超越范数连续情形的全纯诱导及其在正能量表示中的应用

Milan Niestijl

2023年10月4日

arXiv:2301.05129v2 [math.RT] 3 Oct 2023

摘要

我们将可能为无限维李群 G 的酉表示的全纯诱导理论，扩展到不再要求被诱导表示范数连续的情形。我们允许群 G 为连通的 BCH（Baker–Campbell–Hausdorff）Fr´echet–李群。给定一个在 G 上的光滑 $\mathbb{R}$-作用 α，我们进一步证明，所谓正能量表示的相应类别与全纯诱导密切相关。假设 G 正则，特别地，我们证明：若 ρ 是 $G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的酉基态表示，且零能量子空间 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 包含一个稠密的 G-解析向量集，那么 $\rho|_G$ 是由连通子群 $H := (G^\alpha)_0$ 在 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 上的不动点 α 所对应的表示全纯诱导而来。因此，我们得到相应交换子之间的同构 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho(0))^H$。我们还发现，如果两个这样的基态表示的零能量子空间作为 H-表示酉等价，那么这两个表示必然酉等价。此前，这些结果仅在假设 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 上的 H-表示范数连续时才成立。

目录

1 引言 **1**

2 预备知识 **3**
2.1 局部凸向量空间上的解析函数.3 2.1.1 齐次多项式.3 2.1.2 解析函数.4 2.2 光滑、解析和强整表示.6
2.3 正能量表示与基态表示.9

3 空间 $\mathcal{H}^{\mathcal{O}}$ $_\rho$ 强整向量的 **10**
3.1 强整表示存在的必要条件.10 3.2 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 和全纯延拓的性质.12

4 一般的 全纯归纳法的另一种方法 17
4.1 全纯截面的替代方案.18 4.2 全纯诱导表示.19 4.3 唯一性.21 4.4 交换子.24 4.5 分阶段全纯诱导.26

5 全纯诱导的几何方法 **27**
5.1 $\mathbb{E}_\mathcal{O}$.28 5.2 几何全纯诱导 30 $\mathcal{O}$

6 Arveson 谱理论 **32**
6.1 若干类 $\mathbb{R}$-表示.32 6.2 Arveson 谱子空间.34

7 正能量表示与全纯归纳法 41
7.1.1 记号与初步观察.41 7.1.2 谱隙条件.45 7.1.3 基态表示.45 7.1.4 $\mathbb{T}$-作用的强整基态表示.46

8 示例 47

A 表示 再生核希尔伯特空间上的表示 50

1 引言

本文研究可能为无限维、建模于局部凸向量空间上的连通李群G 的酉表示（参见 [Mil84, Nee06]）。设 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是 $\mathbb{R}$ 在 G 上的光滑作用。我们考虑那些 G表示，它们可扩张为 $G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的酉表示 ρ；该表示是光滑的，即具有稠密光滑向量集，并且具有正能量，也就是说，酉一参数群 $t \mapsto \rho(1_G, t)$ 的自伴生成元 $-i\,\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\rho(1_G, t)$ 的谱非负。

对于无限维李群，对所有不可约表示进行完整分类通常难以实现，而因子表示的分类更是如此。正能量条件有助于筛选出一类更适合系统研究的表示。从物理学角度看，这一条件也相当自然，因为量子物理中的哈密顿算子几乎总是被要求为正自伴算子。因此，李群的正能量表示在物理学文献中大量出现也就不足为奇了 [SW64, Bor87, Bor66, Haa92, LM75, Ol'81, PS86, Seg81]。

全纯诱导已被证明是研究正能量表示的一种特别有效的工具。我们先描述 G 为有限维时全纯诱导的主要思想。令 $H := (G^\alpha)_0$ 为 G 中由 α 的不动点构成的连通子群，其李代数为 $\mathfrak{h} = \mathrm{L}(H)$。如果齐性厄米向量丛 $\mathbb{V} := G \times_H V_\sigma$ 上的单位酉 ρ - 表示 G 通常称为由 V_σ 上的酉 H- 表示 σ 全纯诱导而来，那么该丛可赋予 G-不变的复解析丛结构；相对于此结构，希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\rho$ 可 G-等变地嵌入 $\mathbb{V}$ 的全纯截面空间 $\mathcal{O}(G/H, \mathbb{V})$，且相应的点求值映射 $\mathcal{E}_x : \mathcal{H}_\rho \to \mathbb{V}_x$ 连续并满足 $\mathcal{E}_x\mathcal{E}_x^* = \mathrm{id}_{\mathbb{V}_x}$，对每个 $x \in G/H$ 均如此。特别是，这些条件意味着 $\mathcal{H}_\rho$ 酉等价于再生核希尔伯特空间上的 G-表示，并且 $\mathcal{H}_\rho$ 将 V_σ 包含为一个 H-子表示。

当 V_σ 为一维时，可以得到一个重要的特殊情形。若 ρ 是从 σ 全纯诱导得到的，则可将 V_σ 与 $\mathcal{H}_\rho$ 中的一个循环射线 $[v_0]$ 认同起来；该射线在射影空间 $\mathrm{P}(\mathcal{H}_\rho)$ 中的 G-轨道是一个复子流形。这意味着， ρ 是所谓的相干态表示 [Nee00, 定义 XV.2.1]。在此情形下， G-齐次线丛 $\mathbb{V}$ 是沿映射 $G/H \to \mathrm{P}(\mathcal{H}_\rho)$ $gH \mapsto [\rho(g)v_0]$ 对 $\mathrm{P}(\mathcal{H}_\rho)$ 上典范线丛的拉回，而相应映射 $\mathbb{V} \to \mathcal{H}_\rho$ 的像中的元素通常称为相干态。这也是著名的博雷尔–外尔定理 [DK00, 定理 4.12.5] 所处的情形。这类表示已得到广泛研究 [Per86, Nee00, Lis95], , 并且已知它们与最高权表示有密切关系 [Nee00, 定义 X.2.9, 第 XV 章]。特别地， G 的每个酉最高权表示都是相干态表示 [Nee00, 命题 XV.2.6]。反之则不成立。海森堡群 $\mathrm{Heis}(\mathbb{R}^2, \omega)$ 的 Schr¨odinger 表示提供了一个反例[Nee00, 例 XV.3.5]。

如上所定义的全纯诱导，曾在 [Nee13] 中进行研究，其背景是 G 为巴拿赫–李群且 σ 有界，也就是说，它关于 $\mathcal{B}(V_\sigma)$ 上的范数拓扑是连续的。记 $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数，记 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 为其复化，则 G/H 上的不变复结构 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 对应于满足 $\mathfrak{b} + \overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{g}_\mathbb{C}$、 $\mathfrak{b} \cap \overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 且对所有 $h \in H$ [均有 $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$ 的闭李子代数；见 15] Bel05，定理 15] （对于 G 为有限维的情形，参见 [Kir76，第 203] 页）。相应的 G-不变全纯丛结构在 $\mathbb{V}$ 上的参数化，最终可由 $d\sigma$ 的扩张给出：将 $\mathfrak{h} \to \mathcal{B}(V_\sigma)$ 扩张为李代数同态 $\chi : \mathfrak{b} \to \mathcal{B}(V_\sigma)$，满足对所有 $\xi \in \mathfrak{b}$ 和 $h \in H$ [均有 $\chi(\mathrm{Ad}_h(\xi)) = \sigma(h)\chi(\xi)\sigma(h)^{-1}$ ；见 $h \in H$ [Nee13，定理 2.6], , 这正如有限维情形 [TW71，定理 3.6] 所预期的那样。全纯结构被用于将 G-表示 ρ 的各种重要性质与其

这些性质联系起来。例如，[Nee13，定理 3.12] 表明，如果 $V_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$ 下不变，则交换子 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \cong \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$ 作为冯·诺依曼代数是同构的；特别地，这意味着 ρ 是不可约的、无重的，或属于 I、II 或 III 型，当且仅当 σ [Nee13，推论 3.14] 对 σ [具有同样性质。此外，[Nee13，推论 3.16] 指出：给定一对 (σ, χ)，至多存在一个酉等价类的酉 G-表示 ρ 可由其全纯诱导。全纯诱导表示与正能量条件之间的关系，则由 [Nee13，定理 4.12、4.14]，加以阐释；这些结果基本上表明，在上述背景及适当条件下，全纯诱导表示对应于所谓的半有界表示，其中半有界性条件是正能量条件的一种“稳定”且更强的版本（参见 [Nee10b]）。这些观察表明，全纯诱导表示这一类很可能允许建立一种富有成果的因子表示分类理论。这一思路在 [Nee14，定理 5.4、5.10] 以及 [Nee12，定理 6.1、7.3、8.1]，中得到进一步发展，最终实现了对某些希尔伯特环群的双重扩张以及与无限维不可约对称空间相对应的厄米李群的不可约半有界酉表示的分类。

在 [Nee14, 附录 C]，中，全纯诱导理论得到了进一步发展；在满足某些额外假设的情况下，G 可以是一个连通的 BCH Fr´échet–李群。（回想一下，如果 G 是实解析的，且其解析指数映射在 $0 \in \mathfrak{g}$中是局部微分同胚，那么它就是 BCH 群。）不过，仍要求 σ 范数连续。值得一提的是，这种情形中一个特殊且著名的特例，早已出现在环群光滑正能量表示的研究中。事实上，这些表示已利用全纯诱导 [PS86]（参见 [Nee01]）得到了完整分类。

不过，在许多例子中，σ 范数连续这一假设限制过于严格，其中一些例子将在下文第 8 节中讨论。它通常只适用于描述 G的半有界酉表示类。为了建立一种可用于描述可能更大的所有正能量表示类的理论，就必须超越 σ的范数连续性。

本文旨在去除被诱导表示 σ 的范数连续性这一假设，同时仍允许 G 是一个连通的 BCH Fr´échet–李群。实现这一目标的一大难点，是为齐性向量丛 $G \times_H V_\sigma$ 赋予一种 G-不变的复解析丛结构。[Nee13, Thm. 2.6] 中的证明在范数连续情形之外便不再适用，因此需要采用新的方法。

我们为这个问题提供了两种可能的解决方案。与 [Nee14, 附录 C], 一样，我们假设 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 具有如下形式的三角分解 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}_+$，其中 $\mathfrak{n}_\pm$ 和 $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$的闭李子代数，满足 $\overline{\mathfrak{n}_\pm} \subseteq \mathfrak{n}_\mp$，且 $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}_-$。第一种方法称为一般方法，我们完全不指定复解析向量丛，而是用一个适当的子空间 $C^\omega(G, V_\sigma)^{H,\,\chi}$取代全纯截面空间。该子空间由实解析的 H-等变映射 $C^\omega(G, V_\sigma)^H$构成，并直接通过扩张 $\chi\colon \mathfrak{b} \to \mathcal{L}(\mathcal{D})$来定义；此扩张将 $d\sigma$ 扩张到具有某个定义域 $\mathcal{D} \subseteq V_\sigma^\omega$的 $\mathfrak{b}$，该定义域由解析向量构成。这样也避免了在齐性空间 G/H 上要求存在 G-不变复结构。第二种方法称为几何方法，我们定义了更强的全纯诱导概念。在这种情况下，$\mathcal{H}_\rho^\infty$确实嵌入到齐性向量丛上的全纯映射空间中，因此需要用到复几何。这种方法的一大缺点是，它要求存在所谓的 $\mathfrak{b}$-强整向量的稠密集；通常并不知道这样的向量是否存在，除非 G 恰好是有限维的。在这种情况下，[Goo69] 和 [Pen74], 的结果已完全解决这一问题；另见下文定理 3.1.6。

我们还要指出，本文并未为全纯诱导的研究画上句号。本文发展的理论仍不涵盖并非 BCH 群的 Fréchet–Lie 群，例如 Virasoro 群。然而，众所周知，全纯诱导可用于获得 Virasoro 群 [NS15] 的正能量表示的完备分类。尽管如此，本文仍朝着更全面地理解无限维背景下的全纯诱导迈出了实质性步伐。关于正能量表示，[NR22], 从另一方向取得了进展，其中研究了拓扑群背景下的基态表示类。

论文结构

— 在第 2 节中，我们首先回顾局部凸空间上解析函数的一些预备知识。接着，我们定义光滑表示、解析表示和强整表示，其正则性依次增强。我们还回顾了与正能量和基态表示相关的一些重要结果。

— 在第 3 节中，我们接着定义并研究所谓的强整向量空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$和 b-强整向量空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$。我们在这些空间上赋予局部凸拓扑，并将 [Goo69] 的结果从有限维李群的情形推广到当前情形，其中 G 可以是无限维的。特别地，若 $G_{\mathbb{C}}$ 是一个复单连通正则 BCH Fr´echet– 李群，其李代数为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，则我们得到 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$ 都承载着 $G_{\mathbb{C}}$ 的一个表示，且该表示具有全纯轨道映射。空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$ 在全纯诱导的几何方法中发挥着重要作用。

— 在第4.2节中，我们介绍全纯诱导的一般方法。在确定一种有用的等价表述之后，我们用 G 上的正定函数刻画一对 (σ, χ) 可诱导的条件，由此得到全纯诱导表示在酉等价意义下的唯一性。接着，我们证明，只要 $V_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$ 下不变，交换子之间就存在冯·诺依曼代数 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \cong \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\ \chi}$ 同构；这与前文所述的范数连续情形完全类似。我们还简要讨论分阶段全纯诱导。

— 在赋予 G-齐性向量丛 $\mathbb{V}_\sigma := G \times_H V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 复解析丛结构之后，利用 $d\sigma$ 在定义域 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 上的适当扩张 χ，并在某些假设下，我们在第 5.2 节中定义全纯诱导表示这一几何概念。我们还将这一几何概念与第4.2节中提出的概念进行比较。

— 为了联系全纯诱导与正能量条件，我们需要一个适当一般化的 Arveson 谱子空间概念。因此，我们在第 6 节将 [NSZ15, Sec. A.3] 和 [Nee13, Sec. A.2] 的结果推广到下一节所需的一般性层次。

— 在第 7 节中，我们在附加假设 G 为正则的条件下，研究全纯诱导与正能量条件之间的关系。特别地，我们证明，若 ρ 是 $G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的酉基态表示，且其零能量子空间 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 存在一个 G-解析向量稠密集，那么 $\rho|_G$ 是由 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 上的 H- 表示全纯诱导而来。由此，我们得到相应交换子之间的冯 · 诺依曼代数同构 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho(0))^H$。我们还发现，如果两个这样的基态表示的零能量子空间作为 H-表示酉等价，那么这两个基态表示必然酉等价。

— 在第 8 节中，我们考察了许多有趣的酉表示实例；这些表示由并非范数连续的表示全纯诱导而来。

致谢：
本研究得到荷兰科学研究组织资助项目 639.032.734“无限维李群的上同调与表示论”的支持。我要感谢我的博士导师 Bas Janssens 对我的指导。此外，我还要感谢 Karl-Hermann Neeb；他仔细阅读了本手稿的早期版本，并提出了各种改进建议。与 Karl-Hermann Neeb 的交流也让我受益匪浅。

2 预备知识

2.1 局部凸向量空间上的解析函数

我们回顾一下局部凸向量空间之间的解析函数的若干定义和性质。主要参考文献为 [BS71b], [BS71a] 以及 [Gl¨o02b]。在下文中，我们固定局部凸向量空间 E 和 F，它们都定义在域 $\mathbb{K}$ 上，且均为完备的豪斯多夫空间，其中 $\mathbb{K}$ 或者是 $\mathbb{R}$，或者是 $\mathbb{C}$。定义

$$\Delta_k : E \to E^k,\ \Delta_k(h) = (h, \dots, h).$$

2.1.1 齐次多项式

定义 2.1.1. 假设 $U \subseteq E$ 是开集且 $f \in C^\infty(U, F)$。对于 $x \in U$ 和 $k \in \mathbb{N}$，定义 $\delta_x^0(f) : E \to F$ 以及 $\delta_x^k(f) : E \to F$，使得 $\delta_x^0(f)(v) := f(x)$，且 $\delta_x^k(f)(v) := d^k f(x;\ v, \dots, v)$。

定义 2.1.2. 设 $k \in \mathbb{N}$。映射 $f\colon E \to F$称为次数为 k的齐次多项式，若存在一个 k-线性对称映射 $\widetilde{f}\colon E^k \to F$使得 $f = \widetilde{f} \circ \Delta_k$。令 $P^k(E, F)$ 表示次数为 k的连续齐次多项式 $E \to F$构成的空间。对于 $k = 0$，定义 $P^0(E, F) := F$。

令 $E^0 := \mathbb{K}$。对于 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，记 $\mathrm{Mult}(E^k, F)$ 为连续 k-线性映射 $E^k \to F$构成的空间，并赋予在 E中的紧集乘积上按一致收敛定义的拓扑。对于情形 $k = 1$，也记 $\mathcal{B}(E, F) := \mathrm{Mult}(E, F)$。令 $\mathrm{Sym}^k(E, F) \subseteq \mathrm{Mult}(E^k, F)$ 表示连续对称 k-线性映射 $E^k \to F$构成的闭子空间。令 $E \widehat{\otimes} F$表示 E与 F [的完备射影张量积（Tre67，定义 43.2、43.5]）。定义 $E^{\widehat{\otimes} k} := E \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} E$($k$次方)。 $E^{\widehat{\otimes} k}$上的拓扑由半范数 $q_1 \otimes \cdots \otimes q_k$定义，其中每个 q_i都是 E上的连续半范数，另见 Tre67，定义 43.3]。在代数张量 $t \in E^{\otimes k}$上，该半范数定义为

$$(q_1 \otimes \cdots \otimes q_k)(t) := \inf \left\{ \sum_j \prod_{i=1}^k q_i(\xi_i^{(j)}) \,:\, t = \sum_j \xi_1^{(j)} \otimes \cdots \otimes \xi_k^{(j)}, \text{ with } \xi_i^{(j)} \in E \right\}. \tag{2.1}$$

关于简单张 量，我们有 $(q_1 \otimes \cdots \otimes q_k)(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_k) = \prod_{i=1}^k q_i(\xi_i)$，其中 $\xi_i \in E$ [Tre67，命题 43.1]。

命题 2.1.3（[Tre67，命题 43.4，第 465] 页推论 3）。
存在一个典范线性同构 $\mathrm{Mult}(E^k, F) \cong \mathcal{B}(E^{\widehat{\otimes} k}, F)$。若 E 是 Fr´echet 空间，则它是一个同胚。

在 $P^k(E, F)$ 上赋予紧集上一致收敛拓扑。若 p 是 F 上的连续半范数， $B \subseteq E$ 是一个子集，且 $f\colon E \to F$ 是一个函数，我们记 $p_B(f) := \sup_{x \in B} p(f(x))$。

命题 2.1.4。设 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。则 $P^k(E, F) \cong \mathrm{Sym}^k(E, F)$ 作为局部凸向量空间彼此同构。

证明。若 $\widetilde{f}\colon E^k \to F$ 是一个对称的 k-线性映射，而 $f = \widetilde{f} \circ \Delta_k$ 是相应的齐次 ˜多项式，则可利用公式 [BS71b, Thm. A]从 f 中恢复 f：

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k = 0}^{1} (-1)^{k - (\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k)} f(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_k x_k). \tag{2.2}$$

˜此外，该公式表明， f连续当且仅当 f连续，并且存在一个线性同构 $\mathrm{Sym}^k(E, F) \to P^k(E, F)$，由 $\widetilde{f} \mapsto \widetilde{f} \circ \Delta_k =: f$ 给出。还需证明该映射也是一个同胚。设 $f = \widetilde{f} \circ \Delta_k$，其中 $\widetilde{f} \in$属于 $\mathrm{Sym}^k(E, F)$。若 $B \subseteq E$ 是一个紧子集，且 p 是 F 上的一个连续半范数，则 $p_B(f) \leq p_{B^k}(\widetilde{f})$。因此，$\mathrm{Sym}^k(E, F) \to P^k(E, F)$ $\widetilde{f} \mapsto f$是连续的。为证明逆映射的连续性，我们使用 (2.2)，由此可知，若 $B_i \subseteq E$ 是 $i \in \mathbb{N}$的紧子集，且 p 是 F上的一个连续半范数，则

$$\sup_{x_i \in B_i} p(\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_k)) \leq \frac{2^k}{k!} p_B(f), \tag{2.3}$$

其中

$$B = \{\, \epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_k x_k \,:\, \epsilon_i \in \{0, 1\},\ x_i \in B_i \quad \text{for } i \in \{1, \ldots, k\} \,\},$$

它是 E 的紧子集。因此，映射 $f \mapsto \widetilde{f}$ 是从 E 到 $\mathrm{Sym}^k(E, F)$ 的连续映射 $P^k \to$。 □

定义局部凸空间 $P(E, F) := \prod_{k=0}^{\infty} P^k(E, F)$，并赋予其乘积拓扑。若 $F = \mathbb{K}$，则简写为 $P^n(E) := P^n(E, \mathbb{K})$。

2.1.2 解析函数

设 $U \subseteq E$ 是开集，且 $f\colon U \to F$ 是一个函数。

定义 2.1.5。

— 假设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。函数 $f\colon U \to F$ 称为复解析或全纯函数，若它是连续的，并且对每个 $x \in U$，都存在 E 中的一个零邻域 V，使得 $x + V \subseteq U$，且存在函数 $f_k \in P^k(E, F)$，对于 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，满足：

$$f(x + h) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(h), \qquad \forall h \in V.$$

— 假设 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$。函数 $f\colon U \to F$ 称为实解析函数，若它可以延拓为某个复解析映射 $f_{\mathbb{C}}\colon U_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$，其中 $U_{\mathbb{C}}$ 是 $E_{\mathbb{C}}$ 中 U 的某个开邻域。

— 设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ 和 $U = E$。若函数 $f\colon E \to F$ 连续，且存在函数 $f_k \in P^k(E, F)$（ $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$），使得对所有 $x \in E$ 都有 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$，则称其为整函数。

注记 2.1.6。上述实解析映射的定义不同于 [BS71a]，中采用的定义：若函数 $f\colon U \to F$ 连续，且对每个 $x \in U$，都存在 U 中的一个零邻域V，满足 $x + V \subseteq U$，以及齐次多项式 $f_k\colon E \to F$，使得对所有 $h \in V$都有 $f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(h)$，则称其为实解析函数。如果 E 和 F 是 Fr´echet 空间，这两个概念等价 [Gl¨o02b，注记 2.9]，[BS71a，定理 7.1]。

命题 2.1.7（[BS71a，命题 5.1]）。
假设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。对每个 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，令 $f_k \in P^k(E,F)$。令 $U \subseteq E$ 为一个零邻域，使得对于每个 $h \in U$，$f(h) := \sum_k f_k(h)$ 收敛。假设 $f\colon U \to F$ 在 $0 \in U$ 处连续。则对 F 上的每个连续半范数 p，都存在一个零邻域 $V \subseteq U$，使得 $\sum_{k=0}^{\infty} p_V(f_k) < \infty$。

引理 2.1.8。假设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。对每个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，令 $f_n \in P^n(E,F)$。考虑以下断言：

1. $f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 定义了一个整函数 $E \to F$。
2. 对任意紧子集 $B \subseteq E$ 以及 F 上的连续半范数 p，$\sum_{n=0}^{\infty} p_B(f_n) < \infty$。

我们有 (1) $\implies$ (2)。若 E 是 Fr´echet 空间，则 (2) $\implies$ (1) 也成立。

证明。假设 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 定义了一个整函数 $E \to F$。设 $B \subseteq E$ 是一个紧子集，p 是 F 上的连续半范数。不妨设 B 是平衡的。由于 f 连续，$f(2B) \subseteq F$ 是紧的，因而有界。因此 $M_p := p_{2B}(f) < \infty$。由于 f 是整的，对任意 $x \in E$ 和 $z \in \mathbb{C}$，我们有 $f(zx) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^n$。设 $x \in 2B$。那么对任意满足 $|z| \leq 1$的 $z \in \mathbb{C}$，也有 $zx \in 2B$，因为 B 是平衡的。将[BS71a, Cor. 3.2] 应用于全纯映射 $g\colon \mathbb{C} \to F$, $g(z) := f(zx)$，可得 $f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz$，并且还可得

$$p(f_n(x)) \leq \sup_{|z|=1} p(g(z)) \leq p_{2B}(f) = M_p, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

因此 $p_{2B}(f_n) \leq M_p$，从而对所有 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，$p_B(f_n) \leq M_p 2^{-n}$。于是 $\sum_{n=0}^{\infty} p_B(f_n) \leq M_p \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} < \infty$。

假设 E 是 Fr´echet 空间。假定 (2) 成立。特别地，对任意 $x \in E$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ 收敛。因此，$f := \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 定义了一个函数 $E \to F$。要证明 f 是整函数，只需证明它连续。条件 (2) 意味着 $s_N \to f$ 在紧子集上一致收敛，其中$s_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$ 对任意 $N \in \mathbb{N}$成立。由于对每个 $N \in \mathbb{N}$，s_N 都是连续的，且根据假设 E 是 Fr´echet 空间，这说明 f 是连续的（由一个标准的 3ϵ 论证可得）。 □

命题 2.1.9 ([Gl¨o02b，命题 2.4]).
每个实解析或复解析映射都是光滑的。

命题 2.1.10（[BS71a，命题 5.5]）。
设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。若 $f\colon U \to F$是复解析的，则对所有 $h \in V$，$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta_x^k(f)(h)$，其中 V是 E的最大平衡零邻域，使得 $x + V \subseteq U$。

命题 2.1.11（[Gl¨o02b，引理 2.5]）。
设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。那么，当且仅当 f是光滑的，且对每个 $x \in U$，映射 $\delta_x^1 = df(x; -)\colon E \to F$ 是复线性的，f才是复解析的。

命题 2.1.12（[Gl¨o02b，引理 2.6]）。
假设 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$。若 $f\colon U \to F$是复解析的，则 $df\colon U \times E \to F$也是复解析的。

根据这些定义，链式法则对实解析和复解析映射均成立。接下来定义实解析和复解析流形及李群，更多细节参见例如 [Mil84] 和 [Nee06]。

定义 2.1.13. 若 M是实解析流形，且 V是局部凸向量空间，我们用 $C^\omega(M,V)$ 表示解析函数 $M \to V$的集合。若 M 是复解析流形，且 V 是复数，我们用$\mathcal{O}(M,V)$ 表示复解析映射 $M \to V$的空间。

命题 2.1.14（恒等定理 [BS71a，命题 6.6]）。

1. 假设 E 和 F 是复数。设 $f\colon U \to F$ 为复解析映射，并假设 U 是连通的。若对某个开且非空的 $V \subseteq U$中的所有 $x \in V$，均有 $f(x) = 0$，则 $f = 0$。
2. 假设 E 是实数，F 是复数。设 $f\colon U_{\mathbb{C}} \to F$ 是复解析的，其中 $U_{\mathbb{C}} \subseteq E_{\mathbb{C}}$ 是开且连通的。若 $U_{\mathbb{C}}$ 包含一个非空子集 $V \subseteq E$，且该子集在 E 中是开集，并且对每个 $x \in V$ 都成立 $f(x) = 0$，则 $f = 0$。

命题 2.1.15。设 $x \in U$。以下线性映射是连续的：

$$j_x^\infty : C^\infty(U,F) \to P(E,F), \qquad f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\delta_x^k(f)$$

若 U 连通，则其在 $C^\omega(U,F)$ 上的限制是单射。

证明。映射 j_x^∞ 是线性的，因为每个 δ_x^k: $C^\infty(U,F) \to P^k(E,F)$ 都是线性的。由于 $P(E,F) = \prod_{n=0}^\infty P^n(E,F)$ 带有乘积拓扑，要证明 j_x^∞ 连续，只需证明对每个 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$， δ_x^k 都连续。这由 $C^\infty(U,F)$ 上的紧开 C^∞-拓扑（见 Nee06，定义 I.5.1(d)）以及 $P^k(E,F)$ 所带的紧子集上一致收敛拓扑的定义立即可得。设 U 连通。取 $f \in C^\omega(U,F)$，并假设 $j_x^\infty(f) = 0$。由命题 2.1.10 可知，对于 E 的某个零邻域中的所有h，都有 $f(x+h) = 0$。由命题 2.1.14 可得 $f = 0$。 □

2.2 光滑、解析与强整表示

设 G 是一个 BCH（Baker–Campbell–Hausdorff）Fr´echet–李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。我们用 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的复化。关于局部凸李理论的概述，可参阅 [Nee06] 和 [Mil84] 。先引入一些记号。若 $\mathcal{D}$ 是一个预希尔伯特空间，我们用 $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ 表示 $\mathcal{D}$ 上线性算子的集合。进一步定义代数

$$\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D}) := \left\{ X \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) \,:\, \exists X^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{D}) \,:\, \forall \xi,\eta \in \mathcal{D} \,:\, \langle X^\dagger\psi, \eta\rangle = \langle \psi, X\eta\rangle \right\}.$$

与 $X \in \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ 对应的元素 $X^\dagger$ 是唯一的，它同样是 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ 中的一个元素，并满足 $(X^\dagger)^\dagger = X$，因此 $(-)^\dagger$ 在 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{D})$ 上定义了一个对合。我们还需要在 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 上使用若干种对合。定义 θ: $\mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}$，使得 $\theta(\xi + i\eta) := \xi - i\eta$，其中 $\xi,\eta \in \mathfrak{g}$。

定义 2.2.1. 将 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上的共轭 θ 延拓为 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的复共轭线性自同构。令 τ 表示 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的对合反自同构，它将 $\xi \mapsto -\xi$ 延拓至 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$。定义 $x^* := \tau(\theta(x))$，其中 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$。具体而言， θ、 τ 和 $(-)^*$ 满足以下关系，其中 $\xi_j \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$，对 $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\theta(\xi_1 \cdots \xi_n) &= \theta(\xi_1)\cdots\theta(\xi_n),\\
\tau(\xi_1 \cdots \xi_n) &= (-1)^n \xi_n \cdots \xi_1,\\
(\xi_1 \cdots \xi_n)^* &= (-1)^n \theta(\xi_n)\cdots\theta(\xi_1).
\end{aligned}$$

若 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是一个酉 G-表示，则称其为连续的，如果它相对于 $\mathrm{U}(\mathcal{H}_\rho)$ 上的强算子拓扑是连续的。

定义 2.2.2. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的连续酉表示。若向量 $\psi \in \mathcal{H}_\rho$ 的轨道映射 $G \to \mathcal{H}_\rho, g \mapsto \rho(g)v$ 是光滑的，称该向量为光滑向量；若该映射是解析的，则称其为解析向量。我们分别用 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 和 $\mathcal{H}_\rho^\omega$ 表示光滑向量与解析向量构成的线性子空间。若表示 ρ 满足 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 中稠密，则称该表示为光滑表示；若 $\mathcal{H}_\rho^\omega$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 中稠密，则称其为解析表示。

注记 2.2.3. 若 ρ 是 G的光滑酉表示，则 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$上的导出表示 $d\rho$ 可延拓为同态 $d\rho$: $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to \mathcal{L}^\dagger(\mathcal{H}_\rho^\infty)$，并满足 $d\rho(x)^\dagger = d\rho(x^*)$，对任意 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$均成立。

