simeq \mathscr{E}\mathrm{xt}^1(\underline{G}, \mathcal{J}_{S/\Sigma})_{(S\to S)}$$

其中 $\mathrm{J}^{S/\Sigma}$ 是带除幂结构的理想层。然而， $\mathscr{E}\mathrm{xt}^1(\underline{G},\mathrm{J}^{S/\Sigma})$ 原则上并不是晶体，因此上述命题不适用。

2.1.4. F 和 V 的 G态射诱导出一个水平行精确的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \omega_G & \longrightarrow & \mathscr{E}(G)_{(S\to S)} & \longrightarrow & \omega^\vee_{G^D} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle V} & & \downarrow{\scriptstyle V} & & \downarrow{\scriptstyle V} & & \\
0 & \longrightarrow & \omega_G^{(p)} & \longrightarrow & \mathscr{E}(G)^{(p)}_{(S\to S)} & \longrightarrow & (\omega^\vee_{G^D})^{(p)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle F} & & \\
0 & \longrightarrow & \omega_G & \longrightarrow & \mathscr{E}(G)_{(S\to S)} & \longrightarrow & \omega^\vee_{G^D} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

垂直复合为零，因为它们等于 p。由于 F 在 $\omega_G^{(p)}$ 上为零，态射 F 可分解为：

$$F : (\omega_{G^D}^{\vee})^{(p)} \longrightarrow \mathscr{E}(G)_{(S\to S)}$$

同样， V 在 $\omega_{G^D}^{\vee}$ 上为零（利用 $V_G = F_{G^D}^D$），因此得到一个分解：

$$V : \mathscr{E}(G)_{(S\to S)} \to \omega_G^{(p)}$$

我们将需要这个分解，以便在第 7.1.2 节中定义原始哈斯不变量。

2.2. **变形**。

2.2.1. *Grothendieck-Messing*。 现在我们将回顾一些关于 Barsotti-Tate 群变形的结果。

设 $S_0 \hookrightarrow S$ 是一个配备除幂结构（PD 结构）的幂零闭浸入，且 p 局部幂零。在 siteCris(S_0/Σ) 上有一个态射：

$$(S_0 \to S_0, \gamma_0) \longrightarrow (S_0 \hookrightarrow S, \gamma)$$

若 $\mathscr{F}$ 是一个 $\mathcal{O}_{S_0/\Sigma}$-模晶体，则根据定义，有一个典范的 $\mathcal{O}_{S_0}$-模同构：

$$\mathscr{F}_{(S_0\hookrightarrow S)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0} \simeq \mathscr{F}_{(S_0\to S_0)}$$

记 $\mathtt{BT}(S)$ 为 S 上 Barsotti-Tate 群的范畴。设 $G \in \mathtt{BT}(S)$ 是这样的一个群。记 $\mathscr{E}(G)$ 为其相伴晶体，并记 $G|_{S_0} = G \times_S S_0$ 为基变换。于是有一个典范的 $\mathcal{O}_S$-模同构：

$$\mathscr{E}(G)_{(S\to S)} \simeq \mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\hookrightarrow S)}$$

事实上，一方面有一个同构：

$$\mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\hookrightarrow S)} \simeq \mathscr{E}(G)_{(S_0\hookrightarrow S)}$$

这主要源自晶体的定义 $\mathscr{E}(G)$ ([BM79], (2.3))。另一方面，由于 $\mathscr{E}(G)$ 是一个晶体，态射 $(S_0 \to S) \to (S \to S)$ 在 Cris(S/Σ) 中诱导出一个同构：

$$\mathscr{E}(G)_{(S_0\hookrightarrow S)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S = \mathscr{E}(G)_{(S\to S)}$$

以及由此得到的结论。这个同构与霍奇滤过相容：

$$\begin{array}{ccccc}
\omega_G & \longrightarrow & \mathscr{E}(G)_{(S\to S)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\hookrightarrow S)} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\omega_{G|_{S_0}} & \longrightarrow & \mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\to S_0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\hookrightarrow S)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{S_0}
\end{array}$$

也就是说，该图表是交换的，且底行对应于顶行的约化。

定义 2.3. 设 $G_0 \in \mathtt{BT}(S_0)$ 是 S_0 上的一个 *Barsotti–Tate* 群。若滤过$\mathrm{Fil}^1 \subset \mathscr{E}(G_0)_{(S_0\hookrightarrow S)}$ 是 $\mathscr{E}(G_0)_{(S_0\hookrightarrow S)}$ 的一个$\mathcal{O}_S$-局部直和因子模，且提升了 $\omega_{G_0} \subset \mathscr{E}(G_0)_{(S_0\to S_0)}$，则称其为可容许的。

由前述内容可知，若 $G \in \mathtt{BT}(S)$ 提升为 $G_0 \in \mathtt{BT}(S_0)$，则 $\omega_G \subset \mathscr{E}(G)_{(S\to S)} \simeq \mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\hookrightarrow S)}$ 是一个可容许滤过。记 $\mathtt{DefBT}(S_0 \hookrightarrow S)$ 为如下范畴：其对象是二元组 (G_0, Fil^1)，其中 $G_0 \in \mathtt{BT}(S_0)$，$\mathrm{Fil}^1 \subset \mathscr{E}(G_0)_{(S_0\hookrightarrow S)}$ 是一个可容许滤过；态射 $(G_0, \mathrm{Fil}^1) \to (G_0', \mathrm{Fil}^{1'})$ 是与各自滤过相容的态射。现在可以陈述格罗滕迪克-梅辛定理：

定理 2.4 ([Mes72]V.1.6)。 函子

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{BT}(S) & \longrightarrow & \mathtt{DefBT}(S_0 \hookrightarrow S) \\ G & \longmapsto & \left(G|_{S_0},\ \omega_G \subset \mathscr{E}(G|_{S_0})_{(S_0\hookrightarrow S)}\right) \end{array}$$

是范畴等价。

2.2.2. 应用。 本节将探讨如何沿着闭浸入应用格罗滕迪克-梅辛变形定理 $k[\![t]\!] \to k$，该闭浸入并未赋予 PD 结构。当我们想要计算志村簇中各分层之间的闭包关系时，这一点将派上用场（见命题2.9）。

设 R 是一个特征为 p 的环，I 是满足 $I^2 = 0$的理想。我们可以在I 上赋予一个 PD 结构，使态射 Spec $R/I \to$ Spec R 成为带有 PD 结构的幂零闭浸入。事实上，只需对任意 $n \geq 2$ 和任意 $x \in I$，令 $\gamma_1(x) = x$ 且 $\gamma_n(x) = 0$ 即可。我们将把这一观察应用于以下闭浸入序列：

$$\cdots \to k[t]/(t^{n+1}) \to k[t]/(t^n) \to k[t]/(t^{n-1}) \to \cdots \to k[t]/(t^2) \to k$$

对于任意 $n \geq 1$，记 $R_n = k[t]/(t^n)$、$I_n = \mathrm{Ker}\left(k[t]/(t^n) \to k[t]/(t^{n-1})\right)$ 以及 $S_n =$Spec R_n。每个闭浸入 $S_{n-1} \hookrightarrow S_n$ 均由理想 $I_n = (t^{n-1})/(t^n)$定义，且满足 $I_n^2 = 0$。因此，根据上述内容，我们可以在这些闭浸入上逐一赋予 PD 结构。以下结果适用于任意剩余域完美的局部完备环 R。

命题 2.5 ([Lau09], 引理 2.10). 设 $G_1 \in \mathtt{BT}(k)$ 且 $\mathrm{Fil}^1 \subset \mathscr{E}(G_1)_{(k\to k)} \otimes_k k[\![t]\!]$是 $\omega_{G_1} \subset \mathscr{E}(G_1)_{(k\to k)}$ 的提升，且局部上是一个直和因子。那么存在$G \in \mathtt{BT}(k[\![t]\!])$ 使得：

(1) G 是 G_1 沿着谱 $k \to$ 谱 $k[\![t]\!]$的一个提升 *(2)* $\mathscr{E}(G)_{(k[\![t]\!]\to k[\![t]\!])} \simeq \mathscr{E}(G)_{(k\to k)} \otimes_k k[\![t]\!]$*(3)* $\omega_G \simeq \mathrm{Fil}^1$ *(通过上述识别)*

证明。 我们将使用 Zink 和 Lau 的 display 理论。令 $R =k[\![t]\!]$ 以及 $S =$ 谱 R。注意，给定一个群 p-可除群 $G \in \mathtt{BT}(S)$，等价于给定一组相容的 p-可除群 $(G_n)_{n\geq 1}$，其中 $G_n \in \mathtt{BT}(S_n)$ ([Lau14]

引理 2.15）。因此，我们将为每个 $n \geq 2$ 构造一个 p-可除群 $G_n \in \mathtt{BT}(S_n)$，使其满足所需的性质。由于对于每个 $n \geq 2$，环 R_n都是一个阿廷局部环，且 p 在其上幂零，并且其剩余域完美，因此我们有一个范畴等价 $\mathtt{BT}(S_n) \cong \mathtt{Disp}(R_n)$。记 $\mathscr{P}_1 = (P_1, Q_1, F_1, V_1^{-1})$为 Lau 根据 G_1 所关联的显示（[Lau14], 定理 A）。同样根据上述文献中的定理 A，G_1 的 Dieudonné 晶体与 Zink 根据 $\mathscr{P}_1$ 所关联的晶体典范同构（[Zin02]或 [Lau14]）：

$$\mathscr{E}(G_1) \simeq \mathbb{D}(\mathscr{P}_1)$$

由于晶体 $\mathbb{D}(\mathscr{P}_1)$ 定义在由带有 PD 结构的增厚构成的 $\mathrm{Cris}_{\mathrm{adm}}(R) \subset \mathrm{Cris}(R)$ site 上（$B \to A$，δ），且 A 是可容许的（即幂零根 N_R 是“有界幂零”的，并且 $R_{\mathrm{red}} = R/\mathrm{N}_R$ 是特征为 p 的完美环），上述同构是 $\mathrm{Cris}_{\mathrm{adm}}(R)$ site 上晶体的同构。这里我们滥用记号，也将晶体 $\mathscr{E}(G_1)$ 在 $\mathrm{Cris}_{\mathrm{adm}}(R)$ site 上的限制记为 $\mathscr{E}(G_1)$。特别地，在典范加厚 $(S_1 \to S_1)$ 上取值可得一个典范的 R_1-模同构：

$$\mathscr{E}(G_1)_{(S_1 \to S_1)} \simeq P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} R_1 \tag{2.2}$$

根据前述注记，$R_2 \to R_1$ 带有幂零除法结构，因此给出 $\mathscr{P}_1$ 的一个提升 $\mathscr{P}_2 \in \mathtt{Disp}(R_2)$，等价于给出一个提升 $\mathrm{Fil}^1_{(2)} \subset \mathbb{D}(\mathscr{P}_1)_{(R_2 \twoheadrightarrow R_1)}$（见 [Lau14], 推论 2.10，或 [Lau09] 引理 4.2）。令 $P_2 = P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} \mathbb{W}(R_2)$（注意，对任意 $n \geq 2$，都有一个态射 $R_1 \to R_n$）。根据 [Lau14], 第 2.6 节，由晶体 $\mathbb{D}(\mathscr{P}_1)$ 的构造可得一个同构：

$$\mathbb{D}(\mathscr{P}_1)_{(R_2 \twoheadrightarrow R_1)} \simeq P_2 \otimes_{\mathbb{W}(R_2)} R_2 = P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} R_2$$

通过同构（2.2）可得：

$$\mathscr{E}(G_1)_{(S_1 \to S_1)} \otimes_{R_1} R_2 \simeq \mathbb{D}(\mathscr{P}_1)_{(R_2 \twoheadrightarrow R_1)}$$

定义 $\mathscr{P}_1$ 的霍奇滤过提升为：

$$\mathrm{Fil}^1_{(2)} := \mathrm{Fil}^1 \otimes_R R_2 \subset \mathscr{E}(G_1)_{(S_1 \to S_1)} \otimes_{R_1} R_2 \simeq \mathbb{D}(\mathscr{P}_1)_{(R_2 \twoheadrightarrow R_1)}$$

此提升定义了一个显示 $\mathscr{P}_2 \in \mathtt{Disp}(R_2)$，因而定义了一个 p-可除群 $G_2 \in \mathtt{BT}(S_2)$。我们再次得到晶体 $\mathscr{E}(G_2) \simeq \mathbb{D}(\mathscr{P}_2)$ 之间的一个识别。由于 G_2 是沿着 $S_1 \hookrightarrow S_2$ 对 G_1 的一个提升，因此有：

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}(G_2)_{(S_2 \to S_2)} &\simeq \mathscr{E}(G_1)_{(S_1 \hookrightarrow S_2)} \\
&\simeq \mathbb{D}(\mathscr{P}_1)_{(R_2 \twoheadrightarrow R_1)} \\
&\simeq \mathscr{E}(G_1)_{(S_1 \to S_1)} \otimes_{R_1} R_2 \\
&\simeq \mathscr{E} \otimes_R R_2
\end{aligned}$$

其中我们设定 $\mathscr{E} := \mathscr{E}(G_1)_{(S_1 \to S_1)} \otimes_{R_1} R$。我们通过归纳法继续这一过程，对任意 $n \geq 3$，设：

$$P_n := P_1 \otimes_{\mathbb{W}(R_1)} \mathbb{W}(R_n), \qquad \mathrm{Fil}^1_{(n)} := \mathrm{Fil}^1 \otimes_R R_n \subset \mathbb{D}(\mathscr{P}_{n-1})_{(R_n \twoheadrightarrow R_{n-1})}$$

由此，我们在每一步都得到一个显示 $\mathscr{P}_n \in \mathtt{Disp}(R_n)$ 和一个 p-可除群$G_n \in \mathtt{BT}(S_n)$，它们满足以下方程：

$$\omega_{G_n} \simeq \mathrm{Fil}^1_{(n)}, \qquad \mathscr{E}(G_n)_{(S_n \to S_n)} \simeq \mathscr{E} \otimes_R R_n$$

取极限后得到一个 p-可除群 $G \in \mathtt{BT}(S)$，按构造满足：

$$\mathscr{E}(G)_{(S \to S)} \simeq \varprojlim_n \mathscr{E} \otimes_R R_n \simeq \mathscr{E}$$

$$\omega_G \simeq \varprojlim_n \mathrm{Fil}^1_{(n)} \simeq \varprojlim_n \mathrm{Fil}^1 \otimes_R R_n \simeq \mathrm{Fil}^1$$

这就证明了 (1)，(2)，(3)。 □

注 2.6。

(1) 实际上，上述命题是用 Dieudonné 晶体的语言对 [Lau14] 的引理 2.15 和 2.16 的重新表述。得益于 Dieudonné 晶体 $\mathscr{E}(G)$ 与 display $\mathbb{D}(\mathscr{P}$ 的相伴晶体之间的同一性，这种重新表述才成为可能。我们完全可以不使用晶体 Dieudonné 理论，而只使用显示理论。

(2) 在上述证明中，显示理论的贡献之一是，它使得层 $\mathscr{E}(G_n)_{(R_{n+1} \to R_n)}$ 的计算变得显式：只需取任意一个 $\mathscr{P}_{n+1}$ 来提升该显示 $\mathscr{P}_n$ (见 [Zin02] 定理 3)。这是因为「框架」的态射$(\mathscr{D}_{R_{n+1}/R_n} \to \mathscr{D}_{R_n})$ 是晶体的（见 [Lau14]命题 2.8）。在上述证明的每一步中，我们都将显示 $\mathscr{P}_{n+1}$ 定义为沿截面 $\mathscr{P}_1$ 对$R_1 \to R_{n+1}$作基变换所得的对象。因此，上述命题不过是将一个众所周知的事实取极限而已。

Én最后，我们陈述一个引理，它将在第 7.1.2 节中用到 ：

引理 2.7. 设 $S_0 =$谱 $R/I \hookrightarrow S =$谱 R 是一个闭浸入，使得$I^2 = 0$。设 $G_0 \in \mathtt{BT}(S_0)$ 是 p 上的一个可除群。设 $\mathrm{Fil}^1{}_{(1)}$,$\mathrm{Fil}^1{}_{(2)} \subset \mathscr{E}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$ 是两个容许滤过。在 $\mathscr{E}(G_0)^{(p)}{}_{(S_0 \hookrightarrow S)}$ 中有如下等式：

$$(\mathrm{Fil}^1_{(1)})^{(p)} = (\mathrm{Fil}^1_{(2)})^{(p)}$$

特别地，层 $\omega_G^{(p)}$ 不依赖于提升 $G \in \mathtt{BT}(S)$。

证明。 这是交换代数中的一个简单结果。令 $M = \mathscr{E}(G_0)_{(S_0 \hookrightarrow S)}$。这是一个 R-模。由于 $\mathscr{E}$ 是一个晶体，我们有如下同一识别 $\mathscr{E}(G_0)_{(S_0 \to S_0)} = M/IM$。因此，设 $N_1, N_2 \subset M$满足 $N_1/IM = N_2/IM$。我们要证明$N_1^{(p)} = N_2^{(p)} \subset M \otimes_{R,\sigma} R$，其中 $\sigma\colon R \to R$ 表示 Frobenius。但这显然成立，因为$0 = IM^{(p)} \subset M \otimes_{R,\sigma} R$（注意 $im \otimes 1 = m \otimes \sigma(i)$，且 $\sigma(i) = 0$，因为根据假设$I^2 = 0$）。□

2.3. **闭包关系。**

定义 2.8。 设 S 是一个拓扑空间。相对于偏序集 $(I, \leq)$ 对 S 作出的分层是一种分解：

$$S = \coprod_{i \in I} S_i$$

使得对任意 $i \in I$，都有闭包关系：

$$\overline{S_i} \subset \coprod_{j \leq i} S_j$$

一种分层　若此外对任意 $i \in I$ 都满足，则称其为良好分层　：

$$\overline{S_i} = \coprod_{j \leq i} S_j$$

在这一部分中，我们将陈述一个后续研究希尔伯特模簇各分层之间的闭包关系时需要用到的结果。这个结果无疑广为人知，且尤其见于 [BH22a]（定理 4.11 的证明）中；但由于我们未能找到证明，下面将给出一个证明。

命题 2.9. 设 X 是一个特征为 $p > 0$ 的诺特概形，且 $Y \subset X$是一个局部闭子概形。以下条件等价：

(1) $x \in \overline{Y}$*(2)* 存在 $y \in Y$ 使得 $y \rightsquigarrow x$*(3)* 存在一个域扩张 $k/\kappa(x)$ 以及一个概形态射 谱 $k[\![t]\!] \to X$，它将闭点映到 x，并将泛点映到 y。

证明。 $(3) \Rightarrow$ (1) 由态射的连续性可得。(1) $\Rightarrow$ (2) 由下文的引理 2.10以及概形的底层拓扑空间是素的、素诺特拓扑空间是谱空间这一事实可得（在诺特拓扑空间中，任意子集都是准紧的）。下面证明 (2) $\Rightarrow$ (3)。根据下文的引理 2.11，存在一个离散赋值环 R 满足$\widehat{}$(3) 中的性质。科恩结构定理保证 $R \simeq k[\![t]\!]\widehat{}$其中 R 表示沿极大理想 $\mathfrak{m} \subset R$ 的完备化，而 $k = R/\mathfrak{m}$ 表示 $\widehat{}$ 剩余域。态射 谱 $R \to X$ 满足所需性质。
□

引理 2.10. 设 X 是一个谱拓扑空间，$Y \subset X$ 是一个可构造子集。那么

$$\overline{Y} = \bigcup_{y \in Y} \overline{\{y\}}$$

证明. 见 [Sta18]引理 5.23.6. □

引理 2.11. 设 X 是一个诺特概形，$y \rightsquigarrow x$ 是一个专化。那么存在一个离散赋值环 R 和一个态射 谱 $R \to X$，它将闭点映到 x，将泛点映到 y。