定义 2.2.4. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G的光滑酉表示。

— 按照 [JN19，定义 3.9], ，我们在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$上定义两种局部凸拓扑：

– $\mathcal{H}_\rho^\infty$上的弱拓扑由以下半范数定义

$$p_\xi(\psi) := \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|, \qquad \text{where } n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \text{ and } \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathfrak{g}^n.$$

– 强拓扑由以下半范数定义 ms

$$p_B(\psi) := \sup_{\xi \in B} \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|,$$

其中 $B \subseteq \mathfrak{g}^n$ 是有界的，且 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。

若 G 是正则的，则空间 $\mathcal{H}_\rho^\infty$在这两种拓扑下均为完备的 [JN19，命题 3。19],这里我们还用到了 G 是一个 Fr´échet–Lie 群。

— 若向量 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$对每个紧 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$都是整的，则称其为整向量：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sup_{\xi \in B} \|d\rho(\xi^n)\psi\| < \infty.$$

— 若 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$且 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$，我们定义

$$p_B^n(\psi) := \sup_{\xi_1,\dots,\xi_n \in B} \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|$$

and

$$q_B(\psi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} p_B^n(\psi).$$

— 若对于每个紧子集 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$， $q_B(\psi) < \infty$，则称向量 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$为强整向量。若对于每个有界子集 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$， $q_B(\psi) < \infty$，则称其为 b-强整向量。

— 我们分别用 $\mathcal{H}_\rho^\mathcal{O} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$和 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$表示强整向量和 b-强整向量的线性子空间。赋予 $\mathcal{H}_\rho^\mathcal{O}$（分别对 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$）由半范数 q_B 定义的局部凸拓扑，其中 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$为紧（分别为有界）子集。

— 如果 $\mathcal{H}_\rho^\mathcal{O}$在 $\mathcal{H}_\rho$中稠密，我们称表示 ρ 是强整的；如果 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$在 $\mathcal{H}_\rho$中稠密，则称其为 b-强整的。

若 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，我们记 $f^\psi\colon\ G \to \mathcal{H}_\rho$为轨道映射 $f^\psi(g) = \rho(g)\psi$。由于 f^ψ是光滑的，齐次多项式 $f_n^\psi(\xi)\colon = \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$作为从 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathcal{H}_\rho$到 $f_n^\psi \in P^n(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathcal{H}_\rho)$ 的映射是连续的。进一步注意到， $j_0^\infty(f^\psi) = \sum_{n=0}^\infty f_n^\psi \in P(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathcal{H}_\rho)$。令 β_n^ψ为满足 $f_n^\psi = \beta_n^\psi \circ \Delta_n$的 $\mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathcal{H}_\rho)$ 中唯一元素。明确地， $\beta_n^\psi(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(n!)^2} \sum_{\sigma \in S_n} d\rho(\xi_{\sigma_1} \cdots \xi_{\sigma_n})v$。

引理 2.2.5. 设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$。假设对于每个紧子集 $B \subseteq \mathfrak{g}$， $q_B(\psi) < \infty$。那么对于每个紧子集 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$， $q_B(\psi) < \infty$。

证明。设 $B_\mathbb{C} \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 是紧的。将 $B_\mathbb{C}$ 替换为其平衡包后，我们可以假设 $B_\mathbb{C}$ 是平衡的。令$B := \{\xi + \overline{\xi}\colon\ \xi \in B_\mathbb{C}\} \subseteq \mathfrak{g}$，它在 $\mathfrak{g}$ 中是紧的。于是 $B_\mathbb{C} \subseteq B + iB$，因此 $q_{B_\mathbb{C}}(\psi) \le q_{2B}(\psi) < \infty$。 □

命题 2.2.6. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的光滑酉表示。设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$。以下断言等价：

1. $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。
2. 存在一个零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$，使得对于每个 $\xi \in V$， $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$ 收敛，并且映射 $V \to \mathcal{H}_\rho$， $\xi \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$ 连续。
3. $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$ 在零邻域 $\mathfrak{g}$中的每个 ξ 处都收敛。
4. 存在一个零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} p_V^n(\psi) < \infty$。
5. 存在一个零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$，使得对所有 $\xi \in V$， $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \langle \psi, d\rho(\xi^n)\psi \rangle$ 都收敛。
6. 映射 $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \langle \psi, \rho(g)\psi \rangle$ 在 $1 \in G$ 的某个邻域上是解析的。

证明。假设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。那么轨道映射 $f^\psi\colon\ G \to \mathcal{H}_\rho$ 是实解析的，因此 $f^\psi \circ \exp : \mathfrak{g} \to \mathcal{H}_\rho$ 也是如此。注意， $f^\psi(e^\xi) = \rho(e^\xi)\psi$，因此 $\delta_0^n(f^\psi \circ \exp) = d\rho(\xi^n)\psi$。利用命题 2.1.10，可得在某个平衡零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$ 上， $f^\psi(e^\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$。所以 (1) $\implies$ (2)。

我们证明 (2) $\implies$ (1)。取一个零邻域 $V \subseteq \mathfrak{g}$，使得对每个 $\xi \in V$， $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$ 都收敛，并且映射 $\xi \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$ 在 V 上连续。将 V 替换为某个更小的平衡开集后，我们可以假设 V 是平衡的。定义 $h^\psi(\xi) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} d\rho(\xi^n)\psi$。由注记 2.1.6 可知，这些假设蕴含 h^ψ 在 V 上实解析；这里用到了 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet 空间且 $\mathcal{H}_\rho$ 是希尔伯特空间。于是由命题 2.1.9， h^ψ 是光滑的。令 $\xi \in V$。我们证明 $h^\psi(\xi) = \rho(e^\xi)\psi$。令 $s \in I := [-1, 1]$。因为 V 是平衡的，所以 $s\xi \in V$。注意到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} h^\psi(t\xi)\psi = d\rho(\xi)h^\psi(s\xi), \qquad \text{and} \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \rho(e^{t\xi})\psi = d\rho(\xi)\rho(e^{s\xi})\psi.$$

令 $\eta \in \mathcal{H}_\rho^\infty$。利用 $d\rho(\xi)^*\eta = -d\rho(\xi)\eta$，可得 $\frac{d}{dt}\big|_{t=s}\langle \rho(e^{t\xi})\eta, h^\psi(t\xi)\rangle = 0$ 对所有 $s \in I$ 均成立。因此 $\langle \eta, \rho(e^{-t\xi})h^\psi(t\xi)\rangle = \langle \eta, \psi\rangle$ 对所有 $t \in I$ 均成立。由于这对稠密集 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 中任意 η 都成立，因此可得 $\rho(e^{-t\xi})h^\psi(t\xi)\psi = \psi$，或者等价地，对所有 $t \in I$， $h^\psi(t\xi)\psi = \rho(e^{t\xi})\psi$ 均成立。特别地，取 $t = 1$，我们得出对所有 $\xi \in V$， $h^\psi(\xi) = \rho(e^\xi)\psi$。由于 h^ψ 在 V 上实解析， $\xi \mapsto \rho(e^\xi)\psi$ 也如此。由于 G 是 BCH 群，这意味着 $g \mapsto \rho(g)\psi$ 在 $1 \in G$ 的某个邻域上解析。进而，这意味着它处处解析；这里用到了 G 是实解析李群，且实解析映射的复合仍是实解析映射 [Gl¨o02b，命题 2.8]。因此 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。

蕴含关系 (2) $\Longrightarrow$ (3) 显然，而由 [BS71a, 命题 5.2]可得 (3) $\Longrightarrow$ (4)，因为 V 是吸收的，且 $\mathfrak{g}$ 是 Baire 空间，因为它是 Fr´echet。为证明 (4) $\Longrightarrow$ (2)，假设 $V \subseteq \mathfrak{g}$是一个零邻域，使得 $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, p_V^n(\psi) < \infty$。对于 $\xi \in V$，我们写作 $s_N(\xi) := \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi^n)\psi$，以及 $s(\xi) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi^n)\psi$。只需证明 s在 V上连续。令 $\xi \in V$。设 (ξ_k) 是 V中的一个序列，且 $\xi_k \to \xi$。令 $\epsilon > 0$。取满足 $\sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n!}\, p_V^n(\psi) < \epsilon$的 $N \in \mathbb{N}$。那么对于任意$\eta \in V$，我们有 $\|s(\eta) - s_N(\eta)\| \le \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n!} p_V^n(\psi) < \epsilon$。利用 s_N连续这一点，取满足$\|s_N(\xi) - s_N(\xi_k)\| < \epsilon$且对所有 $k \ge N'$ 都成立的 $N' \in \mathbb{N}$。然后

$$\|s(\xi) - s(\xi_k)\| \le \|s(\xi) - s_N(\xi)\| + \|s_N(\xi) - s_N(\xi_k)\| + \|s_N(\xi_k) - s(\xi_k)\| < 3\epsilon, \quad \forall k \ge N'.$$

因此 $s(\xi_k) \to s(\xi)$。所以 s 在 0 处序列连续。由于 $\mathfrak{g}$ 是 Fr´echet，这意味着 s 在 ξ处连续。因此 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) $\iff$ (4)。显然，(3) $\Longrightarrow$ (5)；而 (5) $\Longrightarrow$ (3) 可由 Nee11，命题 3.4，6.3] （考虑 $\mathcal{D} := \mathcal{H}_\rho^\infty$和 $v := \psi$）立即推出。最后，(6) $\iff$ (1) 正是 Nee11，定理 5.2]。证明至此完成。 □

我们来考虑关于整向量的类似陈述:

命题 2.2.7。设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$。以下断言等价:

1. 级数 $\sum_{n=0}^\infty f_n^\psi(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi^n)\psi$定义了一个整函数

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathcal{H}_\rho, \qquad \xi \mapsto \sum_{n=0}^\infty f_n^\psi(\xi).$$

2. ψ 是 ρ的整向量，即 $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, \sup_{\xi\in B}\|d\rho(\xi^n)\psi\| < \infty$ 对每个紧集 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$都成立。

3. 映射 $\mathfrak{g} \to \mathcal{H}_\rho$, $\xi \mapsto \rho(e^\xi)\psi$ 可延拓为整函数 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathcal{H}_\rho$。

4. $\sum_{n=0}^\infty \sup_{\xi_i\in B}\|\beta_n^\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\| < \infty$ 对每个紧集 $B \subseteq \mathfrak{g}$都成立。

证明。由于根据假设 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$是 Fr´echet，我们根据引理 2.1.8可知，级数 $\sum_{n=0}^\infty f_n^\psi(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi^n)\psi$在 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上定义整函数，当且仅当

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} \sup_{\xi\in B}\|d\rho(\xi^n)\psi\| < \infty, \qquad \forall B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C} \text{ compact}.$$

也就是说，当且仅当 (2) 成立时才成立。因此 (1) $\iff$ (2)。接下来假设 (2) 成立。由于单点集是紧的，特别可知，对每个 $\xi \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$， $\sum_{n=0} f_n^\psi(\xi)$ 都收敛。由命题 2.2.6，这意味着 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。因此，轨道映射 $f^\psi\colon G \to \mathcal{H}_\rho$ 是实解析的。由于 G 是 BCH，指数映射 $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ 是实解析的，因此 $\xi \mapsto f^\psi(e^\xi) = \rho(e^\xi)\psi$ 是一个实解析映射 $\mathfrak{g} \to \mathcal{H}_\rho$。由于对每个 $n \in \mathbb{N}$, $\delta_0^n(f^\psi \circ \exp; \xi) = d\rho(\xi^n)\psi$，命题 2.1.10 蕴含，在 V 中某个零邻域上有 $f^\psi(e^\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi^n)\psi$。根据假设，(2) 及由此可得的 (1) 均成立，因此 $\sum_{n=0}^\infty f_n^\psi$ 是一个整函数，延拓了 $\xi \mapsto \rho(e^\xi)\psi$。因此 (3) 成立。反过来，假设 (3) 成立，也就是说， $f^\psi \circ \exp$ 延拓为整函数 $F\colon \mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathcal{H}_\rho$。由命题 2.1.10，并利用对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\delta_0^n(f^\psi \circ \exp; \xi) = d\rho(\xi^n)\psi$，可得对每个 $\xi \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}$， $F(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi^n)\psi$。因此 (1) 成立。我们已经证明 (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3)。接下来证明 (2) $\Longrightarrow$ (4)。设 $B \subseteq \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 是紧的。由于 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 是完备的， B 的闭凸包仍然是紧的 [Tre67, 第 67] 页。因此不妨假设 B 是凸的。再用其平衡包替换 B 后，不妨假设 B 是平衡的。于是 $B + \cdots + B\,(n \text{ times}) \subseteq nB$。由方程 (2.3) 可得

$$\sup_{\xi_i\in B}\|\beta_n^\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\| \le \frac{2^n}{n!} \sup_{\xi\in nB}\|f_n^\psi(\xi)\| = \frac{(2n)^n}{n!} \sup_{\xi\in B}\|f_n^\psi(\xi)\|.$$

任选一个 $t > 2e$。由于对每个紧集 B，$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\xi\in B} \|f_n^{\psi}(\xi)\| < \infty$，考虑 tB 可知，存在某个 $C > 0$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 都有 $\sup_{\xi\in B} \|f_n^{\psi}(\xi)\| \leq Ct^{-n}$。于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\xi_i\in B} \|\beta_n^{\psi}(\xi_1,\ldots,\xi_n)\| \leq C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{2n}{t}\right)^n < \infty.$$

蕴含关系 (4) $\Longrightarrow$ (2) 是显然的。 □

注 2.2.8. 命题 2.2.7 中对整向量的刻画 (4) 清楚地揭示了整向量与强整向量之间的区别，即考察的是对称的 n-线性映射 β_n^{ψ}，还是它们的非对称类比（$\xi_1,\ldots,\xi_n) \mapsto \frac{1}{n!}\, d\rho(\xi_1\cdots\xi_n)\psi$。与 Nee11，注 3.7], 类似，一般而言，尚不清楚任意整向量是否实际上都是强整向量。当 $\mathfrak{g}$ 为有限维时，这可由 Pen74，定理 I.3，注 I.7] 立即推出。

推论 2.2.9. $\mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{H}_{\rho}^{\omega} \subseteq \mathcal{H}_{\rho}^{\infty}$。

证明。任意强整向量都是整向量。因此，结合命题 2.2.7 和命题 2.2.6，即可得到第一个包含关系。第二个包含关系则由以下事实得出：若轨道映射 $f^{\psi}\colon G \to \mathcal{H}_{\rho}$ 是实解析的，那么根据命题 2.1.9，它也是光滑的。 □

强整向量空间 $\mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$将在下文第 3 节中作更详细的讨论 .

2.3 正能量与基态表示。

设 G 是一个局部凸李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。若 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特空间，且 $S \subseteq \mathcal{H}$ 是一个子集，则我们用 $[\![S]\!] \subseteq \mathcal{H}$ 表示 S的闭线性张成。

定理 2.3.1（Borchers–Arveson [BR87，定理 3.2.46], [BGN20，引理 4.17]）。
设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的一个冯·诺依曼代数。设 $(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个强连续单参数酉群，并满足对所有 $t \in \mathbb{R}$均有 $U_t\mathcal{M}U_t^{-1} \subseteq \mathcal{M}$。假设 $U_t = e^{itH}$，其中 $H \geq 0$。定义 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$，使得 $\alpha_t(x) := \mathrm{Ad}_{U_t}(x) := U_t x U_t^{-1}$，其中 $t \in \mathbb{R}$且 $x \in \mathcal{M}$。用 $\mathcal{M}^{\alpha}(S) \subseteq \mathcal{M}$表示对应于 $S \subseteq \mathbb{R}$的 Arveson 谱子空间。于是

1. 存在一个强连续单参数酉群 $V_t = e^{itH_0}$，其取值于 $\mathcal{M}$，满足 $H_0 \geq 0$，且对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都有 $\mathrm{Ad}_{V_t} = \alpha_t$。

2. $\bigcap_{t>0} [\![\mathcal{M}^{\alpha}[t,\infty)\mathcal{H}]\!] = \{0\}$。

3. V_t 由附加条件唯一确定：对于任何其他这样的 $V_t' = e^{itH_0'}$，都有$H_0' \geq H_0$。在此情形下，对应于 V_t 的谱投影 P 由下式唯一确定：

$$P[t,\infty)\mathcal{H} = \bigcap_{s<t} [\![\mathcal{M}^{\alpha}[s,\infty)\mathcal{H}]\!].$$

定义 2.3.2。考虑定理 2.3.1 的情形。满足定理 2.3.1(1) 条件的单参数酉群 $V_t = e^{itH_0}$ 称为 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ 在 $\mathcal{H}$ 上的正内实现。如果 V_t 还满足定理 2.3.1(3) 中的条件，则称其为 α 在 $\mathcal{H}$ 上的极小正内实现。

定义 2.3.3。
ρ的光滑酉表示 $(\mathcal{H}_{\rho})$ 在 $\xi \in \mathfrak{g}$处具有正能量（p.e.），如果 $-i\,\mathrm{Spec}(d\rho(\xi)) \geq 0$。此外，如果 $\overline{\mathcal{H}_{\rho}(0)} := \ker d\rho(\xi)$ 对于 G是循环的，则称 $(\rho, \mathcal{H}_{\rho})$ 在 $\xi \in \mathfrak{g}$处为基态。

定义 2.3.4。设 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是一个同态，且相应的作用 $\mathbb{R} \times G \to G$是光滑的。定义 $G^{\sharp} := G \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{g}^{\sharp} := \mathrm{L}(G^{\sharp}) = \mathfrak{g} \rtimes_D \mathbb{R}\boldsymbol{d}$，其中 $\boldsymbol{d} := 1 \in \mathbb{R}$。设 $(\rho, \mathcal{H}_{\rho})$ 是 G的光滑酉表示。我们用 $\mathcal{M} := \rho(G)''$ 表示由 $\rho(G)$生成的冯·诺依曼代数。

1. ρ 到 $G^{\sharp}$ 的扩张是 $G^{\sharp}$ 在 $\mathcal{H}_{\rho}$ 上的一个光滑酉表示 $\widetilde{\rho}$，满足 $\widetilde{\rho}|_G = \rho$。

2. 如果存在将 ρ 扩张到 $G^{\sharp}$ 的扩张 $\widetilde{\rho}$，且该扩张在$\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^{\sharp}$处具有正能量，则称 ρ 关于 α 具有正能量。在这种情况下，称 $\widetilde{\rho}$ 为 ρ的正扩张。

3. 假设 ρ 相对于 α 具有正能量。ρ 的最小正扩张 $\widetilde{\rho}$ 是 ρ 到 $G^{\sharp}$ 的正扩张 $\widetilde{\rho}$，满足 $V_t := \widetilde{\rho}(e,t)$ 是自同构群 $\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ $t \mapsto \mathrm{Ad}_{V_t}$ 的极小正内实现。特别地，对每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $V_t \in \mathcal{M}$。

4. 若 G 的酉表示 ρ 相对于 α 具有正能量，则称其为基态表示，如果它存在一个在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处为基态的最小正扩张。

定义 2.3.5. 设 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是 G 上的一个 $\mathbb{R}$ 作用，且对应映射 $\mathbb{R} \times G \to G$ 是光滑的。令 $\widehat{G}$ 表示 G 的光滑不可约酉表示的等价类集合。定义

$$\widehat{G}_{\mathrm{pos}(\alpha)} := \left\{ \rho \in \widehat{G} : \rho \text{ is of p.e. w.r.t. } \alpha \right\}.$$

命题 2.3.6.

考虑定义 2.3.4 中的情形。假设 ρ 相对于 α 具有正能量。

1. 存在唯一的 ρ 到 $G^\sharp$ 的最小正扩张 $\widetilde{\rho}_0$。2. 若 ρ 到 $G^\sharp$ 的任意另一个正扩张为 $\widetilde{\rho}$，则存在 $\mathcal{M}'$ 中的强连续酉单参数群 (U_t)，使得 $\widetilde{\rho}(t) = \widetilde{\rho}_0(t)U_t$。在此情形下，$\widetilde{\rho}_0(G^\sharp)'' = \rho(G)''$。特别地，$\rho$ 不可约当且仅当 $\widetilde{\rho}_0$ 不可约。3. 假设对于某个 $T > 0$，有 $\alpha_T = \mathrm{id}_G$。那么 $\widetilde{\rho}_0(T) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_\rho}$，且 ρ 相对于 α 是基态。

4. 令 P 表示与 $t \mapsto \widetilde{\rho}_0(t)$ 相关联的谱测度。设 $\epsilon > 0$。则投影 $P[0,\epsilon)$ 的中心支撑为 $1_{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_\rho} \in \mathcal{Z}(\mathcal{M})$。特别地，$P[0,\epsilon)\mathcal{H}_\rho$ 对 $\mathcal{M}$ 是循环的。

证明。前三个断言由 [JN21, Cor. 3.9] 得出，最后一个则由 [BGN20, Lem. 4.17] 得出。 □

3 强整向量的空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$

设 G 是一个 BCH Fr´echet–李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的光滑酉表示。本节将 [Goo69] 关于强整向量空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 的若干结果，从 G 为有限维的情形推广到当前情形。

3.1 强整表示存在的必要条件

我们首先证明，当 $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$ 时，$\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 的定义（定义 2.2.4）与 [Goo69, p.61] 中所用的定义一致。对于有限维李群的连续酉表示，强整向量稠密集的存在性已十分明确，因此可立即得到无限维情形下强整表示存在的必要条件。事实证明，这些条件相当严格。

假设 $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$。回顾 [Goo69, p.61] 中使用的定义。令 $\{e_\mu\}_{\mu=1}^d$ 为 $\mathfrak{g}$的一组基。对于 $v \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，我们定义

$$E_s(v) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \sup_{1 \le \mu_k \le d} \|d\rho(e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_n})v\| \in [0, \infty].$$

令 $\mathcal{H}_\rho^{\omega_t} := \left\{ v \in \mathcal{H}_\rho^\infty : E_s(v) < \infty \text{ 对所有 } 0 < s < t \right\}$ 和 $t > 0$成立。现在定义 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}'} := \bigcap_{t>0} \mathcal{H}_\rho^{\omega_t}$。赋予 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}'}$ 由半范数 E_s（$s > 0$）定义的局部凸拓扑。

引理 3.1.1. $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} = \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} = \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}'}$ 作为局部凸向量空间之间的等式成立。

证明。对 $s > 0$，定义紧子集

$$B_s := \left\{ \sum_{\mu=1}^d c_\mu e_\mu : c_\mu \in \mathbb{C},\ |c_\mu| \le s \quad \forall \mu \in \{1, \ldots, d\} \right\} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

设 $s > 0$。由于对任意 $\mu \in \{1, \ldots, d\}$，$se_\mu \in B_s$，显然有 $E_s(v) \le q_{B_s}(v)$。反过来，取 $\xi_j \in B_s$，其中 $j \in \{1, \ldots, n\}$。那么，对某个满足 $|c_{\mu_j}| \le s$的 $c_{\mu_j} \in \mathbb{C}$，有 $\xi_j = \sum_{\mu_j=1}^d c_{\mu_j} e_{\mu_j} \in B_s$。因此

$$d\rho(\xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n})v = \sum_{\mu_1, \ldots \mu_n = 1}^{d} c_{\mu_1} \cdots c_{\mu_n} d\rho(e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_n})v.$$

因此

$$\|d\rho(\xi_{j_1} \cdots \xi_{j_n})v\| \le s^n \sum_{\mu_1, \ldots \mu_n = 1}^{d} \|d\rho(e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_n})v\| \le s^n d^n \sup_{1 \le \mu_k \le d} \|d\rho(e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_n})v\|.$$

因此，对于任意 $s > 0$， $E_s(v) \leq q_{B_s}(v) \leq E_{sd}(v)$。这表明 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} = \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}'}$ 作为局部凸向量空间。由于 $\dim(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) < \infty$，显然还有 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} = \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，因为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中任意有界集的闭包都是紧的。

□

沿用 [AM66，第 128], [页； 115]第 [页的 Jen73 以及 74], Pen，我们定义如下：

定义 3.1.2。

— 若有限维李群 G 称为 R 型，则对于每个 $g \in G$，都有 $\mathrm{Spec}(\mathrm{Ad}_g) \subseteq \mathbb{T}$，其中 $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$为单位圆。— 若有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 称为 R 型，则对于每个 $\xi \in \mathfrak{g}$，都有 $\mathrm{Spec}(\mathrm{ad}_\xi) \subseteq i\mathbb{R}$。

注记 3 .1.3. 某些作者也将 R 型李代数称为弱椭圆李代数， [Nee98，定义 II.1].

命题 3.1.4（[Jen73，命题 1.3]）。
设 G 是一个有限维连通李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。当且仅当 $\mathfrak{g}$ 属于 R 型时， G 属于 R 型。

命题 3.1.5（[Pen74，第 120] 页引理）。一个有限维 d 量 李代数 $\mathfrak{g}$ 属于 R 型，当且仅当它是一个紧致 $\mathfrak{s} \rtimes \mathfrak{k}$ 的半直积 t 半单李 代数 $\mathfrak{k}$ 和一个属于类型 R的可解李代数 $\mathfrak{s}$。

定理 3.1.6（[Pen74，推论 II.5]）。
设 G 是有限维李群， ρ 是 G的连续酉表示。那么， $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$稠密，当且仅当 ρ可通过一个属于类型 R的李群分解。

在 G 可能是无限维 BCH Fr´échet–李群的情形下，可得：

推论 3.1.7。设 G 是可能为无限维的 BCH Fr´échet–李群。假设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G的强整酉表示。若 ρ 是单射，则 G的任意有限维李子群都属于类型 R。

证明。设 H 是 G的有限维李子群。那么， $\pi := \rho|_H$ 是 $\mathcal{H}_\pi$ 上的连续酉 H表示：$= \mathcal{H}_\rho =:$ $\mathcal{H}$。由于 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{H}_\pi^{\mathcal{O}}$, $\mathcal{H}_\pi^{\mathcal{O}}$ 在 $\mathcal{H}$中稠密。由 ρ 是单射，根据定理 3.1.6 可得， H 属于类型 R。

□

举例来说：如果 ρ 是单射且 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$稠密，那么 G 不可能包含一个 $ax + b$群的副本。另一方面，定理 3.1.6 给出了大量连续表示的例子，它们都含有强整向量稠密集。事实上，只需取任意一个 R型有限维李群的连续酉表示即可。下面的例子表明，无限维李群也可能含有强整向量稠密集。

例 3.1.8（范数连续表示）。
设 G 是一个 BCH Fr´echet–李群，且 $\rho\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H}_\rho)$是 G 的一个酉表示，并且关于 $\mathrm{U}(\mathcal{H}_\rho)$ 上的范数拓扑连续。赋予范数拓扑后，$\mathrm{U}(\mathcal{H}_\rho)$是一个巴拿赫–李群，其李代数为

$$\mathfrak{u}(\mathcal{H}_\rho) := \{\, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho) \,:\, T^* = -T \,\},$$

连续同态 $\rho\colon G \to \mathrm{U}(\mathcal{H}_\rho)$根据 [Nee06, Thm. IV.1.18]自动是解析的。这意味着 $\mathcal{H}_\rho^{\omega} = \mathcal{H}_\rho$。下面我们证明甚至有 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} = \mathcal{H}_\rho$。由于表示 $d\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}(\mathcal{H}_\rho)$是连续的，存在 $\mathfrak{g}$ 上的连续半范数 p ，使得对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$ [，都有 $\|d\rho(\xi)\| \leq p(\xi)$（参见7]Tre67, Ch. I.7, Prop. 7.）。因此， $\|d\rho(\xi_1)\cdots d\rho(\xi_n)\psi\| \leq p(\xi_1)\cdots p(\xi_n)\|\psi\|$，其中 $\xi_j \in \mathfrak{g}$对于 $j \in \mathbb{N}$和 $\psi \in \mathcal{H}_\rho$成立。因此，如果 $B \subseteq \mathfrak{g}$有界，那么取 $M := \sup p(B) < \infty$ ，便有

$$q_B(\psi) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sup_{\xi_i \in B} \|d\rho(\xi_1)\cdots d\rho(\xi_n)\psi\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}\|\psi\| = e^M\|\psi\| < \infty.$$

利用引理 2.2.5，这就证明了 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} = \mathcal{H}_\rho$。

例 3.1.9（海森堡群的正能量表示）。
我们回顾海森堡群的正能量表示的构造，并证明它们含有一个由 b-强整向量组成的稠密集。设 V 是一个实 Fr´échet 空间，且 ω 带有一个非退化连续斜双线性形式 $V \times V \to \mathbb{R}$。令 $G := \mathrm{Heis}(V, \omega)$ 为相应的海森堡群，其底层集合为 $\mathbb{T} \times V$，乘法定义为 $(z_1, v_1) \cdot (z_2, v_2) := (z_1 z_2 e^{-i\omega(v_1, v_2)} v_1 + v_2)$。由于 V是 Fr`échet 空间，

根据 [KM97，定理 I.4.11]，它是 Mackey 完备的。利用 [Nee06，定理 V.1.8], ，可知 G 是正则的。令$G_{\mathbb{C}}$:= Heis($V_{\mathbb{C}}$,ω) 为相应的复化。设 $\mathcal{J}$ 是 V上的相容的正复结构，这意味着对任意非零 $v \in V$，有 $\mathcal{J}^*\omega = \omega$ 且 $\omega(v, \mathcal{J}v) > 0$。正定半双线性形式 $\langle v, w\rangle := \omega(v, \mathcal{J}w) + i\omega(v, w)$ 使 V成为复预希尔伯特空间，其完备化记为 $V_{\mathcal{J}}$。注意，包含映射 $V \to V_{\mathcal{J}}$是连续的。给对称代数 $\mathrm{S}^\bullet(V_{\mathcal{J}})$ 配备满足以下条件的内积

$$\langle v_1 \cdots v_n, w_1 \cdots w_n\rangle = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{j=1}^{n}\langle v_j, w_{\sigma_j}\rangle, \qquad \text{for } v_j, w_j \in V_{\mathcal{J}}. \tag{3.1}$$

令 $\mathcal{H}_\rho$ 为 $\mathrm{S}^\bullet(V_{\mathcal{J}})$ 对应的希尔伯特空间完备化。于是 $\mathcal{H}_\rho$ 包含并由“相干态” e^v 生成：$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\, v^n \in \mathcal{H}_\rho$ 其中 $v \in V_{\mathcal{J}}$，且 Heis(V,ω) 在 $\mathcal{H}_\rho$ 上有一个酉表示 ρ，满足（[PS86，第 9.5] 节）

$$\rho(z, v)e^w = ze^{-\frac{1}{2}\|v\|^2-\langle v,w\rangle}e^{v+w}, \qquad \text{for } v, w \in V \text{ and } z \in \mathbb{T}.$$

直接计算可验证方程 $\rho(v_1)\rho(v_2) = e^{-i\omega(v_1,v_2)}\rho(v_1 + v_2)$，其中 $v_1, v_2 \in V$。令 $\Omega \in \mathcal{H}_\rho$ 为真空向量。映射

$$G \to \mathbb{C}, \qquad (z, v) \mapsto \langle\Omega, \rho(z, v)\Omega\rangle = ze^{-\frac{1}{2}\|v\|^2}$$

是光滑的，因此由 [Nee10a，定理 7.2]可知， $\mathcal{H}_\rho^\infty$包含循环向量 Ω，故在 $\mathcal{H}_\rho$中稠密。因此 ρ 是光滑的。无穷小 $\mathfrak{g}$-作用 $d\rho$ 满足 $d\rho(v)\psi = (\mathfrak{c}(v) - \mathfrak{a}(v))\psi$，对任意 $v, w \in V$ 以及 $\psi \in \mathrm{S}^\bullet(V_{\mathcal{J}})$，其中 $\mathfrak{c}(v)\psi = v\psi$ 是以 $\mathrm{S}^\bullet(V_{\mathcal{J}})$ 为核的产生算子，而 $\mathfrak{a}(v) := \mathfrak{c}(v)^*$ 是其伴随算子，即湮灭算子。由 $\mathfrak{c}(\mathcal{J}v) = i\mathfrak{c}(v)$ 和 $\mathfrak{a}(\mathcal{J}v) = -i\mathfrak{a}(v)$ 可得， $d\rho$到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的 $\mathbb{C}$-线性扩张满足 $d\rho(v + iw) = \mathfrak{c}(v + \mathcal{J}w) - \mathfrak{a}(v - \mathcal{J}w)$，其中 $v, w \in V$。

为了证明 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$在 $\mathcal{H}_\rho$中稠密，只需证明它包含循环向量 Ω，因为 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$是 G-不变的（参见下文引理 3.2.10）。令 B 为 $V_{\mathcal{J}}$中的开单位球。设 $K \subseteq V$是实 Fr´echet 空间 V的有界子集。那么 K 作为 $V_{\mathcal{J}}$的子空间也有界，因此包含于某个 sB 中，其中$s > 0$。若 $v \in B$，则（[BR97，第 9] 页）

$$\|\,\mathfrak{c}(v)|_{\mathrm{S}^n(V_{\mathcal{J}})}\,\| = \|\,\mathfrak{a}(v)|_{\mathrm{S}^{n+1}(V_{\mathcal{J}})}\,\| < \sqrt{n+1}.$$

因此，如果 $(v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个 B中的序列，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$\sup_{v_1,\ldots,v_n\in B}\|d\rho(v_n)\cdots\overline{d\rho}(v_1)\Omega\| < 2^n\sqrt{n!}$。因此 ，

$$q_K(\Omega) \le q_{sB}(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\sup_{v_j\in B}\|d\rho(v_n)\cdots d\rho(v_1)\Omega\| < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2s)^n}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

根据引理 2.2.5 可知 $\Omega \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$。因此 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$在 $\mathcal{H}_\rho$ 中稠密，且 ρ 是 $\mathfrak{b}$-强整的。

3.2 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$的性质与全纯延拓

设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的光滑酉表示。本节中，我们还假设 G 是一个正则李群。下面总结局部凸空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 的各种性质：

定理 3.2.1. 局部凸空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 具有以下性质：

1. 相对于 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上的弱拓扑，包含映射 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \hookrightarrow \mathcal{H}_\rho^\infty$ 是连续的。
2. $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 是豪斯多夫且完备的。
3. $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 同时具有 G-不变性和 $\mathfrak{g}$-不变性。
4. 级数 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}d\rho(\eta^m)\psi$ 对每个 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 和 $\eta \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 都在 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 中收敛。相应的映射

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}, \qquad (\eta, \psi) \mapsto \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}d\rho(\eta^m)\psi =: \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)\psi \tag{3.2}$$

   分别连续，并延拓映射 $\mathfrak{g} \times \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}, (\eta, \psi) \mapsto \rho(e^\eta)\psi$。特别地，对每个 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，函数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$, $\eta \mapsto \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)\psi$ 都是整函数。
5. 对于任意 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，轨道映射 $G \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$, $g \mapsto \rho(g)\psi$ 是实解析的。

在继续证明定理 3.2.1 之前，我们先提及一些重要的推论和相关注记。

推论 3.2.2。假设 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 中稠密。定义映射

$$\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}), \qquad \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)v := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d\rho(\eta^n)v. \tag{3.3}$$

令 $U \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为开凸集。假设 $U \cap \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中的非空开集。设 BCH 级数定义了一个复解析映射 $*\colon U \times U \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。那么，对于任意 $(\xi, \eta) \in U \times U$， $\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi * \eta) = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)$。

证明。定义 $U_{\mathbb{R}} := U \cap \mathfrak{g}$。令 $v, w \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^{\infty}$。回顾注记 2.2.3，任意 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 下， $d\rho(x)^\dagger = d\rho(x^*)$ 属于 $\mathcal{L}^\dagger(\mathcal{H}_\rho^{\infty})$。根据定理 3.2.1(4)以及解析映射的复合仍为解析映射这一事实（BS71a，定理 6.4], ），可知由下式给出的两个映射 $U^2 \to \mathbb{C}$

$$(\xi, \eta) \mapsto \langle v, \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)w\rangle = \langle \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi^*)v, \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)w\rangle,$$
$$(\xi, \eta) \mapsto \langle v, \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi * \eta)w\rangle$$

二者都是复解析的。它们在实子空间 $U_{\mathbb{R}}^2$ 上一致，在该子空间上二者均等于 $(\xi, \eta) \mapsto \langle v, \rho(e^\xi)\rho(e^\eta)w\rangle = \langle v, \rho(e^\xi e^\eta)w\rangle$。由命题 2.1.14 可知，它们处处相等。由于 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 中稠密，结合 $\xi, \eta \in U$，我们得到对于每个 $w \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，都有 $\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)w = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi * \eta)w$，因此 $\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta) = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi * \eta)$。 □

推论 3.2.3. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是一个强整酉 G-表示，并由方程 (3.3) 定义 $\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}})$。设 $G_{\mathbb{C}}$ 是一个正则、单连通的复 BCH Fr ´echet–李群，且 $\mathrm{L}(G_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。那么存在一个表示

$$\rho_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}})^\times$$

在 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 上的 $G_{\mathbb{C}}$，满足对所有 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$， $\rho_{\mathbb{C}}(e^\xi) = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)$，且对每个 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，轨道映射 $G_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$， $g \mapsto \rho_{\mathbb{C}}(g)\psi$ 都是复解析的。

证明。由于 $G_{\mathbb{C}}$ 是复 BCH 李群，存在开对称凸零邻域 $U, U' \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，使得 $U \subseteq U', U \cap \mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是开的，且 BCH 级数 $*$ 定义了一个复解析映射 $*\colon U \times U \to U' \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。如有必要，缩小 U 和 U'，我们还可以进一步假设，$\exp_{G_{\mathbb{C}}}$ 在 U' 上的限制是双全纯的，并映到 $G_{\mathbb{C}}$ 的某个开单位元邻域 V。定义函数 $f\colon V \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}})$，令 $f(e^\xi) := \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)$。根据推论 3.2.2， f 满足

$$f(e^\xi e^\eta) = f(e^{\xi * \eta}) = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi * \eta) = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta) = f(e^\xi)f(e^\eta), \qquad \forall \xi, \eta \in U, \tag{3.4}$$

其中第一个等式由 [Nee06, 定理 IV.2.8] 和命题 2.1.15 得出。特别地，对于任意 $\xi \in U$， $f(e^\xi) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}})^\times$ 且 $f(e^\xi)^{-1} = f(e^{-\xi})$。由于 $G_{\mathbb{C}}$ 是一个单连通拓扑群，(3.4) 进一步推出存在一个群同态 $\rho_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}})^\times$，它延拓了 f （参见 [GN, 命题 C.2.1]）。令 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。由于 $\exp_{G_{\mathbb{C}}}$ 限制在 $U' \to V$ 上是一个双全纯映射，由定理 3.2.1(4) 可知映射

$$V \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}, \qquad e^\xi \mapsto \rho_{\mathbb{C}}(e^\xi)\psi = f(e^\xi)\psi = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\psi, \qquad \xi \in U'$$

是复解析的。由于 $G_{\mathbb{C}}$ 是一个复解析李群，且 $V \subseteq G_{\mathbb{C}}$ 是一个开单位元邻域，这意味着轨道映射 $g \mapsto \rho_{\mathbb{C}}(g)\psi$ 是复解析的 $G_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。因此，映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}, \xi \mapsto \rho_{\mathbb{C}}(e^\xi)\psi$ 是复解析的，并且根据构造，它在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的开零邻域 U' 上与整映射 $\xi \mapsto \widetilde{\rho}(\xi)\psi$ 一致。由命题 2.1.14 可知，它们处处相等，因此对于每个 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$， $\rho_{\mathbb{C}}(e^\xi)\psi = \widetilde{\rho}(\xi)\psi$。由于这对所有 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 都成立，我们得出，对于所有 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$， $\rho_{\mathbb{C}}(e^\xi) = \widetilde{\rho}(\xi)$。 □

有人可能会想知道，方程 (3.2) 中的映射是否也是联合连续的。下面的例子表明，这通常并不成立：

例 3.2.4。考虑带有乘积拓扑的 Fr`echet-Lie 群 $G = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$。设 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$为其李代数。注意到 G 也是正则的，并且满足 BCH。考虑 G 在$\mathcal{H}_\rho$上的酉表示：$= \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$，定义为 $(\rho(g)\psi)(k) := e^{ig(k)}\psi(k)$，其中 $g \in G$ 且 $\psi \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$。令 $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 表示 $\mathbb{C}$ 中仅有有限个非零分量的序列空间，则光滑向量空间 $\mathcal{H}_\rho^{\infty}$为$\mathcal{H}_\rho^{\infty} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ [Nee10a，例 4.8]。注意到 $(d\rho(\xi)\psi)(k) = i\xi(k)\psi(k)$，其中 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 且 $\psi \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$。$\mathcal{H}_\rho^{\infty}$上的弱拓扑和强拓扑一致，且二者都与$\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ [上的局部凸归纳极限拓扑一致，见 JN19，例 11]。这是 $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 上使包含映射 $\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 连续的最强局部凸拓扑

对每个 $N \in \mathbb{N}$ 都连续。我们还声称， $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} = \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 作为局部凸空间彼此相同。

令 $\pi_k : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}, \psi \mapsto \psi(k)$ 为到 $k \in \mathbb{N}$ 的第 k 个分量的投影。设 $\psi \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$。那么存在 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\psi(k) = 0$ 对所有 $k > N$ 都成立。令 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为一个紧子集，并注意到 B 包含于紧集 $B' := \prod_{k=1}^{\infty} B_k$ 中，其中 $B_k := \pi_k(B)$。设 $M := \sup\{|\xi(k)| : \xi \in B', 1 \le k \le N\} < \infty$。于是

$$\|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{N} |\xi_1(k) \cdots \xi_n(k)\psi(k)|^2 \le M^{2n}\|\psi\|_{\ell^2}^2, \qquad \forall \xi_1, \cdots, \xi_n \in B'.$$

由此得到

$$q_B(\psi) \le q_{B'}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sup_{\xi_j \in B'} \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|_{\ell^2} \le e^M \|\psi\|_{\ell^2} < \infty. \tag{3.5}$$

因此 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。所以 $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \subseteq \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。我们还有 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^{\infty} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$，故 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$。注意到 (3.5) 中的常数 M 仅取决于 N 和 B，估计式 (3.5) 还表明，对每个 $N \in \mathbb{N}$，包含映射 $\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 都是连续的。因此，$\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 上的局部凸归纳极限拓扑比 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 上的拓扑更细。此外，包含映射 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \hookrightarrow \mathcal{H}_\rho^{\infty} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 关于 $\mathcal{H}_\rho^{\infty}$ 上的弱拓扑也是连续的，由定理 3.2.1(1) 可知， $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} = \mathcal{H}_\rho^{\infty} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 作为局部凸向量空间彼此相同。由于只要每个 $B_k \subseteq \mathbb{R}$ 都有界， $\prod_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 就有界，同理可证， $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} = \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ 作为局部凸向量空间彼此相同。

现在， [Nee10a，例 4.8] 中表明，该作用

$$\mathfrak{g} \times \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}), \qquad (\xi, \psi) \mapsto d\rho(\xi)\psi$$

并非联 合连续（相对于 $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$上的任意局部凸拓扑）。这也意味着映射

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}, \qquad (\xi, \psi) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d\rho(\xi^k)\psi$$

不可能是联合连续的。

注 3.2.5. 在定理 3.2.1（将在稍后给出）的证明中，将“紧”替换为“有界”，并将 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 替换为 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$，即可验证：若将 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$替换为局部凸空间 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$，定理 3.2.1 中的所有结论仍然成立。此外，包含映射 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} \hookrightarrow \mathcal{H}_\rho^{\infty}$显然关于 $\mathcal{H}_\rho^{\infty}$上的强拓扑是连续的。

注 3.2.6. 在某些情况下，考虑 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$而非 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$或许更为合适。例如，若 G 是巴拿赫–李群，则 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$上的局部凸拓扑是 Fr´echet 空间。由于映射

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}, \qquad (\xi, \psi) \mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} d\rho(\eta^m)\psi = \widetilde{\rho}(\xi)\psi \tag{3.6}$$

关于 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$ 变量分别连续且线性，因此根据 [Nee10a, Prop. 5.1] ，可知式 (3.6) 中的函数是联合连续的，因而是整函数。

在这种情况下，我们因此得到了推论 3.2.3 的一个更强的类似结论。事实上，取推论 3.2.2 中的 $U \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ，并假设 BCH 级数定义了一个复解析映射 $* : U \times U \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。于是，对于每个 $v \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$，函数 $(\xi, \eta) \mapsto \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)\widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\eta)v$ 和 $(\xi, \eta) \mapsto \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi * \eta)v$ 都是复解析的 $U \times U \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$。由于它们在 $U_{\mathbb{R}} \times U_{\mathbb{R}}$ 上相等，因此在 $U \times U$ 上必然相等。因此，取推论 3.2.3 中的 $G_{\mathbb{C}}$ ，我们得到一个表示 $\rho_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b})^\times$ ，它满足对于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的某个零邻域内所有的 ξ ，均有 $\rho_{\mathbb{C}}(e^\xi) = \widetilde{\rho}_{\mathbb{C}}(\xi)$，且相应的作用 $G_{\mathbb{C}} \times \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}_b}$ 是复解析的。我们将在下文第 5 节回到这一点。另请注意，上面的例 3.2.4 表明，如果仅假设 G 是 Fr´echet，则 (3.6) 不一定联合连续。

定理 3.2.1 的证明

引理 3.2.7. 设 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是紧的，且 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$， $\frac{1}{n!} p_B^n(\psi) \le q_B(\psi)$。特别地，包含映射 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \hookrightarrow \mathcal{H}_\rho^{\infty}$ 关于 $\mathcal{H}_\rho^{\infty}$ 上的弱拓扑是连续的。

证明. 设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。显然，$\frac{1}{n!}p_B^n(\psi) \le q_B(\psi)$。对于最后一个结论，考虑连续半范数 $p_{\boldsymbol{\xi}}(\psi) := \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|$，它定义在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上，其中某个 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathfrak{g}^n$。取 B 为有限集$B := \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，即可得到 $\frac{1}{n!}p_{\boldsymbol{\xi}}(\psi) \le \frac{1}{n!}p_B^n(\psi) \le q_B(\psi)$。 □

引理 3.2.8. $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$既是豪斯多夫的，也是完备的。

证明. 显然，$\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$是豪斯多夫的，因为 $\mathcal{H}_\rho^\infty$也是如此。下面证明它是完备的。设 $(\psi_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$中的柯西网。那么它也是 $\mathcal{H}_\rho^\infty$中的柯西网。后者是完备的 [JN19, 命题 3.19], ，这里我们用到 G 是一个正则 Fr´echet–李群。因此，对于某个 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，有 $\psi_\alpha \to \psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$。我们必须证明$\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，且 $\psi_\alpha \to \psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。取一个紧集 $B \subseteq \mathfrak{g}$。令 $\epsilon > 0$。选取 $\epsilon_0 > 0$，使得 $\epsilon_0(1 + \epsilon_0) < \epsilon$。令 $t > 1$ 满足 $\frac{t}{t-1} < 1 + \epsilon_0$。由于 $(\psi_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$中的柯西网，存在 $\gamma \in I$，使得当 α、$\beta \ge \gamma$时，$q_{tB}(\psi_\alpha - \psi_\beta) < \epsilon_0$。特别地，对任意 α、$\beta \ge \gamma$和 $k \in \mathbb{N}_{\ge 0}$，有$\frac{1}{k!}p_B^k(\psi_\alpha - \psi_\beta) < \epsilon_0 t^{-k}$。因此，对任意满足 $i \in \{1, \ldots, k\}$的 $\xi_i \in B$（利用 $\psi_\alpha \to \psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$），有:

$$\frac{1}{k!}\|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_k)(\psi - \psi_\beta)\| = \frac{1}{k!}\lim_\alpha \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_k)(\psi_\alpha - \psi_\beta)\| \le \epsilon_0 t^{-k} \qquad \text{for } \beta \ge \gamma.$$

因此$\frac{1}{k!}\, p_B^k(\psi - \psi_\beta) \le \epsilon_0 t^{-k}$对任意 $\beta \ge \gamma$均成立。于是

$$q_B(\psi - \psi_\beta) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}p_B^k(\psi - \psi_\beta) \le \epsilon_0 \sum_{k=0}^\infty t^{-k} = \frac{t}{t-1}\epsilon_0 \le \epsilon_0(1 + \epsilon_0) < \epsilon, \qquad \forall \beta \ge \gamma$$

这表明 $q_B(\psi) \le q_B(\psi - \psi_\beta) + q_B(\psi_\beta) < \infty$，并且对所有 $\beta \ge \gamma$，$q_B(\psi - \psi_\beta) < \epsilon$。由于 B和 ϵ是任意的，我们得出结论（利用引理 2.2.5 的证明） $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$和 $\psi_\alpha \to \psi$ 属于 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$。 □

引理 3.2.9. 设 B、$B_0 \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为紧子集，且设 $t > 1$。那么存在一个紧子集 $B' \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$以及某个 $C > 0$，二者均取决于 B、B_0 和 t，使得 $B \subseteq B'$ 并且

$$\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sup_{\eta_j \in B_0} p_B^n(d\rho(\eta_1 \cdots \eta_m)\psi) \le Ct^{-m}q_{B'}(\psi), \qquad \forall m \in \mathbb{N}_{\ge 0},\ \forall \psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}. \tag{3.7}$$

特别地，我们有

$$\frac{1}{m!}q_B(d\rho(\eta^m)\psi) \le Ct^{-m}q_{B'}(\psi)$$

对任意 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$、 $\eta \in B_0$ 和 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$均成立。

证明。我们可以假设 B_0 和 B 都是平衡的。定义 $B'' := B \cup B_0$，它在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$中仍然是紧且平衡的。对于任意 η_1、……、 $\eta_m \in B_0$ 和 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，我们有

$$p_B^n(d\rho(\eta_1 \cdots \eta_m)\psi) \le p_{B''}^{n+m}(\psi) = t^{-(n+m)}p_{tB''}^{n+m}(\psi).$$

因此，$\sup_{\eta_j \in B_0} p_B^n(d\rho(\eta_1 \cdots \eta_m)\psi) \le t^{-(n+m)}p_{tB''}^{n+m}(\psi)$。由此可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\sup_{\eta_j \in B_0} p_B^n(d\rho(\eta_1 \cdots \eta_m)\psi) &\le t^{-m}\sum_{n=0}^\infty \frac{t^{-n}}{n!}p_{tB''}^{n+m}(\psi) \\
&\le t^{-m}\left(\sum_{n=0}^\infty t^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}p_{tB''}^{n+m}(\psi)\right) \\
&= \frac{t^{-m}}{1 - t^{-1}}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}p_{tB''}^{n+m}(\psi)
\end{aligned}$$

令 $s > 2$。注意到 $\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+m)!}{n!}s^{-(n+m)} < \infty$，并且

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}p_{tB''}^{n+m}(\psi) &= \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{(n+m)!}{n!}s^{-(n+m)} \cdot \frac{1}{(n+m)!}p_{stB''}^{n+m}(\psi)\right) \\
&\le \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(n+m)!}{n!}s^{-(n+m)}\right) \cdot q_{stB''}(\psi).
\end{aligned}$$

因此，取 $C_m := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{m!n!} s^{-(n+m)} > 0$ 和 $B' := stB''$，我们有：

$$\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sup_{\eta_j\in B_0} p_B^n(d\rho(\eta_1\cdots\eta_m)\psi) \le C_m\frac{t^{-m}}{1-t^{-1}}q_{B'}(\psi). \tag{3.8}$$

利用 $\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k} = 2^N$，注意到 $\sum_{m=0}^{\infty} C_m = \sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{2}{s}\right)^N < \infty$，因此序列 $(C_m)_{m\in\mathbb{N}_{\ge 0}}$ 有界。所以存在 $C > 0$，使得对所有 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$，都有 $C_m \le (1-t^{-1})C$。现在只需利用 (3.8) 观察到，对于这个 C 和 B'，(3.7) 成立。还要注意 $B \subseteq B'$。 □

引理 3.2.10. $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 既是 G-不变的，也是 $\mathfrak{g}$-不变的。

证明。设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，并令 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为紧集。由于 G 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的伴随作用是连续的，对于每个 $g \in G$，$\mathrm{Ad}_g(B)$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中仍是紧集。由于 $\rho(g)$ 是酉的，我们得到 $q_B(\rho(g)\psi) = q_{\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(B)}(\psi) < \infty$。因此 $\rho(g)\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，从而 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 是 G-不变的。由引理 3.2.9 可立即得到 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 的 $\mathfrak{g}$-不变性。 □

引理 3.2.11. 对每个 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ 定义函数

$$f_m : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}, \qquad f_m(\xi,\psi) := \frac{1}{m!}d\rho(\xi^m)\psi.$$

级数 $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\xi,\psi)$ 对每个 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 都在 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 中收敛。它定义了一个分别连续映射

$$f : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}, \qquad f(\xi,\psi) := \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\xi,\psi). \tag{3.9}$$

特别地，对每个 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$, $\xi \mapsto f(\xi,\psi)$ 都是整函数。

证明. 设 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, t > 1$，并设 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是一个紧子集。根据引理 3.2.9，存在一个常数 $C > 0$ 和一个紧子集 $B' \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，使得对每个 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$ 和 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，$\frac{1}{m!}q_B(d\rho(\xi^m)\psi) \le Ct^{-m}q_{B'}(\psi)$。因此，对 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，我们有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}q_B(d\rho(\xi^m)\psi) \le C\left(\sum_{m=0}^{\infty} t^{-m}\right)q_{B'}(\psi) = \frac{C}{1-t^{-1}}q_{B'}(\psi) < \infty.$$

由此可知，级数 $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\xi,\psi)$ 在 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$ 中收敛，并且

$$q_B(f(\xi,\psi)) \le \frac{C}{1-t^{-1}}q_{B'}(\psi), \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}.$$

特别地，线性映射 $\mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}} \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$, $\psi \mapsto f(\xi,\psi)$ 是连续的。

现在证明 f 关于 ξ 变量也分别连续。取 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，并定义 $f^\psi(\xi) := f(\xi,\psi)$，其中 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。令 $B_0 \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为一个紧子集。考虑函数 $h_m : B_0 \to \mathcal{H}_\rho^{\mathcal{O}}$，定义为 $h_m(\xi) := \frac{1}{m!}d\rho(\xi^m)\psi$，其中 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$。另定义 $h := f^\psi\big|_{B_0}$。因此，对于 $\xi \in B_0$，有 $h(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(\xi) = f^\psi(\xi)$。我们证明，对于每个 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$，h_m 都是连续的，并且当 $N \to \infty$ 时，$\sum_{m=0}^{N} h_m \to h$ 在 B_0 上一致收敛。这将推出 h 连续。

设 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$。假设 $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 B_0 中的一个序列，且对于某个 $\eta \in B_0$，有 $\eta_n \to \eta$。设 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为一个紧子集，并令 $t > 1$。根据引理 3.2.9，存在常数 $C > 0$ 和一个包含 B 的紧子集 $B' \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，使得 (3.7) 成立。令 $m \in \mathbb{N}_{\ge 0}$。注意，

$$q_B(h_m(\eta_n) - h_m(\eta)) = \frac{1}{m!}q_B(d\rho(\eta_n^m - \eta^m)\psi) = \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}p_B^k(d\rho(\eta_n^m - \eta^m)\psi). \tag{3.10}$$

由于这个多重线性映射

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^m \to \mathcal{H}_\rho^\infty, \qquad (\xi_1,\cdots,\xi_m) \mapsto d\rho(\xi_1,\cdots,\xi_m)\psi$$

关于 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ [JN19 上的强拓扑连续，见引理 3.22]，且 p_B^k 是 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上的连续半范数，因此函数

$$\tau_N : B_0 \to [0,\infty), \qquad \tau_N(\xi) := \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}p_B^k(d\rho(\xi^m - \eta^m)\psi)$$

对每个 $N \in \mathbb{N}$ 都是连续的。此外，根据 (3.7)，我们有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sup_{\xi \in B_0} p_B^k(d\rho(\xi^m - \eta^m)\psi) \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sup_{\zeta \in B_0} p_B^k(d\rho(\zeta^m)\psi) \leq 2C \frac{m!}{t^m} q_{B'}(\psi) < \infty.$$

由此可知，连续函数 τ_N 一致收敛于

$$\tau : B_0 \to [0, \infty), \qquad \tau(\xi) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} p_B^k(d\rho(\xi^m - \eta^m)\psi).$$

由此可知， τ 连续。特别地，我们得到 $\tau(\eta_n) \to \tau(\eta) = 0$ 当 $n \to \infty$时成立；结合方程 (3.10)，这意味着

$$q_B(h_m(\eta_n) - h_m(\eta)) \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

因此，我们可以得出结论：对于每个 $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$， h_m 都是连续的。

对于上述的 $t > 1$、 B、 B' 和 $C > 0$ ，利用引理 3.2.9，注意到

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sup_{\xi \in B_0} q_B(h_m(\xi)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sup_{\xi \in B_0} q_B(d\rho(\xi^m)\psi) \leq \frac{C}{1 - t^{-1}} q_{B'}(\psi) < \infty.$$

因此， $\sum_{m=0}^{N} h_m \to h$ 在 B_0 上一致收敛，当 $N \to \infty$时成立。于是，$h = f^{\psi}\big|_{B_0}$ 是连续的。

我们已经证明，对于每个紧子集 $B_0 \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$f^{\psi}\big|_{B_0}$： $B_0 \to \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$是连续的。由于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是 Fr´echet 空间，因而是第一可数的，所以它在以下意义下是紧生成的：集合 $S \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是开的，当且仅当对于每个紧 $B_0 \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$， $S \cap B_0$在 B_0 中是开的。由 $f^{\psi}\big|_{B_0}$ 对每个紧子集$B_0 \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$都是连续的这一事实可知， f^{ψ} 是连续的。因此， f 确实是分别连续的。 □

引理 3.2 .12. 考虑函数 $f$in (3.9)。对于任意 $\xi \in \mathfrak{g}$和 $\psi \in \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$，有 $f(\xi, \psi) = \rho(e^{\xi}) \psi$.