证明。 参见 [Sta18]引理 28.5.10。 □

3. 仿射格拉斯曼簇

3.1. **仿射格拉斯曼尼**。 本节开头主要回顾仿射格拉斯曼尼几何，可参见[Zhu16]等文献。

设 G 是域 k 上的光滑连通分裂约化群。固定 k 上的分裂环面 $T \subset G$ 以及包含它的 Borel子群 B。记 h，i: $\mathbb{X}^*(T) \times \mathbb{X}_*(T) \to \mathbb{Z}$ 为内积，记 $\mathbb{X}_*(T)^+$ 为 B-占优余特征的集合，并记 $2\rho \in \mathbb{X}^*(T)$ 为正根之和。记 Alg_k 为 k-代数的范畴。定义环群 LG 和弧群 L^+G 为从 $\mathrm{Alg}_k \to$ 到 Sets 的函子，它们将一个 k 代数 R 分别对应为:

$$LG(R) = G(R(\!(u)\!)), \quad L^+G(R) = G(R[\![u]\!])$$

将群 G 的仿射格拉斯曼簇定义为商（对于 étale 拓扑或 fppf 拓扑，因为 G 是光滑的）

$$\mathrm{Gr}_G = LG/L^+G$$

我们证明，这个商是由 $\mathrm{Spec}\, k$ 上的一个真概形归纳可表示的。利用假设 G 光滑这一事实，可以证明这个商实际上有一个显式描述:

$$\mathrm{Gr}_G(R) = \left\{ (\mathcal{E}, \beta) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ est un } G \text{ torseur sur } \mathbb{D}_R, \\ \beta : \mathcal{E}|_{\mathbb{D}_R^*} \simeq \mathcal{E}^0|_{\mathbb{D}_R^*} \text{ est une trivialisation} \end{array} \right\}$$

其中， $\mathbb{D}_R = \mathrm{Spec}\ R[\![u]\!]$ 表示单位圆盘， $\mathbb{D}_R^* = \mathrm{Spec}\, R(\!(u)\!)$表示去心单位圆盘，而 E^0 表示 G 上的平凡 $\mathbb{D}_R$ 扭子。在上述定义中，E 是一个关于 fppf 或 étale 拓扑的 G 扭子（再次利用假设 G 光滑这一点）。下文将用 $\mathrm{E} \dashrightarrow \mathrm{E}^0$表示平凡化 β: $\mathrm{E}\,|_{\mathbb{D}_R^*} \simeq \mathrm{E}^0|_{\mathbb{D}_R^*}$。

接下来我们需要下面这个简单的引理:

引理3.1. 设 G_1、G_2 是 k 上两个光滑、连通、分裂的约化群。存在一个典范同构

$$\mathrm{Gr}_{G_1 \times G_2} \simeq \mathrm{Gr}_{G_1} \times \mathrm{Gr}_{G_2}$$

Dém 证明。 只需证明该结论在函子层面成立 :

$$L(G_1 \times G_2)(R) = (G_1 \times G_2)(R(\!(u)\!)) = G_1(R(\!(u)\!)) \times G_2(R(\!(u)\!))$$

□

我们有一个左作用:

$$\begin{array}{ccc} L^+G \times \mathrm{Gr}_G & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_G \\ (g, (\mathcal{E}, \beta)) & \longmapsto & (\mathcal{E}, g \cdot \beta) \end{array}$$

其商称为海克场

$$\mathrm{Hecke}_G = [L^+G \backslash LG / L^+G]$$

根据构造，它将一个 k 代数 R 与之关联

$$\mathrm{Hecke}_G(R)=\left\{(\mathcal{E},\mathcal{E}'\beta)\;\middle|\;\begin{array}{l}\mathcal{E},\mathcal{E}'\text{ sont des }G\text{ torseurs sur }\mathbb{D}_R,\\ \beta:\mathcal{E}|_{\mathbb{D}_R^*}\simeq\mathcal{E}'|_{\mathbb{D}_R^*}\text{ est un isomorphisme}\end{array}\right\}$$

今后我们将滥用记号，省略下标 G，并记作 Hecke 和 Gr。回顾一下，根据嘉当分解，可以将修改β: E $\dashrightarrow$ E′与其相对位置 Inv(β) $\in \mathbb{X}_*(T)^+$通过双射联系起来

$$\begin{array}{rcl}G(k[\![u]\!])\backslash G(k(\!(u)\!))/G(k[\![u]\!]) & \longrightarrow & \mathbb{X}_*(T)^+\\ [g] & \longmapsto & \mathrm{Inv}(g)\\ [u^\lambda] & \longleftarrow\!\shortmid & \lambda\end{array}$$

其中 $u^\lambda=\lambda(u)\in T(k(\!(u)\!))$。对于任意元素 $\lambda\in\mathbb{X}_*(T)^+$，定义

$$\mathrm{Gr}_\lambda:=\{(\mathcal{E},\beta)\in\mathrm{Gr}\mid\mathrm{Inv}(\beta)=\lambda\},\quad \mathrm{Gr}_{\leq\lambda}:=\{(\mathcal{E},\beta)\in\mathrm{Gr}\mid\mathrm{Inv}(\beta)\leq\lambda\}$$

同理，可以定义 Hecke$_\lambda$ 和 Hecke$_{\leq\lambda}$。下面的命题概述了格伦分解的大部分性质 L^+G-轨道。

命题 3.2。 *(1)* 对于任意 $\lambda\in\mathbb{X}_*(T)^+$，有 $\mathrm{Gr}_\lambda=L^+G\cdot u^\lambda$ 是一个 L^+G-轨道。

(2) Gr_λ 是一个维数为 $\langle 2\rho、\lambda\rangle$ 的光滑拟射影簇

(3) 存在 Gr 的 L^+G-轨道分解

$$\mathrm{Gr}=\coprod_{\lambda\in\mathbb{X}_*(T)^+}\mathrm{Gr}_\lambda$$

(4) 对任意 $\lambda\in\mathbb{X}_*(T)^+$，都有闭包关系

$$\overline{\mathrm{Gr}_\lambda}=\bigcup_{\lambda'\leq\lambda}\mathrm{Gr}_{\lambda'}$$

(5) 稠密开集 $\mathrm{Gr}_\lambda\subset\mathrm{Gr}_{\leq\lambda}$ 与 $\mathrm{Gr}_{\leq\lambda}$ 的光滑点集一致。

证明。 结论 (1)、(2)、(3)、(4) 的证明见 [Zhu16] (命题 2.1.5)。关于 (5)，证明可见 [MOV03] (推论 B) □

注 3.3。 前一个命题为我们提供了有界海克叠底层拓扑空间的一个描述:

$$|\mathrm{Hecke}_{\leq\lambda}|\simeq\{\lambda'\in\mathbb{X}_*(T)^+\mid\lambda'\leq\lambda\}$$

上述识别是一个同胚，右侧所用的拓扑由 $\mathbb{X}_*(T)^+$ 上的偏序关系诱导。

注 **注 3.4.** 若 $\mu\in\mathbb{X}_*(T)^+$ 是极小的，则可得到一个识别 n

$$\mathrm{Gr}_\mu\simeq G/P_\mu$$

其中， P_μ 表示与 μ 相关联的抛物子群。事实上，我们有两个态射，并且可以证明它们互为逆态射:

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Gr}_\mu & \longrightarrow & G/P_\mu\\ g\cdot u^\mu & \longmapsto & [\mathrm{ev}(g)]\end{array},\qquad \begin{array}{rcl}G/P_\mu & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_\mu\\ [g] & \longmapsto & g\cdot u^\mu\end{array}$$

其中 ev: $L^+G \to G, \quad g \mapsto g$ (模 u)，而 $G \hookrightarrow L^+G$ 表示“常值”回路群。

3.2. 卷积积。 我们将 n-卷积积 $\mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}$ 定义为参数化栈，其参数对象为修改 $(\beta_i : \mathrm{E}_i \dashrightarrow \mathrm{E}_{i-1})_{i=1,\ldots n}$：

$$\mathcal{E}_n \dashrightarrow \mathcal{E}_{n-1} \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow \mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}^0$$

我们有一个态射：

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr} & \longrightarrow & \mathrm{Gr} \\ (\mathcal{E}_n \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow \mathcal{E}^0) & \longmapsto & (\mathcal{E}_n \dashrightarrow \mathcal{E}^0) \end{array}$$

称为卷积态射。对于任意 $1 \le i \le n$，这一构造也给出一个态射：

$$\begin{array}{rcl} m_i : \mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr} & \longrightarrow & \mathrm{Gr} \\ (\mathcal{E}_n \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow \mathcal{E}^0) & \longmapsto & (\mathcal{E}_i \dashrightarrow \mathcal{E}^0) \end{array}$$

将这些态射合在一起，便得到一个同构：

$$\prod_{i=1}^{n} m_i : \mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr} \simeq \mathrm{Gr}\times\cdots\times\mathrm{Gr}$$

特别地，卷积积 $\mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}$ 是归纳可表示的。与 Gr 的情形相同，我们有卷积积的一致化：

$$\mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr} \simeq LG \times^{L^+G} \cdots \times^{L^+G} LG \times^{L^+G} \mathrm{Gr}$$

通过这个同构，卷积态射变为乘法态射：

$$\begin{array}{rcl} LG \times^{L^+G} \cdots \times^{L^+G} LG \times^{L^+G} \mathrm{Gr} & \longrightarrow & LG/L^+G \\ (g_n, \ldots, [g_1]) & \longmapsto & [g_n \ldots g_1] \end{array}$$

接下来，为了简化记号，并在数量 n 明确时，我们将 n-卷积乘积 $\mathrm{Gr} = \mathrm{Gr}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}$ 记为 $\widetilde{\ }$ n 元余特征$\lambda_\bullet = (\lambda_1、\ldots\ldots、\lambda_n)$，定义卷积乘积的局部闭子概形：

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\lambda_\bullet} := \left\{ (\mathcal{E}_i, \beta_i) \in \widetilde{\mathrm{Gr}} \mid \mathrm{Inv}(\beta_i) = \lambda_i \right\}, \quad \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\le\lambda_\bullet} := \left\{ (\mathcal{E}_i, \beta_i) \in \widetilde{\mathrm{Gr}} \mid \mathrm{Inv}(\beta_i) \le \lambda_i \right\} \tag{3.1}$$

$\widetilde{\ }$特别地，$\mathrm{Gr}_{\lambda_\bullet}$ 可由一个概形表示。容易证明，对于任意 $\mu_\bullet \in (\mathbb{X}_*(T)^+)^n$，都有一个良好分层：

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\le\mu_\bullet} = \bigcup_{\lambda_\bullet \le \mu_\bullet} \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\lambda_\bullet}$$

其中 $\lambda_\bullet \le \mu_\bullet \Leftrightarrow \lambda_i \le \mu_i \ \forall i = 1, \ldots n$。请注意，如果每个 μ_i 都是极小的，那么这个 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$分层仅由一个分层组成，即 $\mathrm{Gr}_{\le\mu_\bullet} = \mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$。接下来，如果$\lambda_\bullet = (\lambda_1、\ldots\ldots、\lambda_n)$ 是一个 n 元余特征组，我们将记 $|\lambda_\bullet| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$。

$\widetilde{\ }$**命题 3.5.** $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$ 是光滑的。特别地，如果对于每个 $i = \widetilde{\ } 1, \ldots n$，$\mu_i$ 都是极小的，那么$\mathrm{Gr}_{\le\mu_\bullet}$是光滑的。

证明。 我们先考察投影态射

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(\mu_1,\mu_2)} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\mu_1} \\ (\mathcal{E}_2 \dashrightarrow \mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}^0) & \longmapsto & (\mathcal{E}_1 \dashrightarrow \mathcal{E}^0) \end{array}$$

用环群表示，该态射对应于投影到第一坐标：

$$LG_{\mu_1} \times^{L^+G} \mathrm{Gr}_{\mu_2} \to \mathrm{Gr}_{\mu_1}$$

其中 $LG_{\mu_1} = p^{-1}(\mathrm{Gr}_{\mu_1}) \subset LG$ 以及 $p: LG \to \mathrm{Gr}$ 投影。根据定义，该态射是一个纤维化，其纤维为 Gr_{μ_2}（非规范同一），因此是光滑的。最后，由于 Gr_{μ_1} 是光滑的，所以可推出 $\mathrm{Gr}_{(\mu_1,\mu_2)}$ 也同样光滑。结果由递归得到。□

注 3.6。 特别地，如果 $\mu_\bullet = (\mu_1, \ldots \mu_n)$ 中每个对象都是 μ_i 极小的，那么卷积态射

$$m_{\mu_\bullet} : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\leq \mu_\bullet} \to \mathrm{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$$

是奇点消解。它有时也被称为德马祖尔消解，以纪念 [Dem74]。在 $G = \mathrm{GL}_2$ 且 $\mu_i = (1, 0)$ 的情形下，前面的证明告诉我们，卷积乘积是通过连续纤维化得到的，每个纤维化的纤维为 $\mathrm{Gr}_{\mu_i} = G/P_{\mu_i} \simeq \mathbb{P}^1_k$。

下面的定理描述了卷积态射的几何：

定理 3.7 (T.Haines, [Hai06])。 设 $\mu_\bullet = (\mu_1, \ldots \mu_n)$ 为一个 n-元任意余特征组。则

(1) 态射 $m_{\mu_\bullet} : \mathrm{Gr}_{\leq \mu_\bullet} \to \mathrm{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$ 限制在 $\mathrm{Gr}_\lambda \subset \mathrm{Gr}_{\leq |\mu_\bullet|}$ 上局部平凡，对任意 $\lambda \leq |\mu_\bullet|$ 均成立。*(2)* 若每个 μ_i 都是极小的，则对任意 $y \in \mathrm{Gr}_\lambda$，纤维 $m^{-1}_{\mu_\bullet}(y)$ 是等维的，维数为 $\langle \rho, |\mu_\bullet| - \lambda \rangle$。

证明。 第 (1) 点对应于 [Hai06] 的引理 2.1，而第 (2) 点对应于 上述文献中的定理 1.1。□

注记 3.8. 第 (1) 点直接来自一个更一般的事实：若 $p : X \to Y$ 是一个 G-等变态射，且 G 在 Y 上具有传递作用，那么选取一个基点 $y_0 \in Y$，便得到一个 G-等变同构：

$$G \times^H p^{-1}(y_0) \simeq X$$

其中 $H = \mathrm{Stab}_G(y_0)$。在我们的情形中，态射 m: $m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda) \to \mathrm{Gr}_\lambda$ 确实是 L^+G 等变的，而且根据定义，Gr_λ 是一个 L^+G-轨道。

3.2.1. 例子。 利用这样一个事实： $\mathbb{D}_R$ 上的 GL_n-丛 E（其中 R 是一个 k-代数）对应于一个秩为 n 的局部自由 $R[\![u]\!]$-模 Λ，我们便可用格来描述 GL_n 的仿射格拉斯曼簇：

$$\mathrm{Gr}(R) = \left\{ \Lambda \subset R(\!(u)\!)^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \Lambda \ R[\![u]\!]\text{-module localement libre,} \\ \Lambda \otimes_{R[\![u]\!]} R(\!(u)\!) \simeq R(\!(u)\!)^n \end{array} \right\}$$

取 $T=\mathbb{G}_m^n$ 为对角矩阵构成的环面，嘉当分解可写为:

$$\begin{array}{rcl}(\mathbb{Z}^n)^+ & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(k[\![u]\!])\backslash \mathrm{GL}_n(k(\!(u)\!))/\mathrm{GL}_n(k[\![u]\!]) \\ \lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) & \longmapsto & u^\lambda=\mathrm{diag}(u^{\lambda_1},\ldots u^{\lambda_n})\end{array}$$

用格的术语来说，这可表述如下：对任意格 $\Lambda\subset k(\!(u)\!)^n$，存在 $\Lambda_0=k[\![u]\!]^n$ 的一组基 $(e_1,\ldots\ldots,e_n)$ 和 $\lambda=(\lambda_1,\ldots\ldots,\lambda_n)\in(\mathbb{Z}^n)^+$，使得 $(u^{\lambda_1}e_1,\ldots\ldots,u^{\lambda_n}e_n)$ 是 Λ 的一组基。这里使用了记号

$$(\mathbb{Z}^n)^+=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\mid \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\}$$

今后我们将 $\Lambda_0:=k[\![u]\!]^n$ 记作与平凡 GL_n-挠子 E^0 相关联的格。

例 3.9。 在下文中，R 表示一个 k-代数。下面给出一些例子:

(1) 对于 $\mu=(1^d,\ 0^{n-d})$，用格的术语可得:

$$\mathrm{Gr}_{(1^d,0^{n-d})}(R)=\{\Lambda\subset\Lambda_0:=R[\![u]\!]^n\mid u\Lambda_0\subset\Lambda\subset\Lambda_0,\ \dim_k\Lambda_0/\Lambda=d\}$$

通过以下方式可重新得到簇 $\mathrm{GL}_n/P_\mu=\mathrm{Grass}(n-d,\ d)$:

$$\Lambda\mapsto(R^n=\Lambda_0/u\Lambda_0\to\Lambda_0/\Lambda)$$

(2) 对于 GL_2 和 $\mu=(e,\ 0)$，可得:

$$\mathrm{Gr}_{\leq(e,0)}(R)=\{\Lambda\mid u^e\Lambda_0\subset\Lambda\subset\Lambda_0,\ \dim_k\Lambda_0/\Lambda=e\}$$

设 $\Lambda\in\mathrm{Gr}^{\leq(e,0)}(k)$。存在最小的整数 $i\leq e$，使得 $u^i\Lambda\subset u^e\Lambda_0$。将这个数记作 $N(\Lambda)$（非标准记法）。于是得到如下不同分层的描述

$$\mathrm{Gr}_{(i,e-i)}(R)=\{\Lambda\mid N(\Lambda)=i,\ \dim_k\Lambda_0/\Lambda=e\}$$

(3) 我们关注群 GL_2 上的 e-卷积积。对于余特征 $\mu_i=(1,\ 0)$，有如下描述

$$\mathrm{Gr}^{(1,0)}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}_{(1,0)}(R)=\{\Lambda_e\subset\cdots\subset\Lambda_1\subset\Lambda_0\mid\ u\Lambda_i\subset\Lambda_{i-1},\ \dim_k\Lambda_i/\Lambda_{i-1}=1\}$$

卷积态射的形式为

$$\begin{array}{rcl}m:\ \mathrm{Gr}_{(1,0)}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}_{(1,0)} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\leq(e,0)} \\ (\Lambda_e\subset\ldots\Lambda_1\subset\Lambda_0) & \longmapsto & \Lambda_e\end{array}$$

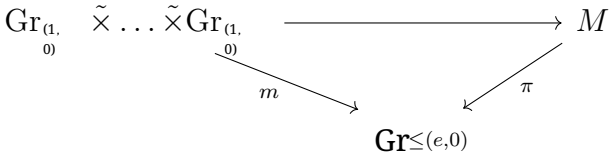
(4) 我们可以对前述卷积积给出另一种解释。定义

$$M(R)=\left\{\Lambda_1\subset\cdots\subset\Lambda_e\subset\Lambda_0\ \middle|\ \begin{array}{l}\forall\ i<e:u\Lambda_i\subset\Lambda_{i-1},\ \dim_k\Lambda_i/\Lambda_{i-1}=1, \\ \Lambda_e\in\mathrm{Gr}_{\leq(e,0)}\end{array}\right\}\tag{3.2}$$

我们有一个同构

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Gr}_{(1,0)}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}_{(1,0)} & \longrightarrow & M \\ (\Lambda_e\subset\cdots\subset\Lambda_1\subset\Lambda_0) & \longmapsto & (u^{e-1}\Lambda_1\subset\cdots\subset u\Lambda_{e-1}\subset\Lambda_e)\end{array}\tag{3.3}$$

这个同构置于以下交换图中



(3.4)

où $\pi : (\Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_e \subset \Lambda_0) \mapsto \Lambda_e$.