证明。令 $\psi \in \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$。根据推论 2.2.9， ψ 是 ρ的解析向量。由引理 3.2.11 可知，映射 $\xi \mapsto \rho(e^{\xi})\psi$和 $\xi \mapsto f(\xi, \psi)$ 作为映射 $\mathfrak{g} \to \mathcal{H}_{\rho}$，均为实解析映射。此外，它们在喷射投影 j_0^{∞}下的像相同： $C^{\omega}(\mathfrak{g}, \mathcal{H}_{\rho}) \to P(\mathfrak{g}, \mathcal{H}_{\rho})$。利用命题 2.1.15，我们得出，对所有 $\xi \in \mathfrak{g}$， $\rho(e^{\xi})\psi = f(\xi, \psi)$。 □

引理 3.2.13. 对任意 $\psi \in \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$，轨道映射 $G \to \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$，$g \mapsto \rho(g)v$ 是解析的。

证明。令 $\psi \in \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$。由于李群 G 是 BCH 群，引理 3.2.11 和引理 3.2.12 合起来推出，映射 $G \to \mathcal{H}_{\rho}^{\mathcal{O}}$，$g \mapsto \rho(g)\psi$ 在某个单位元邻域 $U \subseteq G$上解析，这就得到了所需结论。 □

4 全纯诱导的一般方法

本节定义并研究李群酉表示的全纯诱导概念。这里给出的定义和结果推广了 [Nee13]，的工作，不再要求被诱导表示具有范数连续性。我们考虑的具体情形如下所述。

设 G 是一个连通的 BCH Fr´echet–Lie 群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 $H \subseteq G$ 是 G的一个连通闭子群，并假设 H 是 G 的局部指数李子群（参见 [Nee06，定义 IV.3.2]）。令$\mathfrak{h} := \mathrm{L}(H)$ 为其李代数，我们利用包含映射$H \hookrightarrow G$的推前，将其视为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数。于是，对所有 $\xi \in \mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$，都有 $\exp_G(\xi) = \exp_H(\xi)$。此外，我们还有：

引理 4.0.1. 存在一个 U 的开邻域，使得 $\exp_G|_U$ 是一个解析微分同胚，映到 G 中的一个开邻域，并且

$$\exp_G(U \cap \mathfrak{h}) = \exp_G(U) \cap H.$$

特别地， H 是 BCH 群，也是 G 的解析嵌入李子群。

证明。根据假设， H 是 G 的局部指数李子群，因此由 [Nee06 定理 IV.3.3] 可知，存在一个开邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$ ，使得 $\exp_G|_U$ 是到 G 中的一个开邻域 1- 上的微分同胚，并且 $\exp_G(U \cap \mathfrak{h}) = \exp_G(U) \cap H$。因此， H是 G 的解析嵌入李子群，而指数映射 $\exp_G$ 可用于为 H构造解析切片图。由于 G 是 BCH 群，因此 H 也是 BCH 群。 □

令 $\theta\colon \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为由 $\theta(\xi+i\eta) = \xi - i\eta$ 定义的共轭，其中 $\xi,\eta \in \mathfrak{g}$。我们假设给定了一个三角分解

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

其中 $\mathfrak{n}_\pm$ 和 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的闭李子代数，满足 $\theta(\mathfrak{n}_\pm) \subseteq \mathfrak{n}_\mp$、$\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 以及 $[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{n}_\pm] \subseteq \mathfrak{n}_\pm$。令 $\mathfrak{b}_\pm := \mathfrak{n}_\pm \rtimes \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。

本章结构如下。在第4.1节中，我们引入一些记号和初步定义，尤其是指定 G 上的某个函数空间，它发挥的作用通常由 G/H 上的复齐性向量丛的全纯截面承担。在第4.2节中，我们给出全纯诱导表示的定义，并建立一种等价刻画。接着，我们将在第4.3节、第4.4节和第4.5节研究全纯诱导表示所具有的最重要性质。

由于本节的理论不再能通过全纯映射得到清晰的诠释，我们将在第 5 节提出一种涉及复几何的更强概念。此处提出的方法关键依赖于被诱导表示中存在一个由 $\mathfrak{b}$-强整向量构成的稠密集。

4.1 全纯截面的替代方案

设 (σ, V_σ) 是 H 的解析酉表示。下面引入一些记号并给出预备定义。

定义 4.1.1。对于 $\xi \in \mathfrak{g}$，在 $C^\infty(G, V_\sigma)$ 上定义微分算子 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}$ 和 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)^r}$：

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f)(g) &:= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(g e^{t\xi}),\\ (\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)^r} f)(g) &:= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(e^{-t\xi} g), \qquad \forall g \in G,\ f \in C^\infty(G, V_\sigma).\end{aligned}$$

将 $\xi \mapsto \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}$ 和 $\xi \mapsto \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)^r}$ $\mathbb{C}$ 分别线性延拓到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，并进一步延拓为 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 上的代数同态，因此例如有 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi_1 \cdots \xi_n)^r} = \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi_1)^r} \cdots \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi_n)^r}$，对所有 $\xi_k \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $k \in \{1, \dots, n\}$ 均成立。

备注 4.1.2。因此我们约定，对于 $\xi \in \mathfrak{g}$，$\boldsymbol{v}(\xi)$ 表示 G 上与 $\xi \in \mathfrak{g}$ 相关联的左不变向量场，而 $\boldsymbol{v}(\xi)^r$ 表示右不变向量场。

定义 4.1.3. 设 $\mathcal{D} \subseteq V_\sigma^\omega$ 是 V_σ 中的一个稠密子空间。

— 定义域为 $\mathcal{D}$ 的 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_\pm$ 的扩张，是一个李代数同态 $\chi\colon \mathfrak{b}_\pm \to \mathcal{L}(\mathcal{D})$，满足 $\chi(\xi) = d\sigma(\xi)|_{\mathcal{D}}$，对所有 $\xi \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 均成立。我们称 (σ, χ) 为定义域为 $\mathcal{D}$ 的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对。— 定义域为 $\mathcal{D}$ 的 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_\pm$ 的平凡延拓，定义为令 $\mathfrak{n}_\pm$ 在 $\mathcal{D}$ 上平凡作用。

定义 4.1.4. 对于 $k \in \{1,2\}$，设 (σ_k, χ_k) 是定义域为 $\mathcal{D}_k$ 的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对。若存在 H-表示的酉同构 $U\colon V_{\sigma_1} \to V_{\sigma_2}$，使得 $U\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ 且对所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in \mathcal{D}_1$ 均有 $U\chi_1(\xi)v = \chi_2(\xi)Uv$，则称 (σ_1, χ) 与 (σ_2, χ_2) 酉等价。在这种情况下，我们记作 $(\sigma_1, \chi_1) \cong (\sigma_2, \chi_2)$。

定义 4.1.5. 对于 $k \in \{1,2\}$，设 (σ_k, χ_k) 是一个定义域为 $\mathcal{D}_k$ 的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对。定义直和 $(\sigma_1, \chi_1) \oplus (\sigma_2, \chi_2) := (\sigma_1 \oplus \sigma_2, \chi_1 \oplus \chi_2)$，其中 $\chi_1 \oplus \chi_2$ 定义为

$$\chi_1 \oplus \chi_2 : \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2), \qquad (\chi_1 \oplus \chi_2)(\xi)(v_1, v_2) = (\chi_1(\xi)v_1, \chi_2(\xi)v_2).$$

定义 4.1.6. 设 (σ, χ) 是一个定义域为 $\mathcal{D}$ 的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对。若存在非平凡的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对 (σ_1, χ_1) 和 (σ_2, χ_2)，使得 (σ, χ) 可写为 $(\sigma, \chi) \cong (\sigma_1, \chi_1) \oplus (\sigma_2, \chi_2)$，则称 (σ, χ) 是可分解的。若 (σ, χ) 不可分解，则称其为不可分解的。

回顾定义 2.2.1 中给出的 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 上的对合 τ、θ 和 $(-)^*$。注意到对于 ξ、$\eta \in \mathfrak{g}$，$\theta(\xi + i\eta) = \theta(\xi - i\eta)$，对合 τ 和 $(-)^*$ 满足 $\tau(\xi) = -\xi$，且对于 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 有 $\xi^* = -\theta(\xi)$。利用扩张来指定 $C^\omega(G, V_\sigma)^H$ 的一个合适的 G- 子表示：

定义 4.1.7. 设 (σ,χ) 是一个定义域为 $\mathcal{D}$ 的 $(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对。定义

$$C^\omega(G,V_\sigma)^H := \left\{ f\in C^\omega(G,V_\sigma) \,:\, f(gh)=\sigma(h)^{-1}f(g), \qquad \forall\, g\in G, h\in H \right\}$$
$$C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\chi} := \left\{ f\in C^\omega(G,V_\sigma)^H \,:\langle v,\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}f\rangle = -\langle\chi(\xi^*)v,f\rangle, \qquad \forall \xi\in\mathfrak{b}_+, v\in\mathcal{D} \right\}.$$

接下来，我们记录关于 $C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\chi}$ 的一条重要性质：

命题 4.1.8。设 (σ,χ) 是一个定义域为 $\mathcal{D}$ 的 $(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对。设 $f\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\chi}$。那么

$$f(g)\in \mathrm{dom}(\chi(x^*)^*) \quad \textit{and} \quad (\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\tau(x))}f)(g)=\chi(x^*)^*f(g), \qquad \forall x\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_+),\ \forall g\in G.$$

证明。设 $v\in\mathcal{D}$。假设对于 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\xi_i\in\mathfrak{b}_+$，有 $x=\xi_1\cdots\xi_n$。注意到，根据定义 4.1.7，对于任意 $g\in G$ 和 $\eta\in\mathfrak{b}_+$，有 $f(g)\in\mathrm{dom}(\chi(\eta^*)^*)$，且 $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\eta)}f)(g)=-\chi(\eta^*)^*f(g)$。由对 $n\in\mathbb{N}$ 的归纳法可得 $\langle v,\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi_1\cdots\xi_n)}f\rangle=(-1)^n\langle\chi(\xi_1^*\cdots\xi_n^*)v,f\rangle$。这意味着，对于任意 $x\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_+)$ 和 $v\in\mathcal{D}$，有 $\langle v,\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\tau(x))}f\rangle=\langle\chi(x^*)v,f\rangle$。断言得证。 □

4.2 全纯诱导表示

现在定义全纯诱导表示。在本节中，固定一个 $(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对 (σ,χ)，其定义域 $\mathcal{D}_\chi\subseteq V_\sigma^\omega$ 在 V_σ 中稠密。令 $(\rho,\mathcal{H}_\rho)$ 为 G 的酉表示。

注 4.2.1. 下一节介绍的全纯诱导理论将用到再生核希尔伯特空间。关于这方面的更多详情，可参阅例如 [Nee00, Ch. I-II]。下文的附录 A 回顾了最相关的性质。

定义 4.2.2. 如果存在一个 G-等变单射线性映射 $\Phi:\mathcal{H}_\rho\hookrightarrow\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$，并满足以下条件，我们就称 $(\rho,\mathcal{H}_\rho)$ 是由 (σ,χ) 全纯诱导而来：

1. 对每个 $x\in G$，点求值 $\mathcal{E}_x:\mathcal{H}_\rho\to V_\sigma,\ \mathcal{E}_x(\psi):=\Phi_\psi(x)$ 都是连续的。
2. $\mathcal{E}_x\mathcal{E}_x^*=\mathrm{id}_{V_\sigma}$ 对每个 $x\in G$。
3. $\mathcal{D}_\chi=\left\{v\in V_\sigma:\ \Phi(\mathcal{E}_e^*v)\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\,\chi}\right\}$。

备注 4.2.3. 第一个条件意味着 $(\rho,\mathcal{H}_\rho)$ 与再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_Q$ 上的自然 G-表示酉等价，其中 $Q\in C(G\times G,\mathcal{B}(V_\sigma))^{H\times H}$ 是由 $Q(x,y):=\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*$ 定义的正定且G-不变核，参见下文的定理 A.1.3 和命题 A.1.5。

我们有 t 以下等价刻画，其证明构成本节剩余部分 n:

定理 4.2.4. 以下断言等价。

1. G-表示$(\rho,\mathcal{H}_\rho)$是由$(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对(σ,χ)全纯诱导得到的。
2. 存在一个闭的 H-不变子空间 $V\subseteq\mathcal{H}_\rho$，具有以下性质：

   (a) V 对于 G-表示 $\mathcal{H}_\rho$是循环的。(b) $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}:=V\cap\mathcal{H}_\rho^\omega$ 满足 $d\rho(\mathfrak{n}_-)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}\subseteq\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$。(c) (σ,χ)与$(\widetilde{\sigma},\widetilde{\chi})$ 酉等价，其中$(\widetilde{\sigma},\widetilde{\chi})$是由下式定义的$(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对

$$\widetilde{\sigma}:H\to\mathrm{U}(V), \qquad \widetilde{\chi}:\mathfrak{b}_-\to\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}),$$
$$\widetilde{\sigma}(h):=\rho(h)|_V, \qquad \widetilde{\chi}(\xi):=d\rho(\xi)|_{\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}}.$$

   特别地， $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ 在 V中稠密。

若这些等价断言成立，则 ρ是一个解析 G-表示。

我们继续证明定理 4.2.4。下面的观察简单却很重要：

引理 4.2.5. 设 $\Phi:\mathcal{H}_\rho\hookrightarrow \mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$ 是一个 G-等变单射线性映射。假设对每个 $x\in G$，点求值 $\mathcal{E}_x(\psi):=\Phi_\psi(x)$ 都是连续的。定义 $f_v:=\Phi(\mathcal{E}_e^*v)\in\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$，其中 $v\in V_\sigma$。那么：

1. 对任意 $g\in G$，$\mathcal{E}_g=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}$。

2. 对任意 $\psi\in\mathcal{H}_\rho$，$\Phi_\psi(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\psi$。特别地，对 $v\in V_\sigma$，$f_v(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v$。

3. 设 $v\in V_\sigma$。则

$$\mathcal{E}_e^*v\in\mathcal{H}_\rho^\omega\iff f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^H\iff\langle v,f_v\rangle\in C^\omega(G,\mathbb{C}).$$

证明。

1. 由于 Φ 是 G-等变的，对于任意 $\psi\in\mathcal{H}_\rho$，我们有 $\mathcal{E}_g\psi=\Phi_\psi(g)=\Phi_{\rho(g)^{-1}\psi}(e)=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\psi$。

2. 这由第一条断言立即可得。

3. 设 $v\in V_\sigma$。若 $\mathcal{E}_e^*v\in\mathcal{H}_\rho^\omega$，则轨道映射 $g\mapsto\rho(g)\mathcal{E}_e^*v$ 是解析的 $G\to\mathcal{H}_\rho$。由此可得 $f_v(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v$ 是解析的 $G\to V_\sigma$，进而推出 $\langle v,f_v\rangle\in C^\omega(G,\mathbb{C})$。假设 $\langle v,f_v\rangle\in C^\omega(G,\mathbb{C})$。那么 $g\mapsto\langle\mathcal{E}_e^*v,\rho(g)\mathcal{E}_e^*v\rangle_{\mathcal{H}_\rho}=\langle v,f_v(g^{-1})\rangle_V$ 是解析的。由于 G 是 BCH Fr´echet–李群，根据 [Nee11, 定理 5.2]，这意味着 $\mathcal{E}_e^*v\in\mathcal{H}_\rho^\omega$。

□

我们首先证明定理 4.2.4 中的 (1) $\implies$ (2)。假设 ρ 是由 (σ,χ) 全纯诱导的。设映射 $\Phi:\mathcal{H}_\rho\to\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$ 满足定义 4.2.2 中的条件。设 $\mathcal{E}_x:=\mathrm{ev}_x\circ\Phi$ 是在 $x\in G$ 处的点求值。我们记 $f_v:=\Phi(\mathcal{E}_e^*v)\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\ \chi}$ 表示 $v\in\mathcal{D}_\chi$。

我们证明，H-不变子空间 $W:=\mathcal{E}_e^*V_\sigma\subseteq\mathcal{H}_\rho$ 满足定理 4.2.4 中的条件。定义$\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}:=\mathcal{E}_e^*\mathcal{D}_\chi\subseteq W$。由定理 A.1.3 可知，$\rho(G)W=\bigcup_{g\in G}\mathcal{E}_g^*V_\sigma$ 在 $\mathcal{H}_\rho$中是全的，因此 W是 ρ的循环向量。此外，由引理 4.2.5 可立即得到 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}\subseteq\mathcal{H}_\rho^\omega$。由于 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ 在循环子空间W 中稠密，且 $\mathcal{H}_\rho^\omega$ 是 G-不变的，我们得到 $\mathcal{H}_\rho^\omega$ 在 $\mathcal{H}_\rho$中稠密。因此 ρ 是解析的。

引理 4.2.6. 设 $v\in\mathcal{D}_\chi$。以下断言成立：

1. $\mathcal{E}_e\rho(g)\mathcal{E}_e^*v\in\mathrm{dom}(\chi(x^*)^*)$，并且对于任意 $x\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_+)$ 和 $g\in G$，$\mathcal{E}_e d\rho(x)\rho(g)\mathcal{E}_e^*v=\chi(x^*)^*\mathcal{E}_e\rho(g)\mathcal{E}_e^*v$。

2. $d\rho(\mathfrak{b}_-)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}\subseteq\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ *and* $d\rho(x)\mathcal{E}_e^*v=\mathcal{E}_e^*\chi(x)v$ *for any* $x\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$.

证明。

1. 令 $x\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_+)$。由于 $f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\chi}$，由命题 4.1.8 可得 $f_v(e)\subseteq\mathrm{dom}(\chi(x^*)^*)$，且 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\tau(x))}f_v=\chi(x^*)^*f_{v\circ}$ 另一方面，注意到利用公式 $f_v(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v$，对于任意 $g\in G$，都有 $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\tau(x))}f_v)(g)=\mathcal{E}_e d\rho(x)\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v$；例如，可对 x 的次数使用归纳法来证明。因此，对于任意 $g\in G$，我们可得 $\mathcal{E}_e d\rho(x)\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v=\chi(x^*)^*f_v(g)=\chi(x^*)^*\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v$。

2. 令 $x\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$。回顾引理 4.2.5，可知 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}\subseteq\mathcal{H}_\rho^\omega$。令 $\psi\in\rho(G)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$。利用第一个断言，注意到

$$\langle\mathcal{E}_e^*\chi(x)v,\psi\rangle=\langle v,\chi(x)^*\mathcal{E}_e\psi\rangle=\langle v,\mathcal{E}_e d\rho(x^*)\psi\rangle=\langle d\rho(x)\mathcal{E}_e^*v,\psi\rangle.$$

由于 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$在 $\mathcal{H}_\rho$中是 G循环的，因此可得 $\mathcal{E}_e^*\chi(x)v=d\rho(x)\mathcal{E}_e^*v$。特别地，$d\rho(\mathfrak{b}_-)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}\subseteq\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$。 □

定义 W 上的酉 H作用 $\widetilde{\sigma}$ 如下：$\widetilde{\sigma}(h)=\rho(h)|_W$。考虑 $d\widetilde{\sigma}$ 到$\mathfrak{b}_-$的扩张 $\widetilde{\chi}(\xi):=d\rho(\xi)|_{\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}}$，其定义域为 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$。由引理 4.2.6，$\mathcal{E}_e^*$在 (σ,χ) 与 $(\widetilde{\sigma},\widetilde{\chi})$ 之间定义了一个酉等价。特别地，由于根据假设 $\mathcal{D}_\chi$ 在 V_σ 中稠密，因此可得 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ 在 W中稠密。

引理 4.2.7。$\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}=W\cap\mathcal{H}_\rho^\omega$。

证明。包含关系 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}\subseteq W\cap\mathcal{H}_\rho^\omega$由引理 4.2.5 得出。设 $w\in W\cap\mathcal{H}_\rho^\omega$。那么存在某个$v\in V_\sigma$使得 $w=\mathcal{E}_e^*v$。我们必须证明 $v\in\mathcal{D}_\chi$。引理 4.2.5 意味着 $f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^H$。设 $v_2\in\mathcal{D}_\chi$且 $\xi\in\mathfrak{b}_+$。利用引理 4.2.6 以及公式 $f_v(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v$，我们得到：

$$\langle v_2,(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}f_v)(g)\rangle=-\langle d\rho(\xi^*)\mathcal{E}_e^*v_2,\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v\rangle=-\langle\chi(\xi^*)v_2,\mathcal{E}_e\rho(g)^{-1}\mathcal{E}_e^*v\rangle=-\langle\chi(\xi^*)v_2,f_v(g)\rangle.$$

由此可得 $f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\chi}$。根据定义 4.2.2 中的第三个性质，这意味着 $v\in\mathcal{D}_\chi$。 □

由此完成了定理 4.2.4 中 (1) $\implies$ (2) 的证明。反向结论见下文的引理 4.2.8：

引理 4.2.8. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的酉表示。设 $V \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是一个闭的 H-不变子空间。通过 $\sigma(h) := \rho(h)|_V$ 在 V 上定义一个 H- 表示 σ。令 $\mathcal{D}_\chi = V \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$。假设 $\rho(G)V$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 中是全的，$\mathcal{D}_\chi$ 在 V_σ 中稠密，且 $d\rho(\mathfrak{n}_-)\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$。定义 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的扩张 $\chi(\xi)v := d\rho(\xi)v$，其定义域为 $\mathcal{D}_\chi$，其中 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 且 $v \in \mathcal{D}_\chi$。那么 ρ 是由 (σ, χ) 全纯诱导而来。

证明。令 $p_V\colon \mathcal{H}_\rho \to V_\sigma$ 表示到 V_σ的正交投影。对于 $\psi \in \mathcal{H}_\rho$，定义 $\Phi_\psi(g) := p_V \rho(g)^{-1}\psi$。考虑由 $\psi \mapsto \Phi_\psi$定义的线性映射 $\Phi\colon \mathcal{H}_\rho \to C(G, V_\sigma)^H$。显然，$\Phi$ 是 G-等变的，并且对于任意 $g \in G$，点求值 $\mathcal{E}_g = p_V \rho(g)^{-1}$ 是连续的。映射 Φ 是单射，因为 $\Phi_\psi = 0$等价于 $\psi \perp \rho(G)V$，而根据假设，$\rho(G)V$在 $\mathcal{H}_\rho$ 中是全的。接下来注意到，对于任意$v \in V$，$\mathcal{E}_g^* v = \rho(g)v$，因此 $\mathcal{E}_g \mathcal{E}_g^* = \mathrm{id}_V$。定义 $V^0 := \{v \in V\colon \Phi_v \in C^\omega(G, V_\sigma)^H, \chi\}$。剩下只需证明 $\mathcal{D}_\chi = V^0$。由引理 4.2.5 的第三个断言可立即得出 $V^0 \subseteq \mathcal{D}_\chi$。反过来，假设 $v \in \mathcal{D}_\chi$。根据引理 4.2.5，我们有 $\Phi_v \in C^\omega(G, V_\sigma)^H$。令 $\xi \in \mathfrak{b}_+$和 $w \in \mathcal{D}_\chi$。利用 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}\Phi_v(g) = -p_V d\rho(\xi)\rho(g)^{-1}v$，我们得到

$$\langle w, \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}\Phi_v(g)\rangle = -\langle d\rho(\xi^*)w, \rho(g)^{-1}v\rangle = -\langle \chi(\xi^*)w, \rho(g)^{-1}v\rangle = -\langle \chi(\xi^*)w, \Phi_v(g)\rangle.$$

因此 $\Phi_v \in C^\omega(G, V_\sigma)^{H,\,\chi}$，这意味着 $v \in V^0$。因此 $V^0 = \mathcal{D}_\chi$。 □

4.3 唯一性

下文将证明，对于给定的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对，全纯诱导得到的酉 G-表示至多有一个（在酉等价意义下）。设 (σ, χ) 是这样的 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对，其定义域 $\mathcal{D}_\chi \subseteq V_\sigma^\omega$ 在 V_σ 中稠密。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的一个酉表示。

定义 4.3.1. 我们称 (σ, χ) 可全纯诱导到 G，如果存在一个酉 G-表示，它是由 (σ, χ) 全纯诱导得到的。

命题 4.3.2. 假设 ρ 是由 (σ, χ) 全纯诱导得到的。设映射 $\Phi\colon \mathcal{H}_\rho \hookrightarrow \mathrm{Map}(G, V_\sigma)^H$ 满足定义 4.2.2 中的条件，并设 $\mathcal{E}_x := \mathrm{ev}_x \circ \Phi$ 是在 $x \in G$ 处的点求值。定义：

$$F : G \to \mathcal{B}(V_\sigma), \quad F(g) := \mathcal{E}_e \rho(g) \mathcal{E}_e^*.$$

那么，F 满足以下性质：

1. $F(e) = \mathrm{id}_{V_\sigma}$。
2. *The* 函数 $Q\colon G \times G \to \mathcal{B}(V_\sigma)$ $Q(x, y) := F(x^{-1}y)$ 是正定的（参见定义 A.1.2） .
3. $\mathcal{D}_\chi = \{\, v \in V_\sigma\colon\ g \mapsto \langle v, F(g)v\rangle$ 是实解析的 $G \to \mathbb{C}\,\}$。
4. 对所有 $v, w \in \mathcal{D}_\chi$ 和 $g \in G, \xi \in \mathfrak{b}_+$，我们有：

$$\left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)^r}\langle w, Fv\rangle\right](g) = -\langle \chi(\xi^*)w, F(g)v\rangle. \tag{4.1}$$

最后，ρ与再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_Q$ 上的 G-表示酉等价。

~ ~证明。定义 $Q\colon\ G \times G \to \mathcal{B}(V_\sigma)$，使得 $Q(x, y) := \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^*$，由定理 A.1.3 可知其为正定的。根据引理 4.2.5 的第一个断言，我们有 $Q(x, y)v = \mathcal{E}_e \rho(x^{-1}y)\mathcal{E}_e^* v = F(x^{-1}y)v = Q(x, y)v$对任意 $v \in V_\sigma$均成立。因此 $Q = Q$。特别地，Q是正定的，且 $F(e) = Q(e, e) = \mathrm{id}_{V_\sigma}$。令 $v \in V_\sigma$。写作 $f_v := \Phi(\mathcal{E}_e^* v)$，注意到对于 $g \in G$，$f_v(g) = F(g^{-1})v$。利用引理 4.2.5，我们发现 $\mathcal{E}_e^* v \in \mathcal{H}_\rho^\omega$当且仅当$\langle v, Fv\rangle \in C^\omega(G, \mathbb{C})$。于是

$$D_\chi = \left\{\, v \in V_\sigma\ :\ \mathcal{E}_e^* v \in \mathcal{H}_\rho^\omega \,\right\} = \left\{\, v \in V_\sigma\ :\langle v, Fv\rangle \in C^\omega(G, \mathbb{C})\,\right\},$$

其中，第一个等号用到了引理 4.2.7。最后，注意到 $\langle w, F(g)v\rangle = \langle \mathcal{E}_e^* w, \rho(g)\mathcal{E}_e^* v\rangle$ 对于$v, w \in \mathcal{D}_\chi$ 和 $g \in G$。因此，由引理 4.2.6 可知，F 对所有 $g \in G$ 和 $\xi \in \mathfrak{b}_+$都满足 (4.1)。最后一个结论直接由命题 A.1.5 得出。 □

下一个结果，即定理 4.3.3，通过取值于V_σ的$\mathcal{B}$正定函数，给出了(σ, χ)全纯可诱导的刻画。

定理 4.3.3。以下断言等价：

1. (σ,χ) 是全纯可诱导的。

2. 存在一个函数 $F\colon G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$，满足命题 4.3.2 中的性质。

假设这些断言成立。令 $F\colon G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$ 满足命题 4.3.2 中的条件。则对所有 $g\in G$，有 $F(g)^*=F(g^{-1})$。此外，对于 $v\in\mathcal{D}_\chi$ 和 $w\in V_\sigma$，我们有：

$$\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+)^r}\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_-)}\langle w,Fv\rangle\big](g)=\langle w,\chi(\tau(x_+)^*)^*F(g)\chi(x_-)v\rangle, \tag{4.2}$$

$$\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+x_-)}\langle w,Fv\rangle\big](e)=\langle w,\chi(x_+^*)^*\chi(x_-)v\rangle, \tag{4.3}$$

对所有 $g\in G$ 和 $x_\pm\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_\pm)$ 均成立。最后，函数 $F\colon G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$ 是唯一的。

证明。由命题 4.3.2 可立即得出蕴含关系 (1) $\implies$ (2)。反过来，设 $F\colon G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$ 是满足命题 4.3.2 中条件的函数。定义 $Q(x,y):=F(x^{-1}y)$，其中 $x,y\in G$。令 $\mathcal{H}_\rho$ 为相应的再生核希尔伯特空间。利用命题 A.1.5，我们得到 G 在 $\mathcal{H}_\rho$ 上的酉表示 ρ，以及一个 G-等变的单射线性映射 $\Phi\colon\mathcal{H}_\rho\to\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$，使得点求值 $\mathcal{E}_x:=\mathrm{ev}_x\circ\Phi$ 连续，并且对每个 $x\in G$ 都满足 $\mathcal{E}_x=\mathcal{E}_e\rho(x)^{-1}$。由 $F(e)=\mathrm{id}_{V_\sigma}$ 可知，对每个 $x\in G$，有 $Q(x,x)=\mathrm{id}_{V_\sigma}$。定义 $f_v:=\Phi(\mathcal{E}_e^*v)$，其中 $v\in V_\sigma$。
为证明 (1) 成立，只需证明 $\mathcal{D}_\chi=\big\{v\in V_\sigma\colon\ f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\ \chi}\big\}$。设 $x\in G$ 和 $v\in V_\sigma$。由方程 $f_v(x)=\mathcal{E}_x\mathcal{E}_e^*v=Q(x,e)v=F(x^{-1})v$ 和 $\mathcal{E}_x\mathcal{E}_e^*v=\mathcal{E}_e\rho(x)\mathcal{E}_e^*v$，可得 $F(x)v=\mathcal{E}_e\rho(x)\mathcal{E}_e^*v=f_v(x^{-1})$。因此

$$\mathcal{D}_\chi=\{\,v\in V_\sigma\ :\langle v,Fv\rangle\in C^\omega(G,\mathbb{C})\,\}=\big\{\,v\in V_\sigma\ :\ f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^H\,\big\},$$

其中第二个等号用到了引理 4.2.5。假设 $f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^H$。设 $w\in\mathcal{D}_\chi$ 和 $\xi\in\mathfrak{b}_+$。由方程 $F(g)v=f_v(g^{-1})$，可得对任意 $g\in G$，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}f_v(g)=\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)^r}Fv\big](g^{-1})$。利用方程 (4.1)，得到：

$$\big\langle w,\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}f_v(g)\big\rangle=\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)^r}\langle w,Fv\rangle\big](g^{-1})=-\langle\chi(\xi^*)w,F(g^{-1})v\rangle=-\langle\chi(\xi^*)w,f_v(g)\rangle,\qquad\forall g\in G.$$

因此 $f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\ \chi}$。于是 $\mathcal{D}_\chi=\big\{v\in V_\sigma\colon\ \ f_v\in C^\omega(G,V_\sigma)^{H,\ \chi}\big\}$。我们得出结论：$(\rho,\mathcal{H}_\rho)$ 是由 (σ,χ) 全纯诱导而来。因此 (1) $\iff$ (2)。

假设这些等价断言成立。由 $F(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)\mathcal{E}_e^*$，显然对所有 $g\in G$，都有 $F(g^{-1})=F(g)^*$。接下来证明 (4.2) 和 (4.3)。令 $v\in\mathcal{D}_\chi$。注意，利用 $F(g)=\mathcal{E}_e\rho(g)\mathcal{E}_e^*$ 可知，对于任意x，$y\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 满足

$$\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(y)^r}\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x)}Fv\big](g)=\mathcal{E}_e d\rho(\tau(y))\rho(g)d\rho(x)\mathcal{E}_e^*v,\qquad\forall g\in G. \tag{4.4}$$

因此，对于 $x_\pm\in\mathcal{U}(\mathfrak{b}_\pm)$，利用 (4.4) 和引理 4.2.6 可得

$$\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+)^r}\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_-)}Fv\big](g)=\mathcal{E}_e d\rho(\tau(x_+))\rho(g)d\rho(x_-)\mathcal{E}_e^*v=\chi(\tau(x_+)^*)^*\mathcal{E}_e\rho(g)\mathcal{E}_e^*\chi(x_-)v, \tag{4.5}$$

$$\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+x_-)}Fv\big](e)=\mathcal{E}_e d\rho(x_+x_-)\mathcal{E}_e^*v=\chi(x_+^*)^*\chi(x_-)v.. \tag{4.6}$$

由 (4.5) 得出$\big[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+)^r}\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_-)}Fv\big](g)=\chi(\tau(x_+)^*)^*F(g)\chi(x_-)v$对所有 $g\in G$ 都成立，这蕴含 (4.2)。另一方面，(4.6) 蕴含 (4.3)。最后，假设 F_1 和 F_2 是满足命题 4.3.2 中条件的两个函数。令 $v\in\mathcal{D}_\chi$。函数 $g\mapsto F_1(g)v$ 和 $g\mapsto F_2(g)v$ 均为解析函数，且满足 (4.6)。由 PBW 定理，$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 由 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$ 张成，因此可知$j_e^\infty(F_1v)=j_e^\infty(F_2v)$。由于 G 是连通的，由命题 2.1.15 可知，对于所有 $g\in G$和 $v\in\mathcal{D}_\chi$，都有 $F_1(g)v=F_2(g)v$。对于任意固定的 $g\in G$，映射 $v\mapsto(F_1(g)-F_2(g))v$ 连续，且在稠密子集 $\mathcal{D}_\chi\subseteq V_\sigma$ 上为零。因此 $F_1=F_2$。

□

将命题 4.3.2 与定理 4.3.3 中 $F\colon G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$ 的唯一性结合起来，我们便得到全纯诱导表示在酉等价意义下的所需唯一性：

定理 4.3.4. 设 ρ_1 和 ρ_2 是酉 G-表示，且二者均由 (σ,χ) 全纯诱导而来。那么 $\rho_1\cong\rho_2$ 是酉 G-表示。

最后，我们将注意力集中在 χ 为平凡延拓这一重要特例上。利用 PBW 定理，注意到我们有向量空间分解 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})=\mathcal{U}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})\oplus(\mathfrak{n}_+\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})+\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\mathfrak{n}_-)$。

定义 4.3.5. 设 $E_0: \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/(\mathfrak{n}_+\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\mathfrak{n}_-)$ 为商映射。