注 3.10. 在上述例子中，我们使用了一些不太严谨的记号。若 $R \in \mathrm{Alg}_k$ 是一个 k-代数，且 $(\mathcal{E}, \beta) \in \mathrm{Gr}(R)$，那么 $\mathrm{Inv}(\beta)$ 并未定义良好：相对位置只在一点 $x \in \mathrm{Spec}\, R$ 上定义。特别是，我们本应采用更严谨的记号：

$$\mathrm{Gr}_{\leq\mu}(R) = \{(\mathcal{E}, \beta) \mid \mathrm{Inv}_x(\beta) \leq \mu \text{ pour tout } x \in \mathrm{Spec}\, R\}$$

因此，对于 $x \neq x' \in \mathrm{Spec}\, R$，我们不一定有 $\mathrm{Inv}_x(\beta) = \mathrm{Inv}_{x'}(\beta)$（例如取非连通的 $\mathrm{Spec}\, R$）。

定义 3.11。 （非标准）设 $\Lambda \subset k((u))^n$ 是由一点 $x \in \mathrm{Gr}$ 定义的一个格。定义：

$$\mathrm{Hodge}(x) = \mathrm{Hodge}(\Lambda) := \mathrm{Inv}(\Lambda, \Lambda_0) \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$$

注 3.12。 具体地，对于 GL_n，如果 $\Lambda \subset k((u))^n$ 是一个格，那么对于充分大的 N，$u^N\Lambda_0 \subset \Lambda$ 以及霍奇不变量 $(\Lambda) = (a_1, \ldots, a_n)$ 的特征为：

$$\Lambda / u^N\Lambda_0 \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} k[u]/(u^{N-a_i})$$

注 3.13。 如果 $(\Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_e)$ 是 $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$ 中的一点，那么记 $\mathrm{Hodge}(\Lambda_k) = \mathrm{Inv}(\Lambda_k, \Lambda_0) \in \mathbb{X}_\bullet(T)^+$。

例 3.14。 滤过的霍奇不变量：

$$\Lambda_1 = \langle u^2e_1, u^3e_2 \rangle \subset \Lambda_2 = \langle u^2e_1, u^2e_2 \rangle \subset \Lambda_3 = \langle u^2e_1, ue_2 \rangle$$

为：

$$\mathrm{Hodge}(\Lambda_1) = (3,2), \quad \mathrm{Hodge}(\Lambda_2) = (2,2), \quad \mathrm{Hodge}(\Lambda_3) = (2,1)$$

注 3.15。 当我们将我们的 Shimura 簇的霍奇分层与仿射格拉斯曼簇的霍奇分层联系起来时，这一记号才会具有意义（见 6.1.1）。

3.3。**结果。**现在我们来陈述本文的主要结果 :

命题 3.16. 若对每个 $i = 1, \ldots, e$ 都有 $\mu_i = (1,0)$，则 $\{m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda)\}^{\lambda \leq |\mu|}$ 定义了 $\mathrm{Gr}_{\mu_1} \tilde{\times} \ldots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{\mu_e}$ 的良好分层。换言之，若记 $X_\lambda := m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda)$，则对每个 $\lambda \leq |\mu_\bullet|$

$$\overline{X_\lambda} = \bigcup_{\lambda' \leq \lambda} X_{\lambda'}$$

证明. 我们将证明该断言对例子（M 中的模空间（3.9）（方程（3.2））成立，因为在后续关于志村簇整模型的讨论中，我们将考虑的正是这个模空间。当然，要得到 $\mathrm{Gr}_{\mu_1}\tilde{\times}\ldots\tilde{\times}\mathrm{Gr}_{\mu_e}$ 的结果，只需应用同构（3.3）重写下述证明，并利用图表（3.4）的交换性。

设 $\lambda=(i,j)<(e,0)=|\mu_\bullet|$（对于 $\lambda=(e,0)$，无须证明任何内容）。设 $x\in X_\lambda$ 是一个剩余域点 k。记 $\Lambda_1\subset\cdots\subset\Lambda_e$ 为相应的滤过。设 $(v_k)_{k\geqslant 1}$ 是一些元素，使得 $\Lambda_k=\Lambda_{k-1}\oplus(k\cdot v_k)$（作为 k-向量空间的直和）。对任意 $k\geq 1$，定义整数 $(s_k)_k$

$$s_k=\min\{s\mid u^s\Lambda_k\subset u^e\Lambda_0\}=N(\Lambda_k)$$

其中 $N(\Lambda_k)$ 是在 (3.9) 中定义的整数，且 $\Lambda_0=k[\![u]\!]^2$。我们有

$$\mathrm{Hodge}(\Lambda_k)=(e-k+s_k,e-s_k)$$

记 $k_0=\max\{k|s_k=s_{k-1}\}$。注意，由于我们假设 $(i,j)<(e,0)$，故有 $k_0\neq 0$。记 $(a,b)=$霍奇(Λ_{k_0})，其中 $a\geqslant b$。于是，根据假设，有 $(a+1,b)=$霍奇(Λ_{k_0-1})。设 (e_1,e_2) 是 Λ_0 的一组基，使得：

$$\Lambda_{k_0-1}=\langle u^{a+1}e_1,u^be_2\rangle$$

在这个基下可以写成

$$v_{k_0}=xu^ae_1+yu^{b-1}e_2$$

必然有 $y=0$，否则就会有 $u^{s_{k_0}}\cdot v_{k_0}\notin u^e\Lambda_0$。因此可以写成

$$v_{k_0}=u^ae_1,\qquad \Lambda_{k_0}=\Lambda_{k_0-1}\oplus(k\cdot u^ae_1)=\langle u^ae_1,u^be_2\rangle$$

接下来，根据定义，对于任意 $n\geq 1$，有：

$$u\cdot v_{k_0+n}\in\Lambda_{k_0+n-1}=\Lambda_{k_0-1}\bigoplus_{\ell=0}^{n-1}(k\cdot v_{k_0+\ell})$$

因此，可以通过递归固定一个分解：

$$v_{k_0+n}=\frac{w_n}{u}+\sum_{\ell=0}^{n-1}x_{n,\ell}\frac{v_{k_0+\ell}}{u},\qquad w_n\in\Lambda_{k_0-1},\ x_{n,\ell}\in k$$

现在我们将在 $R=k[\![t]\!]$ 上定义初始滤过的一个变形。设 $J:=\{\,n\,|\,x_{n,n-1}=0\,\}$。我们在 $(k[\![t]\!]\otimes k[\![u]\!])^2$ 中进行。首先，对任意 $\ell\leq k_0-1$，对该滤过进行平凡变形：

$$\tilde{\Lambda}_\ell:=\Lambda_\ell\otimes k[\![t]\!]\qquad\forall\ell\leq k_0-1$$

对于 $\ell=k_0$，定义

$$\tilde{v}_{k_0}=u^ae_1+tu^{b-1}e_2=v_{k_0}+tu^{b-1}e_2$$

并令

$$\tilde{\Lambda}_{k_0}=\tilde{\Lambda}_{k_0-1}\oplus(k\cdot\tilde{v}_{k_0})$$

接下来，根据 $n\in J$ 或 $n\notin J$ 的情况，对 n 进行递归变形：

(1)（$n \in J$）在这种情况下，我们定义

$$\tilde{v}_{k_0+n} = v_{k_0+n} + t\frac{\tilde{v}_{k_0+(n-1)}}{u}$$

（2）（$n \notin J$）在这种情况下定义

$$\tilde{v}_{k_0+n} = \frac{w_n}{u} + \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{n,\ell}\frac{\tilde{v}_{k_0+\ell}}{u}$$

在这两种情形下，我们将 Λ_{k_0+n} 的变形定义为：

$$\tilde{\Lambda}_{k_0+n} = \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-1)} \oplus (k \cdot \tilde{v}_{k_0+n})$$

˜需要验证方程 $u\cdot \tilde{v}_{k_0+n} \in \Lambda_{k_0+\,(n-1)}$ 确实成立。对于情形（2），这是显然的。对于情形（1），需要注意到，根据假设，我们有

$$u \cdot \tilde{v}_{k_0+n} = w_n + \sum_{\ell=0}^{n-2} x_{n,\ell}\tilde{v}_{k_0+\ell} + t\tilde{v}_{k_0+(n-1)} \in \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-2)} \oplus (k \cdot \tilde{v}_{k_0+(n-1)}) = \tilde{\Lambda}_{k_0+(n-1)}$$

在闭点 $t = 0$ 处，我们有 $\tilde{v}_{k_0} = v_{k_0}$，从而对任意 $n \geq 1$ 都有 $\tilde{v}_{k_0+n} = v_{k_0+n}$。因此，该滤过确实对应于初始滤过˜的一个变形。为了计算 Hodge($\Lambda_e \otimes k((t))$)，需要注意到，根据构造，我们有

$$\tilde{s}_{k_0+n} = \tilde{s}_{k_0+n} + 1 \quad \forall n \geq 1$$

并且因此，由于 $\tilde{s}_{k_0} = s_{k_0} + 1$，我们得到

$$\tilde{s}_e = \tilde{s}_{k_0+e-k_0} = \tilde{s}_{k_0} + e - k_0 = s_{k_0} + 1 + e - k_0 = s_e + 1$$

因此，在一般纤维中确实有：

$$\mathrm{Hodge}(\tilde{\Lambda}_e \otimes k(\!(t)\!)) = (i+1, j-1)$$

□

注3.17. 证明思路如下。

(1) 如果 $\Lambda_e = \mathbf{h}u^i e_1, u^j e_2\mathbf{i}$，那么我们希望通过取元素 $\tilde{v}_e = u^i e_1 + tu^{j-1}e_2$，在 $k[\![t]\!]$ 上进行变形。问题是，该元素未必满足 $u\cdot\ \tilde{v}_e \in \Lambda_{e-1}$。因此还必须对 Λ_{e-1} 进行变形。问题在于，这种˜变形又必须满足方程 $u \cdot \Lambda_{e-1} \subset \Lambda_{e-2}$...

˜(2) 存在一个秩 k_0，使得变形 Λ_{k_0} 存在。换言之，可以找到一个具有“正确赋值”的元素 $\tilde{v}_{k_0}$，也就是 v_{k_0} 的赋值减 1。

(3) 接下来通过递归对 v_{k_0+n} 进行变形，每一步都“除以 u”，从而使 u^{j-1} 出现在 $\tilde{v}_e$ 的分解中。

我们给出一个变形的具体例子。考虑滤过

$$\Lambda_1 = \langle u^3 e_1, u^2 e_2\rangle, \quad \Lambda_2 = \langle u^2 e_2, u^2 e_1\rangle, \ \Lambda_3 = \langle u e_2, u^2 e_1\rangle$$

我们用一个矩阵表示这个滤过

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u^2e_1 & ue_1 & e_1 & u^2e_2 & ue_2 & e_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & * & & \\ * & & & & & \\ & & & & * & \end{bmatrix} \end{array}$$

乘以 u 相当于将各列向左平移。前一个证明中构造的变形由以下矩阵给出：

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u^2e_1 & ue_1 & e_1 & u^2e_2 & ue_2 & e_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & * & & \\ * & & & & t_2 & \\ & t_3 & & & * & t_3t_2 \end{bmatrix} \end{array}$$

注记 3.18. 上述定理在一般情形下并不成立（反例见 [BH22b]命题 3.9）。事实上，在上述证明中，我们用到了情形 $G = \mathrm{GL}_2$ 的一个特殊事实：若 $\Lambda \in \mathrm{Gr}^{\leq(e,0)}$，那么根据 3.9 的记号：

$$\Lambda \in \mathrm{Gr}_{(i,j)} \ \Leftrightarrow \ N(\Lambda) = i$$

不变量 $N(\Lambda)$ 等于 $u \in \mathrm{End}(\Lambda/u^e\Lambda_0)$ 的幂零指数，因此实际计算霍奇$(\Lambda) = \mathrm{Inv}(\Lambda, \Lambda_0)$ 会简单得多。定理 3.16 的证明只需对滤过 $\Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_e$进行变形，使一般纤维上出现正确的幂零指数。

4. 局部模型

4.1. 记号。 设 F 是一个次数为 $d > 1$ 的全实域，且该域扩张于 $\mathbb{Q}$。记 O_F为其整数环。对任意 $v|p$，记 e_v 为分歧指数，f_v 为剩余次数。记 F_v 为 F 在 v 处的完备化，O_v 为其整数环。记 F_v^{nr}为最大非分歧子扩张，$\mathsf{O}_v^{\mathrm{nr}}$为其整数环。设 $K/\mathbb{Q}_p$ 是一个扩张，包含对任意 $v|p$的所有嵌入 $F_v \to \overline{\mathbb{Q}}_p$。记 O_K 为其整数环，k 为其剩余域，并固定一个一致化元 $\varpi \in \mathsf{O}_K$。我们有如下分解

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K \cong \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} \mathcal{O}_v \otimes_{\mathcal{O}_v^{\mathrm{nr}},\tau} \mathcal{O}_K \tag{4.1}$$

其中 $\Sigma_v^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Ho}\mathsf{m}(F_v^{\mathrm{nr}}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$。若固定 O_v的一个一致化元 ϖ_v，则可以将其识别为

$$\mathcal{O}_v \otimes_{\mathcal{O}_v^{\mathrm{nr}},\tau} k \simeq k[u]/(u^{e_v}) \tag{4.2}$$

因此得到一个非典范分解：

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} k[u]/(u^{e_v})$$

4.2. PEL 局部模型。 我们感兴趣的约化群是:

$$G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$$

将其基变换到 K 后，我们得到一个分解

$$G \otimes_{\mathbb{Q}} K = \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} (\mathrm{Res}_{F_v/F_v^{\mathrm{nr}}}\mathrm{GL}_2) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$$

为简化记号，我们先描述群 $G = \mathrm{Res}^{L/L^{\mathrm{nr}}}\mathrm{GL}_2$ 的 PEL 局部模型，其中 $L/\mathbb{Q}_p$ 是分歧指数为 e 的有限扩张（起到 $F_v/\mathbb{Q}_p$ 的作用）。固定一个嵌入 $\tau: L^{\mathrm{nr}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$，并记 $\Sigma_\tau = \mathrm{Hom}_{L^{\mathrm{nr}}}(L, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ 为延拓 τ 的所有嵌入的集合。固定一个编号 $\Sigma_\tau \simeq \{\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_e\}$。

设 V 是一个维数为 2 的 L-向量空间。固定 V 的一组基 (e_1, e_2)。记以 (e_1, e_2) 为基的自由 O_L-模为 Λ。群 G 的 PEL 局部模型记为 M^{PEL}，它是在谱 $\mathsf{O}_L^{\mathrm{nr}}$ 上的概形，表示如下函子：该函子将 $(S \to \mathrm{Spec}\ \mathsf{O}_L^{\mathrm{nr}})$ 对应到集合 $M^{\mathrm{PEL}}(S)$，其中包含满足以下条件的 $\mathsf{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_L^{\mathrm{nr}}} \mathsf{O}_S$-子模 $\mathscr{F} \subset \Lambda_S := \Lambda \otimes_{\mathcal{O}_L^{\mathrm{nr}}} \mathsf{O}_S$

- $\mathscr{F}$ 在局部上（相对于 S 扎里斯基拓扑），它是 Λ_S的一个秩为 e的 O_S-直和因子。
- 对于任意 $a \in \mathsf{O}_L$，都有以下多项式等式

$$\det(a \mid \mathscr{F}) = \prod_{\varphi_i \in \Sigma_\tau} \varphi_i(a)$$

记 $\mathsf{G} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_L}(\Lambda)$ 为 $\mathrm{Spec}\ \mathsf{O}_L^{\mathrm{nr}}$ 上与 O_L 的作用相容的 Λ 的自同构群概形。于是有以下命题:

命题4.1。G 在 谱$\mathcal{O}_L^{\mathrm{nr}}$ 上光滑

证明。 见[RZ96] (命题 A.4)。 □

事实上，上述命题是针对 $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_L}((\Lambda)_{i\in I})$（其中 $(\Lambda)_{i\in I}$ 是一个周期性格链（见 [RZ96]））证明的。当允许在 p 处增加层级时，就会出现这种情形；但这不是我们这里讨论的情况。在我们的情形中，这个群实际上是显式的:

$$\mathcal{G} = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_L/\mathcal{O}_L^{\mathrm{nr}}}\mathrm{GL}_2$$

并且显然是光滑的。

4.3. Pappas-Rapoport局部模型。 现在考虑函子 M^{PR}，它将一个概形 $(S \to \text{谱 } \mathsf{O}_K)$ 映射到集合 $M_{\mathrm{PR}}(S)$，该集合由 $\mathsf{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_{L^{\mathrm{nr}}}} \mathsf{O}_S$- 子模 Λ_S 的滤过 $(\mathscr{F}_{(i)})_{i=1,\ldots,e}$ 组成:

$$0 = \mathscr{F}^{(0)} \subset \mathscr{F}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathscr{F}^{(e)} \subset \Lambda_S$$

满足以下条件:

- 这些 $\mathscr{F}_{(i)}$ 在扎里斯基局部意义下是 Λ_S 的 O_S-直和因子，秩为 i
- 对于任意 $a \in L$ 以及任意 $i = 1, \ldots\ldots, e$

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes \varphi_i(a)) \cdot \mathscr{F}^{(i)} \subset \mathscr{F}^{(i-1)}$$

命题 4.2。 这个函子由谱 $\mathcal{O}_K$上的一个射影概形表示。

证明。 只需证明可以将其嵌入到适当的 Grassmannian 乘积中。更具体地说，可以利用 4.7 以及卷积积可表出的事实（见 3.1）。□

存在一个遗忘态射

$$\begin{array}{ccc} \pi : M^{\mathrm{PR}} & \longrightarrow & M^{\mathrm{PEL}} \otimes_{\mathcal{O}_L^{\mathrm{nr}}} \mathcal{O}_K \\ (\mathscr{F}^{(i)}) & \longmapsto & \mathscr{F}^{(e)} \end{array}$$

为简化记号，以下将同样记作 $M^{\mathrm{PEL}} = M_{\mathrm{PEL}} \otimes_{\mathcal{O}_L^{\mathrm{nr}}} \mathsf{O}_K$。

4.4. **嵌入仿射格拉斯曼簇**。 现在我们来描述模型 M^{PR}和 M_{PEL}的特殊纤维在某些仿射格拉斯曼簇中的嵌入。我们基本上逐字遵循 [PR02]。记 $\overline{M}_{\mathrm{PEL}} = M^{\mathrm{PEL}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$和 $\overline{M}_{\mathrm{PR}} = M^{\mathrm{PR}} \otimes_{\mathcal{O}_K} k$为这两个模型的特殊纤维。与（4.2）中一样，选择一致化元 $\varpi \in \mathcal{O}_L$ 即可得到一个如下的识别：

$$\mathcal{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} k \simeq k[\![u]\!]/(u^e), \qquad \varpi \otimes 1 \mapsto u$$

这诱导出一个 $\mathsf{O}_L \otimes_{\mathbb{Z}_p} k$-模的同构：

$$\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} k \simeq \Lambda_0 \otimes_{k[\![u]\!]} k[\![u]\!]/(u^e)$$

（请回忆， $\Lambda \subset V$ 是一个 $\mathcal{O}_L$-固定格（4.2），且 $\Lambda_0 = k[\![u]\!]^2$）。记 p 为投影：

$$p : \Lambda_0 \to \Lambda_0 \otimes_{k[\![u]\!]} k[\![u]\!]/(u^e)$$

设 $(S \to \operatorname{Spec} k)$ 是一个概形，且 $\mathscr{F} \in \overline{M}^{\mathrm{PEL}}(S)$。前述识别使我们可以将 $\mathscr{F}$视为 $\Lambda_0 \otimes_{k[\![u]\!]} \mathsf{O}_S[\![u]\!]/(u^e)$ 的一个子模。定义 $\mathsf{O}_S[\![u]\!]$-模 $\Lambda_{\mathscr{F}}$ 为

$$\Lambda_{\mathscr{F}} := p^{-1}\left(\mathscr{F} \subset \Lambda_0 \otimes_{k[\![u]\!]} \mathcal{O}_S[\![u]\!]/(u^e)\right) \tag{4.3}$$

因此，最终通过这一过程得到一个闭浸入

$$\overline{M}^{\mathrm{PEL}} \hookrightarrow \mathrm{Gr}$$

注 4.3. 根据构造，我们有如下格的包含关系

$$u^e \Lambda_{0,S} \subset \Lambda_{\mathscr{F}} \subset \Lambda_{0,S}$$

其分次对象是秩为 e的 O_S-局部自由模。请注意，这个闭浸入的像完全由上述包含关系及分次对象的秩刻画。

命题 4.4。 闭浸入 ι 关于$\mathcal{G} \otimes k$ 左作用和 L^+G 右作用是等变的。它诱导出一个同构

$$\overline{M}^{\mathrm{PEL}} \simeq \bigcup_{\lambda \leqslant (e,0)} \mathrm{Gr}_\lambda$$

证明。 由前述注记和例子 3.9可得。 □

注记 4.5。 换言之，所有余权 μ-可容许的（见 [Goe01],截面 4.3）在此都完全显式

$$\mathrm{Adm}(\mu)_K = \{\lambda \leqslant (e,0)\}$$

（这里处于极大抛物型情形 K =G($\mathbb{Z}_p$)）

同样，对于 Pappas-Rapoport 模型，我们有一个到仿射格拉斯曼簇乘积中的闭浸入：

$$\begin{array}{ccc} \iota^{\mathrm{PR}} : \overline{M}^{\mathrm{PR}} & \longrightarrow & \mathrm{Gr} \times \ldots \times \mathrm{Gr} \\ (\mathscr{F}^{(1)}, \ldots, \mathscr{F}^{(e)}) & \longmapsto & (\Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}}, \ldots, \Lambda_{\mathscr{F}^{(e)}}) \end{array} \tag{4.4}$$

注 4.6. 由构造可知，我们有以下包含关系

$$u^e\Lambda_0 \subset \Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}} \subset \ldots \subset \Lambda_{\mathscr{F}^{(e)}} \subset \Lambda_0$$

其分次对象对于 $j = 1, \ldots, e-1$ 的秩为 1，对于 e 的秩为$j = e$。根据例 3.9 ，该闭浸入诱导出一个同构 $\overline{M}^{\mathrm{PR}} \simeq M$，其中 M 是 (3.2) 中描述的模空间。

命题 4.7. 闭浸入 ι^{PR} 诱导出一个关于左侧$\mathcal{G}$ 作用和右侧 L^+G 作用的等变同构：

$$\overline{M}^{\mathrm{PR}} \simeq \mathrm{Gr}_{(1,0)} \tilde{\times} \ldots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{(1,0)}$$

其中卷积积取 e 次。

证明。 由前述注记与同构（3.3）复合即可得出。 □

命题4.8。 下列方块是笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}^{\mathrm{PR}} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{(1,0)} \tilde{\times} \ldots \tilde{\times} \mathrm{Gr}_{(1,0)} \\ \pi \downarrow & & \downarrow m \\ \overline{M}^{\mathrm{PEL}} & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{\leq (e,0)} \end{array}$$

证明。 本质上需要证明下列图表是交换的。这由图表（3.4）是交换图表这一事实得出。 □

4.5. **一般情形**。 现在回到一般情形，考虑一个次数为 d的扩张 $F/\mathbb{Q}$ 。记 $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$。对于任意 $v|p$ 和任意 $\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}$，记作$M_{v,\tau}^{\mathrm{PEL}}$，前一节中定义的群$\mathrm{Res}_{F_v/F^{\mathrm{nr}v}}\mathrm{GL}_2$的局部模型。

4.5.1. 局部模型。 设 V F 是一个维数为 2 的向量空间。固定 V 的一组基 (e_1, e_2)。记 Λ 为以 (e_1, e_2) 为基的自由 O_F-模。固定一个余特征（在共轭意义下） $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$，并假设它诱导出如下特征空间分解：

$$V \otimes \mathbb{C} = V_0 \oplus V_1$$

最后，假设 μ 的定义域为 $\mathbb{Q}$ （这些假设在希尔伯特型志村簇的情形下均成立）。定义局部模型M^{PEL}为如下函子：它将 $(S \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_p)$ 对应到 $\mathsf{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathsf{O}_S$-子模的集合 $M_{\mathrm{PEL}}(S)$，其中 $\mathscr{F} \subset \Lambda_S := \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathsf{O}_S$ 满足

- $\mathscr{F}$ 在 S 上局部于扎里斯基拓扑可写为一个秩为 $[F$ 的 O_S-直和因子 $\Lambda_S :\ \mathbb{Q}] = d$;
- 对于任意 $a \in \mathsf{O}_F$，都有如下多项式等式（Kottwitz条件）：

$$\det(a \mid \mathscr{F}) = \det(a \mid V_0)$$

记 $\mathsf{G} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_L}(\Lambda)$ 为 Spec $\mathbb{Z}_p$ 上与 O_F 的作用相容的 Λ 自同构群概形。于是有如下命题:

命题4.9。 经基变换到 $\mathcal{O}_K$ 后，有一个典范同构

$$M^{\mathrm{PEL}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K \simeq \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} M_{v,\tau}^{\mathrm{PEL}}$$

证明。 由（4.1）得出。 □

与前面一样，记 $\mathsf{G} = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda)$。基于相同的理由，我们有一个分解

$$\mathcal{G} \otimes \mathbb{Z}_p \simeq \prod_{v|p} \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_v/\mathbb{Z}_p} \mathrm{GL}_2$$

特别地，$\mathsf{G} \otimes \mathbb{Z}_p$ 确实是光滑的。

这一分解启发我们给出一般情形下、对于扩张 $F/\mathbb{Q}$ 的 Pappas-Rapoport 模型的如下定义

定义4.10。 群 $G = \mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_2$的 ***Pappas-Rapoport*** 局部模型为:

$$M^{\mathrm{PR}} = \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} M_{v,\tau}^{\mathrm{PR}}$$

4.5.2. 仿射格拉斯曼簇中的嵌入。 引理 3.1中所述仿射格拉斯曼簇与乘积的“相容性”，结合前一节局部模型的分解，使我们不费太大力气便得到以下非典范同构（它们取决于不同局部参数的选择）：

$$\overline{M}^{\mathrm{PEL}} \simeq \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} \mathrm{Gr}_{\leq (e_v,0)}, \qquad \overline{M}^{\mathrm{PR}} \simeq \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(e_v,0)}$$

其中 $\mathrm{Gr}_{(e_v,0)}$ 表示 e_v Gr 的副本$^{(1,0)}$的卷积积。最后，命题 4.8中的笛卡尔方块变为

$$\begin{array}{ccc} \overline{M}^{\mathrm{PR}} & \longrightarrow & \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} \widetilde{\mathrm{Gr}}_{(e_v,0)} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle (m_{v,\tau})_{v,\tau}} \\ \overline{M}^{\mathrm{PEL}} & \longrightarrow & \prod_{v|p} \prod_{\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}} \mathrm{Gr}_{\leq (e_v,0)} \end{array} \tag{4.5}$$

5. 整模型

5.1. **PEL 整模型**。 保留 4.1 和 4.5.1 中的记号。考虑模空间 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 在谱 Spec $\mathbb{Z}_p$ 上，它将局部诺特 scheme ($S \to$ Spec $\mathbb{Z}_p$) 关联到满足 $\mathbb{Z}^{\times}{}_{(p)}$-同源的四元组集合 $(A, \lambda, \iota, \eta)$，其中：

(1) $A \to S$ 是一个维数为 $g = d = [F$ 的阿贝尔概形： $\mathbb{Q}]$。(2) $\lambda : A \to A^{\vee}$ 是一个 $\mathbb{Z}^{\times}$ $_{(p)}$-极化。(3) η 是在 p 之外的水平结构（参见[Lan13], 第 1.4.1 节）。(4) $\iota : \mathrm{O}_F \hookrightarrow \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ 是一个保持两侧对合的态射。(5) $(A, \lambda, \iota, \eta)$满足 Kottwitz 行列式条件：

$$\det(a \,|\, \omega_{A/S}) = \det(a \,|\, V_0) \qquad \forall\, a \in \mathcal{O}_F$$

(参见 [Lan13]定义 1.3.4.1，详见相关内容)。

于是得到以下由 Mumford、继而由 Kottwitz 得出的结果：

命题 5.1 ([MFK94], [Kot92] 第 5 节)。 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 可由定义在 谱 $\mathbb{Z}_p$上的准射影概形表示。

注释 5.2. 上文定义的模空间是 Kottwitz 定义的模空间。有关 Hilbert 情形下所考虑的不同模空间之间的等价， [请参阅 I.Vollaard 的文章03] 以了解更多细节。

现在我们来说明整数模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 与局部模型 M^{PEL}之间的联系。考虑函子 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL},\,\square}$ 它将一个局部诺特 scheme ($S \to$ 谱 $\mathbb{Z}_p$) 对应到五元组 $(A,\ \lambda,\ \iota,\ \eta,\ \gamma)$，其中

$$\gamma : H^1_{\mathrm{dR}}(A/S) \simeq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S$$

是第一 de Rham 上同调群的一个平凡化（作为 $\mathrm{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{O}_S$-模）。注意，$\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL},\,\square}$ 带有 G $= \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_F}(\Lambda)$ 的作用，其中后者作用于平凡化 γ。遗忘平~~凡化~~ γ 给出一个态射

$$\varphi : \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL},\square} \to \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$$

[96] 的一项重要结果如下

命题 5.3 ([RZ96] 定理 3.16)。 φ: $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL},\square} \to \mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 是一个 G-扭子。

平凡化 γ 为我们提供了一个指向 PEL 局部模型的态射

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL},\square} & \longrightarrow & M^{\mathrm{PEL}} \\ & (A, \lambda, \iota, \gamma) & \longmapsto & \gamma(\omega_{A/S}) \subset \Lambda_S \end{array}$$

该态射良定义这一事实主要由模空间的定义得出 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$。于是得到以下命题，它由 [dJ91] 和[RZ96] ：

命题 5.4。 ψ ： $\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL},\,\square} \longrightarrow M^{\mathrm{PEL}}$ 是一个相对维数为 $\mathcal{G}$-等变的光滑态射，维数为 $\dim\mathcal{G}$。

证明。 该态射是 $\mathcal{G}$-等变的这一点显而易见。光滑性由 Grothendieck-Messing 理论得出，参见 [dJ91] (同名文档 .dvi 文件第 4.5 条命题，见其网页）。 □

换言之 ，我们拥有一个依照 [RZ96] 意义下的局部模型图：

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}, \square & \\ {\scriptstyle\varphi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}} & & M^{\mathrm{PEL}} \end{array}$$

这对应于一个代数栈之间的态射

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}} \to \left[M^{\mathrm{PEL}}/\mathcal{G}\right] \tag{5.1}$$

相对维数为 dim G 的光滑态射。

5.2. **Pappas-Rapoport 整模型**。 我们将 Pappas- Rapoport 整模型$\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 定义为如下纤维积:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} & \longrightarrow & \left[M^{\mathrm{PR}}/\mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}\right] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{\mathcal{O}_K} & \longrightarrow & \left[M^{\mathrm{PEL}}_{\mathcal{O}_K}/\mathcal{G}_{\mathcal{O}_K}\right] \end{array} \tag{5.2}$$

其中指标 $(\cdot)_{\mathcal{O}_K}$表示基变换 $\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{O}_K$。

在明确给出该模型的定义之前，先陈述命题 5.1的一个直接推论:

命题 5.5。 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$ 可由谱 $\mathcal{O}_K$上的光滑准射影概形表示。

证明。 由于方形（5.2）是笛卡尔方形，只需证明 M^{PR} 可表示。这由命题 4.2 得出。同样的推理以及卷积态射是适当的这一事实表明，$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$ 是拟射影的，因为$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 是拟射影的。要证明光滑性，只需验证局部模型 M^{PR} 是光滑的。根据[PR02] 定理 5.3，局部模型是平坦的，因此只需证明特殊纤维是光滑的（一般纤维总是光滑的）。$\overline{M^{\mathrm{PR}}}$ 的光滑性由命题 3.5 得出。 □

注 5.6。 事实上，[PR02] 定理 5.3 的证明依赖于一个将局部模型 M^{PR} 与非分歧局部模型的乘积相联系的扭子图。在没有 p 层级结构的 PEL 情形下，后者是光滑的（而不仅仅是平坦的），从而直接得到 Spec $\mathcal{O}_K$上的光滑性，而无需经过特殊纤维。

5.3. **Pappas-Rapoport 数据。** 现在我们将给出 Pappas-Rapoport 整模型的一个更为明确的定义。为此，我们需要定义对于一个 p-可除群而言的“Pappas-Rapoport 数据”这一概念。

为简化记号，与 §4.2 一样，这里我们只考虑一个素位 $v|p$。设 $L/\mathbb{Q}_p$ 是次数为 $d > 1$ 的有限扩张（扮演 $F_v/\mathbb{Q}_p$ 的角色），$K/\mathbb{Q}_p$ 是一个包含 L 的伽罗瓦闭包的扩张，S 是定义在谱 O_K 上的概形。记 L^{nr} 为 L 中的最大非分歧扩张。记 e 为分歧指数。设 ϖ 是 L 的一致化元。固定一个嵌入 $\tau : L^{nr} \hookrightarrow K$。定义集合 $\Sigma_\tau = \mathrm{Hom}_{L^{\mathrm{nr}}}(L, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ 为所有嵌入 $\tau' : L \hookrightarrow K$ 的集合，这些嵌入在 L^{nr} 上的限制为 τ。该集合的基数为 e。固定一个序 $\Sigma_\tau = \{\varphi_1, ..., \varphi_e\}$。

5.3.1. 定义。设 $\mathscr{F}$ 是一个局部自由的 O_S 模，带有 O_L 的作用，使得 $\mathsf{O}_{L^{nr}}$ 通过 τ 作用于 $\mathscr{F}$（回顾一下，S 是定义在 Spec O_K上的概形）。假设存在一个局部自由的层 $\mathscr{E}$，作为 $\mathsf{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_{L^{nr}}} \mathsf{O}_S$-模其秩为 h，并且 $\mathscr{F}$ 局部上是 $\mathscr{E}$的直和因子。

定义 5.7。 相对于 Σ_τ，关于$(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ 的 ***Pappas-Rapoport*** 数据是一种滤过

$$0 = \mathscr{F}^{(0)} \subset \mathscr{F}^{(1)} \subset \cdots \subset \mathscr{F}^{(e)} = \mathscr{F}$$

使得对任意 $1 \leqslant j \leqslant e$

- 这些 $\mathscr{F}^{(j)}$ 局部上是 $\mathcal{O}_S$的直和因子，且在$\mathcal{O}_L$的作用下保持不变。
- $([\varpi] - \varphi_j(\varpi)) \cdot \mathscr{F}^{(j)} \subset \mathscr{F}^{(j-1)}$
- $\mathscr{F}^{(j)}/\mathscr{F}^{(j-1)}$局部自由且秩为 1

第二个条件要求 O_L 在商 $\mathscr{F}^{(j)}/\mathscr{F}^{(j-1)}$ 上的作用通过嵌入 $\mathsf{O}_L \xrightarrow{\varphi_j} \mathsf{O}_K$进行。

5.3.2. ***p*-可除群** p。设 S 是定义在谱 $\mathcal{O}_K$上的概形。设 G 是定义在 p上的高度为 hd、带有作用 $\iota : \mathcal{O}_L \to \mathrm{End}_S(G)$ 的 $\mathscr{E}(G)$ p-可除群。记其对应的晶体为 。利用 (2.1) 的记号，将该晶体在典范加厚 $(S \to S)$ 上取值，得到霍奇滤过：

$$0 \longrightarrow \omega_G \longrightarrow \mathscr{E}(G)_{(S \to S)} \longrightarrow \omega_{G^D}^\vee \longrightarrow 0$$

根据命题 2.1，层 $\mathscr{E}(G)^{(S \to S)}$ 作为 $\mathcal{O}_L \otimes_{\mathcal{O}_{L^{nr}}} \mathcal{O}_S$-模是自由的，因此假设 5.3.1 确实得到满足。为简化记号，我们记 $\mathscr{E} = \mathscr{E}(G)^{(S \to S)}$。该滤过与由 4.1 所诱导的分解相容

$$\mathscr{E} = \bigoplus_{\tau \in \Sigma^{\mathrm{nr}}} \mathscr{E}_\tau, \qquad \omega_G = \bigoplus_{\tau \in \Sigma^{\mathrm{nr}}} \omega_{G,\tau}$$

其中 $\Sigma^{\mathrm{nr}} = \mathrm{Hom}(L^{\mathrm{nr}}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$。换言之，对于任意 $\tau \in \Sigma^{\mathrm{nr}}$，都有一个正合列

$$0 \longrightarrow \omega_{G,\tau} \longrightarrow \mathscr{E}_\tau \longrightarrow \omega_{G^D,\tau}^\vee \longrightarrow 0$$

由霍奇滤过诱导。

定义 5.8. 相对于 $(\Sigma_\tau)_{\tau\in\Sigma^{\mathrm{nr}}}$，$(G,\iota)$ 的一个 *Pappas-Rapoport* 数据，是指对每个 $\tau\in\Sigma^{\mathrm{nr}}$，都有一个相对于 Σ_τ 的 $(\mathscr{E}_\tau,\omega_{G,\tau})$ 的帕帕斯–拉波波特滤过。换言之，它是指对每个 $\tau\in\Sigma^{\mathrm{nr}}$，都有一个滤过

$$0=\omega_{G,\tau}^{(0)}\subset\omega_{G,\tau}^{(1)}\subset\cdots\subset\omega_{G,\tau}^{(e)}=\omega_{G,\tau}$$

使得对于任意 $1\leqslant j\leqslant e$

- 这些 $\omega_{(j)\ G,\tau}$ 局部上是$\mathcal{O}_S$-直和因子，并且在$\mathcal{O}_L$作用下稳定。
- $([\varpi]-\varphi_{\tau,j}(\varpi))\cdot\omega_{(j)\,G,\tau}\subset\omega_{(j-1)\,G,\tau}$
- $\omega_{(j)\ G,\tau}/\omega_{(j-1)\ G,\tau}$ 是秩为1的局部自由模

5.3.3. 一般情形。 回到我们的扩张 $F/\mathbb{Q}$。设 G 是 S 上带有作用 $\iota:\mathrm{O}_F\to\mathrm{End}_S(G)$ 的一个 p-可除群。对于每个素位 $v|p$，记 $\Sigma_v^{\mathrm{nr}}=\mathrm{Hom}(F_{\mathrm{nr}v},\overline{\mathbb{Q}}_p)$；对于任意 $\tau\in\Sigma_v^{\mathrm{nr}}$，记 $\Sigma_{v,\tau}=\mathrm{Hom}^{F_v^{\mathrm{nr}}}(F_v,\overline{\mathbb{Q}}_p)$。于是有一个初始分解

$$\mathscr{E}=\bigoplus_{v|p}\mathscr{E}_v,\qquad\omega_G=\bigoplus_v\omega_{G,v}$$

并且对每个素位 $v|p$ 还有第二种分解:

$$\mathscr{E}_v=\bigoplus_{\tau\in\Sigma_v^{\mathrm{nr}}}\mathscr{E}_{v,\tau},\qquad\omega_{G,v}=\bigoplus_{\tau\in\Sigma_v^{\mathrm{nr}}}\omega_{G,v,\tau}\tag{5.3}$$