引理 4.3.6. 假设 ρ 是从 (σ, χ) 全纯诱导而来，其中 χ 是 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓，其定义域为 $\mathcal{D} \subseteq V_\sigma$。设 $v \in \mathcal{D}$ 和 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$。那么 $d\sigma(E_0(x^*))v = d\sigma(E_0(x))^* v$。此外，对所有 $w \in V_\sigma^\infty$，我们有

$$\langle w, d\rho(x)v\rangle = \langle w, d\sigma(E_0(x))v\rangle \quad \text{and} \quad \langle d\rho(x^*)v, w\rangle = \langle v, d\sigma(E_0(x))w\rangle.$$

证明. 根据定理 4.2.4，我们可以假设 $V_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是闭子空间，且 $\mathcal{D}_\chi = V \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$, $\sigma(h) = \rho(h)|_{V_\sigma}$，并且 $\chi(\xi) = d\rho(\xi)|_{\mathcal{D}_\chi}$ 对每个 $h \in H$ 和 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 都成立。令 $p_V: \mathcal{H}_\rho \to V_\sigma$ 为到 V_σ 上的正交投影。取 $v \in \mathcal{D}_\chi$, $\xi_+ \in \mathfrak{n}_+$, $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 和 $\xi_- \in \mathfrak{n}_-$。由引理 4.2.6 得到 $p_V d\rho(x\xi_-)v = p_V d\rho(x)\chi(\xi_-)v = 0$，以及 $p_V d\rho(\xi_+ x)v = \chi(\xi_+^*)^* p_V d\rho(x)v = 0$。因此

$$p_V d\rho(x)v = p_V d\rho(E_0(x))v = d\sigma(E_0(x))v, \qquad \forall x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).$$

设 $w \in \mathcal{D}_\chi$。回忆引理 4.2.7，$\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$。我们有：

$$\langle d\sigma(E_0(x^*))v, w\rangle = \langle d\rho(x^*)v, w\rangle = \langle v, d\rho(x)w\rangle = \langle v, d\sigma(E_0(x))w\rangle = \langle d\sigma(E_0(x))^* v, w\rangle.$$

由于 $\mathcal{D}_\chi$ 在 V_σ 中稠密，我们得出 $d\sigma(E_0(x^*))v = d\sigma(E_0(x))^* v$。因此，若 $w \in V_\rho^\infty$，则

$$\langle d\rho(x^*)v, w\rangle = \langle d\sigma(E_0(x^*))v, w\rangle = \langle d\sigma(E_0(x))^* v, w\rangle = \langle v, d\sigma(E_0(x))w\rangle. \quad \square$$

我们用以下结果补充定理 4.3.3，该结果涉及定义域的唯一性：

命题 4.3.7。设 σ 是 H 的解析酉表示。假设存在一个子空间 $\mathcal{D}_\chi \subseteq V_\sigma^\omega$，它在 V_σ 中稠密，且 (σ, χ) 全纯可诱导，其中 $\chi\ \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_\chi)$ 是 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓，其定义域为 $\mathcal{D}_\chi$。那么，$\mathcal{D}_\chi$ 是具有此性质的唯一对象。

证明。设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是两个这样的定义域。对于 $k \in \{1, 2\}$，令 χ_k 表示 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓，其定义域为 $\mathcal{D}_k$。根据假设，(σ, χ_k) 全纯可诱导。令 $F_k: G \to \mathcal{B}(V_\sigma)$ 满足命题 4.3.2 中关于 (σ, χ_k) 的条件。令 $v_k \in \mathcal{D}_k$。利用引理 4.3.6 可知，对于任意 $k \in \{1, 2\}$，$x \in \mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$，且 $v \in \mathcal{D}_k$，我们有 $\chi_k(x)v = d\sigma(E_0(x))v$，以及 $\chi_k(x)^* v = d\sigma(E_0(x))^* v = d\sigma(E_0(x^*))v$。考虑由 $a(g) := \langle v_1, F_1(g)v_2\rangle$ 和 $b(g) := \langle v_1, F_2(g)v_2\rangle$ 定义的函数 $a, b: G \to \mathbb{C}$。注意，a 和 b 都是解析函数；这里指出，$a(g) = \langle F_1(g^{-1})v_1, v_2\rangle$。令 $x_\pm \in \mathcal{U}(\mathfrak{b}_\pm)$。利用 (4.3)，我们得到：

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+x_-)}b)(e) = \langle v_1, \chi_2(x_+^*)^*\chi_2(x_-)v_2\rangle = \langle v_1, d\sigma(E_0(x_+))d\sigma(E_0(x_-))v_2\rangle = \langle d\sigma(E_0(x_+^*))v_1, d\sigma(E_0(x_-))v_2\rangle.$$

接下来我们计算 $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+x_-)}a)(e)$。令 $\iota: G \to G, g \mapsto g^{-1}$ 表示 G 上的求逆，令 $\Sigma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ 表示 $\mathbb{C}$ 上的共轭。定义

$$h: G \to \mathbb{C}, \qquad h(g) = \langle v_2, F_1(g)v_1\rangle,$$

使得 $a = \Sigma \circ h \circ \iota$。对于任意 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 和 $f \in C^\infty(G, \mathbb{C})$，我们有

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x)}(f \circ \iota)\right](e) &= (\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\tau(x))}f)(e),\\ \left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x)}(\Sigma \circ f)\right](e) &= \Sigma\left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\theta(x))}f\right](e).\end{aligned}$$

利用这些方程，我们得到，对于任意 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$，有 $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x)}a)(e) = \Sigma\left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x^*)}h\right](e)$。根据方程 (4.3)，我们有

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_-^* x_+^*)}h\right](e) &= \langle v_2, \chi(x_-)^*\chi(x_+^*)v_1\rangle = \langle v_2, d\sigma(E_0(x_-))^* d\sigma(E_0(x_+^*))v_1\rangle\\ &= \langle d\sigma(E_0(x_-))v_2, d\sigma(E_0(x_+^*))v_1\rangle.\end{aligned}$$

Thus

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+x_-)}a)(e) = \Sigma\left[\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_-^* x_+^*)}h\right](e) = \langle d\sigma(E_0(x_+^*))v_1, d\sigma(E_0(x_-))v_2\rangle = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(x_+x_-)}b)(e).$$

由 PBW 定理可知，$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 由 $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)\mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$ 中的元素张成，因此 $j_e^\infty(a) = j_e^\infty(b)$。由于 G 是连通的，由命题 2.1.15 可得 $a = b$。因此，对于所有 $g \in G$、$v_1 \in \mathcal{D}_1$ 和 $v_2 \in \mathcal{D}_2$，$\langle v_1, F_1(g)v_2\rangle = \langle v_1, F_2(g)v_2\rangle$。由于 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 均为稠密的，因此 $F_1 = F_2 =: F$。由命题 4.3.2 中的第三条性质，我们得出

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \{\, v \in V_\sigma \,:\, g \mapsto \langle v, F(g)v \in C^\omega(G, \mathbb{C})\,\}.$$

$\square$

定理 4.3.4 和命题 4.3.7 为以下记号提供了依据：

定义 4.3.8。若 ρ 是从 (σ,χ) 全纯诱导而来，我们记作 $\rho=\mathrm{HolInd}_H^G(\sigma,\chi)$。此外，若 χ 是 $d\sigma$ 在某个必然唯一的定义域 $\mathcal{D}_\chi\subseteq V_\sigma^\omega$ 上到 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓，我们就简记为 $\rho=\mathrm{HolInd}_H^G(\sigma)$。

注记 4.3.9。对于 $k\in\{1,2\}$，设 (σ_k,χ_k) 是一个 $(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对，并设 ρ_k 是一个酉 G-表示，满足 $\rho_k=\mathrm{HolInd}_H(\sigma_k,\chi_k)$。根据定理 4.3.4，人们可能会想知道 $\rho_1\cong\rho_2$ 是否意味着 $(\sigma_1,\chi_1)\cong(\sigma_2,\chi_2)$。事实并非如此。一个明确而简单的反例如下：考虑 $G=\mathrm{SU}(3)$。设 $H\subseteq G$ 是由对角矩阵组成的子群，并设 $\mathfrak{b}_-\subseteq\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ 由上三角矩阵组成。可以很容易地利用定理 4.2.4 验证，G 在 $\mathbb{C}^3$ 上的定义表示 ρ，是从将 $\rho|_H$ 和 $d\rho|_{\mathfrak{b}_-}$ 分别限制到 $V_{\sigma_1}:=\mathbb{C}e_1$ 或 $V_{\sigma_2}:=\mathbb{C}e_1\oplus\mathbb{C}e_2$ 所得到的两个 $(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对全纯诱导而来。这两个表示并不酉等价。

4.4 交换子

假设 $\rho=\mathrm{HolInd}_H^G(\sigma,\chi)$。

定义 4.4.1. 令 $T\in\mathcal{B}(V_\sigma)$。若 T 与 (σ,χ) 交换，即对每个 $\xi\in\mathfrak{b}_-$ 和 $v\in\mathcal{D}_\chi$，都有 $T\in\mathcal{B}(V_\sigma)^H$, $T\mathcal{D}_\chi\subseteq\mathcal{D}_\chi$ 且 $T\chi(\xi)v=\chi(\xi)Tv$。定义 (σ,χ) 的 $*$-闭交换子 $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$ 为

$$\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}:=\left\{T\in\mathcal{B}(V_\sigma)^H\ :\ \text{both } T \text{ and } T^*\text{ commute with }(\sigma,\chi)\right\}.$$

备注 4.4.2. $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$ 中的正交投影对应于 (σ,χ) 的直和分解。为此，假设 $p_1\in\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$ 是一个正交投影。令 $p_2:=1-p_1$。对于 $k\in\{1,2\}$，定义 $V_k:=p_kV_\sigma$ 和 $\mathcal{D}_k:=p_k\mathcal{D}_\chi\subseteq\mathcal{D}_\chi$。定义 $(H,\mathfrak{b}_-)$-扩张对 (σ_k,χ_k) 为 $\sigma_k(h):=\sigma(h)|_{V_k}$ 和 $\chi_k(\xi):=\chi(\xi)|_{\mathcal{D}_k}$，其中 $h\in H$ 和 $\xi\in\mathfrak{b}_-$。那么 $(\sigma,\chi)\cong(\sigma_1,\chi_1)\oplus(\sigma_2,\chi_2)$。

本节的主要结果是下面的定理 4.4.3 和定理 4.4.4：

定理 4.4.3. 设 $\rho=\mathrm{HolInd}_H^G(\sigma,\chi)$。令 V_σ 为满足定理 4.2.4.2 中条件的 $\mathcal{H}_\rho$ 的闭子空间。令 $q_V\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$ 为到 V_σ 上的正交投影。那么

1. $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\ \chi}$ 是一个冯·诺依曼代数。
2. 假设 $q_V\in\rho(G)''$。那么

$$r:\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G\to\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi},\ r(T):=T|_{V_\sigma}$$

定义了冯·诺依曼代数的一个 $*$-同构。特别地，ρ 不可约当且仅当 (σ,χ) 不可分解。

定理 4.4.4. 考虑定理 4.4.3 的情形。令 $\chi:\mathfrak{b}_-\to\mathcal{L}(\mathcal{D}_\chi)$ 表示 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 上、定义域为 $\mathcal{D}_\chi$ 的平凡延拓。以下断言成立：

1. $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\ \chi}=\mathcal{B}(V_\sigma)^H$.
2. 假设 $q_V\in\rho(G)''$。那么 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G\cong\mathcal{B}(V_\sigma)^H$。特别地，$\rho$ 是不可约的，当且仅当 σ 是不可约的。

注 4.4.5。在正能量表示的背景下，χ 为平凡延拓的情形具有核心重要性。在这种情况下，我们通常可以保证 $q_V\in\rho(G)''$。正能量表示与全纯诱导之间的关系将在第 7 节中讨论。

定理 4.4.3 和定理 4.4.4 的证明

在下文中，始终假设 ρ 是从 (σ,χ) 全纯诱导而来。根据定理 4.2.4，我们可以并且确实假设 $V_\sigma\subseteq\mathcal{H}_\rho$ 是闭子空间，$\sigma(h)=\rho(h)|_{V_\sigma}$ 对所有 $h\in H$ 均成立，且 $\mathcal{D}_\chi=V_\sigma\cap\mathcal{H}_\rho^\omega$,$d\rho(\mathfrak{b}_-)\mathcal{D}_\chi\subseteq\mathcal{D}_\chi$，以及对所有 $\xi\in\mathfrak{b}_-$ 和 $v\in\mathcal{D}_\chi$，$\chi(\xi)v=d\rho(\xi)v$。我们还可以假设，满足定义 4.2.2 中条件的映射 $\Phi:\mathcal{H}_\rho\to\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$ 由 $\Phi_\psi(g)=p_V\rho(g)^{-1}\psi$ 给出。特别地，$\mathcal{E}_e=p_V$ 是正交投影 $p_V:\mathcal{H}_\rho\to V_\sigma$，而 $\mathcal{E}_e^*=\iota_V$ 是包含映射 $\iota_V:V_\sigma\hookrightarrow\mathcal{H}_\rho$。此外还有 $q_V=\iota_Vp_V$。

引理 4.4.6. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\,\chi}$, $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 且 $v, w \in \mathcal{D}_\chi$。那么

$$\langle v, Td\rho(x)w\rangle = \langle v, d\rho(x)Tw\rangle.$$

证明。利用 PBW 定理，只需考虑 $x = x_+x_-$ for some $x_+ \in \mathcal{U}(\mathfrak{n}_+)$ and$x_- \in \mathcal{U}(\mathfrak{b}_-)$ 的情形。在这种情况下，利用引理 4.2.6 以及 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\chi}$ 这一事实，我们得到:

$$\begin{aligned}\langle v, Td\rho(x)w\rangle &= \langle \chi(\xi_+^*)T^*v, \chi(x_-)w\rangle = \langle \chi(\xi_+^*)v, T\chi(x_-)w\rangle \\ &= \langle \chi(\xi_+^*)v, \chi(x_-)Tw\rangle = \langle v, d\rho(x)Tw\rangle.\end{aligned}$$

□

引理 4.4.7. 设 $T \in \mathcal{B}(V_\sigma)$。假设对于某个 $\mathfrak{g}$ 中的零邻域内所有 v、$w \in \mathcal{D}_\chi$ 以及所有 ξ，都有 $\langle v, T\rho(e^\xi)w\rangle = \langle v, \rho(e^\xi)Tw\rangle$。那么 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$，并且

$$\langle w, T\rho(g)v\rangle = \langle w, \rho(g)Tv\rangle, \qquad \forall g \in G,\ \forall v, w \in V_\sigma. \tag{4.7}$$

证明。设 $v, w \in \mathcal{D}_\chi$。$g \mapsto \langle w, T\rho(g)v\rangle$ 和 $g \mapsto \langle w, \rho(g)Tv\rangle$ 都是实解析函数。由于 G 是 BCH 群，因而特别是局部指数群，根据假设，这些函数在 G 的某个单位元邻域上一致。由于 G 连通，由命题 2.1.14 可知它们处处相等。因此，对于所有 $g \in G$，我们得到 $\langle w, T\rho(g)v\rangle = \langle w, \rho(g)Tv\rangle$。由于 $\mathcal{D}_\chi$ 稠密，方程 (4.7) 成立。令 $v \in \mathcal{D}_\chi$。那么利用 (4.7)，我们发现对于所有 $g \in G$，有 $\langle Tv, \rho(g)Tv\rangle = \langle Tv, T\rho(g)v\rangle$。右侧定义了一个实解析函数 $G \to \mathbb{C}$，因为 $v \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。因此，$g \mapsto \langle Tv, \rho(g)Tv\rangle$ 也是实解析的。回想一下，G 是 BCH Fr´echet–李群，利用 [Nee11, 定理 5.2]，我们得出 $Tv \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。因此 $Tv \in \mathcal{H}_\rho^\omega \cap V_\sigma = \mathcal{D}_\chi$。 □

引理 4.4.8. $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\,\chi}$ 是一个冯·诺依曼代数。此外，我们有

$$\langle w, T\rho(g)v\rangle = \langle w, \rho(g)Tv\rangle, \qquad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\chi},\ \forall g \in G,\ \forall v, w \in V_\sigma. \tag{4.8}$$

证明. 令 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(V_\sigma)^H$ 表示由 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\chi}$ 在 $\mathcal{B}(V_\sigma)$ 中生成的冯·诺依曼代数。我们证明$\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\chi}$。只需再证明 $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\chi}$。由于 $\mathcal{N}$是 $*$-闭的，只需证明 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$，并且对于所有 $T \in \mathcal{N}$, $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in \mathcal{D}_\chi$，有 $T\chi(\xi)v = \chi(\xi)Tv$。令 $T \in \mathcal{N}$。设 (T_λ) 是 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\chi}$ 中的一个网，且 $T_\lambda \to T$ 强收敛。令 $v, w \in \mathcal{D}_\chi$ 和 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$。利用引理 4.4.6，我们有:

$$\begin{aligned}\langle v, Td\rho(x)w\rangle &= \lim_\lambda \langle v, T_\lambda d\rho(x)w\rangle = \lim_\lambda \langle v, d\rho(x)T_\lambda w\rangle = \lim_\lambda \langle d\rho(x^*)v, T_\lambda w\rangle \\ &= \langle d\rho(x^*)v, Tw\rangle\end{aligned} \tag{4.9}$$

由于 $v, w \in \mathcal{D}_\chi \subseteq H_\rho^\omega$，轨道映射 $g \mapsto \rho(g)v$ 和 $g \mapsto \rho(g)w$ 都是实解析的 $G \to \mathcal{H}_\rho$。利用 (4.9)，对于 $\mathfrak{g}$ 中一个足够小的零邻域内的所有 $\xi \in \mathfrak{g}$，我们得到:

$$\begin{aligned}\langle w, T\rho(e^\xi)v\rangle &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle w, Td\rho(\xi^n)v\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\langle d\rho(\xi^n)w, Tv\rangle = \langle \rho(e^{-\xi})w, Tv\rangle \\ &= \langle w, \rho(e^\xi)Tv\rangle.\end{aligned} \tag{4.10}$$

由引理 4.4.7 可知 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$，且方程 (4.7) 对 T 成立。因此 $\mathcal{N}\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$。在单位元处对 (4.7) 求导 $e \in G$，得到 $\langle w,\ Td\rho(\xi)v\rangle = \langle w,\ d\rho(\xi)Tv\rangle$，对所有 $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $w \in \mathcal{D}_\chi$ 均成立。设 $\xi \in \mathfrak{b}_-$。利用 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$，我们得到

$$\langle w, T\chi(\xi)v\rangle = \langle w, Td\rho(\xi)v\rangle = \langle w, d\rho(\xi)Tv\rangle = \langle w, \chi(\xi)Tv\rangle, \qquad \forall w \in \mathcal{D}_\chi,$$

其中，第一次和最后一次等式用到了引理 4.2.6。由于 $\mathcal{D}_\chi$ 在 V_σ 中稠密，对每个 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in \mathcal{D}_\chi$，都有 $T\chi(\xi)v = \chi(\xi)Tv$。因此 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\,\chi}$。于是 $\mathcal{N} = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{H,\,\chi}$。 □

结合引理 4.4.8，下面的引理 4.4.9 完成了定理 4.4.3 的证明。

引理 4.4.9. 假设 $q_V \in \rho(G)''$。那么映射

$$r : \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \to \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}, \quad r(T) := T|_{V_\sigma}$$

定义了冯·诺依曼代数的一个同构。

证明。根据引理 4.4.8，我们知道 $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\,\chi}$ 是一个冯·诺依曼代数。注意，假设 $q_V \in \rho(G)''$ 等价于：对每个 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$，都有 $TV_\sigma \subseteq V_\sigma$。令 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$。于是 $T\mathcal{H}_\rho^\omega \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$ 且 $TV_\sigma \subseteq V_\sigma$。回想 $\mathcal{D}_\chi = V_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$，可得 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$。由于 T 和 T^* 都属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$，因此 $r(T) \in \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\,\chi}$；这里回想一下，对于 $h \in H$ 和

$\xi \in \mathfrak{b}_-$。显然， r 是一个弱连续的、保持 $*$的含幺同态。它也是单射，因为 $r(T) = 0$ 蕴含 $T\rho(G)V_\sigma = \rho(G)TV_\sigma = \{0\}$，进而蕴含 $T = 0$，因为 V_σ 对 G-表示 $\mathcal{H}_\rho$ 是循环的。由于 r 弱连续，其像是弱闭的 [Mur90, Thm. 4.3.4]。因此，要证明 r 是满射，只需证明其像包含 $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$ 中所有的正交投影。令 $p_1 \in \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$ 为一个正交投影，并令 $p_2 := 1 - p_1$。对于 $k \in \{1, 2\}$，按备注 4.4.2 定义 V_k、$\mathcal{D}_k$、σ_k 和 χ_k，使得 $(\sigma, \chi) \cong (\sigma_1, \chi_1) \oplus (\sigma_2, \chi_2)$。令 $\mathcal{H}_1$ 和 $\mathcal{H}_2$ 分别为由 V_1 和 V_2 生成的 $\mathcal{H}_\rho$ 中的闭 G-不变子空间。只需证明 $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$。令 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$。由于 $p_1 \in \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$，由方程 (4.8) 可得

$$\langle v_1, \rho(g)v_2\rangle = \langle v_1, p_1\rho(g)v_2\rangle = \langle v_1, \rho(g)p_1v_2\rangle = 0, \qquad \forall g \in G.$$

由此可得 $V_1 \perp \rho(G)V_2$，进而推出 $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$。 □

最后，还需证明定理 4.4.4：

定理 4.4.4 的证明：只需证明第一项。第二项将利用定理 4.4.3 得出。显然， $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi} \subseteq \mathcal{B}(V_\sigma)^H$。反之，取 $T \in \mathcal{B}(V_\sigma)^H$。设 $v, w \in \mathcal{D}_\chi$。于是特别地，轨道映射 $G \to \mathcal{H}_\rho, g \mapsto \rho(g)v$ 和 $g \mapsto \rho(g)w$ 都是实解析的。注意到 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq V_\sigma^\infty$，类似地有 $T^*\mathcal{D}_\chi \subseteq V_\sigma^\infty$。利用引理 4.3.6，对于零邻域中所有足够小的 ξ，我们得到

$$\begin{aligned}\langle w, T\rho(e^\xi)v\rangle &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle w, Td\rho(\xi^n)v\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle w, Td\sigma(E_0(\xi^n))v\rangle \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\langle w, d\sigma(E_0(\xi^n))Tv\rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1^n)}{n!}\langle d\rho(\xi^n)w, Tv\rangle \\ &= \langle \rho(e^{-\xi})w, Tv\rangle = \langle w, \rho(e^\xi)Tv\rangle.\end{aligned}$$

利用引理 4.4.7，可得 $T\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$。因此 $\mathcal{B}(V_\sigma)^H\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$，特别地， $T^*\mathcal{D}_\chi \subseteq \mathcal{D}_\chi$。假设 $v \in \mathcal{D}_\chi$、$\xi_0 \in \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 且 $\xi_- \in \mathfrak{n}_-$。于是

$$T\chi(\xi_0 + \xi_-)v = Td\sigma(\xi_0)v = d\sigma(\xi_0)Tv = \chi(\xi_0 + \xi_-)Tv.$$

因此，对于所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in \mathcal{D}_\chi$， $T\chi(\xi)v = \chi(\xi)Tv$。于是 $T \in \mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi}$。我们得出 $\mathcal{B}(V_\sigma)^{H,\chi} = \mathcal{B}(V_\sigma)^H$。 □

4.5 分阶段全纯诱导

接下来我们考虑分阶段全纯诱导。我们将讨论范围限定在平凡扩张的情形。回顾第4.5节，$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}_+$，并且 $H \subseteq G$ 是一个连通李子群，满足 $\mathrm{L}(H) = \mathfrak{h}$。类似地，假设 $\mathfrak{h}_\mathbb{C} = \mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{t}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{a}_+$，其中 $\mathfrak{a}_\pm$ 和 $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ 是闭子代数，且 $\theta(\mathfrak{t}_\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{t}_\mathbb{C}$、$\theta(\mathfrak{a}_\pm) \subseteq \mathfrak{a}_\mp$，并且 $[\mathfrak{t}_\mathbb{C}, \mathfrak{a}_\pm] \subseteq \mathfrak{a}_\pm$。设 T 是 H 的一个连通、闭的局部指数李子群，且其李代数为 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{h}$。采用定义 4.3.8 中的记号，我们有：

命题4.5.1（分阶段诱导）。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$、$(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ 和 $(\nu, \mathcal{H}_\nu)$ 分别是 G、H 和 T 的解析酉表示。那么

1. $\rho = \mathrm{HolInd}_T^G(\nu)$ *and* $\sigma = \mathrm{HolInd}_T^H(\nu) \implies \rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma)$.

2. 假设 $\sigma = \mathrm{HolInd}_T^H(\nu)$ 且 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma)$。不失一般性，利用定理 4.2.4，假设 $\mathcal{H}_\nu \subseteq \mathcal{H}_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$，其中这些包含分别是 T-等变和 H-等变的。若 $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$ 在 $\mathcal{H}_\nu$ 中稠密，则 $\rho = \mathrm{HolInd}_T^G(\nu)$。

证明。这些观察可由反复应用定理4.2得出。 4.

1. 根据定理 4.2.4，我们可以假设 $\mathcal{H}_\nu \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 作为 T-表示，且 $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$ 在 $\mathcal{H}_\nu$ 中稠密，并被 $d\rho(\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{a}_-)$湮灭。令 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$表示由$\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega \subseteq \mathcal{H}_\rho$生成的 $\mathcal{H}_\rho$ 中的酉 H-表示。由定理 4.2.4可得 $\pi = \mathrm{HolInd}_T^H(\nu)$。根据定理 4.3.4，可得$\pi \cong \sigma$ 作为酉 H-表示。因此，我们可以假设 $\mathcal{H}_\sigma = \mathcal{H}_\pi \subseteq \mathcal{H}_\rho$，其中最后一个包含关系是$H$-等变的。 $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$ 在 $\mathcal{H}_\sigma$ 中受 $\rho|_H$ 作用的 H-轨道包含于 $\mathcal{H}_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$ 中，并且显然在 $\mathcal{H}_\sigma$中全。故 $\mathcal{H}_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$ 在 $\mathcal{H}_\sigma$中稠密。由于 $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$ 已经是$(\rho, \mathcal{H}_\rho)$的循环向量，因此较大的空间$\mathcal{H}_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$也是如此。要证明 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma)$，只需证明 $\mathcal{H}_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$湮灭。由于$\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$湮灭，且 $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{n}_-) \subseteq \mathfrak{n}_-$，对任意 $\psi \in \mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$可得 $d\rho(\mathfrak{n}_-)\rho(H)\psi \subseteq \rho(H)d\rho(\mathfrak{n}_-)\psi = \{0\}$。因此， $d\rho(\mathfrak{n}_-)$湮灭 $\rho(H)(\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega)$。由于 $\rho(H)(\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega)$在 $\mathcal{H}_\sigma$中全，可得 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$湮灭$\mathcal{H}_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$。验证了定理 4.2.4的所有条件后，我们得出 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma)$。

2. 由于 $\sigma = \mathrm{HolInd}_T^H(\nu)$，我们可以假设 $\mathcal{H}_\nu \subseteq \mathcal{H}_\sigma$作为 T-表示，且 $\mathcal{H}_\sigma^\omega \cap \mathcal{H}_\nu$在$\mathcal{H}_\nu$中稠密，是 H-表示 $\mathcal{H}_\sigma$的循环向量，并被 $d\sigma(\mathfrak{a}_-)$湮灭。同理，由于 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma)$，我们可以假设 $\mathcal{H}_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 作为 H 表示，且此外 $\mathcal{H}_\rho^\omega \cap \mathcal{H}_\sigma$ 在 $\mathcal{H}_\sigma$中稠密，是 G-表示 $\mathcal{H}_\rho$ 的循环向量，并被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$湮灭。于是 $\mathcal{H}_\nu \subseteq \mathcal{H}_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$，其中这些包含关系分别是 T-等变和 H等变的。根据假设， $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$在 $\mathcal{H}_\nu$中稠密。由于 $\mathcal{H}_\nu$是$(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$的循环向量，且$\mathcal{H}_\sigma$是$(\rho, \mathcal{H}_\rho)$的循环向量，可得 $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$是$(\rho, \mathcal{H}_\rho)$的循环向量。对任意 $\psi \in \mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega \subseteq \mathcal{H}_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$，有$d\rho(\mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{n}_-)\psi \subseteq d\sigma(\mathfrak{a}_-)\psi + d\rho(\mathfrak{n}_-)\psi = \{0\}$。因此， $\mathcal{H}_\nu \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$被 $d\rho(\mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{n}_-)$湮灭。由定理 4.2.4可得 $\rho = \mathrm{HolInd}_T^G(\nu)$。

□

5 全纯诱导的几何方法

本节给出全纯诱导表示的定义，以确保 $\mathcal{H}_\rho^\infty$嵌入全纯映射空间。与第 4 节不同，这种方法涉及复几何。它的适用范围没有那么广，尤其要求被诱导的表示中存在一个稠密的 b-强整向量集。对于有限维李群，这一条件已得到充分理解，但对于无限维李群则鲜有研究。我们首先明确具体的背景设定，随后在第 5.1 节为齐性向量丛 $G \times_H V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$赋予适当的复解析丛结构。这里我们紧随 [Nee13, Thm. 2.6] 的构造。接着在第 5.2 节定义几何全纯诱导，并将这一概念与第 4 节研究的概念进行比较。

我们考虑第 4 节中的设定，因此 G 表示一个连通的 BCH Fr´echet–Lie 群，其李代数为 $\mathfrak{g}$； $H \subseteq G$ 是 G 的一个闭连通局部指数李子群，具体含义见 [Nee06, Def. IV.3.2]。此时， H 必为 BCH 群，且是 G 的解析嵌入李子群（参见引理 4.0.1）。令 $\mathfrak{h} := \mathrm{L}(H)$ 为 H的李代数，并利用包含映射 $H \hookrightarrow G$的推前，将其视为 $\mathfrak{g}$ 的李子代数。此外，假设给定一个分解 $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}_+$，其中 $\mathfrak{n}_\pm$ 和 $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 是 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的闭李子代数，并满足 $\theta(\mathfrak{n}_\pm) \subseteq \mathfrak{n}_\mp$, $\theta(\mathfrak{h}_\mathbb{C}) \subseteq \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 以及 $[\mathfrak{h}_\mathbb{C}, \mathfrak{n}_\pm] \subseteq \mathfrak{n}_\pm$。进一步假设，$G_\mathbb{C}$ 是一个连通的复 BCH Fr´echet–Lie 群，其李代数为 $\mathrm{L}(G_\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_\mathbb{C}$，并且存在一个嵌入 $\eta\colon G \hookrightarrow G_\mathbb{C}$，其中 $\mathrm{L}(\eta)\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 为包含映射。在此设定下，注意到 $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{b}_\pm) \subseteq \mathfrak{b}_\pm$。定义闭补空间 $\mathfrak{p} := (\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+) \cap \mathfrak{g}$，使其成为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$中的补空间，从而 $\mathfrak{p} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$。令 M 表示齐性空间 $M := G/H$。

根据 [Nee1 4，附录 C], 我们还假设存在开对称凸零邻域 s

$$U_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p} \cap U_\mathbb{C}, \quad U_\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{h} \cap U_\mathbb{C}, \quad U_{\mathfrak{n}_\pm} \subseteq \mathfrak{n}_\pm \cap U_\mathbb{C} \quad \text{and } U_{\mathfrak{b}_-} \subseteq \mathfrak{b}_- \cap U_\mathbb{C}$$

使得下 列映射是到其陪域中某个开子集上的解析微分同胚，其中 $x*$ y
由 th 定义 BCH 级数定义:

$$U_\mathfrak{p} \times U_\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}, \quad (x, y) \mapsto x * y, \tag{A1}$$
$$U_\mathfrak{p} \times U_{\mathfrak{b}_-} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}, \ (x, y) \mapsto x * y, \tag{A2}$$
$$U_{\mathfrak{n}_+} \times U_{\mathfrak{b}_-} \to \mathfrak{g}_\mathbb{C}, \ (x, y) \mapsto x * y. \tag{A3}$$

注 5.0.1。

1. 如 Nee14 的附录 C 中所述，条件 (A1) 确保 M 带有实解析流形结构，使 $G \xrightarrow{q} G/H$ 成为实解析主 H-丛，并且左侧 G-作用是实解析的 $G \times M \to M$。此外，条件 (A2) 和 (A3) 确保 M 带有相容的复流形结构，使得对于任意 $g \in G$，映射 $l_g\colon M \to M, xH \mapsto gxH$ 是全纯的；并且映射 $\mathfrak{g} \to T_{eH}(M)$ $\xi \mapsto \frac{d}{dt}\big|_{t=0} q(e^{t\xi})$ 的 $\mathbb{C}$-线性扩张降至一个 $\mathbb{C}$-线性同构 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{b}_- \cong T_{eH}(M)$。我们很快将看到，条件 (A3) 对于赋予 $G \times_H V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 复向量丛结构（其底空间为 M）也必不可少。

2. 在 [Nee14 的例 C.4], 中，讨论了保证 (A1)、(A2) 和 (A3) 成立的充分条件。特别是，利用反函数定理，当 G 是单连通 Banach–Lie 群且 G/H 是 Banach 齐性空间时，这些条件成立。在 [Nee14 第 5.2], 节中还证明，在如下情形下这些条件也成立： G 是（中心 $\mathbb{T}$-扩张的）一个（扭曲）环群，且 $H \subseteq G$ 是 G 上某个特定 $\mathbb{R}$-作用的不动点子群。

从此，我们赋予 $M = G/H$ G-不变的复结构，即注 5.0.1 中提到的复结构，从而$T_{eH}(M) \cong \mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{b}_-$作为复向量空间。

~ ~引理 5.0.2. 设 $f \in C^\infty(M;\mathbb{C})$，并设 $f\colon G\to\mathbb{C}$ 是其在 G 上的提升。那么 $f\in\mathcal{O}(M)\iff \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\mathfrak{b}_-)}f=\{0\}$。

证明。利用 M 上的左 G-作用，识别 $(T_gG)_{\mathbb{C}}\cong\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $T_{gH}M\cong\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}_-$。根据命题 2.1.11，$f$ 是 ~ 全纯的，当且仅当 $T(f)$ 在纤维方向上是 $\mathbb{C}$-线性的，而这又等价于 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\mathfrak{b}_-)}f=\{0\}$。 □

5.1 $\mathbb{E}_\sigma = G\times_H V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 上的复结构

固定一个酉 H-表示 (σ,V_σ)。回顾定义 2.2.4，$V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 表示 H 在 V_σ 上的表示 σ 的 b-强整向量空间。假设 H 在 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 上的作用 σ 是实解析的$H\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$。由于 $G\to G/H$ 是一个实解析主 H-丛，在此情况下，具有典型纤维 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 的 G-齐性向量丛 $\mathbb{E}_\sigma := G\times_H V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$（其基空间为 G/H）自然地带有一个实解析向量丛结构。

备注 5.1.1. 若 H 实际上是一个巴拿赫–李群，使得 $\mathfrak{h}$ 在从 $\mathfrak{g}$继承的子空间拓扑下是一个巴拿赫空间，那么 H在 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$上的作用总是实解析的 $H\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，参见备注 3.2.6

接下来，我们改编 [Nee13, 定理 2.6] 中的证明，利用 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$的整延拓 $\chi\colon\ \mathfrak{b}_-\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 的概念，为 $\mathbb{E}_\sigma$ 赋予复解析丛结构，见下文定义 5.1.4。我们用 $L_g\colon\ \mathbb{E}_\sigma\to\mathbb{E}_\sigma$ 表示 $\mathbb{E}_\sigma$上的左 G作用。

定义 5.1.2. 设 W 是一个完备豪斯多夫复（分别为实）局部凸向量空间，并设$F\colon\ W\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$是一个函数。若相应的映射

$$F^\vee : W\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$$

是复解析的（分别为实解析、光滑）。

引理 5.1.3. 考虑定义 5.1.2 的情形。若 F 光滑，则 F 复解析，当且仅当对于每个 $x\in W$，映射 $T_x(F):W\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 是 $\mathbb{C}$-线性的，其中 $T_x(F)(w)v := \frac{d}{dt}\big|_{t=0}F(x+tw)v$

证明. 根据命题 2.1.11，映射 $F^\vee\colon W\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 复解析，当且仅当它是光滑的，并且 $T(F^\vee)$ 是逐纤维 $\mathbb{C}$-线性的。根据假设，$F^\vee$ 是光滑的，而 $v\mapsto T_x(F^\vee)(0,v)$ 显然是 $\mathbb{C}$-线性的。因此，对于任意 x, $w\in W$，F 复解析，当且仅当 $w\mapsto T_x(F^\vee)(w,0)$ 是 $\mathbb{C}$-线性的，这正是所述结论。 □

定义 5.1.4. χ 的整延拓 $d\sigma\colon\ \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 是李代数的一个同态 $\chi\colon\ \mathfrak{b}_-\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$，满足：

1. $\chi|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}=d\sigma$. 2. $\chi(\mathrm{Ad}_h(\xi)) = \sigma(h)\chi(\xi)\sigma(h)^{-1}$ 对所有 $h\in H$ 和 $\xi\in\mathfrak{b}_-$均成立。3. 级数 $\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\ \chi(\xi)^n v$ 对所有 $\xi\in\mathfrak{b}_-$ 和 $v\in V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$均在 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$中收敛，并定义一个整映射

$$\mathfrak{b}_-\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b},\qquad (\xi,v)\mapsto\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\chi(\xi)^n v.$$

在这种情况下，我们记作 $e^{\chi(\xi)}\psi :=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\ \chi(\xi)^n\psi$。

请注意，整延拓尤其是定义 4.1.3 意义下的扩张。

下面的例子以及注 3.2.6 中的讨论，体现了我们使用 b-强整向量空间 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，而非 $V_\sigma^{\mathcal{O}}$ 的主要原因：

例 5.1.5. 假设 H 是一个巴拿赫–李群。根据注 3.2.6，我们知道以下映射是整的：

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b},\qquad (\eta,v)\mapsto\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}d\sigma(\eta^n)v \tag{5.1}$$

因此 y, $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓 $\chi\colon\ \mathfrak{b}_-\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$，其定义域为 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，是一个整延拓 n.

利用整延拓的概念， [Nee13，定理 2.6] 可以直接推广到当前情形：

定理 5.1.6. 设 $\chi\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 是 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$的一个整延拓。那么， $\mathbb{E}_\sigma = G\times_H V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$具有唯一的复解析丛结构，并满足以下性质：

1. 对任意 $g\in G$，左侧 G-作用 L_g 都是复解析的。
2. 商映射 $G\times V_\sigma \to \mathbb{E}_\sigma$ 是实解析的。
3. 设 $U\subseteq G$ 是 $g\in G$的一个邻域。若光滑函数 $f\in C^\infty(UH, V_\sigma^{\mathcal{O}_b})^H$，则它是 $\mathbb{E}_\sigma$ 的局部全纯截面，当且仅当

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f = -\chi(\xi) f, \qquad \forall \xi\in \mathfrak{n}_-.$$

如果 χ_1 和 χ_2 这两个将 $d\sigma$ 扩张到 $\mathfrak{b}_-$ 的整延拓定义了相同的复丛结构，那么 $\chi_1=\chi_2$。

定义 5.1.7. 设 $\chi\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 是 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$的一个整延拓。我们用 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}\to M$ 表示向量丛 $\mathbb{E}_\sigma\to M$，其配备了满足定理 5.1.6 中条件的唯一复解析丛结构。

定理 5.1.6 的证明：此证明基本上只需对 [Nee13, Thm. 2.6] 作简单调整即可。下面说明所需的改动，并回顾局部坐标图的构造，以备后用。

令 $q_M\colon G\to G/H$ 表示商映射。令 $U_{\mathfrak{g}}\subseteq\mathfrak{g}$ 和 $U_G\subseteq G$ 分别为 $0\in\mathfrak{g}$ 和 $e\in G$ 的邻域，使得 $\exp_G|_{U_{\mathfrak{g}}}\colon U_{\mathfrak{g}}\to U_G$ 是解析微分同胚。必要时缩小 $U_{\mathfrak{g}}$，由 (A1) 可知，存在某些零邻域 $U_{\mathfrak{p}}\subseteq\mathfrak{p}$ 和 $U_{\mathfrak{h}}\subseteq\mathfrak{h}$，使 BCH 级数定义了一个解析微分同胚$U_{\mathfrak{p}}\times U_{\mathfrak{h}}\to U_{\mathfrak{g}}$。定义 $U_P := \exp_G(U_{\mathfrak{p}})$ 和 $U_H := \exp_G(U_{\mathfrak{h}})$，于是 $U_G = U_P U_H$。（与 [Nee13, Thm. 2.6] 的证明相比较， U_P 起到 U_Z 的作用。）对任意 $x\in G$，定义开子集

$$U_x := x q_M(U_P)\subseteq M \qquad \text{and} \qquad \widetilde{U}_x := xU_PH\subseteq G. \tag{5.2}$$

利用 (A3)，并将 Nee13 定理 2.6] 的证明步骤中 $2-4$ 的 $\beta\colon \mathfrak{b}_-\to\mathcal{B}(V_\sigma)$ 替换为整延拓 $\chi\colon \mathfrak{b}_-\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$，必要时对每个 $x\in G$ 缩小 $U_{\mathfrak{g}}$ 后，我们得到一个光滑函数$F_x\colon \widetilde{U}_x\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})^\times$，满足以下性质：

1. 对所有 $g\in\widetilde{U}_x$ 和 $h\in H$， $F_x(gh) = \sigma(h)^{-1}F_x(g)$。2. 对所有 $\xi\in\mathfrak{b}_-$， $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_x = -\chi(\xi)F_x$。3. $F_x(x) = \mathrm{id}_{V_\sigma^{\mathcal{O}_b}}$。

此外，利用 (A1)、(A3)、 $e^\chi\colon \mathfrak{b}_-\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 是复解析的这一事实，以及作用 $H\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 是实解析的这一事实，结合注 3.2.6，可以从其构造看出， F_x 和 F_x^{-1} 实际上都是~实解析的。此外，由其构造可立即看出，对于任意 x、$y\in G$ 和 $g\in U_x$，这些函数还满足 $F_{yx}(yg) = F_x(g)$。如 Nee13 定理 2.6], 中那样，我们现在为每个 $x\in G$ 定义平凡化

$$\phi_x : U_x\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to \mathbb{E}_\sigma|_{U_x}, \qquad (gH, v)\mapsto [g, F_x(g)v], \tag{5.3}$$

从而过渡函数 $\phi_x^{-1}\circ\phi_y\colon U_x\cap U_y\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}\to U_x\cap U_y\times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$由 $(gH,v)\mapsto(gH,\phi_{xy}(gH)v)$ 给出，其中

$$\phi_{xy}: U_x\cap U_y\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})^\times, \quad \phi_{xy}(gH) = F_x(g)^{-1}F_y(g).$$

按照 [Nee13, Thm. 2.6], 我们来检查这些过渡函数是否为复解析函数。根据引理 5.1.3，只需证明 ϕ_{xy} 的提升 $\widetilde{\phi}_{xy}\colon \widetilde{U}_x\cap\widetilde{U}_y\to\mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 满足 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}\widetilde{\phi}_{xy}=0$，对所有 $\xi\in\mathfrak{b}_-$ 均成立。这可由上述函数 F_x 的三个性质推出：

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}\widetilde{\phi}_{xy} &= \big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_x^{-1}\big)F_y + F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_y\big)\\
&= -F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_x\big)F_x^{-1}F_y + F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_y\big)\\
&= F_x^{-1}\chi(\xi)F_y - F_x^{-1}\chi(\xi)F_y\\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，平凡化 $\{\phi_x\}_{x\in G}$ 在 $\mathbb{E}_\sigma$上定义了复解析丛结构。令 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 表示相应的复解析丛。我们证明定理 5.1.6 中的性质 $1-3$ 均成立：

1. 设 $x, g \in G$。在由 ϕ_x 和 ϕ_{gx}定义的局部坐标图中， L_g 表示为 $l_g \times \mathrm{id}_{V_\sigma^{\mathcal{O}_b}}$；根据 l_g 的相应性质，该映射是复解析的： $M \to M$。

2. 令 $x \in G$。考虑由 ϕ_x 定义的 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 的局部坐标。在这些局部坐标下，商映射 $G \times V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \to \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 由实解析函数表示

$$\widetilde{U}_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \to U_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}, \qquad (g, v) \mapsto (gH, F_x(g)^{-1} v).$$

3. 取 $f \in C^\infty(UH, V_\sigma^{\mathcal{O}_b})^H$。 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 的相应局部截面是通过将解析函数 $f\colon\ UH \to \mathbb{E}_\sigma, f(g) := [g, f(g)]$ 下降到商 $q_M(U)$ 得到的。令 $x \in U$ 并定义 $W_x := U_x \cap U$ 和 $\widetilde{W}_x := \widetilde{U}_x \cap UH$。利用局部坐标图 ϕ_x，映射 $\widetilde{f}\big|_{\widetilde{W}_x}$ 由光滑函数表示

$$\overline{f} : \widetilde{W}_x \to U_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_b}, \qquad \overline{f}(g) = (gH, F_x(g)^{-1} f(g)),$$

当且仅当对任意 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 都有 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} h = 0$ 时，该函数是复解析的，其中 h 由下式给出

$$h : \widetilde{W}_x \to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}, \qquad h(g) := F_x(g)^{-1} f(g).$$

我们计算得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} h &= \big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} F_x^{-1}\big) f + F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f\big) \\ &= -F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} F_x\big) F_x^{-1} f + F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f\big) \\ &= F_x^{-1} \chi(\xi) f + F_x^{-1}\big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f\big). \end{aligned}$$

因此，当且仅当对任意 $\xi \in \mathfrak{b}_-$， $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} h = 0$ 满足 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f = -\chi(\xi) f$。于是，当且仅当对每个 $\xi \in \mathfrak{b}_-$， f 满足 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)} f = -\chi(\xi) f$ 时，它对应于 $\mathbb{E}_\sigma \to M$ 的一个全纯局部截面。由 f 的 H-等变性可知，对任意 $\xi \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$，该方程自动成立。结论得证。

[Nee13 中的第5步，定理 2.6] 表明，若两个整延拓 χ_1 和 χ_2 定义了相同的复丛结构，则 $\chi_1 = \chi_2$。为说明复丛结构的唯一性，我们只需指出，若 $\mathbb{E}_\sigma^1$ 和 $\mathbb{E}_\sigma^2$ 表示向量丛 $\mathbb{E}_\sigma$，并且预先赋予它们可能不同的复解析丛结构，且满足定理 5.1.6 中的性质 $1-3$，那么根据第三条性质，它们具有相同的全纯局部截面。这意味着它们是定义在 M 上的复解析向量丛。 □

5.2 几何全纯诱导

有了复解析 G-齐性向量丛 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 之后，我们现在可以定义一种更强的全纯诱导概念，它保证 $\mathcal{H}_\rho^\infty$确实嵌入全纯映射空间中。我们继续采用第 5.1 节的假设。特别地， σ 是 V_σ 上的 H 的酉表示，并且 H对 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$的作用是联合实解析的 $H \times V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \to V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$。令$\chi\colon\ \mathfrak{b}_- \to \mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$为 $d\sigma\colon\ \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$到 $\mathfrak{b}_-$的整延拓，并令$(\rho, \mathcal{H}_\rho)$为一个酉 G-表示。

定义 5.2.1. 如果 σ 是 $\mathfrak{b}$-强整的，并且存在一个 G-等变单射线性映射 $\Phi\colon\ \mathcal{H}_\rho \hookrightarrow \mathrm{Map}(G, V_\sigma)^H$ 满足：则称$(\rho, \mathcal{H}_\rho)$是从(σ, χ)几何全纯诱导而来：

1. 点求值 $\mathcal{E}_x\colon\ \mathcal{H}_\rho \to V_\sigma$, $\mathcal{E}_x(\psi) := \Phi_\psi(x)$ 对每个 $x \in G$ 都是连续的。

2. 对每个 $x \in G$， $\mathcal{E}_x \mathcal{E}_x^* = \mathrm{id}_{V_\sigma}$。

3. 对每个 $w \in V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，以下函数是全纯的：

$$f_w : \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)} \to \mathbb{C}, \qquad f_w([g, v]) := \langle \mathcal{E}_e^* w, \rho(g) \mathcal{E}_e^* v \rangle.$$

注释 5.2.2. 定义 5.2.1 中的第一个条件意味着 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 与再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}_Q$ 上的自然 G-表示酉等价，其中 $Q \in C(G \times G, \mathcal{B}(V_\sigma))^{H \times H}$ 是由 $Q(x, y) := \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y^*$ 定义的正定且 G-不变核。结合第二个性质，我们还得到 $\mathcal{E}_e^*$ 是一个 H-等变等距映射，并且子空间 $\mathcal{E}_e^* V_\sigma \subseteq H_\rho$ 对于 G 是循环的，参见下文的定理 A.1.3 和命题 A.1.5。

我们先给出一个引理：

引理 5.2.3。假设 $V_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是酉 H-表示，并且 V_σ 对于 G 在 $\mathcal{H}_\rho$中是循环的。进一步假设 σ 是 $\mathfrak{b}$-强整的。那么以下断言等价：

1. $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$和 $d\rho(\xi)v = \chi(\xi)v$ 对所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$均成立。
2. 对每个 $w \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$， $f_w \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$ 均成立，其中 $f_w([g,v]) := \langle w, \rho(g)v\rangle$。

若这些断言均成立，则我们甚至有 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$。此外，对任意$\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，我们有 $f_\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$，其中 $f_\psi([g,v]) := \langle \psi, \rho(g)v\rangle$。

证明。令 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，并考虑函数

$$f_\psi : \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)} \to \mathbb{C}, \qquad f_\psi([g,v]) = \langle \psi, \rho(g)v\rangle.$$

考虑其在 $G \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$ 上的提升，由 $\widetilde{f}_\psi\colon G \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \to \mathbb{C}$, $\widetilde{f}_\psi(g,v) = f_\psi([g,v])$ 定义。令 $x \in G$。按照 (5.2) 定义开集 $\widetilde{U}_x \subseteq G$ 和 $U_x \subseteq M$，因此 U_x 是 $xH \in M$ 的开邻域。令 $F_x\colon \widetilde{U}_x \to \mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}})^\times$，其定义与定理 5.1.6 的证明中相同。特别地，对于任意 $\xi \in \mathfrak{b}_-$， F_x 满足 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_x = -\chi(\xi)F_x$。令 $\phi_x : U_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \to \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}\big|_{U_x}$ 为全纯向量丛 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$的相应坐标图，其定义~见 (5.3)。在这些局部坐标中， f_ψ 和 f_ψ 分别表示为 $h_{\psi,\,x}$ 和 $h_{\psi,\,x}$，其中

$$h_{\psi,x} : U_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \to \mathbb{C}, \qquad h_{\psi,x}(gH, v) = \langle \rho(g)^{-1}\psi, F_x(g)v\rangle,$$
$$\widetilde{h}_{\psi,x} : \widetilde{U}_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \to \mathbb{C}, \qquad \widetilde{h}_{\psi,x}(g, v) = \langle \rho(g)^{-1}\psi, F_x(g)v\rangle.$$

由于 F_x 是光滑的，并且因为 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，这尤其表明，对于底层的实~流形结构， f_ψ 是光滑的。于是，对任意 $\xi \in \mathfrak{b}_-$， $h_{\psi,\,x}$ 是复解析的，当且仅当 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}h_{\psi,\,x} = 0$。令 $\xi \in \mathfrak{b}_-$。利用 $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}F_x = -\chi(\xi)F_x$，对于任意 $(g,v) \in \widetilde{U}_x \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$，计算得

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}\widetilde{h}_{\psi,x})(g,v) = \langle d\rho(\xi^*)\rho(g)^{-1}\psi, F_x(g)v\rangle - \langle \rho(g)^{-1}\psi, \chi(\xi)F_x(g)v\rangle. \tag{5.4}$$

~因此，若 (1) 成立，则由 (5.4) 可知，对任意 $\xi \in \mathfrak{b}_-$， $\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}h_{\psi,\,x} = 0$，从而对任意 $x \in G$， $h_{\psi,\,x}$ 是复解析的。于是我们得出结论：对任意 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$， $f_\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$。由于根据假设 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$，我们尤其注意到 (2) 成立。

反过来，假设对任意 .,

$f_w \in \mathcal{O}\ \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ $w \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$ $v \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$ $g \mapsto \langle v\ \rho\ g\ v\rangle = (\,)$。令 .。

$f_v\ [g,v]$ $G \to \mathbb{C}$ $G \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \to \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$

函数 , ( ) ( ) 是实解析的，其中我们用到了商映射是实解析的。由于 G 是 BCH Fr´echet–李群，根据 [Nee11，定理 5.2]，这意味着 $v \in \mathcal{H}_\rho^\omega$。因此 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$。根据推论 2.2.9，我们知道 $\mathcal{H}_\rho^\omega \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$，所以还可得出 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$。为证明 (1) 成立，还需证明对于所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$， $d\rho(\xi)v = \chi(\xi)v$。考虑集合 $\mathcal{D} := \{\,\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty\colon\ f_\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})\,\}$。由前述可知 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{D}$。此外，集合 $\mathcal{D}$ 是 G-不变的。事实上，若 $\psi \in \mathcal{D}$ 且 $g \in G$，则 $f_{\rho(g)\psi} = f_\psi \circ L_{g^{-1}}$ 在 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 上定义了一个全纯映射，因为 $L_{g^{-1}}\colon \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)} \to \mathbb{E}_{(\sigma,\chi)}$ 是全纯的。由于 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$ 在 V_σ 中稠密，且 V_σ 对于 G 是循环的，因此 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 中稠密。令 $\xi \in \mathfrak{b}_-$, $\psi \in \mathcal{D}$ 和 $v \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$。~回顾一下， $F_e(e) = \mathrm{id}_{V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}}$。由于 $f_\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$，我们知道 $(\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}(\xi)}h_{\psi,e})(e) = 0$。利用 $v \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，在 $(e,v) \in \widetilde{U}_e \times V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$ 处对 (5.4) 求值可得

$$\langle \psi, d\rho(\xi)v\rangle = \langle d\rho(\xi^*)\psi, v\rangle = \langle \psi, \chi(\xi)v\rangle.$$

由于 $\mathcal{D}$ 是稠密的，因此对于所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$，都有 $d\rho(\xi)v = \chi(\xi)v$，所以（1）成立。我们还证明了，如果这些等价条件得到满足，那么对于任意$\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，都有 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$ 和 $f_\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$。 □

以下内容表明，可以将 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 看作复解析丛 $\overline{\mathbb{E}}_{(\sigma,\chi)} \to \overline{M}$（与 $\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)} \to M$ 共轭）上的全纯函数空间：

命题 5.2.4. 假设 ρ 是从 (σ,χ) 几何全纯诱导的。那么存在一个单射的 G-等变 $\mathbb{C}$-线性映射 $\mathcal{H}_\rho^\infty \hookrightarrow \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}_{(\sigma,\chi)})$，使得所有点求值映射都是连续的。

证明。假设 ρ 是由 (σ,χ) 几何全纯诱导得到的。特别地，这意味着 σ 是 $\mathfrak{b}$-强整的。令 Φ： $\mathcal{H}_\rho \hookrightarrow$ 映射$(G, V_\sigma)^H$ 满足定义 5.2.1 中的条件。我们可以借助 H-等变等距映射 $\mathcal{E}_e^*$，将 V_σ 视为 $\mathcal{H}_\rho$ 的子空间。由定理 A.1.3 可知， $V_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是循环的。由引理 5.2.3 可得，对任意 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，都有 $f_\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$。映射 $\psi \mapsto f_\psi$ 定义了一个G-等变的 $\mathbb{C}$-~~线性映射 $\mathcal{H}_\rho^\infty \to \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$~~，其点求值映射连续；其中 ~~$\mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$~~ 表示与 $\mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$ 复共轭的向量空间，可将其识别为 $\mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}}_{(\sigma,\chi)})$。此映射是单射，因为 $f_\psi = 0$ 意味着 $\psi \perp \rho(G)V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$，进而推出 $\psi = 0$，因为 $V_\sigma^{\mathcal{O}_\mathfrak{b}}$ 对于$\mathcal{H}_\rho$是循环的。

□

接下来，我们比较几何全纯诱导的概念与定义 4.2.2。回顾一下， χ 是 $d\sigma\colon \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{B}(V_\sigma^{\mathcal{O}_b})$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的整延拓。

定理 5.2.5。假设 σ 是 b-强整的。以下断言等价 t:

1. $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是由 (σ, χ) 几何全纯诱导的。2. 存在一个包含 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 的子空间 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} \subseteq V_\sigma^\omega$，以及 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的一个扩张 $\widetilde{\chi}\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}})$，使得对每个 $\xi \in \mathfrak{b}_-$，$\chi(\xi) = \widetilde{\chi}(\xi)|_{V_\sigma^{\mathcal{O}_b}}$，并且 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma, \widetilde{\chi})$。

假设 χ 是 $d\sigma$ 到定义域为 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 的 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓。那么这些断言等价于:

3. $\rho = \mathrm{Ho}$ $\mathrm{lInd}_H^G(\sigma)$ 和 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$，其中我们根据定理 4.2.4 将 V_σ 视为 $\mathcal{H}_\rho$ 的子空间 .

证明。假设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是由 (σ, χ) 几何全纯诱导的。令 $\Phi\colon \mathcal{H}_\rho \hookrightarrow \mathrm{Map}(G, V_\sigma)^H$ 满足定义 5.2.1 中的条件。根据 $\mathcal{E}_e^*$，将 V_σ 与 $\mathcal{H}_\rho$ 的一个循环子空间等同。定义 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} := V_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$。由引理 5.2.3 可得 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$，并且对所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，都有 $d\rho(\xi)v = \chi(\xi)v$。由于 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$ 在 V_σ 中稠密，后者特别意味着 $d\rho(\mathfrak{b}_-)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} \subseteq V_\sigma$，进而意味着 $d\rho(\mathfrak{b}_-)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} \subseteq \mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$。由定理 4.2.4 可知 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma, \widetilde{\chi})$，其中 $\widetilde{\chi}\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}})$ 是 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$、定义域为 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ 的扩张，定义为 $\widetilde{\chi}(\xi)v = d\rho(\xi)v$。对任意 $\xi \in \mathfrak{b}_-$，此扩张满足 $\widetilde{\chi}(\xi)|_{V_\sigma^{\mathcal{O}_b}} = \chi(\xi)$，如所需。

反过来，设 $\widetilde{\chi}\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}})$ 满足条件 (2)，因此特别有 $\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma, \widetilde{\chi})$。根据定理 4.2.4，我们可以假设 $V_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是酉 H-表示，且 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} = V_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$，并且对所有 $\xi \in \mathfrak{b}_-$ 和 $v \in \mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$，都有 $\widetilde{\chi}(\xi)v = d\rho(\xi)v$。由于根据假设 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ 包含 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，特别可得 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$。由引理 5.2.3 可知，对任意 $w \in V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$，都有 $f_w \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_{(\sigma,\chi)})$，其中 $f_w([g, v]) = \langle w, \rho(g)v\rangle$。因此映射

$$\Phi : \mathcal{H}_\rho \to \mathrm{Map}(G, V_\sigma)^H, \quad \Phi_\psi(g) := p_V \rho(g)^{-1}\psi$$

满足定义 5.2.1 中的条件，其中 $p_V\colon \mathcal{H}_\rho \to V_\sigma$ 是正交投影。

假设 χ 是 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的定义域为 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$的平凡延拓。假设 (2) 成立。设子空间 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} \subseteq V_\sigma$ 和扩张 $\widetilde{\chi}\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}})$ 满足 (2) 中的条件。我们可以将 V_σ 视为 $\mathcal{H}_\rho$ 中满足定理 4.2.4 条件的闭 H-不变线性子空间。特别地，我们有$V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} = V_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$，因此当然有 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq V_\sigma^\infty$。由于 χ 是定义在 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$上的平凡延拓，并且对每个 $\xi \in \mathfrak{b}_-$，$\chi(\xi) = \widetilde{\chi}(\xi)|_{V_\sigma^{\mathcal{O}_b}}$，我们也有 $d\rho(\mathfrak{n}_-)V_\sigma^{\mathcal{O}_b} = \{0\}$。由于 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b}$在 V_σ中稠密，这进一步推出 $d\rho(\mathfrak{n}_-)\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} = \{0\}$，因此 $\widetilde{\chi}$ 是定义在 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$上的平凡延拓。于是 (3) 成立。反过来，假设 (3) 成立。令 $\widetilde{\chi}$表示 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$、定义在定义域 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} := V_\sigma \cap \mathcal{H}_\rho^\omega$上的平凡延拓。根据假设，$\rho = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma, \widetilde{\chi})$ 且 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$。由于 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$ 被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$ 消去，且在 V_σ中稠密，因此可得 $d\rho(\mathfrak{n}_-)V_\sigma^{\mathcal{O}_b} = \{0\}$。于是引理 5.2.3 中的 (1) 得以满足，由此可得 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$。这意味着 $V_\sigma^{\mathcal{O}_b} \subseteq \mathcal{D}_{\widetilde{\chi}}$。因此，利用子空间 $\mathcal{D}_{\widetilde{\chi}} \subseteq V_\sigma$上的平凡延拓 $\widetilde{\chi}$，(2) 得以满足。□

6 Arveson 谱理论

在下文第 7 节中，我们需要一个足够一般的 Arveson 谱子空间概念。因此，我们将已有的概念扩展到更一般的情形。设 V 是一个豪斯多夫的完备局部凸向量空间，其上的标量域为 $\mathbb{C}$。我们利用 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$（即 $\mathbb{R}$ 上取值于 $\mathbb{C}$ 的施瓦茨函数所构成的卷积代数），定义与 V 上满足适当条件的强连续$\mathbb{R}$ α 表示 V相关的 Arveson 谱子空间。相关结果改编自 [Arv74，第 2], [NSZ15，第 A.3] 节，以及[Nee13，第 A.2] 节中的结果。

6.1 某些 $\mathbb{R}$表示类

在本节中，设 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(V)^\times$ 是 $\mathbb{R}$ 在 V 上的强连续表示。在 [NSZ15, Sec. A.3], 中，要求 $\mathbb{R}$-作用 α 是多项式有界的（见下文定义 6.1.1）。不过，定义一种更强和一种更弱的概念将会很方便；这两者都仍弱于 [Nee13, Sec. A.2] 中所用的等度连续性。

定义 6.1.1. 设 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathcal{B}(V)^\times$ 是 $\mathbb{R}$ 在 V 上的强连续表示。

— 如果 α 在 V中存在一组绝对凸的、 α不变的零邻域基，则称 α 为等度连续。等价地，如果 V的拓扑由一族 α不变的连续半范数定义。

— 如果 V中存在一组绝对凸的零邻域基 $\mathcal{B}$，使得对每个 $U \in \mathcal{B}$，都存在一个首一多项式 $r \in \mathbb{R}[t]$，满足对所有 $t \in \mathbb{R}$， $\alpha_t(U) \subseteq r(|t|)U$，则称 α 具有多项式增长。等价地，如果在 V上存在一族定义半范数 $\mathcal{P}$，使得对每个 $p \in \mathcal{P}$，都存在一个首一多项式 $r \in \mathbb{R}[t]$，满足对所有 $t \in \mathbb{R}$ 和 $v \in V$， $p(\alpha_t(v)) \leq r(|t|)p(v)$。

— α：如果对 V上的每个连续半范数 p，都存在一个零邻域 $U \subseteq V$和某个 $N \in \mathbb{N}$，使得 $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(V)^\times$，则称其为多项式有界。

$$\sup_{v\in U}\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{p(\alpha_t(v))}{1+|t|^N} < \infty.$$

— α：若对每个 $v \in V$ 和 V 上的连续半范数 p，都存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(V)^\times$，则称其为逐点多项式有界的

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{p(\alpha_t(v))}{1+|t|^N} < \infty.$$

注 6.1.2. 注意，我们有以下蕴含关系：

$$\alpha \text{ 等度连续} \implies \alpha \text{ 具有多项式增长} \implies \alpha \text{ 多项式有界。}$$

若 V 是巴拿赫空间，则 α 具有多项式增长，当且仅当它是多项式有界的。

例 6.1.3.