和之前一样，我们在每个 $\Sigma_{v,\tau}$ 上固定一个次序。

定义 5.9. 相对于 $(\Sigma_{v,\tau})_{v,\tau}$，关于 (G,ι) 的一组 *Pappas-Rapoport* 数据，是指对每个素位 $v|p$ 及每个 $\tau\in\Sigma_v^{\mathrm{nr}}$，给出一个相对于 $\Sigma_{v,\tau}$、关于$(\mathcal{E}_{v,\tau},\omega_{G,v,\tau})$ 的帕帕斯–拉波波特滤过。换言之，这是指对每个素位 $v|p$ 及每个 $\tau\in\Sigma_v^{\mathrm{nr}}$，给出一个滤过

$$0=\omega_{G,v,\tau}^{(0)}\subset\omega_{G,v,\tau}^{(1)}\subset\cdots\subset\omega_{G,v,\tau}^{(e)}=\omega_{G,v,\tau}$$

使得对任意 $1\leqslant j\leqslant e$

- 这些 $\omega_{(j)\ G,v,\tau}$ 局部上是 $\mathcal{O}_S$-直和因子，并且在 $\mathcal{O}_F$ 作用下保持稳定。
- $([\varpi]-\varphi_{v,\tau,j}(\varpi))\cdot\omega_{(j)\,G,v,\tau}\subset\omega_{(j-1)\,G,v,\tau}$
- $\omega_{(j)\ G,\ v,\ \tau}/\omega_{(j-1)\ G,\ v,\ \tau}$ 是秩为 1 的局部自由模

注记 5.10。在上述定义中，我们宽泛地将其称为“Pappas-Rapoport 数据”，但它实际上对应于“Hilbert 情形下的 Pappas-Rapoport 数据”，也就是说，分次对象的维数 $\omega_{G\,v,,\tau}^{(j)}/\omega_{G\,v\,\tau\,,,}^{(j-1)}$等于 $d_j=1$，对任意 $1\leq j\leq e$均如此。关于更一般的 PEL 框架下的 Pappas-Rapoport滤过，详见 [BH22b] 和[BH16] 。

5.3.4. $\mathcal{S}\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$的显式定义。 回到我们的整数模型 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$。由定义（5.2）可知，函子 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$ 将局部诺特 scheme $S \to \mathrm{Spec}\ \mathrm{O}_K$关联到五元组 $(A, \lambda, \iota, \eta, \omega_G^{(\cdot)})$，模去 $\mathbb{Z}^{\times}{}_{(p)}$-等源的意义下，其中

- $A \to S$ 是一个维数为 d 的阿贝尔概形。
- λ： $A \to A^t$ 是一个 $\mathbb{Z}^{\times}{}_{(p)}$-极化
- ι： $\mathcal{O}_F \to \mathrm{End}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$
- η 是在 p （参见[Lan13] 第 1.4.1 节）之外的有理水平结构
- $\omega_{G}^{(\cdot)}$ 是关于 $G = A[p^{\infty}]$ 的 Pappas-Rapoport 数据。

6. 霍奇分层

从现在起，以下所有内容都针对整模型的特殊纤维。因此，为简化记号，我们记 $\overline{M}^{\mathrm{PEL}} = M^{\mathrm{PEL}}$和 $M^{\mathrm{PR}} = \overline{M}^{\mathrm{PR}}$。为简便起见，我们先处理只有一个全分歧扩张 $L/\mathbb{Q}_p$，其次数为 e （扮演 F_v/F_v^{nr} 的角色）的情形。对任意 $1 \le i \le e$，记 $\mu_i = (1, 0)$ 和 $\mu_\bullet = (\mu_1, \ldots, \mu_e)$。因此有 $\mu := |\mu_\bullet| = (e, 0)$。

6.1. **PEL 情形**。 在第 5.1 节中，我们看到局部模型图在 PEL 情形下给出了一个光滑态射（5.1）

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}} \longrightarrow \left[M^{\mathrm{PEL}}/\mathcal{G}\right]$$

根据命题 4.4，我们有一个从局部模型到仿射格拉斯曼簇的等变嵌入，取商后诱导出一个态射

$$\left[M^{\mathrm{PEL}}/\mathcal{G}\right] \longrightarrow \left[L^+G\backslash LG/L^+G\right] = \mathrm{Hecke}$$

这个态射的像的描述 4.4 因此最终为我们提供了一个到有界 Hecke 叠的光滑态射：

$$\zeta : \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}} \longrightarrow \mathrm{Hecke}_{\mathrm{Adm}(\mu)_K}$$

其中 $\mathrm{Adm}(\mu)_K$ 定义见 4.5。

6.1.1. 定义 。 设 $x \in |\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}|$。称点 x 的霍奇多边形为元素

$$\mathrm{Hodge}(x) = \zeta(x)$$

对任意 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，定义局部闭子概形（约化结构）$\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}_{\lambda} = \zeta^{-1}(\lambda)$。这些 $(\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}_{\lambda})_{\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 称为 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 的霍奇分层。

注 6.1. 给出霍奇多边形和 Hodge 分层的一个更明确的定义。设 $x \in |\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}|$ 是一个剩余域点 k。为计算像 $\zeta(x)$，我们需要在局部模型图中跟踪 x：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}, \square & & \\ & \swarrow^{\varphi} & & \searrow^{\psi} & \\ \mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}} & & & & M^{\mathrm{PEL}} \xrightarrow{\iota} \mathrm{Gr} \end{array}$$

记 $\omega_x \hookrightarrow \mathscr{E}_x$ 为与点 x 相关联的霍奇滤过。任选一个元素 $\tilde{x} \in \varphi^{-1}(x)$。像 $\iota \circ \psi(\tilde{x})$ 取决于所选的 $\tilde{x}$，但它在海克商 $= \left[L^+G\backslash \mathbf{Gr}\right]$ 中的像与这一选择无关。因此，要描述 $\zeta(x)$，我们只需描述 $\iota \circ \psi(\tilde{x})$。根据 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 的定义，$\square$ 在 $\tilde{x}$ 上有一个平凡化 $\mathscr{E}_x \simeq \Lambda$。换言之，我们有一个基：

$$\mathscr{E}_x \simeq \frac{k[\![u]\!]}{(u^e)} \oplus \frac{k[\![u]\!]}{(u^e)}$$

通过选择另一个基，可以假设霍奇滤过由下式给出

$$\omega_x \simeq u^i \frac{k[\![u]\!]}{(u^e)} \oplus u^j \frac{k[\![u]\!]}{(u^e)}$$

接下来，根据（4.3），将局部模型嵌入仿射格拉斯曼簇，就是沿着 $k[\![u]\!] \to k[\![u]\!]/$（$u^e$）取霍奇滤过的逆像。最终得到

$$\Lambda_{\omega_x} = u^i k[\![u]\!] \oplus u^j k[\![u]\!] \subset \Lambda_0$$

因此，我们得到了通常的定义（见 [DP94] 第 4.2 节，其中 [BH16]定义 1.1.7）：p p-可除群的霍奇多边形

$$\mathrm{Hodge}(x) = \mathrm{Hodge}(\omega_x) = (i, j)$$

注 6.2。事实上，霍奇多边形更对应于斜率多边形（$\frac{i}{e}$，$\frac{j}{e}$）（见 [BH16], 定义 1.1.7）。当然，可以由其中一个定义得到另一个，且由此诱导的分层彼此一致。

6.1.2. 性质。以下命题总结了霍奇分层的各种性质：

命题 6.3 ([DP94]第 4 节。2, [NG02] 第 4 节)。

(1) 分层 $(\mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}})_{\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 构成$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$的良好分层。*(2)* 对任意 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，分层 $\mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}}$是维数为$\langle 2\rho, \lambda \rangle$的光滑拟射影簇。*(3)* 分层 $\mathcal{S}h_{(e,0)}^{\mathrm{PEL}}$ 与$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$的光滑点集重合。

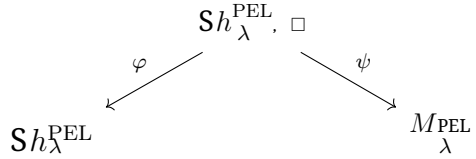
证明。对于第 (1) 点，这由态射的光滑性得出 $\zeta : \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}} \to$海克$_{\mathrm{Adm}(\mu)_K}$。对于第 (3) 点，这由 $\mathbf{Gr}^{(e,0)}$ 与 $\mathbf{Gr}$ 的光滑点集重合这一事实得出$\leq^{(e,0)}$ (见命题 3.2)。最后，对于第 (2) 点，只需证明态射

$$\mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}} \to \left[M_\lambda^{\mathrm{PEL}}/\mathcal{G}\right]$$

是相对维数为 $\dim G$ 的光滑对象，且右边项是一个维数为 $\mathrm{h}2\rho$，$\lambda \mathrm{i} - \dim G$ 的点。$\square$

注记 6.4. 对于 (2)，可以不借助域语言，而是直接给出证明：限制到一个分层 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$ 时，模型图

局部变为



根据命题 3.2 分层 M_λ^{PEL}的维数为 $\langle 2\rho,\ \lambda\rangle$。态射 ψ的相对维数为 $\dim\ G=\dim\mathcal{G}$，而态射 φ是一个 -挠子。因此确实有

$$\dim \mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}}=\langle 2\rho,\lambda\rangle+\dim\mathcal{G}-\dim\mathcal{G}=\langle 2\rho,\lambda\rangle$$

注 6.5。 在 [AG03] 分层 $\mathcal{S}h_{(e,0)}^{\mathrm{PEL}}$ 称为 Rapoport 位，因为它与层 ω 作为 $\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{O}_S$-模时自由的位相一致。

注 6.6. 关于维数，我们可以给出更明确的描述。若 $\lambda=(i,\ j)\ \leq(e,\ 0)$，则

$$\begin{aligned}\langle 2\rho,\lambda\rangle&=\langle\alpha_1-\alpha_2,i\lambda_1+j\lambda_2\rangle\\&=i-j\\&=e-2j\end{aligned}$$

où $\alpha_1:\begin{pmatrix}t_1&0\\0&t_2\end{pmatrix}\mapsto t_1$, $\alpha_2:\begin{pmatrix}t_1&0\\0&t_2\end{pmatrix}\mapsto t_2$, $\lambda_1:t\mapsto\begin{pmatrix}t&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\lambda_2:t\mapsto\begin{pmatrix}1&0\\0&t\end{pmatrix}$.

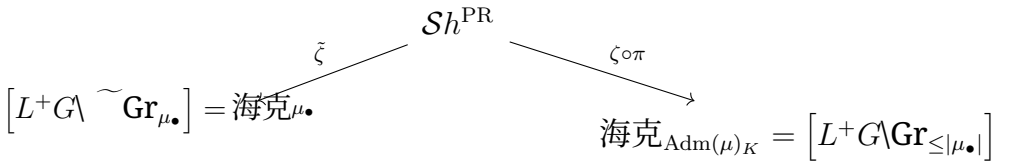
6.2. **Pappas-Rapoport 情形**。 现在我们将关注按 Hodge 多边形(ω)对 Pappas-Rapoport 模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$ 进行的分层。

6.2.1. 定义。 对于任意 $\lambda\in$Adm(μ)$_K$，定义局部闭子概形（带约化结构）$\mathrm{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}}=\pi^{-1}($ $\mathrm{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}}$)，其中

$$\pi:\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}\to\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$$

是遗忘态射。称 $(\mathrm{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}})_{\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 为 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$ 的霍奇分层。更明确地说：若 $x\in\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$，则可以考察霍奇多边形 Hodge($x$)：$=$ Hodge($\omega^{(e)}$)，其中 $\omega^{(e)}=\omega_x$ 是与点 x关联的 Pappas-Rapoport 滤过 $\omega^{(1)}\subset\cdots\subset\omega^{(e)}$ 的最后一级。

注 6.7。注意不要混淆这两个态射：



左侧的态射涉及 Pappas-Rapoport 滤过（$\omega^{(1)}\subset\cdots\subset\omega^{(e)}\subset\mathscr{E}$）的同构类，右侧的态射涉及霍奇滤过（$\omega\subset\mathscr{E}$）的同构类。

6.2.2. 性质。定理如下：

定理 6.8。

(1) 分层 $(\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda})_{\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 构成$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$的良好分层。换言之，对任意 $\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K$，都有闭包关系

$$\overline{\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda}}=\bigcup_{\lambda'\leq\lambda}\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda'}$$

(2) 对任意 $\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K$，分层 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda}$是维数为$\langle\rho,|\mu_\bullet|+\lambda\rangle$的光滑拟射影簇。

证明。 先证明第 (1) 点。根据命题 3.16 我们有卷积乘积的一个良好分层

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mu_\bullet}=\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}m^{-1}(\mathrm{Gr}_{\lambda})$$

~由于卷积态射 m: $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}\to\mathrm{Gr}^{\leq|\mu_\bullet|}$ 是 L^+G-等变的，这个分层在 L^+G的作用下保持不变。换言之，每个分层都是 L^+G-轨道的并。因此，这个分层下降到商上，得到海克栈$_{\mu_\bullet}=\left[L^+G\backslash\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}\right]$ 的一个良好分层：

$$\mathrm{Hecke}_{\mu_\bullet}=\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}\left[L^+G\backslash m^{-1}(\mathrm{Gr}_{\lambda})\right]$$

与 PEL 情形的证明相同（见 6.1.2），利用态射

$$\tilde{\zeta}:\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}\to\mathrm{Hecke}_{\mu_\bullet}$$

是光滑的，因此保持闭包关系。

现在证明 (2)。根据定理 3.7，限制在与 $_{\lambda}$ 相联系的分层 Gr $_{\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 上时，我们有一个局部平凡纤维化

$$m:m^{-1}(\mathrm{Gr}_{\lambda})\longrightarrow\mathrm{Gr}_{\lambda}$$

特别地，在这样的分层之上，态射是平坦的，因此有关系

$$\dim m^{-1}(\mathrm{Gr}_{\lambda})=\dim\mathrm{Gr}_{\lambda}+\dim m^{-1}(y)$$

对于任意元素 $y\in\mathrm{Gr}_{\lambda}$。根据定理 3.7，纤维 $m^{-1}(y)$ 是等维的，其维数为 $\mathrm{h}\rho$, $|\mu_\bullet|-\lambda\mathrm{i}$，因为 $\mu_\bullet=(\mu_1,\ \ldots\mu_e)$ 由微小余特征构成。在局部模型 $M^{\mathrm{PR}}_{\lambda}=\sim m^{-1}$ (Gr_{λ}) 上，通过识别 $M_{\mathrm{PR}}\simeq\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$ 来定义。局部模型给出一个态射

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda}\to\left[M^{\mathrm{PR}}_{\lambda}/\mathcal{G}\right]$$

它是光滑的，且相对维数为 dim G。右边的项维数为 M_λ^{PR} –dim G。因此最终确实得到

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}} &= \dim\left[M_\lambda^{\mathrm{PR}}/\mathcal{G}\right] + \dim \mathcal{G} \\ &= \dim M_\lambda^{\mathrm{PR}} + \dim \mathcal{G} - \dim \mathcal{G} \\ &= \dim m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda) \\ &= \dim \mathrm{Gr}_\lambda + \dim m^{-1}(y) \\ &= \langle 2\rho, \lambda\rangle + \langle \rho, |\mu_\bullet| - \lambda\rangle \\ &= \langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda\rangle\end{aligned}$$

□

注释 6.9。 再次，我们可以更明确地说明各分层的维数。对于 $\lambda = (i,\ j) \leq (e,\ 0)$，我们得到

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{S}h_{(i,j)}^{\mathrm{PR}} &= \langle \rho, |\mu_\bullet| + \lambda\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \alpha_1 - \alpha_2, (e+i)\lambda_1 + j\lambda_2\rangle \\ &= e + i - j \\ &= e - j\end{aligned}$$

6.3. 一般情形。现在我们回到次数为 $d > 1$ 的扩张 $F/\mathbb{Q}$。对于任意 $v|p$、$\tau \in \Sigma_v^{\mathrm{nr}}$ 和任意 $1 \leq \ldots i \leq e_v$，记 $\mu_{v,\tau,i} = (1, 0)$、$\mu_{v,\tau,\bullet} = (\mu_{v,\tau}, 1, \ldots, \mu_{v,\tau,e_v})$、$\mu_{v,\tau} = |\mu_{v,\tau,\bullet}| = (e_v, 0)$，最后记 $\mu := (\mu_{v,\tau})_{v,\tau}$。式 (4.5) 中描述的局部模型与乘积的相容性启发我们作出如下定义：设 $x \in |\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}|$，定义不变量：

$$\mathrm{Hodge}(x) = \left(\mathrm{Hodge}_{v,\tau}(x)\right)_{v,\tau} \in \prod_{v,\tau}\{\lambda \leq (e_v, 0)\} = \mathrm{Adm}(\mu)_K$$

其中，$\mathrm{Hodge}_{v,\tau}(x) = \mathrm{Hodge}(\omega_{x,v,\tau})$ 是在 6.1.1 中定义的霍奇不变量，且 $\omega_{x,v,\tau}$ 是与 x 关联并在（5.3）中定义的层。换言之，上述霍奇不变量 $\mathrm{Hodge}(\omega)$ 对应于分解中每一项的霍奇不变量 $\mathrm{Hodge}(\omega_{v,\tau})$。

$$\omega = \bigoplus_{v|p}\bigoplus_{\tau\in\Sigma_v^{\mathrm{nr}}} \omega_{v,\tau}$$

在 $\mathrm{Adm}(\mu)_K$ 上赋予以下偏序关系：

$$(\lambda_{v,\tau})_{v,\tau} \leq (\lambda'_{v,\tau})_{v,\tau} \iff \lambda_{v,\tau} \leq \lambda'_{v,\tau}\ \forall (v,\tau)$$

定理 6.8的推广形式如下：

定理 6.10。

(1) 分层 $(\mathcal{S}^{h_{\lambda_{v,\tau}}^{\mathrm{PR}}})_{\lambda_{v,\tau}\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}$ 构成 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$ 的良好分层。换言之，对于任意 $(\lambda_{v,\tau})_{v,\tau} \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，都有闭包关系

$$\overline{\mathcal{S}h_{(\lambda_{v,\tau})_{v,\tau}}^{\mathrm{PR}}} = \bigcup_{(\lambda'_{v,\tau})_{v,\tau}\leq(\lambda_{v,\tau})_{v,\tau}} \mathcal{S}h_{(\lambda'_{v,\tau})_{v,\tau}}^{\mathrm{PR}}$$

(2) 对于任意 $(\lambda_{v,\tau})_{v,\tau} \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，分层 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{\lambda_{v,\tau}}$ 是维数为以下数值的光滑拟射影：

$$\dim \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda_{v,\tau})_{v,\tau}} = \sum_{v,\tau} \langle \rho, |\mu_{v,\tau,\bullet}| + \lambda_{v,\tau} \rangle$$

注 6.11。请注意，在惯性次数为 $L/\mathbb{Q}_p$ 的扩张 $f > 1$ 的情形下，上述霍奇分层与 [BH22b] 中定义的霍奇分层并不一致。事实上，同上 中定义的分层较为粗略，因为它是由 [BH16] 的霍奇多边形定义的，而该多边形是对 f 本文分层所考察的霍奇不变量取平均得到的。更多细节请参见 [SZ22]命题 3.20。

6.4. **其他结果**。当 PEL 数据存在分歧时，研究相关 Shimura 簇特殊纤维几何的目标之一，是细化霍奇分层。换言之，对于任意 $\lambda \in$Adm$(\mu)_K$，我们希望定义一个分解：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{\lambda} = \coprod_{w \in W_\Lambda} S_w$$

其中 $(W_\lambda, \trianglelefteq)$ 是一个依赖于 λ 的偏序集。下面给出几个例子：

(1) 在 [SYZ21] 中，作者为每个霍奇分层定义了一个光滑态射：

$$\zeta_\lambda : \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{\lambda} \longrightarrow \mathcal{G}_0^{\mathrm{rdt}}\text{-}\mathtt{Zip}^{J_\lambda}$$

其中 $\mathcal{G}_0^{\mathrm{rdt}}$表示 $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ 的约化商，而 $\mathcal{G}_0^{\mathrm{rdt}}$-$\mathtt{Zip}^{\lambda}$ 表示 $\mathcal{G}_0^{\mathrm{rdt}}$-$\mathtt{Zip}$ 型的模叠 J_λ (参见 [SYZ21] 定义 1.1.5 和命题 4.2.6)。因此，该分层定义为通过态射 $\mathcal{G}_0^{\mathrm{rdt}}$-$\mathtt{Zip}^{J_\lambda}$ 从 ζ_λ诱导的模叠 p

(2) 在[AG03] 中，作者显式计算了每个分层上的牛顿多边形。更准确地说，若 $x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(i,j)}$ 满足 $(i,j) \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，则存在一个与之相关的 Dieudonné 模的 $(\mathcal{O}_L \otimes W(k))$-基，在该基下 Frobenius 由矩阵 ([AG03], 命题 4.10) 给出：

$$F = \begin{pmatrix} \varpi^m & c\varpi^i \\ \varpi^j & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $m \geq j$ 和 $c \in (\mathrm{O}_L \otimes W(k))^\times$。随后他们定义以下量：

$$n = \begin{cases} m & \text{si } m \leq i \\ i & \text{sinon} \end{cases} \qquad \lambda(n) = \min\left\{ \frac{n}{g}, \frac{1}{2} \right\}$$

于是，$\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(i,j)}$ 的分层通过这个不变量 n 定义：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(i,j)} = \bigcup_{j \leq n \leq i} \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(i,j),n}$$

这个不变量使他们能够显式计算每个分层上的牛顿多边形 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(i,j),\ n}$。更确切地说，如果 $x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(i,j),\ n}$ 那么（[AG03],定理 9.2）：

$$\mathrm{Newt}(x) = \{\lambda(n), \ldots, \lambda(n), 1-\lambda(n), \ldots, 1-\lambda(n)\}$$

（每个斜率的重数为 e。）

（3）在[YCO20] 中，作者为每个点 $x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 赋予一个不变量 $c(x) = (c_\tau(x))_{\tau\in\Sigma^{\mathrm{nr}}}$，称为同余不变量，用来度量各滤过的相对位置（更准确地说，见 [YCO20]定义 5.2）：

$$F(M_{\sigma^{-1}\tau}) \subset M_\tau, \quad V(M_{\sigma\tau}) \subset M_\tau$$

其中 $(M,\ F,\ V)$ 表示与 x 相关联的 Dieudonné 模，而 $(M_\tau)_{\tau\in\Sigma^{\mathrm{nr}}}$ 表示分解中的直和因子

$$M \simeq \bigoplus_{\tau\in\Sigma^{\mathrm{nr}}} M_\tau, \quad F : M_{\sigma^{-1}\tau} \to M_\tau, \quad V : M_{\sigma\tau} \to M_\tau$$

这个不变量可用来定义一个分层（[YCO20]定义 6.1）：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda = \coprod_{c\in\tau_L} \mathcal{Q}_c(\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda)$$

其中 $\mathcal{Q}_c(\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda)$ 表示同余不变量为 $c \in \tau_L$ 且τ_L 是在 [YCO20] 定义 3.2.1 中定义的某个集合。

这三篇文章分别提出了两个问题:

（1）计算 S_w 在 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda$ 中的闭包。（2）计算 S_w 在 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 中的闭包

在 [YCO20] 中，作者成功计算了问题（1）。在 [AG03] 和 [SYZ21]中，作者成功计算了问题（2）。下面的定理表明，当通过遗忘态射 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_\lambda$考察一个 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda$的分层的拉回时，问题（1）对于 $\pi : \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} \to \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}$是自动成立的。

定理 6.12。对于任意 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$，限制映射

$$\pi : \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_\lambda \to \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda$$

是一个平坦态射。

证明。限制到不变量为 $\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K$ 笛卡尔方块（5.2）变为

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_\lambda & \longrightarrow & \left[M^{\mathrm{PR}}_\lambda/\mathcal{G}\right] \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{p}} \\ \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_\lambda & \longrightarrow & \left[M^{\mathrm{PEL}}_\lambda/\mathcal{G}\right] \end{array}$$

它本身也是笛卡尔方块。只需证明态射 $\overline{p}$ 是平坦的。后者包含在一个笛卡尔方块中

$$\begin{array}{ccc} M_\lambda^{\mathrm{PR}} & \xrightarrow{p} & M_\lambda^{\mathrm{PEL}} \\ \downarrow & & \downarrow q \\ \left[M_\lambda^{\mathrm{PR}}/\mathcal{G}\right] & \xrightarrow[\overline{p}]{} & \left[M_\lambda^{\mathrm{PEL}}/\mathcal{G}\right] \end{array}$$

而由定理 3.7 和 (4.8)，态射 p 是局部平凡的，因此特别是平坦的（底概形 Spec k 是一个域）。态射 q 是忠实平坦的，由 [Sta18], 引理 100.25.4。□

推论 6.13。若 $\mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}} = \coprod_{w\in W} S_w$ 是一个良好分层，则

$$\mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}} = \coprod_{w\in W} \pi^{-1}(S_w)$$

也同样是一个良好分层。

证明。由前一个命题可知，态射 π 在限制到一个分层 $\mathrm{S}h_\lambda^{\mathrm{PEL}}$时是平坦的，因此特别是开映射。□

7. 部分哈斯不变量

现在我们将描述前一节定义的霍奇分层与 [RX14], 中定义的部分哈斯不变量之间的相互作用，其中分歧指数满足 $e \leq 4$。不失一般性，我们可以将讨论限制在一个素位 $v|p$，因此考虑一个 p-可除群 G，其带有整数环$\mathcal{O}_L$ 的作用，其中 $L/\mathbb{Q}_p$ 是一个次数为 d的扩张。为便于阅读，我们先回顾$loc\ cit$中的各种定义。

7.1. 定义。

7.1.1. 哈斯不变量。 设 G 是定义在特征为 p的概形 S 上的 Barsotti-Tate 群。Verschiebung Ver：$G^{(p)} \to G$ 诱导出一个态射：

$$\mathrm{Ver}^* : \omega_G \longrightarrow \omega_G^{(p)}$$

取该态射的行列式，得到一个截面

$$\mathrm{Ha}(G) \in H^0(S, (\det \omega_G)^{\otimes(p-1)}) \tag{7.1}$$

称为哈斯不变量。于是有以下命题：

命题 7.1。设 G 是域 k 上特征为 $p>0$的 p-可除群。那么，当且仅当 G 是普通的时，$\mathrm{Ha}(G)$ 可逆。

7.1.2。 部分哈斯不变量。 设 (G,ι) 是一个 p-可除群，定义在 S 上，并带有作用 $\iota:\mathcal{O}_L\to \mathrm{End}_S(G)$。假设 (G,ι) 带有一个 Pappas-Rapoport 数据 $(\mathscr{E}_\tau,\omega_{G,\tau})_\tau$一个 Pappas-Rapoport 数据（见 5.8）。对任意 $2\le i\le e$，定义映射 $M_\tau^{(i)}$为在分次对象上的乘法:

$$M_\tau^{(i)}:\omega_{G,\tau}^{(i)}/\omega_{G,\tau}^{(i-1)}\longrightarrow \omega_{G,\tau}^{(i)}/\omega_{G,\tau}^{(i-2)}$$

该态射诱导出一个称为 原始哈斯不变量 的截面:

$$m_\tau^{(i)}(G)\in H^0(S,\det(\omega_{G,\tau}^{[i-1]}/\omega_{G,\tau}^{[i-2]})\otimes\det(\omega_{G,\tau}^{[i]}/\omega_{G,\tau}^{[i-1]})^{-1})$$

例如，在 Hilbert 情形下，也就是说，当 $\dim(G)=dg=d$ 时，我们有以下刻画 Rapoport 位的命题:

命题 7.2。 假设 $S=$ 谱 k。以下条件等价:

(1) 霍奇$_\tau(G,\iota)=(e,0)$*(2)* 对任意 $2\le i\le e$, $m_\tau^{(i)}\neq 0$ *(3)* $\omega_{G,\tau}$ 是一个 $\mathcal{O}_L\otimes_{\mathbb{F}_p}\mathcal{O}_S$-自由模，秩为 1。

证明。 (1) 推出 (2)，以及 (3) 推出 (1)，显然成立。对于 (2) 推出 (3)，只需取一个向量 $v\in\omega_\tau^{(e)}\backslash\omega_\tau^{(e-1)}$，并验证 $\mathbf{h}\varpi^{e-1}v,\dots,\varpi v,v\mathbf{i}$ 是 $\omega_\tau^{(e)}$ 的一组基。□

注记 7.3. 同样的证明也适用于希尔伯特-西格尔情形。

定义 7.4. 设 $(G,\iota,\omega_G^{(\cdot)},\tau)$ 是域 k 上带有 *Pappas-Rapoport* 数据的 p-可除群。对任意 $1\le i\le e$，定义:

$$\mathrm{Hodge}(\omega_{G,\tau}^{(i)}):=\mathrm{Hodge}(\Lambda_{\omega_{G,\tau}^{(i)}})=\mathrm{Inv}(\Lambda_{\omega_{G,\tau}^{(i)}},\Lambda_0)\in\mathbb{X}_*(T)^+$$

通过构造 (4.3) （关于 $\mathrm{Hodge}(\omega_{G\tau,}^{(e)})$ 的显式描述，见第 *6.1* 节）。

注记 7.5. 在上述定义中，我们采用了不同于 [Bij22] 中所用的约定。更具体地说，若 $(G,\iota,\omega_G^{(\cdot)},\tau)$ 是域 k 上带有 Pappas-Rapoport 数据的 p-可除群，则层 $\omega_{G,\tau}^i$ 是一个满足 $\varpi^i\cdot\omega_{G,\tau}^{(i)}=0$ 的 $\mathrm{O}_L\otimes k$-模。通过同构 $\varpi\mapsto u$，因此可以将它视为一个$k[u]/(u^e)$-模，也可以视为一个 $k[u]/(u^i)$-模。在构造 (4.3) 中，我们将它视为一个 $k[u]/(u^e)$-模，而在[Bij22] 中，它被视为一个 $k[u]/(u^i)$-模。

接下来我们将需要以下引理:

引理 7.6. 设 $\tau\in\Sigma^{nr}$, $2\le i\le e$和 $x\in\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$。记 $(G,\iota,\omega_G^{(\cdot)},\tau)$ 为与 *Pappas-Rapoport* 数据相关联的p-可除群。若 $m_\tau^{(i)}(x)=0$，则有等式

$$\mathrm{Hodge}(\omega_{G,\tau}^{(i)})=\mathrm{Hodge}(\omega_{G,\tau}^{(i-2)})-(1,1)$$

证明。 根据定义，如果 $m_\tau^{(i)}=0$ 我们有 $\omega_\tau^{(i)}\subset\varpi^{-1}(\omega_\tau^{(i-2)})$（这里用到分次对象的维数为 1）。通过简单计算各自的维数可知，这个包含关系实际上是等式。结论由此得出。□

注 7.7。 请注意，反命题当然并不成立。

注 7.8. 还需注意，对于 $g \geq 2$，前述引理在希尔伯特-西格尔情形下并不成立。这是因为行列式可能为零，但映射 $M_\tau^{(i)}$ 却不一定为零。

7.1.3. Verschiebung V：$G^{(p)} \to G$ 诱导出一个映射

$$V_\tau : \mathscr{E}_\tau \to \omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(p)} = (\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e)})^{(p)} \tag{7.2}$$

（见 2.1.4）。考虑如下复合映射：

$$\mathscr{E}_\tau[\varpi] \simeq \mathscr{E}_\tau/\mathscr{E}_\tau[\varpi^{e-1}] \xrightarrow{V_\tau} (\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e)}/\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e-1)})^{(p)}$$

换言之，若 $x \in \mathscr{E}_\tau[\varpi]$，则对于某个 $y \in \mathscr{E}_\tau$ 有 $x = \varpi^{e-1} \cdot y$，此时将 $V_\tau(y)$ 与之对应。将该态射限制到 $\omega_{G,\tau}^{(1)} \subset \mathscr{E}_\tau[\varpi]$ 后，最终得到一个态射：

$$\mathrm{Ha}_\tau : \omega_{G,\tau}^{(1)} \to (\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e)}/\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e-1)})^{(p)} \tag{7.3}$$

因此得到一个截面

$$ha_\tau(G) \in H^0(S, \det(\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e)}/\omega_{G,\sigma^{-1}\tau}^{(e-1)})^{\otimes p} \otimes \det(\omega_{G,\tau}^{(1)})^{-1})$$

也称为部分哈斯不变量。

注 7.9. 为统一记号，定义 $m_\tau^{(1)} := ha_\tau$。

7.2. **分层**。 在 [DK22] 中，作者研究了由这些部分哈斯不变量诱导的特殊纤维分层。更确切地说，若记

$$\mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}} = \{x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} \mid m_\tau^i(x) = 0 \text{ ssi } (\tau, i) \in T\}, \quad T \subset \Sigma^{nr} \times \{1, \ldots, e\}$$

为由指标属于 T 的部分哈斯不变量的零点轨迹定义的局部闭子概形，则有如下定理

定理 7.10 ([DK22], 命题 5.8)。 这些 $(\mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}})_T$ 对于 $T \subset \Sigma^{nr} \times \{1, \ldots, e\}$ 定义了 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$ 的良好分层。更确切地说，对于任意 $T \subset \Sigma^{nr} \times \{1, \ldots, e\}$：

$$\overline{\mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}}} = \bigcup_{T' \subset T} \mathcal{S}h_{T'}^{\mathrm{PR}}$$

此外，每个分层 $\mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}}$ 均非空、准仿射且等维，其维数为 $d - |T|$。

7.3. **与霍奇分层的相互作用：情形** $e = 4$。 我们有 Pappas-Rapoport 模型的特殊纤维的两种分层：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} = \coprod_{\lambda \in \mathrm{Adm}(\mu)_K} \mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}}, \quad \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} = \coprod_{T \in \mathscr{T}} \mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}}$$

其中 $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Sigma^{\mathrm{nr}} \times \{1, \ldots, e\})$ 表示 $\Sigma^{\mathrm{nr}} \times \{1, \ldots, e\}$ 的子集。自然会想知道这种分解在多大程度上

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} = \coprod_{(\lambda,T) \in \mathrm{Adm}(\mu)_K \times \mathscr{T}} \mathcal{S}h_{(\lambda,T)}^{\mathrm{PR}}, \quad \mathcal{S}h_{(\lambda,T)}^{\mathrm{PR}} := \mathcal{S}h_\lambda^{\mathrm{PR}} \cap \mathcal{S}h_T^{\mathrm{PR}}$$

提供了良好分层。由此产生两个问题：

(1) 哪些分层 $\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}$ 非空?

(2) 如果该分层是良好分层，那么描述各分层闭包关系的有序对 $(\lambda,\ T)$ 上的偏序关系是什么?

关于第 (1) 点，命题 7.2 告诉我们，对于 $\lambda=(e,\ 0)$，$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}=\emptyset$ 当且仅当存在一个指标 $(\tau,\ i)\ \in T\in\mathscr{T}$ 满足 $i\geq 2$。一般来说，似乎很难预测哪些分层非空。我们将回答这个问题，并描述霍奇分层与按不变量 $(m^{(i)})_i$ 划分的分层之间的相互作用，$L/\mathbb{Q}_p$ 其中扩张是完全分歧的，次数为$e=4$。由于该扩张完全分歧，我们可以省略指标 τ，因此有 $\mathscr{T}=\mathscr{P}(\{1,\ .....,\ e\})$。

定义 7.11. 定义以下集合:

$$\mathscr{T}_\lambda=\{T\in\mathscr{P}(\{2,\dots,e\})\mid \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}\neq\emptyset\}\quad\forall\,\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K \tag{7.4}$$

$$\mathscr{T}_{\mu_\bullet}=\{(\lambda,T)\in\mathrm{Adm}(\mu)_K\times\mathscr{P}(\{2,\dots,e\})\mid \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}\neq\emptyset\}$$

根据这些集合的定义，有集合 $\mathscr{T}_{\mu_\bullet}$ 的一个分解 :

$$\mathscr{T}_{\mu_\bullet}=\coprod_{\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K}\mathscr{T}_\lambda$$

注记 7.12. 由集合 $\mathscr{T}_{\mu_\bullet}$ 定义的分层完全是“线性的”，因为它由 m_i 关于 $i\geq 2$ 的不变量以及霍奇不变量定义，而这些都是“线性”不变量（与不变量 $m_1=ha$ 相对，后者是一个 σ-线性不变量）。

注记 7.13. 实际上，由集合 $\mathscr{T}_{\mu_\bullet}$ 诱导的分层对应于卷积积 $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$ 的一个 $\widetilde{}$ 分层。因此，上述定义的分层是“线性的”，因为它只取决于局部模型 M^{PR}。

定义 7.14. 定义以下集合:

$$\mathscr{T}^{(m_1=0)}_{\mu_\bullet}=\{(\lambda,T)\in\mathrm{Adm}(\mu)_K\times\mathscr{T}\mid \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}\neq\emptyset,\ m_1\in T\}$$

$$\mathscr{T}^{(m_1\neq 0)}_{\mu_\bullet}=\{(\lambda,T)\in\mathrm{Adm}(\mu)_K\times\mathscr{T}\mid \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}\neq\emptyset,\ m_1\notin T\}$$

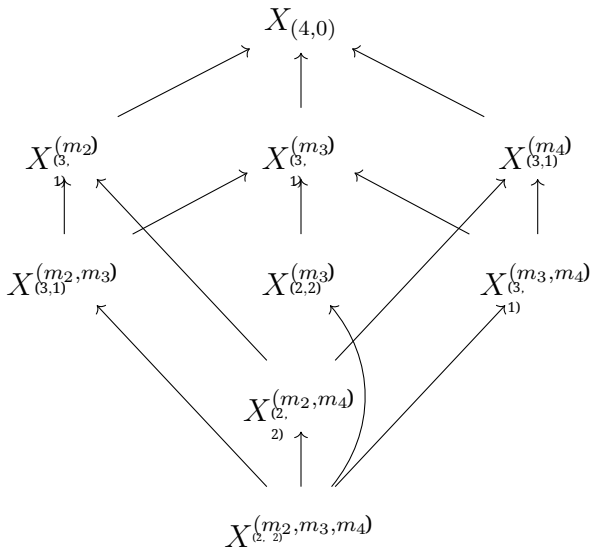
$$\mathscr{A}_{\mu_\bullet}=\{(\lambda,T)\in\mathrm{Adm}(\mu)_K\times\mathscr{T}\mid \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}\neq\emptyset\}$$

根据这些集合的定义，有:

$$\mathscr{A}_{\mu_\bullet}=\mathscr{T}^{(m_1=0)}_{\mu_\bullet}\coprod\mathscr{T}^{(m_1\neq 0)}_{\mu_\bullet}$$

首先，我们将描述 Hodge 分层与由 $m^{(i)}$ 对于 $i=2,\ 3,\ 4$ 所定义的分层之间的相互作用。随后，我们会将不变量 $m_1=ha$ 纳入讨论。这样，我们的问题就简化为关于帕帕斯–拉波波特滤过 $\omega^{(\cdot)}$ 的一个线性代数问题。为简化记号，我们记 $X^{(m_i)}_{\lambda\quad i\in T}=\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}$。

7.3.1. 不变量 $(m_i)_{i\geq 2}$。 下图描述了非空分层及其之间的闭包关系，约定 $A \to B$ 当 $A \subset \overline{B}$。



(7.5)