1. 通过平移， $\mathbb{R}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 和 $C^\infty(\mathbb{T})$ 上的表示都是等度连续的。

2. 通过平移， $\mathbb{R}$ 对 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的作用 α 不是等度连续的，但具有多项式增长。事实上，可以验证开集

$$U := \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \,:\, \sup_{x\in\mathbb{R}} |xf(x)| < 1 \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

满足 $\bigcap_{t\in\mathbb{R}} \alpha_t(U) = \{0\}$。根据 Nee13，命题 A.1]，，这意味着 α 不是等度连续的。它确实具有多项式 s 增长，因为 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上的拓扑由半范数生成

$$p_{n,m}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^n |(\partial^m f)(x)|, \qquad \text{for } n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0},$$

which satisfy $p_{n,m}(\alpha_t f) \leq \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |t|^{n-k}\right] p_{n,m}(f)$ for $t \in \mathbb{R}$ and $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3. 通过平移， $\mathbb{R}$ 在 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上的作用不是逐点多项式有界的。例如，光滑函数 $f(x) = e^x$ 满足 $\|\alpha_t(f)\|_{C([0,1])} = \|f\|_{C[t,t+t]} \geq e^t$，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。

令 $\mathcal{P}$ 表示 V上的连续半范数集合。对于 $p \in \mathcal{P}$，令

$$\mathcal{N}_p := \{\, v \in V \,:\, p(v) = 0 \,\}$$

表示其核。令 $V_p := \overline{V/\mathcal{N}_p}$为相应的巴拿赫空间。若 p、 $q \in \mathcal{P}$和 $p \leq q$，则 $\mathcal{N}_q \subseteq \mathcal{N}_p$，因此存在典范压缩映射 $\eta_{p,\,q}\colon V_q \to V_p$。

引理 6.1.4. 假设 α 是强连续的且具有多项式增长。则对每个$p \in \mathcal{P}$， α 下降为 $\mathbb{R}$ 在 V_p 上的一个具有多项式增长的表示。此外， $V = \varprojlim V_p$ 在 $\mathbb{R}$-表示意义下成立。

证明。令 $p \in \mathcal{P}$。由于 α 具有多项式增长，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\alpha_t(\mathcal{N}_p) \subseteq \mathcal{N}_p$。因此， α 下降为 V_p 上的一个强连续 $\mathbb{R}$-表示 $\alpha^{(p)}$，且仍具有多项式增长。若 p、 $q \in \mathcal{P}$和 $t \in \mathbb{R}$，则 $\eta_{p,\,q} \circ \alpha_t^{(q)} = \alpha_t^{(p)}$。由此，我们在射影极限 $\varprojlim V_p$ 上得到一个 $\mathbb{R}$-作用，使得典范同构 $V \cong \varprojlim V_p$ 是 $\mathbb{R}$-等变的。 □

命题 6.1.5. 假设 α 是强连续的，且具有多项式增长。那么作用$\alpha\colon \mathbb{R} \times V \to V$是连续的。

证明。由引理 6.1.4 可知， $V = \varprojlim V_p$ as $\mathbb{R}$-局部凸空间上的表示。若 $p \in \mathcal{P}$，由于 V_p 是巴拿赫空间，且 V_p 上的 $\mathbb{R}$-表示是强连续的，由 [Nee10a 命题 5.1] 可知，作用映射 $\mathbb{R} \times V_p \to V_p$ 是联合连续的。利用 $\mathbb{R}$的拓扑表示中 $V \cong \varprojlim V_p$ 这一事实，可知作用 $\alpha\colon \mathbb{R} \times V \to V$是联合连续的。 □

6.2 Arveson 谱子空间

设 V 是豪斯多夫的、定义在 $\mathbb{C}$ 上的完备局部凸向量空间。设 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(V)^\times$ 是 V 上的 $\mathbb{R}$ 的强连续表示。假设 α 是逐点多项式有界的。下文将定义与 $\mathbb{R}$ 的子集 E 相关联的 V 的 Arveson 谱子空间。我们将 [NSZ15，A.3] 中的结果推广到只要求 α 逐点多项式有界的情形。我们采用约定 $\widehat{\ }$：在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上，傅里叶变换 $f \mapsto f$ 定义为

$$\widehat{f}(p) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{itp} dt. \tag{6.1}$$

定义 6.2.1.

— 若 $I \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个理想，则定义其包络 $h(I) \subseteq \mathbb{R}$ 为

$$h(I) := \left\{ p \in \mathbb{R} : \widehat{f}(p) = 0 \text{ for all } f \in I \right\}.$$

— 若 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个闭子集，则将 $I_0(E)$ 的理想 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 定义为

$$I_0(E) := \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}(\widehat{f}) \cap E = \emptyset \right\}.$$

引理 6.2.2（[NSZ15，命题 A.8]）。

1. 若 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个闭子集，则 $h(I_0(E)) = E$。
2. 若 $I \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个闭理想，则 $I_0(h(I)) \subseteq I$。

推论 6.2.3. 设 $I \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个闭理想，且 $h(I) = \emptyset$。那么 $I = \mathcal{S}(\mathbb{R})$。

证明. 由于 $I_0(\emptyset) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$，由引理 6.2.2 可得 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = I_0(\emptyset) = I_0(h(I)) \subseteq I$. □

我们接下来在 V 上定义卷积代数 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}) *)$ 的一个表示。

引理 6.2.4. 设 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 且 $v \in V$。那么弱积分 $\int_{\mathbb{R}} f(t)\alpha_t(v)dt$ 存在于 V 中

.

证明. 对任意 $a > 0$，弱积分 $\int_{-a}^{a} f(t)\alpha_t(v)dt$ 存在于 V 中，因为 $\mathbb{R} \to V$，$t \mapsto f(t)\alpha_t(v)$ 是连续的，且 V 是完备的（参见 [Mil84，第 1021] 页或 [GN，命题 1.1.15]）。由于 α 是逐点多项式有界的，且 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个施瓦茨函数，极限 $v_* := \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(t)\alpha_t(v)dt$ 存在于 V 中，并且 $v_* = \int_{\mathbb{R}} f(t)\alpha_t(v)dt \in V$。 □

De定义 6.2.5. 对任意施瓦茨函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，定义线性算子 $\alpha_f \in \mathcal{L}(V)$ by

$$\alpha_f(v) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\alpha_t(v)dt.$$

那么 $f \mapsto \alpha_f$ 在 V 上定义了卷积代数 $(\mathcal{S}(\mathbb{R}) *)$ 的一个强连续表示。

注 6.2.6. 如果 α 是多项式有界的，那么对于每个 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\alpha_f \in \mathcal{B}(V)$ 都是一个连续算子。

定义 6.2.7.

— 令 $\operatorname{Spec}_\alpha(V) := h(\ker \alpha) \subseteq \mathbb{R}$ 为 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中闭理想 $\ker \alpha$ 的包。

— 对于 $v \in V$，令 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_v := \{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \alpha_f(v) = 0 \}$ 表示 v 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中的湮灭子，它是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中的一个闭理想，并令 $\operatorname{Spec}_\alpha(v) := h(\mathcal{S}(\mathbb{R})_v) \subseteq \mathbb{R}$ 表示它的谱。

— 若 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个子集，定义

$$V_\alpha(E)_0 := \left\{ v \in V : \operatorname{Spec}_\alpha(v) \subseteq \overline{E} \right\}$$

并令 $V_\alpha(E) := \overline{V_\alpha(E)_0}$ 为其在 V 中的闭包。此外定义

$$V_\alpha^+(E) := \bigcap_N V_\alpha(E + N),$$

其中 N 遍历 $\mathbb{R}$ 中的所有 0-邻域。

如果上下文中清楚地表明了作用 α，我们就从记号中省略 α，直接写作 $V(E)_0$、$V(E)$ 和 $V^+(E)$，而不写作 $V_\alpha(E)_0$、$V_\alpha(E)$ 和 $V_\alpha^+(E)$。

例 6.2.8. 设 $U:\mathbb{R}\to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ 是 $\mathbb{R}$ 的强连续酉表示。则 $U_t=e^{tH}$ 对某个作用于 $\mathcal{H}$ 上的自伴算子 H 成立。设 $U_t=\int_{\mathbb{R}} e^{itp}dP(p)$ 是与 U 对应的谱分解，其中 P 是 $\mathbb{R}$ 上的某个投影值测度。按照约定 (6.1)，有 $U_f:=\int_{\mathbb{R}} f(t)U_t dt=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(p)dP(p)$，对于 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$。Arveson谱 $\mathrm{Spec}_U(\mathcal{H})$ 与 $\mathrm{Spec}(H)$ 一致，后者是自伴算子 H 的谱。此外，对于闭子集 $E\subseteq\mathbb{R}$，相应的谱子空间为 $\mathcal{H}_U(E)=P(E)\mathcal{H}$。

注 6.2.9。设 $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一族闭子集。注意到 $\bigcap_{i\in\mathcal{I}}V(E_i)_0=V\big(\bigcap_{i\in\mathcal{I}}E_i\big)_0$。

注 6.2.10. 注意，对任意 $v\in V$，$\ker\alpha\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R})_v$，因此 $\mathrm{Spec}_\alpha(v)\subseteq\mathrm{Spec}_\alpha(V)$。因此

$$V=V(\mathrm{Spec}_\alpha(V))_0=V\big(\mathrm{Spec}_\alpha(V)\big)=V^+\big(\mathrm{Spec}_\alpha(V)\big).$$

结合注 6.2.9，我们得到，对任意闭子集 $E\subseteq\mathbb{R}$，$V(E)_0=V(E\cap\mathrm{Spec}_\alpha(V))_0$。

引理 6.2.11. 设 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 且 $v\in V$。则 $\mathrm{Spec}_\alpha(\alpha_f(v))\subseteq\mathrm{supp}(\widehat{f})$。

证明. 设 $p\in\mathbb{R}\setminus\mathrm{supp}(\widehat{f})$，并选取 $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，使得 $\widehat{g}(p)\neq 0$ 且 $\widehat{g}|_{\mathrm{supp}(\widehat{f})}=0$。于是 $g*f=0$，因为 $\widehat{g}\widehat{f}=0$。由此可得 $\alpha_g\alpha_f v=\alpha_{f*g}v=0$。由于我们还有 $\widehat{g}(p)\neq 0$，因此 $p\notin\mathrm{Spec}_\alpha(\alpha_f v)$。 □

命题 6.2.12。设 $v\in V$。则 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_v=\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 蕴含 $v=0$。此外，$v\neq 0$ 蕴含 $\mathrm{Spec}_\alpha(v)\neq\emptyset$。

证明。假设 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_v=\mathcal{S}(\mathbb{R})$。若 $\lambda\in V'$ 是连续泛函，则可得，对于任意 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，有 $\int_{\mathbb{R}}f(t)\lambda(\alpha_t v)dt=0$。由于 $t\mapsto\lambda(\alpha_t v)$ 连续，这意味着对所有 $t\in\mathbb{R}$，$\lambda(\alpha_t v)=0$。特别地，$\lambda(v)=0$。根据 Hahn-Banach定理，V' 在 V 上分离点，故由 Rud91, Thm. I.3.4], 可得 $v=0$。最后，若 $\mathrm{Spec}_\alpha(v)=\emptyset$，则由推论 6.2.3 可得 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_v=\mathcal{S}(\mathbb{R})$，从而 $v=0$。 □

推论 6.2.13. 若 $E_1,E_2\subseteq\mathbb{R}$ 是两个互不相交的闭子集，则

$$V(E_1)_0\cap V(E_2)_0=\{0\}.$$

证明. 我们有 $V(E_1)_0\cap V(E_2)_0=V(E_1\cap E_2)=V(\emptyset)=\{0\}$，由注 6.2.9 和命题 6.2.12 得出。 □

若 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是一个子集，回顾定义 6.2.1，$I_0(E)\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示函数理想 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\widehat{\ }$，其中函数的傅里叶变换 f 在 $E\subseteq\mathbb{R}$ 的某个邻域上为零。下面的命题 6.2.14 给出了 $V(E)_0$ 关于 $I_0(E)$ 的一种便捷刻画，后文将反复用到。

命题 6.2.14 ([NSZ15, 命题 A.8]).
对于任意子集 $E\subseteq\mathbb{R}$，我们有

$$\begin{aligned}V(E)_0&=\Big\{v\in V:I_0(\overline{E})\subseteq\mathcal{S}(\mathbb{R})_v\Big\}\\&=\Big\{v\in V:\forall f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}):\mathrm{supp}(\widehat{f})\cap\overline{E}=\emptyset\implies\alpha_f(v)=0\Big\}.\end{aligned}$$

特别地，$V(E)_0$、$V(E)$ 和 $V^+(E)$ 都是 V 的线性子空间。

证明。该证明 NSZ15，命题 A.8] 在 α 仅逐点多项式有界时仍然成立。 □

C推论 6.2.15。假设 α 是多项式有界的。那么对于任意 $E\subseteq\mathbb{R}$，我们有

$$V(E)_0=V(E)=V^+(E).$$

证明。设 $E\subseteq\mathbb{R}$ 是一个子集。由注 6.2.6 可知，对于每个 $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\alpha_f$ 都是连续线性算子。由此，根据命题 6.2.14，$V(E)_0$ 是闭的，因此 $V(E)_0=V(E)$。进一步利用注 6.2.9，可得

$$V^+(E)=\bigcap_N V(E+N)=\bigcap_N V(E+N)_0=V\Big(\bigcap_N E+N\Big)_0=V(\overline{E})_0=V(E)_0.$$ □

以下结果也将被频繁使用：

推论 6.2.16. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个子集。以下断言等价：

1. 谱$_\alpha(V) \subseteq \overline{E}$。2. $V \subseteq V(E)_0$。3. $I_0(\overline{E}) \subseteq \ker \alpha$。

证明。假设谱$_\alpha(V) \subseteq E$。那么对于任意 $v \in V$，有

$$\mathrm{Spec}_\alpha(v) \subseteq \mathrm{Spec}_\alpha(V) \subseteq \overline{E},$$

由注 6.2.10 可知。这意味着 $V \subseteq V(E)_0$。接下来假设 $V \subseteq V(E)_0$。由命题 6.2.14 可知，这意味着对于所有 $v \in V$，$I_0(\overline{E}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})_v$。因此，$I_0(\overline{E})$ 中的元素会湮灭每个 $v \in V$。于是 $I_0(E) \subseteq \ker \alpha$。如果 $I_0(\overline{E}) \subseteq \ker \alpha$，那么谱$_\alpha(V) = \overline{h}(\ker \alpha) \subseteq h(I_0(\overline{E})) = \overline{E}$，其中最后一个等号用到了引理 6.2.2。 □

推论 6.2.17. Spec$_\alpha(V) = \bigcup_{v\in V}$ ~~Spec$_\alpha(v)$.~~

证明. 定义 $E := \bigcup_{v\in V}$Spec$_\alpha(v)$. 根据注 6.2.10，对于任意 $v \in V$，我们有 Spec$_\alpha(v) \subseteq$ Spec$_\alpha(V)$。由于 Spec$_\alpha(V)$ 是闭的，因此可得 $\overline{E} \subseteq$ Spec$_\alpha(V)$。反过来，回顾一下，$V(E)_0 = \{ v \in V : \mathrm{Spec}_\alpha(v) \in \overline{E} \}$。因此，根据我们对 E 的定义，显然有 $V \subseteq V(E)_0$。然后由推论 6.2.16 可得 Spec$_\alpha(V) \subseteq E$。 □

接下来　记录谱子空间在连续线性映射和多重线性映射下的行为：

命题 6.2.18. 对于 $j \in \{1, 2\}$，设 $\alpha_j : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(V_j)^\times$ 是 $\mathbb{R}$ 在完备豪斯多夫复局部凸向量空间 V_j 上的强连续表示。假设 α_j 是逐点多项式有界的。设 $T : V_1 \to V_2$ 是连续的 $\mathbb{R}$-等变线性映射。那么对于每个子集 $E \subseteq \mathbb{R}$，我们有$T(V_1(E)) \subseteq V_2(E)$。如果 T 是单射，那么 Spec$_{\alpha_1}(V_1) \subseteq$ Spec$_{\alpha_2}(V_2)$。

证明。令 $v \in V$。由于 T是等变的，我们有 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_v \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})_{Tv}$。因此，$h(\mathcal{S}(\mathbb{R})_{Tv}) \subseteq h(\mathcal{S}(\mathbb{R})_v)$，也就是说，谱$_{\alpha_2}(Tv) \subseteq$谱$_{\alpha_1}(v)$。于是，若 $E \subseteq \mathbb{R}$是一个子集，则 $TV_1(E)_0 \subseteq V_2(E)_0$。由于$T$是连续的，也可推出 $TV_1(E) \subseteq V_2(E)$。若 T是单射，则对任意$v \in V_1$，有 $\mathcal{S}(\mathbb{R})_v = \mathcal{S}(\mathbb{R})_{Tv}$。因此，谱$_{\alpha_1}(v) =$谱$_{\alpha_2}(Tv) \subseteq$谱$_{\alpha_2}(V_2)$。由于谱$_{\alpha_2}(V_2)$是闭的，利用~~推论 6.2.17可得~~，谱$_{\alpha_1}(V_1) = \bigcup_{v\in V_1}$谱$_{\alpha_1}(v) \subseteq$谱$_{\alpha_2}(V_2)$。 □

在多重线性情形下，我们有以下与 [NSZ15, A.10] 类似的结果：

命题 6.2.19. 对于 $j \in \{1, 2, 3\}$，设 $\alpha_j : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(V_j)^\times$ 是 $\mathbb{R}$ 在完备豪斯多夫复局部凸向量空间 V_j 上的强连续表示。假设 α_j 逐点多项式有界。设 $\beta : V_1 \times V_2 \to V_3$ 是连续的 $\mathbb{R}$-等变双线性映射。设 E_1、$E_2 \subseteq \mathbb{R}$ 是闭子集。那么

$$\beta(V_1(E) \times V_2(E)) \subseteq V_3^+(E_1 + E_2).$$

特别地，如果 α_3 多项式有界，那么 $\beta(V_1(E) \times V_2(E)) \subseteq V_3(E_1 + E_2)$。

在继续证明命题 6.2.19 之前，我们先提及以下显然的推论：

推论 6.2.20. 考虑命题 6.2.19 的情形。进一步假设 β 有稠密张成，且 α_3 多项式有界。那么

$$\mathrm{Spec}_{\alpha_3}(V_3) \subseteq \overline{\mathrm{Spec}_{\alpha_1}(V_1) + \mathrm{Spec}_{\alpha_2}(V_2)}.$$

证明。根据命题 6.2.19，我们知道 $\beta(V_1, V_2) \subseteq V_3^+\big($谱$_{\alpha_1}(V_1) +$谱$_{\alpha_2}(V_2)\big)$。鉴于命题 6.2.14 和推论 6.2.15，我们进一步知道

$$V_3^+\big(\mathrm{Spec}_{\alpha_1}(V_1) + \mathrm{Spec}_{\alpha_2}(V_2)\big) = V_3\big(\mathrm{Spec}_{\alpha_1}(V_1) + \mathrm{Spec}_{\alpha_2}(V_2)\big)_0,$$

而 th is 是 V_3 的闭线性子空间。由于 $\beta(V_1, V_2)$ 在 V_3 中有稠密线性张成，因此可得

$$V_3 \subseteq V_3\big(\mathrm{Spec}_{\alpha_1}(V_1) + \mathrm{Spec}_{\alpha_2}(V_2)\big)_0.$$

根据推论 6.2.16，这与以下内容等价

$$\mathrm{Spec}_{\alpha_3}(V_3) \subseteq \overline{\mathrm{Spec}_{\alpha_1}(V_1) + \mathrm{Spec}_{\alpha_2}(V_2)}. \quad \square$$

命题 6.2.19 的证明需要一些准备工作。它基本遵循 [Arv74, 命题 2.2] 和[Nee13, 命题 A.14] 的证明。我们先引入一些额外的记号:

定义 6.2.21. 对于子集 $E \subseteq \mathbb{R}$，定义理想 $J(E) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 和子空间 $R_\alpha(E)_0 \subseteq V$

$$J(E) := \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \,:\, \widehat{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ and } \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq E \right\},$$
$$R_\alpha(E)_0 := \{\, \alpha_f v \,:\, f \in J(E),\ v \in V \,\} \subseteq V$$

令 $R_\alpha(E) := \overline{R_\alpha(E)_0}$ 为其闭包。若 α 根据上下文可以明确，则分别将 $R(E)_0$ 和 $R(E)$ 简写为 $R_\alpha(E)_0$ 和 $R_\alpha(E)$。

若 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个子集，回顾定义 6.2.1，$I_0(\overline{E})$由所有施瓦茨函数 f 组成，这些函数的傅里叶$\widehat{}$变换 f 在 $\overline{E} \subseteq \mathbb{R}$ 的某个邻域上为零。另一方面，$J(E)$是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中由满足以下条件的那些 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 生成的理想：f 的紧支撑包含于 E。

引理 6.2.22. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 为闭子集，且 $N \subseteq \mathbb{R}$ 为一个零邻域。则

$$\overline{I_0(E) + J(E+N)} = \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

证明。令 $J_2 := J(\overline{E+N)_0 + I_0(E)}$ 为由 $J(E+N)$ 和 $I_0(E)$ 生成的 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的闭理想。注意到 $h(J(E+N)) \subseteq \mathbb{R} \setminus E$。另一方面，根据引理 6.2.2，$h(I_0(E)) \subseteq E$。因此我们得到

$$h(J_2) \subseteq h(I_0(E)) \cap h(J(E+N)) \subseteq \emptyset$$

从而 $h(J_2) = \emptyset$。由此利用推论 6.2.3 可得 $J_2 = \mathcal{S}(\mathbb{R})$。 □

引理 6.2.23。设 $v \in V$ 和 $N \subseteq \mathbb{R}$ 是一个零邻域。若 $J(\text{谱}_\alpha(V) + N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})v$，则 $v = 0$。

证明。令 $E := \text{谱}_\alpha(V)$。假设 $J(E+N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})v$。回顾注 6.2.10，$V = V(E)_0$。由命题 6.2.14，这意味着 $I_0(E) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})v$。另一方面，根据假设，$J(E+N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})v$。由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})v$ 是闭的，利用引理 6.2.22 可得 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = I_0(E) + J(E+N) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})v$。由命题 6.2.12，这意味着 $v = 0$。 □

引理 6.2.24. 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 为闭的。那么 $V(E) \subseteq \bigcap_N R(E+N) \subseteq V^+(E)$，其中 N 遍历 $\mathbb{R}$ 中所有开零邻域。

$\widehat{}$证明。此证明仿照 [Arv74, 命题 2.2]。引理 6.2.11 蕴含 $\text{Spec}_\alpha(\alpha_f v) \subseteq \operatorname{supp}(f)$，对$\widehat{}$任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 和 $v \in V$ 均成立。若 $N \subseteq \mathbb{R}$ 是一个零邻域且 $f \in J(E+N)$，则根据定义，$\operatorname{supp} f \subseteq E+N$，因此对任意 $v \in V$，都有 $\text{Spec}_\alpha(\alpha_f v) \subseteq E+N$。回想一下，$R(E+N)_0$ 是由 $J(E+N)$ 生成的 V 子空间，可得 $R(E+N)_0 \subseteq V(E+N)_0$。因此，$\bigcap_N R(E+N) \subseteq \bigcap_N V(E+N) = V^+(E)$。接下来，取 $v \in V(E)_0$。我们证明 $v \in \bigcap_N R(E+N)$。设 N 是 $\mathbb{R}$ 中的一个零邻域。设 $\lambda \in V'$ 是一个连续泛函，满足 $\lambda(R(E+N)) = \{0\}$。显然，对任意 $f \in J(E+N)$，都有 $\alpha_f(v) \in R(E+N)_0$，因此$\lambda(\alpha_f v) = 0$。由命题 6.2.14，我们还得到 $I_0(E) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})v$，从而对任意$g \in I_0(E)$，都有 $\lambda(\alpha_g v) = 0$。因此，对闭理想 $J_2 := I_0(E) + J(E+N)$ 中的任意 f，都有 $\lambda(\alpha_f v) = 0$；该闭理~~想是由 $I_0(E)$ 和 $J(E+N)$~~ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中张成的。由引理 6.2.22，该理想等于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$，所以对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，都有 $\int_{\mathbb{R}} f(t)\lambda(\alpha_t v)dt = \lambda(\alpha_f v) = 0$。由于 $t \mapsto \lambda(\alpha_t v)$ 是连续的，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均有 $\lambda(\alpha_t v) = 0$。特别地，$\lambda(v) = 0$。利用 Hahn-Banach定理 [Rud91, 定理 I.3.5],可得 $v \in \bigcap_N R(E+N)$。因此 $V(E)_0 \subseteq \bigcap_N R(E+N)$，进而也有 $V(E) \subseteq \bigcap_N R(E+N)$。

□

命题 6.2.19 的证明：有了引理 6.2.24，我们便按照 [Nee13，命题 A.14] 中的方法进行。设 $N \subseteq \mathbb{R}$为一个开零邻域。设 $N_1, N_2 \subseteq \mathbb{R}$ 为满足 $N_1 + N_2 \subseteq N$ 的开零邻域。我们证明

$$\beta\Big(R_{\alpha_1}(E_1+N_1)_0 \times R_{\alpha_2}(E_2+N_2)_0 \Big) \subseteq V\big(E_1+E_2+N\big)_0. \tag{6.2}$$

因此，对于 $k \in \{1,2\}$，取 $v_k \in V$和 $f_k \in J(E_k+N_k)$，这意味着 $\operatorname{supp}(f_k) \subseteq E_k + N_k$。我们证明 $\beta(\alpha_1(f_1)v_1, \alpha_2(f_2)v_2) \in V\big(E_1+E_2+N\big)_0$。根据命题 6.2.14，我们必须证明它被 $I_0(\overline{E_1+E_2+N})$ $\widehat{}$湮灭。令 $f_3 \in I_0(\overline{E_1+E_2+N})$，于是 $\operatorname{supp}(f_3) \cap \overline{E_1+E_2+N} = \emptyset$。那么

$$\begin{aligned} \alpha_{f_3}\beta(\alpha_{f_1}(v_1), \alpha_{f_2}(v_2)) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_1(t_1)f_2(t_2)f_3(t_3)\beta(\alpha_1(t_1+t_3)v_1, \alpha_2(t_2+t_3)v_2)dt_1dt_2dt_3, \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(t_1,t_2)\beta(\alpha_1(t_1)v_1, \alpha_2(t_2)v_2)dt_1dt_2, \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 定义为

$$F(t_1, t_2) := \int_{\mathbb{R}} f_3(t_3) f_1(t_1 - t_3) f_2(t_2 - t_3) dt_3.$$

$\widehat{F} \in \mathcal{S}$ F 的傅里叶变换 $\widehat{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 由下式给出

$$\widehat{F}(p_1, p_2) = \widehat{f_1}(p_1)\widehat{f_2}(p_2)\widehat{f_3}(p_1 + p_2).$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$注意到 $\operatorname{supp}(f_1) + \operatorname{supp}(f_2) \subseteq (E_1 + N_1) + (E_2 + N_2) \subseteq E_1 + E_2 + N$。由于 f_3 在 $E_1 + E_2 + N$ 上为零，$\widehat{\ }$我们得到 $F = 0$。因此 $F = 0$。由方程（6.3）可得 $\alpha_3(f_3)\beta(\alpha_1(f_1)v_1, \alpha_2(f_2)v_2) = 0$。由命题 6.2.14，我们得出 $\beta(\alpha_1(f_1)v_1, \alpha_2(f_2)v_2) \in V\big(E_1 + E_2 + N\big)_0$。因此（6.2）成立。由于 β是连续的，可知

$$\beta(V_1(E) \times V_2(E)) \subseteq \beta\Big(R_{\alpha_1}(E_1 + N_1) \times R_{\alpha_2}(E_2 + N_2)\Big) \subseteq V\big(E_1 + E_2 + N\big),$$

其中，第一个包含关系用到了引理 6.2.24。因此

$$\beta(V_1(E) \times V_2(E)) \subseteq \bigcap_N V\big(E_1 + E_2 + N\big) = V^+(E_1 + E_2).$$

接下来假设 α_3 是多项式有界的。根据注 6.2.6，对于每个 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$， α_f 都是连续的。由推论 6.2.15可知

$$V^+(E_1 + E_2) = V(E_1 + E_2). \quad \square$$

接下来我们 考察张量积和连续线性映射空间的谱的性质 s:

命题 6.2.25。设 α 和 σ 分别是定义在完备豪斯多夫局部凸向量空间 V 和 W 上、取值于 $\mathbb{C}$的 $\mathbb{R}$-表示。假设 α 和 σ 强连续且具有多项式增长。令 $n \in \mathbb{N}$。

1. 完备射影张量积 $V\widehat{\otimes}W$ 上的 $\mathbb{R}$-表示 $\alpha\widehat{\otimes}\sigma$ 具有连续作用 $\mathbb{R} \times V\widehat{\otimes}W \to V\widehat{\otimes}W$和多项式增长，并满足

$$\operatorname{Spec}_{\alpha\widehat{\otimes}\sigma}(V\widehat{\otimes}W) \subseteq \overline{\operatorname{Spec}_\alpha(V) + \operatorname{Spec}_\alpha(W)}. \tag{6.4}$$

2. 在 $\mathcal{B}(V, W)$上赋予强拓扑或紧集上一致收敛拓扑。由 $\gamma_t T = \sigma_t \circ T \circ \alpha_{-t}$定义在 $\mathcal{B}(V, W)$上的 $\mathbb{R}$-表示 γ是强连续、逐点多项式有界的，并满足

$$\operatorname{Spec}_\gamma(\mathcal{B}(V, W)) \subseteq \overline{\operatorname{Spec}_\sigma(W) - \operatorname{Spec}_\alpha(V)}. \tag{6.5}$$

证明。注意 根据命题 6.1.5，作用 $\alpha\colon\ \mathbb{R} \times V \to V$和 $\sigma\colon\ \mathbb{R} \times W \to W$是连续的 .