目前这个问题纯粹是一个线性代数问题，因此我们将采用仿射格拉斯曼簇背景下使用的记号（通过构造（4.3））。

首先，让我们开始证明关于空分层的断言。我们将详细说明情形（1）。其他情形非常相似，因此我们只给出关键论证。

（1） $X^{(m_2,m_4)}{}_{(3,\ 1)} = \emptyset$。先验地，我们有如下不交并分解：

$$X^{(m_2,m_4)} = X^{(m_2,m_4)}_{(3,1)} \cup X^{(m_2,m_4)}_{(2,2)}$$

（回顾一下，分层 $X^{(m_2,m_4)}{}_{(4,\ 0)}$ 根据引理 7.2 是空的）。设 $x \in X^{(m_2,m_4)}$。为简化记号，将 $\Lambda_1 \subset \cdots \subset \Lambda_4$ 滤过$\Lambda_{\omega_x^{(1)}} \subset \cdots \subset \Lambda_{\omega_x^{(4)}}$记为与该点相关联的滤过（见（4.3））。根据引理 7.6，由于 $m_2(x) = m_4(x) = 0$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hodge}(\Lambda_4) &= \mathrm{Hodge}(\Lambda_2) - (1,1)\\ &= \mathrm{Hodge}(\Lambda_0) - (1,1) - (1,1)\\ &= (2,2)\end{aligned}$$

因此，$X^{(m_2,m_4)} = X^{(m_2,m_4)}{}_{(2,\ 2)}$ 以及 $X^{(m_2,m_4)}{}_{(3,\ 1)} = \emptyset$。

(2) $X^{(m_4)}{}_{(2,2)} = \emptyset$。由于 $m_4 = 0$ 根据 7.6 可得：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hodge}(\Lambda_4) &= \mathrm{Hodge}(\Lambda_2) - (1,1)\\ &= (4,2) - (1,1)\\ &= (3,1)\end{aligned}$$

其中使用了 $m_2 \neq 0$ 以得到霍奇$(\Lambda_2) = (4,\ 2)$。

(3) $X^{(m_3,m_4)}{}_{(2,\ 2)}=\emptyset$。理由同上。(4) $X^{(m_2)}{}_{(2,\ 2)}=\emptyset$。设 $v\in\omega^{(4)}\backslash\omega^{(3)}$。有 $u\cdot v\in\omega^{(3)}\backslash\omega^{(2)}$，因为 $m_4\neq 0$。接下来，由于 $m_2=0$，有 $\omega^{(2)}=\mathscr{O}[u]$，因此 $u^2\cdot v\neq 0$。特别地，霍奇 $(\omega^{(4)})>(2,\ 2)$ (5) $X^{(m_2,m_3)}{}_{(2,\ 2)}=\emptyset$。理由同上。

要证明上述概形的各分层非空，找到合适的滤过相当简单。换句话说，我们计算了集合 $\mathscr{T}_\lambda$ 对所有 $\lambda\in\mathrm{Adm}(\mu)_K$ (采用 (7.4) 中的记号):

$$\mathscr{T}_{(4,0)}=\{\emptyset\} \tag{7.6}$$
$$\mathscr{T}_{(3,1)}=\{(m_2),(m_3),(m_4),(m_2,m_3),(m_3,m_4)\} \tag{7.7}$$
$$\mathscr{T}_{(2,2)}=\{(m_3),(m_2,m_4),(m_4),(m_2,m_3,m_4)\} \tag{7.8}$$

现在证明关于闭包关系的断言。

根据定理 7.10不变量 $(m_i)_i$ 构成了$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$的良好分层。特别地，根据引理 2.10 这意味着可以“反转”一个不变量而不影响其他不变量。更准确地说:

命题 7.15。若 $x\in X^{(m_i)_{i\in T}}_\lambda$ 且 $T\neq\emptyset$，那么对所有 $i_0\in T$，存在 $\lambda'\in\mathrm{Adm}(\mu)_K$和 $y\in X^{(m_i)_{i\in T'}}_{\lambda'}$，使得 $x\in\overline{\{y\}}$ 其中 $T'=T\backslash\{i_0\}$。

证明。这是 7.10与 2.10的结合。 □

问题在于，在上述命题中，我们无法在变形过程中控制霍奇多边形。然而，我们已经证明某些分层$X^{(m_i)_{i\in T}}_\lambda$是空的，因此可以利用这一点来描述变形过程中的霍奇多边形。

例 7.16。设 $x\in X^{(m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,2)}$，并设 $y\in X^{(m_2,m_4)}_\lambda{}_{(3,1)}$ 是一个满足 $x\in\overline{\{y\}}$ 的点（由前一个命题给出）。根据7.3.1，分层 $X^{(m_2,m_4)}{}_{(3,1)}$ 为空，这就要求等式 $\lambda=(2,2)$ 成立。这表明，对于任意点 $x\in X^{(m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,2)}$，都存在一个$y\in X^{(m_2,m_4)}{}_{(2,2)}$。换言之，这证明了闭包关系 $X^{(m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,2)}\subset\overline{X^{(m_2,m_4)}{}_{(2,2)}}$。

我们还可以利用这样一个事实：霍奇不变量在泛化过程中只会增大（换言之，霍奇多边形在泛化过程中会下降）。更确切地说，若 $x\in X_\lambda$ 和 $y\in X_{\lambda'}$ 满足 $x\in\overline{\{y\}}$ 则 $\lambda\leq\lambda'$，这可由定理 6.8推出，不过该定理的结论要强得多。

例 7.17. 设 $x\in X^{(m_2,m_3)}{}_{(3,1)}$，并设 $y\in X^{(m_3)}_\lambda{}_{(3,1)}$ 是一个满足 $x\in\overline{\{y\}}$ 的点（由前一个命题给出）。由于霍奇不变量在泛化过程中只能增大，因此必有 Hodge$(y)\geq(3,1)$。根据 7.3.1，(4,0) 这种情况不可能，因此必有 Hodge$(y)=(3,1)$。这表明，对于任意点$x\in X^{(m_2,m_3)}{}_{(3,1)}$，都存在一个 $y\in X^{(m_3)}{}_{(3,1)}$。换言之，这证明了闭包关系$X^{(m_2,m_3)}{}_{(3,1)}\subset\overline{X^{(m_3)}{}_{(3,1)}}$。

上述两个例子适用于除以下情况外的所有闭包关系：

$$X_{(2,2)}^{(m_2,m_3,m_4)} \subset \overline{X_{(2,2)}^{(m_3)}}, \qquad X_{(2,2)}^{(m_3)} \subset \overline{X_{(3,1)}^{(m_3)}}$$

在第一种情形中，问题在于分层 $X^{(m_3)}{}_{(3,1)}$ 非空，因此上述推理不成立。在第二种情形中，需要在由方程 $m_3 = 0$ et$m_2, m_4 \neq 0$定义的分层内对霍奇多边形进行变形。

(1) $X^{(m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,2)} \subset \overline{X^{(m_3)}{}_{(2,2)}}$。设 $x \in X^{(m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,2)}$，并令 $0 \subset \omega^{(1)} \subset \omega^{(2)} \subset \omega^{(3)} \subset \omega^{(4)}$ 为相应的滤过。根据定义，有以下等式：

$$\omega^{(2)} = \mathscr{E}[u] = \omega^{(1)} \oplus \langle v_2 \rangle, \quad \omega^{(3)} = u^{-1}(\omega^{(1)}), \quad \omega^{(4)} = u^{-1}(\omega^{(2)}) = \mathscr{E}[u^2]$$

对于某个固定的 $v_2 \in \omega^{(2)}$。我们在 $k[\![t]\!]$ 上定义如下变形：

$$\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \otimes_k k[\![t]\!], \quad \widetilde{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)} \otimes_k k[\![t]\!]$$

$$\widetilde{\omega}^{(2)} = \widetilde{\omega}^{(1)} \oplus \langle v_2 + tv \rangle, \quad \widetilde{\omega}^{(3)} = u^{-1}(\widetilde{\omega}^{(1)}), \quad \widetilde{\omega}^{(4)} = \widetilde{\mathscr{E}}[u^2]$$

对于某个 $v \in u^{-1}(\widetilde{\omega}^{(1)}) \setminus \widetilde{\mathscr{E}}[u]$，我们选取它。由一般纤维上的构造可知，此滤过确实满足方程 $m_2 \neq 0$，$m_4 \neq 0$，$m_3 = 0$以及霍奇$(\widetilde{\omega}^{(4)}) = (2, 2)$。

(2) $X^{(m_3)}{}_{(2,2)} \subset \overline{X^{(m_3)}{}_{(3,1)}}$。设 $x \in X^{(m_3)}{}_{(2,2)}$，$0 \subset \omega^{(1)} \subset \omega^{(2)} \subset \omega^{(3)} \subset \omega^{(4)}$ 为相应的滤过。根据定义，有以下等式：

$$\omega^{(3)} = u^{-1}(\omega^{(1)}), \quad \omega^{(4)} = \mathscr{E}[u^2]$$

设 $v^{(4)} \in \omega^{(4)}$ 使得 $\omega^{(4)} = \omega^{(3)} \oplus \mathbf{h}v^{(4)}\mathbf{i}$。我们选取一个元素 $v \in u^{-1}(\omega^{(3)}) \setminus \mathscr{E}[u^2]$。按如下方式定义 $k[\![t]\!]$ 上的变形：

$$\widetilde{\mathscr{E}} = \mathscr{E} \otimes_k k[\![t]\!], \quad \widetilde{\omega}^{(i)} = \omega^{(i)} \otimes_k k[\![t]\!], \quad i = 1, 2, 3$$

et

$$\widetilde{\omega}^{(4)} = \widetilde{\omega}^{(3)} \oplus \langle v^{(4)} + tv \rangle$$

在一般纤维上，这个滤过确实满足方程 $m_2 m_4 \neq 0, m_3 = 0$和霍奇$(\widetilde{\omega}^{(4)}) = (3, 1)$，因为根据构造，$u^2(v_4 + tv) \neq 0$。

7.3.2. 不变量 $m_1 = ha$。现在我们来关注不变量 $m_1 = ha$。我们希望能够“反转” ha，同时不改变其他部分哈斯不变量，也不改变霍奇不变量。对于任意次数的完全分歧扩张 $L/\mathbb{Q}_p$，有如下命题：

命题 7.18。设 $x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}$。假设 $1 \in T$，也就是说，$m_1(x) = 0$。那么存在 $y \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T')}$，使得 $y \rightsquigarrow x$，其中 $T' = T \setminus \{1\}$。

证明。设 $x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}$ 定义在域 k上。记 $\mathscr{E}$为相伴晶体。我们将构造该晶体在 $k[\![t]\!]$ 上的一个变形，使得一般纤维上 ha $\neq 0$，且其他不变量保持不变。设 $\mathscr{F}^{(1)} := F((\omega^{(e+1)})^{(p)})$

其中 $\omega^{(e+1)} := \varpi^{-1}(\omega^{(e-1)})$。由 [Bij16] 命题 3.12，存在一个同构 $\mathscr{E}[\varpi]/\mathscr{F}^{(1)} \simeq \left(\omega^{(e)}/\omega^{(e-1)}\right)_{(p)}$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \omega^{(1)} & \longrightarrow & \mathscr{E}[\varpi]/\mathscr{F}^{(1)} \\ & \searrow^{ha} & \downarrow \simeq \\ & & \left(\omega^{(e)}/\omega^{(e-1)}\right)^{(p)} \end{array}$$

由于分次对象的维数为 1，条件 $ha = 0$ 等价于等式 $\omega^{(1)} = \mathscr{F}^{(1)}$ 在 $\mathscr{E}[\varpi]$ 中成立。以下均将定义在 $R_n = k[t]/(t^n)$ 上的对象记作 $\mathscr{E}_{(n)}, \mathscr{F}_{(1)(n)}, \omega^{(k)}{}_{(n)}$ 等。

根据引理 2.7，我们有一个 $\mathscr{F}^{(1)}(2)$ 在 R_2 上的提升，它不依赖于在 R_2 上选择的提升 $\omega^{(e)}(2)$ 和 $\omega^{(e-1)}(2)$。设 $\Lambda^{(1)}(1) \subset \cdots \subset \Lambda^{(e)}(1) \in \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mu}(R_1)$ 是通过 4.4 与 $0 \subset \omega^{(1)}(1) \subset \cdots \subset \omega^{(e)}(1)$ 相关联的滤过。设 $(g_1, \ldots, g_e) \in \mathrm{GL}_2(R_1((u)))$ 满足：

$$\Lambda^{(i)}_{(1)} = g_i \cdot \Lambda^{(i-1)}_{(1)}, \qquad \Lambda^{(0)}_{(1)} = u^e \cdot \Lambda_0$$

令 $\Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}(2)}$ 为 $R_2[\![u]\!]$-格，对应于 $\mathscr{F}_{(1)(2)}$ 通过 4.4。接下来定义：

$$\Lambda^{(i+1)}_{(2)} = g_{i+1} \cdot \Lambda^{(i)}_{(1)}, \qquad \Lambda^{(1)}_{(2)} \neq \Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}_{(2)}}$$

其中，每个 $g_{i+1} \in \mathrm{GL}_2(R_2((u)))$ 在此都通过截面 $R_1 \to R_2$ 来看待，而 $\Lambda^{(1)}(2)$ 表示任意一个提升 $\Lambda^{(1)}(1)$ 且满足条件 $\Lambda^{(1)}(2) \neq \Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}}(2)$ 的 $R_2[\![u]\!]$-格。若记 $g_{\mathscr{F}} \in \mathrm{GL}_2(R_2((u)))$ 为定义 $\Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}}(2)$ 的环路，那么例如只需选取 $\Lambda^{(1)}(2) = (g \cdot g_{\mathscr{F}}) \cdot u^e\Lambda_0$，其中 $g \in \mathrm{GL}_2(R_2[\![u]\!])$ 提升 $\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}_2(R_2[\![u]\!])$ 且 $g \neq \mathrm{Id}$。仍然借助过程4.4，可得到满足$\omega^{(1)}(2) \neq \mathscr{F}^{(1)}_2()$ 的滤过 $0 \subset \omega^{(1)}(2) \subset \cdots \subset \omega^{(e)}(2)$。我们通过对 $n \geq 2$ 进行递归来继续这一过程。假设在 R_n 上给定了$\mathscr{E}_{(n)}, \omega^{(k)}{}_{(n)}$ 等。于是定义 R_{n+1} 上的变形为（采用与 $n = 2$ 情形类似的记号）：

$$\Lambda^{(i+1)}_{(n+1)} = g_{i+1} \cdot \Lambda^{(i)}_{(n+1)}, \qquad \Lambda^{(1)}_{(n+1)} \otimes_{R_{n+1}} R_n = \Lambda^{(1)}_{(n)}$$

其中 $\Lambda^{(1)}{}_{(n+1)}$ 表示 $\Lambda^{(1)}{}_{(n)}$ 在 R_{n+1} 上的任意提升。这个提升性质保证条件 $\Lambda^{(1)}{}_{(n+1)} \neq \Lambda_{\mathscr{F}^{(1)}{}_{(n+1)}}$ 成立（因为它在约化到 R_n 后成立）。仍然通过 4.4 中的方法，我们得到一个滤过 $0 \subset \omega^{(1)}{}_{(n+1)} \subset$

$\cdots \subset \omega_{(e)(n+1)}$ 在 R_{n+1} 上满足 $\omega_{(1)(n+1)} \neq \mathscr{F}_{(1)(n+1)}$。取极限后，我们得到一个 p-可除群 $G \in \mathrm{BT}_{\mathrm{PR}}(R)$，它带有一个作用 $\iota : \mathcal{O}_L \to \mathrm{End}(G)$ 以及帕帕斯-拉波波特滤过。通过 Gronthendieck-Messing 和 Serre-Tate，这为我们提供了一个态射：

$$\mathrm{Spec}\, k[\![t]\!] \to \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}$$

在一般纤维上，该滤过满足所需的性质：根据构造，滤过的相对位置没有改变，因此不变量 $(m_i)_i$ 以及霍奇不变量均没有改变。最后，$\lim \mathscr{F}^{(1)}{}_{(n)} \neq \lim \omega^{(1)}{}_{(n)}$，这同样由构造得出，从而确保在一般纤维上确有 $ha \neq 0$。□

注记 7.19. 上述证明中颇为令人意外的是，我们通过变形线性数据（帕帕斯–拉波波特滤过），改变了一个 σ-线性数据（不变量 m_1）。使这一过程成为可能的是引理 2.7 。如果我们想直接在 $k[\![t]\!]$上进行变形，那么计算层 $\mathscr{F}^{(1)}$将会很困难。

注记 7.20. 上述命题告诉我们，可以在不改变其他不变量的情况下反转不变量m_1。这是在由不变量 $(m_i)_{i\geq 2}$ 和霍奇不变量确定的固定分层内进行的一种变形。

现在我们必须处理逆命题：在 $m_1 = 0$ 中定义的变形的一般纤维上，方程是否成立？7.5？换言之，能否改变霍奇不变量和（m_i）$_i$，同时满足 ha $= 0$？基于与例子 7.16 和 7.17 相同的理由，只需讨论以下情形：

$$X_{(2,2)}^{(m_1,m_2,m_3,m_4)} \subset \overline{X_{(2,2)}^{(m_1,m_3)}}, \qquad X_{(2,2)}^{(m_1,m_3)} \subset \overline{X_{(3,1)}^{(m_1,m_3)}}$$

问题在于，7.3.1 中的变形不够精确，因为在变形过程中我们无法控制 Frobenius。因此，我们将根据命题7.18 证明中的思路调整这些变形：沿着 $R_{n+1} \to R_n$ 逐步进行变形，并使用引理2.7。

(1) $X_{(2)}^{(m_1,m_2,m_3,m_4}{}_{)\ (2,2)} \subset \omega^{(2)}{}_{(1)} \subset \omega^{(3)}{}_{(1)} \subset \overline{\omega^{(4)}{}_{(1)}}$. 设 $x \in X^{(m_1m_2,m_3,m_4}{}_{)\ (2,2)}$ 和 $0 \subset \omega^{(1)}{}_{(1)}$ 为相应的滤过。根据定义，有以下等式：

$$\omega_{(1)}^{(1)} = \mathscr{F}_{(1)}^{(1)}, \qquad \omega_{(1)}^{(2)} = \mathscr{E}_{(1)}[u]$$

$$\omega_{(1)}^{(3)} = u^{-1}(\omega_{(1)}^{(1)}), \qquad \omega_{(1)}^{(4)} = u^{-1}(\omega_{(1)}^{(2)}) = \mathscr{E}_{(1)}[u^2]$$

固定以下基：

$$\langle v_{(1)}^{(1)} \rangle = \omega_{(1)}^{(1)}, \quad \langle v_{(1)}^{(1)}, v_{(1)}^{(2)} \rangle = \omega_{(1)}^{(2)}$$

如同命题7.18的证明中那样，根据引理 2.7，存在 $\mathscr{F}^{(1)}{}_{(2)}$ 到 $\mathscr{F}_{(1)\,(1)}$ 在 R_2上的一个提升。固定 $v^{(1)}{}_{(2)}$ 在 R_2 上的一个提升，它提升 $v^{(1)}{}_{(1)}$，并满足 $\mathscr{F}_{(1)\,(2)} = \mathrm{h}v^{(1)}{}_{(2)}\mathrm{i}$；再取一个元素 $\alpha_{(2)} \in u^{-1}(\mathscr{F}_{(1)\,(2)})\backslash\mathscr{E}_{(2)}[u]$。此外，取一个元素 $v^{(2)}{}_{(2)} \in \mathscr{E}_{(2)}[u]$，使其提升 $v^{(2)}{}_{(1)}$。于是定义 R_2上的变形如下：

$$\mathscr{E}_{(2)} = \mathscr{E} \otimes_{R_1} R_2 \qquad \omega_{(2)}^{(1)} = \langle v_{(2)}^{(1)} \rangle = \mathscr{F}_{(2)}^{(1)}$$

$$\omega_{(2)}^{(2)} = \omega_{(2)}^{(1)} \oplus \langle v_{(2)}^{(2)} + t\alpha_{(2)} \rangle, \quad \omega_{(2)}^{(3)} = u^{-1}(\omega_{(2)}^{(1)}), \quad \omega_{(2)}^{(4)} = \mathscr{E}_{(2)}[u^2]$$

根据构造，我们确有 $u \cdot (v^{2}{}_{(2)} + t\alpha_{(2)}) \neq 0$。我们对 $n \geq 2$ 进行递归，以继续这一过程。假设在 R_n 上给定了 $\mathscr{E}_{(n)}, \omega^{(k)}{}_{(n)}$ 等。根据

引理 2.7，我们在 R_{n+1} 上有一个典范提升 $\mathscr{F}^{(1)}{}_{(n+1)}$。我们在 R_{n+1} 上定义如下变形：

$$\mathscr{E}_{(n+1)} = \mathscr{E} \otimes_{R_1} R_{n+1} \quad \omega^{(1)}_{(n+1)} = \mathscr{F}^{(1)}_{(n+1)}$$

$$\omega^{(3)}_{(n+1)} = u^{-1}(\omega^{(1)}_{(n+1)}), \quad \omega^{(4)}_{(n+1)} = \mathscr{E}_{(n+1)}[u^2]$$

并取任意一个 $\omega^{(2)}{}_{(n+1)} \subset u^{-1}(\mathscr{F}^{(1)}{}_{(n+1)})$ 的 $\omega^{(2)}{}_{(n)}$ 提升。条件$\omega^{(2)}{}_{(n+1)} \neq \mathscr{E}_{(n+1)}[u]$由这一提升性质保证。取极限后得到一个 p-可除群 $G \in \mathtt{BT}^{\mathrm{PR}}(R)$，它满足所需的性质。

(2) $X^{(m_1,m_3)}{}_{(2,2)} \subset X^{(m_3)}{}_{(2,2)}$。设 $x \in X^{(m_3)}{}_{(2,2)}$ 和 $0 \subset \omega^{(1)}$ <style id='23>(1) $\subset \omega^{(2)}{}_{(1)} \subset \omega^{(3)}{}_{(1)} \subset \omega^{(4)}{}_{(1)}$ 为相应的滤过。根据定义，有以下等式：

$$\omega^{(1)}_{(1)} = \mathscr{F}^{(1)}_{(1)}, \quad \omega^{(3)}_{(1)} = u^{-1}(\omega^{(1)}_{(1)}), \quad \omega^{(4)}_{(1)} = \mathscr{E}_{(1)}[u^2]$$

取 $v^{(4)}{}_{(1)} \in \omega^{(4)}{}_{(1)}$ 使得 $\omega^{(4)}{}_{(1)} = \omega^{(3)}{}_{(1)} \oplus \mathbf{h}v^{(4)}{}_{(1)}\mathbf{i}$。与命题 7.18 的证明中一样，根据引理 2.7，我们有 $\mathscr{F}_{(1)}{}_{(1)}$在$R_2$上的一个提升 $\mathscr{F}^{(1)}{}_{(2)}$。定义 R_2 上的变形如下：

$$\mathscr{E}_{(2)} = \mathscr{E} \otimes_{R_1} R_2 \quad \omega^{(1)}_{(2)} = \mathscr{F}^{(1)}_{(2)}, \quad \omega^{(3)}_{(2)} = u^{-1}(\omega^{(1)}_{(2)})$$

接着，选取一个元素 $\alpha_{(2)} \in u^{-1}(\omega^{(3)}{}_{(2)})\backslash\mathscr{E}_{(2)}[u^2]$ 和一个元素 $v^{(4)}{}_{(2)} \in u^{-1}(\omega^{(3)}{}_{(2)} \cap \mathscr{E}_{(2)}[u]$，它是 $v^{(4)}{}_{(1)}$ 的一个提升。于是定义：

$$\omega^{(4)}_{(2)} = \omega^{(3)}_{(2)} \oplus \langle v^{(4)}_{(1)} + t\alpha_{(2)} \rangle$$

我们对 $n \geq 2$ 继续递归这一过程。假设在 R_n 上给定了 $\mathscr{E}_{(n)}, \omega^{(k)}{}_{(n)}$ 等。根据引理 2.7，我们有 R_{n+1} 上的典范提升 $\mathscr{F}^{(1)}{}_{(n+1)}$。定义 R_{n+1} 上的变形如下：

$$\mathscr{E}_{(n+1)} = \mathscr{E} \otimes_{R_1} R_{n+1}, \quad \omega^{(1)}_{(n+1)} = \mathscr{F}^{(1)}_{(n+1)}, \quad \omega^{(3)}_{(n+1)} = u^{-1}(\omega^{(1)}_{(n+1)})$$

并取任意一个提升 $\omega^{(2)}{}_{(n+1)}$ $\omega^{(4)}{}_{(n+1)}$。性质 $\omega^{(2)}{}_{(n+1)} \neq \mathscr{E}_{(n+1)}[u]$ 和 $\omega^{(2)}{}_{(n+1)} \neq \mathscr{E}_{(n+1)}[u^2]$ 由此提升性质保证。取极限后，得到一个满足所需性质的 $G \in \mathtt{BT}^{\mathrm{PR}}(R)$-可除群 p。

在得出结论之前，还需计算非空分层的集合 $\mathscr{A}_{\mu_\bullet}$。这是下面引理的内容：

引理 7.21. 设 $(\lambda, T) \in \mathscr{T}_{\mu_\bullet}$。有：

$$\mathcal{S}h^{(m_1=0)}_{(\lambda,T)} \neq \emptyset, \quad \mathcal{S}h^{(m_1\neq 0)}_{(\lambda,T)} \neq \emptyset$$

换言之，非空分层的集合由下式给出：

$$\mathscr{A}_{\mu_\bullet} = \mathscr{T}_{\mu_\bullet} \cup (\mathscr{T}_{\mu_\bullet} \times \{m_1\})$$

注 7.22。 更具体地说，上述引理与前面的命题结合起来表明， σ线性 m_1 不变量与由 $\mathscr{T}_{\mu_\bullet}$（线性）集合定义的分层直接相互作用。

证明。 根据命题 7.18以及前面的变形计算，只需证明分层 $X^{(m_1,m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,\ 2)}$ 非空。我们将使用 Goren 和 Andreatta 的工作 [AG03]。设 $x \in \mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}}_{(2,2)}$ 是定义在代数闭域 k上的一个点，且 G 是与之关联的 p-可除群。根据上述文献 的命题4.10，存在 e_1, e_2的一个基 $\mathscr{E}(G$，使得霍奇滤过由下式给出：

$$\omega_G = \langle u^2 e_1, u^2 e_2 \rangle$$

且 Frobenius 在此基下由下式给出：

$$F = \begin{pmatrix} u^m & cu^2 \\ u^2 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $m \geq 2$ 且 $c \in (\mathrm{O}_L \otimes k)^\times$。定义 Pappas–Rapoport 滤过如下：

$$\omega^{(1)} = \langle u^3 e_2 \rangle,\ \ \omega^{(2)} = \langle u^3 e_1, u^3 e_2 \rangle,\ \ \omega^{(3)} = \langle u^3 e_1 u^2 e_2 \rangle,\ \ \omega^{(4)} = \langle u^2 e_1, u^2 e_2 \rangle$$

这定义了一个点 $\tilde{x} \in \mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$。简单计算可得，对于此滤过，有：

$$\mathscr{F}^{(1)} := F(u^{-1}(\omega^{(3)})^{(p)}) = \langle cu^3 e_2 \rangle$$

特别地， $\omega^{(1)} = \mathscr{F}^{(1)}$ 因此 $m_1(\tilde{x}) = 0$。同样容易看出， $m_2(\tilde{x}) = m_3(\tilde{x}) = m_4(\tilde{x}) = 0$。因此， $\tilde{x} \in X^{(m_1,m_2,m_3,m_4)}{}_{(2,\ 2)}$ ，所以最后这个分层非空。□

定理 7.23。 对于 $L/\mathbb{Q}_p$ 完全分歧的次数为 $e = 4$ 的分层 ：

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} = \coprod_{(\lambda,T)\in\mathscr{A}_{\mu_\bullet}} \mathcal{S}h^{\mathrm{PR}}_{(\lambda,T)}$$

是一个良好分层，其闭包关系由 $\mathscr{A}_{\mu_\bullet}$ 上的朴素偏序关系给出

8. 猜想

8.1. 猜想。 一旦通过光滑态射重新诠释了 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PEL}}$ 的按霍奇多边形分层，

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PEL}} \to \mathrm{Hecke} = \left[L^+G\backslash \mathrm{Gr}\right]$$

自然会 通过光滑态射对 Pappas-Rapoport 模型 $\mathrm{S}h^{\mathrm{PR}}$ 进行分层

$$\mathcal{S}h^{\mathrm{PR}} \to \mathrm{Hecke}_{\mu_\bullet} = \left[L^+G\backslash \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mu_\bullet}\right]$$

因此，问题在于描述 $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$ 中的 L^+G-轨道。本文研究了卷积态射

$$m : \widetilde{\mathrm{Gr}}_{\mu_\bullet} \to \mathrm{Gr}_{\leq|\mu_\bullet|}$$

由于该态射具有 L^+G-等变性，分层 $(m^{-1}(\mathrm{Gr}_\lambda))_{\lambda\leq|\mu_\bullet|}$ 是$\sim L^+G$个 $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$中的轨道。如果命题 3.16 的证明看起来像是“凭手工”完成的，而且无法推广到其他情形（见 [BH22b] 命题 3.9），那是因为这种证明方式并不自然：最自然的分层是由轨道分解诱导的分层。

猜想 8.1。存在一个有限偏序集 $(X,<)$，用于描述$\sim L^+G$-轨道在 $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$中的情形。换言之，存在一个同胚

$$|\mathrm{Hecke}_{\mu_\bullet}|\simeq X$$

其中 X 取由 $<$诱导的拓扑。

详情请参见 [PWZ12]（§2.1、§2.2），了解群作用下空间按轨道分层的更多细节。

8.2。**低维情形**。在 [Bij22], 中，S. Bijakowski 在酉情形以及希尔伯特-西格尔情形（当 $e\leq 3$时）对上述猜想给出了肯定的回答。我们陈述完全分歧、分歧指数为 $e=3$的希尔伯特情形下的结果。

定理 *8.2*（[*Bij*22]）。帕帕斯-拉波波特滤过（$0\subset\omega^{(1)}\subset\omega^{(2)}\subset\omega^{(3)}$）的同构类完全由霍奇不变量（$\omega^{(3)}$）、霍奇（$\omega^{(2)}$）和霍奇（$\omega^{(3)}/\omega^{(1)}$）决定。此外，这些不变量定义了 Sh^{PR} 的一个良好分层，其中偏序关系为朴素关系：若$\lambda_i\leq\lambda_i'$ 对 $i=1$、*2*、*3*，则$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\leq(\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3')$。

我们来作几点说明：

(1) 在下面的定理中，同构类诱导出良好分层这一事实是自动成立的：Pappas-Rapoport 滤过$\widetilde{}$的同构类对应于 $\mathrm{Gr}_{\mu_\bullet}$中的 L^+G-轨道。上述定理中关于分层的非平凡结果，在于显式计算各轨道之间的闭包关系。

(2) 在 Hilbert 情形，也就是说，在 $G=\mathrm{GL}_2$ 和 $\mu_\bullet=(1,0)^e$ 的情形下，分次对象 $\Lambda^{(i)}/\Lambda^{(i-1)}$ 的维数为 1，因此得到以下等价关系[1]：

$$\mathrm{Hodge}(\Lambda^{(2)})=(3,3)\ \Leftrightarrow\ \mathrm{Hodge}(\Lambda^{(2)}/\Lambda^{(0)})=(2,0)\ \Leftrightarrow\ m_2\neq 0$$

$$\mathrm{Hodge}(\Lambda^{(3)}/\Lambda^{(1)})=(2,0)\ \Leftrightarrow\ m_3\neq 0$$

换言之，在 $e=3$ 的情形下，数据 (霍奇(ω) m_3,m_2) 完全确定了同构类。事实上，我们可以说得更精确一些：(m_3,m_2) 确定了霍奇(ω)，因为在 $e=3$ 的情形下只有两种可能：(2,1) 和 (3,0)。

(3) 对于 $e=4$ 这一情形，我们已经看到，分层 $X^{(m_3)}{}_{(2,2)}$ 和 $X^{(m_3)}{}_{(3,1)}$ 非空。在这种情况下，不变量 $(m_i)_i$ 因而不能确定霍奇不变量，特别是也无法判别同构类。

1. 我们使用滥用记号霍奇($\Lambda^{(i)}/\Lambda^{(i-2)}$) = Inv($\Lambda^{(i)},\Lambda^{(i-2)}$)

(4) 在希尔伯特-西格尔情形，也就是说对于 $G = \mathrm{GSp}_{2g}$，下面的不变量不够精细，无法判别同构类。事实上，在一般情形下有如下等价关系：

$$\mathrm{Hodge}(\Lambda^{(i)}/\Lambda^{(i-2)}) = (2,0)^g \Leftrightarrow \ m_i \neq 0$$

换言之，不变量 m_i 的非零点集与霍奇不变量($\Lambda^{(i)}/\Lambda^{(i-2)}$) 所定义的分层中的最大层一致。因此，在高维情形下，后者才是应当考虑的恰当不变量。

参考文献

[*AG*03] *Fabrizio Andreatta* 和 *Eyal Z. Goren*。全分歧素数上的希尔伯特模簇的几何。《国际数学研究通知》，*2003*：*1785–1835*，*2003*。[*BBM*82] *Pierre Berthelot*、*Lawrence Breen* 和 *William Messing*。《晶体 *Dieudonné* 理论 *II*》。*Springer Berlin Heidelberg*，*1982*。[*BH*16] *Stephane Bijakowski* 和 *Valentin Hernandez*。带有 *Pappas-Rapoport* 条件的 p-可除群及 *Hasse* 不变量。《综合理工学院数学杂志》，第 *4* 卷，*2016* 年 *11* 月。[*BH22a*]*Stéphane Bijakowski* 和 *Valentin Hernandez*。关于 *(AR)* 情形下 *Pappas-Rapoport* 模型的几何。*2022*。网页预印本，见 http://stephane-bijakowski.perso.math.cnrs.fr/AR.pdf。[*BH22b*] *Stéphane Bijakowski* 和 *Valentin Hernandez*。关于 *PEL* 型志村簇的 *Pappas-Rapoport* 模型的几何。《朱西厄数学研究所期刊》，第 *1–43* 页，*2022*。[*Bij*16] *Stéphane Bijakowski*。部分哈斯不变量与对偶性的相容性。*2016* 年 *3* 月。[*Bij*22] *Stéphane Bijakowski*。低维情形下的 *Hodge* 分层。*2022*。[*BM*79] *Pierre Berthelot* 和 *William Messing*。《晶体 *Dieudonné* 理论 *I*》。载于《雷恩代数几何日——（*1978*年 *7*月）（*I*）：形式群、伽罗瓦表示与正特征簇的上同调》，《*Astérisque*》第 *63* 号。法国数学会，*1979*。[*Dem*74] *Michel Demazure*。广义舒伯特簇的消奇点。《高等师范学校科学年刊》，*7(1)*：*53–88*，*1974*。[*dJ*91] *A.J. de Jong*。带有 $\Gamma_0(p)$-级结构的主极化阿贝尔簇模空间。乌得勒支国立大学数学研究所，*1991*。[*DK*22] *Fred Diamond* 和 *Payman L. Kassaei*。模 *p* 希尔伯特模形式的最小权重锥。《国际数学研究通知》，*2022*。[*DP*94] *Pierre Deligne* 和 *Georgios Pappas*。整除判别式的特征下希尔伯特模空间的奇点。《数学汇编》，*90(1)*：*59–79*，*1994*。[*Far*06] *Laurent Fargues*。*Lubin-Tate* 塔与 *Drinfeld* 塔之间的同构：*Lubin-Tate* 塔的胞腔分解，*2006*。[*Fon*77] *Jean-Marc Fontaine*。局部域上的 p-可除群。《*Astérisque*》第 *47-48* 号。法国数学会，*1977*。[*Goe*01] *Ulrich Goertz*。某些 *PEL* 型志村簇模型的平坦性。《数学年刊》，*321*：*689–727*，*2001* 年 *11* 月。[*Hai*06] *Thomas Haines*。卷积态射的等维性及其在饱和问题中的应用。《数学进展》，*207*：*297–327*，*2006* 年 *12* 月。[*Kot*92] *Robert E. Kottwitz*。有限域上某些志村簇的点。《美国数学会杂志》，*5(2)*：*373–444*，*1992*。[*Lan*13] *Kai-Wen Lan*。*PEL* 型志村簇的算术紧化。普林斯顿大学出版社，*2013*。[*Lau*09] *Eike Lau*。完备正则局部环上的框架与有限群概形，*2009*。[*Lau*14] *Eike Lau*。*Dieudonné* 陈列与晶体 *Dieudonné* 理论之间的关系。《代数与数论》，*8(9)*：*2201–2262*，*2014* 年 *12* 月。[*Mes*72] *William Messing*。《*Barsotti-Tate* 群关联的晶体：及其在阿贝尔概形中的应用》。*Springer Berlin Heidelberg*，柏林，海德堡，*1972*。[*MFK*94] *D. Mumford*、*J. Fogarty* 和 *F. Kirwan*。《几何不变量理论》。《数学及其边界领域成果》，第 *3* 辑／现代数学综述系列。*Springer Berlin Heidelberg*，*1994*。

[*MOV*03] *Anton Malkin*、*Viktor Ostrik* 和 *Maxim Vybornov*。《仿射格拉斯曼量中的最小退化奇点》。*2003* 年。https://arxiv.org/abs/math/0305095.[*NG*02] *Bao Châu Ngô* 和 *Alain Genestier*。《阿尔科夫与 p-秩阿贝尔簇》。《傅里叶研究所年刊》*52(6)*：*1665–1680*，*2002* 年。[*PR*02] *George Pappas* 和 *Michael Rapoport*。《分歧情形下的局部模型 *II*：分裂模型》。《杜克数学杂志》*127*，*2002* 年 *6* 月。[*PWZ*12] *Richard Pink*、*Torsten Wedhorn* 和 *Paul Ziegler*。《具有附加结构的 *F*-拉链》。《太平洋数学杂志》*274*，*2012* 年 *8* 月。[*RX*14] *Davide Reduzzi* 和 *Liang Xiao*。《希尔伯特模簇分裂模型上的部分哈斯不变量》。《高等师范学校科学年刊》*50*，*2014* 年 *5* 月。[*RZ*96] *M. Rapoport* 和 *Th. Zink*。《 p-可除群的周期空间（*AM-141*）》。《普林斯顿大学出版社》，*1996* 年。[*Sta*18] *Stacks Project* 作者。《*Stacks Project*》。 https://stacks.math.columbia.edu，*2018* 年。[*SYZ*21] *Xu Shen*、*Chia-Fu Yu* 和 *Chao Zhang*。《具有抛物型层结构的志村簇的 *EKOR* 分层》。《杜克数学杂志》*170(14)*：*3111–3236*，*2021* 年。[*SZ*22] *Xu Shen* 和 *Yuqiang Zheng*。《志村簇分裂模型上具有附加结构的 f-拉链》，*2022* 年。[*Vol*03] *Inken Vollaard*。《关于希尔伯特-布卢门塔尔模问题》，*2003* 年。[*VW*13] *Eva Viehmann* 和 *Torsten Wedhorn*。《*PEL* 型志村簇的 *Ekedahl–Oort* 分层与牛顿分层》。《数学年刊》*356(4)*：*1493–1550*，*2013* 年 *1* 月。[*YCO*20] *Chia-Fu Yu*、*Ching-Li Chai* 和 *Frans Oort*。《希尔伯特模簇的李分层分层》。《台湾数学杂志》*24(6)*：*1307–1352*，*2020* 年。[*Zhu*16] *X. Zhu*。《仿射格拉斯曼量与几何萨塔克等价导论》，*2016* 年。https://arxiv.org/abs/1603.05593.[*Zin*02] *Thomas Zink*。《形式 p-可除群的显示》。《*Astérisque*》，第 *127–248* 页，*2002* 年。