1. 我们将 $\gamma_t := \alpha_t\widehat{\otimes}\sigma_t$ 记作 $t \in \mathbb{R}$。我们首先证明， $\mathbb{R}$-表示 γ 在 $V\widehat{\otimes}W$ 上具有多项式增长。设 p 和 q 分别是 V 和 W 上的连续半范数。假设对于所有的 $t \in \mathbb{R}$、 $v \in V$和 $w \in W$，都有 $p(\alpha_t v) \leq r_\alpha(|t|)p(v)$，以及 $q(\alpha_t w) \leq r_\sigma(|t|)q(w)$，其中 r_α、 $r_\sigma \in \mathbb{R}[t]$ 是首一多项式。利用这一不等式，根据 $p \otimes q$在 $V\widehat{\otimes}W$ 上的半范数定义（见方程（2.1）），可知对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\psi \in V\widehat{\otimes}W$，$(p \otimes q)(\gamma_t\psi) \leq r_\alpha(|t|)r_\sigma(|t|)(p \otimes q)(\psi)$。因此， $\alpha\widehat{\otimes}\sigma$具有多项式增长。

   要证明 $\alpha\widehat{\otimes}\sigma$ 具有连续作用，根据命题 6.1.5，只需证明它是强连续的。设 $\psi \in V\widehat{\otimes}W$。只需证明 $t \mapsto \gamma_t\psi$ 在 $t = 0$处连续。先假设 $\psi \in V \otimes W$，因此存在某个 $v_k \in V$和 $w_k \in W$，使得 $\psi = \sum_{k=1}^n v_k \otimes w_k$。设 p 和 q分别是 V和W上的连续半范数。设 $r_\alpha, r_\sigma \in \mathbb{R}[t]$ 如上。设 $\epsilon > 0$。由于 α和 σ是强连续的，我们可以找到 $\delta > 0$，使得对于所有 $t \in (-\delta, \delta)$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，都有 $p(\alpha_t v_k - v_k)q(\sigma_t w_k) < \epsilon$，且 $p(v_k)q(\sigma_t w_k - w_k) < \epsilon$。将 $\alpha_t v_k \otimes \sigma_t w_k - v_k \otimes w_k = (\alpha_t v_k - v_k) \otimes \sigma_t w_k + v_k \otimes (\sigma_t w_k - w_k)$ 写成这种形式后，对任意 $t \in (-\delta, \delta)$，我们得到

$$(p \otimes q)(\gamma_t\psi - \psi) \leq \sum_{k=1}^n p(\alpha_t v_k - v_k)q(\sigma_t w_k) + p(v_k)q(\sigma_t w_k - w_k) < 2k\epsilon.$$

这证明了 $\gamma_t\psi \to \psi$，因为 $t \to 0$，其中 ψ 属于稠密子空间 $V \otimes W$。接下来考虑一般的 $\psi \in V\widehat{\otimes}W$。取 $\eta \in V \otimes W$ 使得 $(p \otimes q)(\psi - \eta) < \epsilon$。当 $\delta > 0$ 足够小时，对于所有 $t \in (-\delta, \delta)$，都有$r_\alpha(|t|)r_\sigma(|t|) \leq 2$，且 $(p \otimes q)(\gamma_t\eta - \eta) < \epsilon$。利用

$$(p \otimes q)(\gamma_t(\psi - \eta)) \leq r_\alpha(|t|)r_\sigma(|t|)(p \otimes q)(\psi - \eta) < 2\epsilon,$$

我们发现，对所有 $t \in (-\delta, \delta)$，

$$(p \otimes q)(\gamma_t\psi - \psi) \leq (p \otimes q)(\gamma_t(\psi - \eta)) + (p \otimes q)(\psi - \eta) + (p \otimes q)(\gamma_t\eta - \eta) < 4\epsilon$$

因此，$\mathbb{R} \to V\widehat{\otimes}W$，$t \mapsto \gamma_t\psi$ 是连续的。

由于典范双线性映射 $\widehat{\otimes}: V \times W \to V\widehat{\otimes}W$ 是连续的、$\mathbb{R}$-等变的，且其像稠密张成$V\widehat{\otimes}W$，剩下的断言由推论 6.2.20 立即得出。

2. 只需考虑紧集上一致收敛拓扑。设 $T \in \mathcal{B}(V, W)$。设 W 上的连续半范数为 q，并设 $K \subseteq V$为紧集。考虑 $\mathcal{B}(V, W)$ 上由 $q_K(T) := \sup_{v\in K} q(Tv)$ 定义的连续半范数。由于 T有界，存在V上的连续半范数 p，使得对所有 $v \in v$，都有 $q(Tv) \leq p(v)$。设 $r_\sigma, r_\alpha \in \mathbb{R}[t]$ 为首一多项式，使得对所有 $t \in \mathbb{R}$, $v \in V$及 $w \in W$，都有 $q(\sigma_t w) \leq r_\sigma(|t|)q(w)$ 且$p(\alpha_t v) \leq r_\alpha(|t|)p(v)$。于是

$$q_K(\gamma_t(T)) = \sup_{v\in K} q(\sigma_t T\alpha_{-t}v) \leq r_\sigma(|t|)r_\alpha(|t|)\sup p(K).$$

这意味着 γ 是逐点多项式有界的。

接下来证明 γ是强连续的。设 $T \in \mathcal{B}(V, W)$，$\epsilon > 0$和 $\mathcal{O} := q^{-1}([0, \epsilon)) \subseteq W$。映射

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \to W, \quad \Phi(t, v) := \gamma_t(T)v - Tv = \sigma_t T\alpha_{-t}v - Tv$$

是连续的，因为映射 $T: V \to W$ 以及作用 $\alpha: \mathbb{R} \times V \to V$和 $\sigma: \mathbb{R} \times W \to W$都连续。由于 $\{0\} \times K \subseteq \Phi^{-1}(\mathcal{O})$和 K 是紧集，由管状引理（参见[Mun00，引理 26.8]）可知，存在一个包含 0 的区间 $I \subseteq \mathbb{R}$，使得 $\Phi(I \times K) \subseteq \mathcal{O}$。这意味着对所有 $t \in I$，$q_K(\gamma_t(T) - T) < \epsilon$，因此 γ是强连续的。

还需证明 (6.5)。定义 $E_V := 谱_\alpha(V)$以及 $E_W := 谱_\alpha(W)$。令 $N \subseteq \mathbb{R}$ 为一个零邻域。令 $T \in \mathcal{B}(V, W)$ 和 $f_3 \in I_0(\overline{E_W - E_V + N})$，于是 $f_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$满足 $\operatorname{supp}(f_3) \cap \overline{E_W - E_V + N} = \emptyset$。我们证明 $\gamma_{f_3}(T) = 0$。令 $N_1, N_2 \subseteq \mathbb{R}$为对称零邻域，使得$\frown \quad \frown N_1 + N_2 \subseteq N$。令 $v \in V$, $f_1 \in J(E_V + N_1)$和 $f_2 \in J(E_W + N_2)$。因此，f_1和 f_2的紧支撑分别包含于 $E_V + N_1$ 和 $E_W + N_2$中。可以验证

$$\begin{aligned}\sigma_{f_2}\gamma_{f_3}(T)\alpha_{f_1}v &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f_1(t_1)f_2(t_2)f_3(t_3)\sigma_{t_2+t_3}T\alpha_{t_1-t_3}v\, dt_1dt_2dt_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F(t_1, t_2)\sigma_{t_2}T\alpha_{t_1}dt_1dt_2,\end{aligned} \tag{6.6}$$

其中 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 由下式给出

$$F(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}} f_1(t_1 + t_3)f_2(t_2 - t_3)f_3(t_3)dt_3.$$

F 的傅里叶变换 $\widehat{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ 由下式给出

$$\widehat{F}(p_1, p_2) = \widehat{f_1}(p_1)\widehat{f_2}(p_2)\widehat{f_3}(p_2 - p_1).$$

回想一下，N_1 是对称的，注意到

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\widehat{f_2}) - \operatorname{supp}(\widehat{f_1}) &\subseteq (E_W + N_2) - (E_V + N_V) \subseteq E_W - E_V + (N_1 + N_2) \\ &\subseteq E_W - E_V + N.\end{aligned}$$

由于 f_3 在 $E_W - E_V + N$ 上消失，因此可得 $F = 0$，进而得到 $F = 0$。由 (6.6) 可知，对于所有 $f_2 \in J$（$E_W + N_2$），$\sigma_{f_2}\gamma_{f_3}$（T）$\alpha_{f_1}v = 0$。根据引理 6.2.23，这意味着 γ_{f_3}（T）$\alpha_{f_1}v = 0$。

因此，若 $\lambda \in W'$ 是任意连续泛函，则 $\int_{\mathbb{R}} f_1(t_1)\langle \lambda,\ \gamma_{f_3}(T)\,\alpha_{t_1} v\rangle dt = 0$。由于映射 $t \mapsto \langle \lambda,\ \gamma_{f_3}(T)\,\alpha_{t_1} v\rangle$ 连续，可得对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$\langle \lambda,\ \gamma_{f_3}(T)\,\alpha_{t_1} v\rangle = 0$。特别地，$\langle \lambda,\ \gamma_{f_3}(T)\, v\rangle = 0$。由 Hahn-Banach 定理，$W'$ 将 W 中的点分离（参见 Rud91, Thm. I.3.4],），故 $\gamma_{f_3}(T)\, v = 0$。由于 $v \in V$ 是任意的，我们得到 $\gamma_{f_3}(T) = 0$。因此我们已经证明，$I_0(\overline{E_W - E_V + N}) \subseteq \ker \gamma$。根据推论 6.2.16，这等价于 $\mathrm{Spec}_\gamma(\mathcal{B}(V,\ W)) \subseteq \overline{E_W - E_V + N}$。因此

$$\mathrm{Spec}_\gamma(\mathcal{B}(V,W)) \subseteq \bigcap_N \overline{E_W - E_V + N} = \overline{E_W - E_V}. \quad \square$$

回顾第 2.1 节，$P(V,W) = \prod_{k=0}^{\infty} P^k(V,W)$ 配备乘积拓扑，其中每个 $P^k(E,F)$ 都赋有紧集上一致收敛拓扑。我们将在下文第 7 节用到以下结果：

推论 6.2.26. 考虑命题 6.2.25 的情形。假设 V 是 Fr´echet。定义 $\mathbb{R}$ 在 $P(V,W)$ 上的表示 γ 为 $\gamma_t(f)(v) := \sigma_t(f(\alpha_{-t}(v)))$。则 γ 强连续且逐点多项式有界。此外，如果谱 $\alpha(V) \subseteq (-\infty, 0]$，那么

$$\inf \mathrm{Spec}_\gamma(P(V,W)) = \inf \mathrm{Spec}_\sigma(W) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}.$$

证明. 令 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。注意，$\gamma$ 保持齐次分量 $P^n(V,W) \subseteq P(V,W)$ 不变。回顾命题 2.1.4 和命题 2.1.3，可得

$$P^n(V,W) \cong \mathrm{Sym}^n(V,W) \subseteq \mathrm{Mult}(V^n,W) \cong \mathcal{B}(V^{\widehat{\otimes} n}, W)$$

$\widehat{}$作为局部凸向量空间。由此得到的连续线性嵌入 $\Phi_n\colon P^n(V,W) \hookrightarrow \mathcal{B}(V^{\otimes n},W)\widehat{}$在 $\mathcal{B}(V^{\otimes n},W)$ 配备由 $\widetilde{\gamma}_t(T) := \sigma_t T \alpha_{-t}$定义的 $\mathbb{R}$-作用时，是 $\mathbb{R}$-等变的。根据命题 6.2.25，该作用是强连续且逐点多项式有界的。因此，γ在 $P^n(V,W)$ 上也强连续且逐点多项式有界。由于 $P(V,W)$ 具有乘积拓扑，$P(V,W)$ 上的 $\mathbb{R}$-作用 γ也同样如此。

对于最后一个结论，注意到 $W = P^0(V,W) \subseteq P(V,W)$。由命题 6.2.18 可知，$\mathrm{Spec}_\sigma(W) \subseteq \mathrm{Spec}_\gamma(P(V,W))$，从而说明

$$\inf \mathrm{Spec}_\gamma(P(V,W)) \leq \inf \mathrm{Spec}_\sigma(W)$$

反过来，设 $n \in \mathbb{N}$。由于 Φ_n连续、单射且 $\mathbb{R}$-等变，根据命题 6.2.18，我们知道 $\mathrm{Spec}_\gamma(P^n(V,W)) \subseteq \widehat{\mathrm{Spec}}_{\widetilde{\gamma}}(\mathcal{B}(V^{\otimes n},W))$。此外，利用命题 6.2.25，我们注意到 $\mathrm{Spec}_{\alpha^{\otimes n}}(V^{\otimes n}) \subseteq \widehat{(-\infty, 0]}$，因此也有 $\mathrm{Spec}_{\widetilde{\gamma}}(\mathcal{B}(V^{\otimes n},W)) \subseteq \mathrm{Spec}_\sigma(W) + [0,\infty) =: E$。于是，对任意 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$，都有 $\mathrm{Spec}_\gamma(P^n(V,W)) \subseteq E$。由推论 6.2.16，这意味着对任意 $f \in I_0(E)$、$\psi_n \in P^n(V,W)$ 以及$n \in \mathbb{N}$，都有 $\gamma_f \psi_n = 0$。因此，对任意 $f \in I_0(E)$ 和 $\psi \in P(V,W)$，都有 $\gamma_f \psi = 0$。所以 $I_0(E) \subseteq \ker \gamma$。由推论 6.2.16，这等价于 $\mathrm{Spec}_\gamma(P(V,W)) \subseteq E$。因此 $\inf \mathrm{Spec}_\sigma(W) = \inf E \leq \inf \mathrm{Spec}_\gamma(P(V,W))$。 $\square$

最后，我们记录一些关于酉 G-表示的光滑向量空间的有用事实：

命题 6.2.27. 设 G 是正则局部凸 Fr´echet–Lie 群。设 $d \in \mathfrak{g}$，并假设由 $\dot{\alpha}_t := \mathrm{Ad}(\exp(td))$ 定义的$\mathbb{R}$-作用 $\dot{\alpha}\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ 是多项式有界的。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的光滑酉表示。设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是闭子集。那么以下断言成立：

1. $\mathbb{R}$-表示 $t \mapsto \rho(\exp(td))|_{\mathcal{H}_\rho^\infty}$ 在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上强连续且逐点多项式有界，其中 $\mathcal{H}_\rho^\infty$赋予强拓扑。 2. 对任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，算子 $\pi(f) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho(\exp(td))dt$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 上保持 $\mathcal{H}_\rho^\infty$不变。 3. $\mathcal{H}_\rho^\infty(E) = \mathcal{H}_\rho(E) \cap \mathcal{H}_\rho^\infty$4. 对任意开子集 $U \subseteq \mathbb{R}$，$\mathcal{H}_\rho^\infty(U)$ 在 $\mathcal{H}_\rho(U)$ 中稠密。 5. 若 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$ 是闭子集，则 $d\rho(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E_1))\mathcal{H}^\infty(E_2) \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty(E_1 + E_2)$。

证明。第二项由 [NSZ15, Thm. 2.3]，得出；第四项由 [NSZ15, Prop. 3.2] 得出；第五项由 [NSZ15, Thm. 3.1] 得出。我们将对第二个断言给出另一种证明，并证明第一项和第三项。

根据 [JN19, Prop. 3.19], , 局部凸空间 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 是完备的。设 $n \in \mathbb{N}$ 和 $B \subseteq \mathfrak{g}^n$ 是有界子集。考虑连续半范数

$$p_B(\psi) := \sup_{\xi \in B} \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|$$

在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上。令 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$。根据 [JN19, 引理 3.24], , 轨道映射 $\rho^\phi\colon\ G \to \mathcal{H}_\rho^\infty,\ g \mapsto \rho(g)\psi$ 是光滑的。特别地，这表明 $\mathbb{R}$-表示 $t \mapsto \rho(\exp(t\boldsymbol{d}))$ 在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上是强连续的。此外，多重线性映射 $\mathfrak{g}^n \to \mathcal{H}_\rho^\infty,\ (\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi$ 是连续的。利用命题 2.1.3，我们得到存在一个连续半范数 p，定义在 $\mathfrak{g}$ 上，使得对每个 $\xi \in \mathfrak{g}^n$ 都有 $\|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\| \le \prod_{k=1}^n p(\xi_k)$。令 $N \in \mathbb{N}$，并取零邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}$，使得 $C := \sup_{\xi \in U} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+|t|^N} p(\dot{\alpha}_t(\xi)) < \infty$。由于 $B \subseteq \mathfrak{g}^n$ 是有界的，因此对于每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，其在 k^{th} 因子上的投影 $B_k \subseteq \mathfrak{g}$ 也是有界的。因此，存在 $s > 0$，使得对所有 $1 \le k \le n$ 都有 $B_k \subseteq sU$。于是我们得到

$$\sup_{\xi_k \in B_k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{1+|t|^N} p(\dot{\alpha}_t(\xi_k)) \le sC$$

对每个 $1 \le k \le n$。利用 ρ 是酉的，我们得到对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$p_B(\rho(e^{-t\boldsymbol{d}})\psi) = \sup_{\xi \in B} \|d\rho(\dot{\alpha}_t(\xi_1) \cdots \dot{\alpha}_t(\xi_n)\psi\| \le \sup_{\xi \in B} \prod_{k=1}^n p(\dot{\alpha}_t(\xi_k)) \le C^n s^n (1+|t|^N)^n.$$

这意味着 $\mathbb{R}$-作用 $t \mapsto \rho(\exp(t\boldsymbol{d}))$ 在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上是逐点多项式有界的。如定义 6.2.5 中所示，我们得出 $\pi^\infty(f)\psi := \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho(\exp(t\boldsymbol{d}))\psi dt$ 定义了一个表示 $\pi^\infty\colon\ \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\rho^\infty)$，它由线性算子作用在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上。显然，$\pi^\infty(f) := \pi(f)|_{\mathcal{H}_\rho^\infty}$，因此这证明了对于每个 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，$\pi(f)$ 都使 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 保持不变。由定义 6.2.7 还可立即得到 $\mathcal{H}_\rho^\infty(E) = \mathcal{H}_\rho(E) \cap \mathcal{H}_\rho^\infty$。 □

7 正能量表示与全纯诱导

本节探讨正能量表示与全纯诱导之间的联系。定理 7.1.6 和定理 7.1.17 表明二者关系密切，这与在限制性更强的情形下已知的类似结果相符，例如 [PS86，定理 11.1。1], [Nee13，第 4] 节以及 [Nee14，定理 6。1]。在适当条件下，我们利用这一点，将全纯诱导中的若干结果推广到正能量表示的背景中。在介绍主要结果之前，先澄清所讨论的设定并作一些初步观察。

7.1.1 记号与初步观察

设 G 是一个连通正则 BCH Fr´echet–李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$。设 $\alpha\colon\ \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(G)$ 是一个同态，具有光滑作用 $\mathbb{R} \times G \to G$ ，并令 $\dot{\alpha}$ 为相应的 $\mathbb{R}$-作用于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，定义为 $\dot{\alpha}_s(\xi) := \mathrm{L}(\alpha_s)\xi := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \alpha_s(e^{t\xi})$，其中 $s \in \mathbb{R}$。设 $D\xi := \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \dot{\alpha}_s(\xi)$ 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上相应的导子。假设 $\dot{\alpha}$ 具有多项式增长，具体含义见定义 6.1.1。定义李群 $G^\sharp := G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$，其李代数为 $\mathfrak{g}^\sharp := \mathfrak{g} \rtimes_D \mathbb{R}\boldsymbol{d}$，其中我们将 $\boldsymbol{d} := 1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathfrak{g}^\sharp$ 记作标准基元素。根据 [Nee06, Thm. V.I.8], , $G^\sharp$ 仍是一个连通正则 Fr´echet–李群，但不一定是 BCH。

由于假设 $\dot{\alpha}$ 具有多项式增长，我们可以按照定义 6.2.7 为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 定义 Arveson 谱子空间。若 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是任意子集，我们用 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E)$ 表示与 E相关联的 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的谱子空间。定义 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} := \ker D \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\{0\})$，$\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$ 以及

$$\mathfrak{n}_- := \overline{\bigcup_{\delta > 0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}((-\infty, -\delta])}, \qquad \mathfrak{n}_+ := \overline{\bigcup_{\delta > 0} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}([\delta, \infty))}.$$

我们假设 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \alpha)$ 满足所谓的分裂条件，即

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

定义 $\mathfrak{b}_\pm := \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_\pm \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。令 $H := (G^\alpha)_0 \subseteq G$ 为 G中 α-不动点的连通子群。我们首先证明，第 4.2 节中对 H、$\mathfrak{n}_\pm$ 和 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 所作的假设目前均已满足。

引理 7.1.1. H 是 G的局部指数李子群，其李代数为 $\mathfrak{h}$。

证明。由于 G 是局部指数的，我们可以找到一个零邻域 $U_{\mathfrak{g}} \subseteq \mathfrak{g}$ ，使得 $\exp_G$ 在 $U_{\mathfrak{g}}$上限制为一个微分同胚。任取 $\xi \in U_{\mathfrak{g}}$ 。利用对所有 $t \in \mathbb{R}$， $\alpha_t(\exp_G(\xi)) = \exp_G(\dot{\alpha}_t(\xi))$这一事实，可知 $\xi \in \ker D \iff \exp_G(\xi) \in G^{\alpha}$。这意味着 $\exp_G(U_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}) = \exp_G(U_{\mathfrak{g}}) \cap H$。我们还得到$\mathfrak{h} = \{ \xi \in \mathfrak{g} : \exp_G(\mathbb{R}\xi) \subseteq H \}$。由 Nee06 定理 I V.3.3]，可知 H 是一个李代数为 $\mathfrak{h}$的局部指数李子群。 □

引理 7.1.2. 子空间 $\mathfrak{n}_{\pm}$、 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{b}_{\pm}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的李子代数，并且有 $[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{n}_{\pm}] \subseteq \mathfrak{n}_{\pm}$。此外，$\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{n}_{\pm}) \subseteq \mathfrak{n}_{\pm}$。最后， $\theta(\mathfrak{n}_{\pm}) \subseteq \mathfrak{n}_{\mp}$ ，且 $\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。

证明. 李括号 $[-,-]: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是双线性、连续且 $\mathbb{R}$-等变的，这意味着对于所有 $s \in \mathbb{R}$ 和 $\xi, \eta \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, 有$\dot{\alpha}_s([\xi, \eta]) = [\dot{\alpha}_s(\xi)\ \dot{\alpha}_s(\eta)]$。利用命题 6.2.19，对于任意两个闭子集 $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}$，可得 $[\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E_1)\ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E_2)] \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E_1 + E_2)$。这意味着 $\mathfrak{n}_{\pm}$、 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{b}_{\pm}$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的李子代数，并且 $[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{n}_{\pm}] \subseteq \mathfrak{n}_{\pm}$。接下来证明 $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{n}_{\pm}) \subseteq \mathfrak{n}_{\pm}$。设 $h \in H$。那么对于任意 $s \in \mathbb{R}$， $\dot{\alpha}_s$ 与 Ad_h 交换，因此 $\mathrm{Ad}_h: \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是一个连续的等变线性映射。由命题 6.2.18 可知，对于任意闭子集 $E \subseteq \mathbb{R}$， $\mathrm{Ad}_h(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E)) \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E)$。因此 $\mathrm{Ad}_H(\mathfrak{n}_{\pm}) \subseteq \mathfrak{n}_{\pm}$。接下来考虑共轭 θ。利用对于任意 $t \in \mathbb{R}$， $\dot{\alpha}_t$ 与 θ 交换这一点，注意到对于任意 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，有 $\theta \dot{\alpha}_f \theta = \dot{\alpha}_{\overline{f}}$。因此， $\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\theta(\xi)} = \{ \overline{f} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_{\xi} \}$。利用对于 $p \in \mathbb{R}$， $\mathcal{F}(\overline{f})(p) = \overline{\mathcal{F}f}(-p)$，可得对于任意$\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ，

$$\mathrm{Spec}_{\dot{\alpha}}(\theta(\xi)) = h(\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\theta(\xi)}) = -h(\mathcal{S}(\mathbb{R})_{\xi}) = -\mathrm{Spec}_{\dot{\alpha}}(\xi).$$

因此，对于任意闭的 $E \subseteq \mathbb{R}$，我们有 $\theta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(E)) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(-E)$。这意味着 $\theta(\mathfrak{n}_{\pm}) \subseteq \mathfrak{n}_{\mp}$。由于 $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \ker D$且 θ 与 D 可交换，我们还有 $\theta(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$。 □

由于李群 $G^\sharp = G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 不一定是解析的，我们只能利用 G 的解析结构：

定义 7.1.3. 若 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 $G^\sharp$ 的酉表示，我们用 $\mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$ 表示 $\mathcal{H}_\rho$ 中的 G-解析向量空间。进一步定义

$$\mathcal{H}_\rho^{\infty, \mathfrak{n}_-} := \{ \psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty : d\rho(\mathfrak{n}_-)\psi = \{0\} \}$$

并用 $V(\rho) := \mathcal{H}^{\infty, \overline{\mathfrak{n}_-}}_{,\rho}$ 表示其闭包。

首先说明， $V(\rho)$ 也可以等价地定义为 $\mathcal{H}_\rho$ 中被 $\mathfrak{n}_-$ 消去的 G-光滑向量集合的闭包，而非 $G^\sharp$-光滑向量集合的闭包：

引理 7.1.4。设 ρ 是一个酉 $G^\sharp$-表示。设 $W(\rho) \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是由 $\mathcal{H}_\rho$ 中被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$ 消去的 G-光滑向量所生成的闭线性子空间。则 $W(\rho) = V(\rho)$。

证明。显然 $V(\rho) \subseteq W(\rho)$。设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho$ 是一个 G-光滑向量，使得 $d\rho(\mathfrak{n}_-)\psi = \{0\}$。令 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，并定义 $\pi_f \psi := \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho(t)\psi dt \in \mathcal{H}_\rho$。那么 $\pi_f \psi$ 是 $G^\sharp$的光滑向量，例如可利用 [NSZ15，引理 A.4]得出。令 $\xi \in \mathfrak{n}_-$。那么 $\dot{\alpha}_{-t}(\xi) \in \mathfrak{n}_-$ ，因此对每个 $t \in \mathbb{R}$，都有 $d\rho(\dot{\alpha}_{-t}(\xi))\psi = 0$ 。利用 [NSZ15，引理 A.4] 在积分号下求导，我们得到：

$$d\rho(\xi)\pi_f\psi = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\rho(\xi)\rho(t)\psi dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho(t)d\rho(\dot{\alpha}_{-t}(\xi))\psi dt = 0.$$

因此，对于任意 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 都有 $\pi_f\psi \in \mathcal{H}^{\infty, \overline{\mathfrak{n}_-}}_{,\rho}$。用形如 $\pi_f\psi$ 的向量逼近 ψ，我们得到 $\psi \in V(\rho)$。因此， $V(\rho) = W(\rho)$。 □

为对 G-表示和 $G^\sharp$-表示使用统一的记号，我们对定义 7.1.3 作如下补充：

定义 7.1.5. 如果 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G 的光滑酉表示，我们记 $\mathcal{H}_\rho^{\omega_G} := \mathcal{H}_\rho^\omega$ 为 $\mathcal{H}_\rho$ 中的 G-解析向量空间。定义

$$\mathcal{H}_\rho^{\infty, \mathfrak{n}_-} := \{ \psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty : d\rho(\mathfrak{n}_-)\psi = \{0\} \}$$

并令 $V(\rho) := \mathcal{H}^{\overline{\infty, \mathfrak{n}_-}}_{,\rho}$ 表示其闭包。

现在继续探讨如何将正能量条件与全纯诱导联系起来。注意，对于任意光滑酉 G-表示 ρ， $V(\rho) \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 在 $t \in \mathbb{R}$ 和 $h \in H$下均保持不变，因为 $\mathfrak{n}_-$ 在$\dot{\alpha}_t$ 和 Ad_h 作用下保持不变。以下将用到定义 4.3.8 中指定的记号：

定理 7.1.6. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 $G^\sharp$ 的光滑酉表示，且 σ 是 $H \times \mathbb{R}$ 在 V_σ 上的酉表示：$= V(\rho)$，由 $\sigma(h,t) := \rho(h,t)|_{V(\rho)}$定义。以下断言等价:

1. ρ 在 $\boldsymbol{d}$ 处具有正能量， $V(\rho)$ 是 ρ 的循环向量，且 $V(\rho) \cap \mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$ 在 $V(\rho)$ 中稠密。
2. σ在 $\boldsymbol{d}$ 处具有正能量，且 $\rho|_G = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma|_H)$。

若满足这些条件，则 $\inf \mathrm{Spec}(-id\rho(\boldsymbol{d})) = \inf \mathrm{Spec}(-id\sigma(\boldsymbol{d})) \geq 0$。

我们用两个引理开始定理 7.1.6 的证明:

引理 7.1.7. 设 $W \subseteq V(\rho)$ 是一个 H-不变的闭线性子空间，它是 G 的循环子空间，并包含一个由 G-解析向量组成的稠密集。则 $W = V(\rho)$。

证明. 设 $W^\perp$ 是 $V(\rho)$ 中 W 的正交补，因此 $V(\rho) = W \oplus W^\perp$ 是酉 H-表示。只需证明 $W^\perp \perp \rho(G)W$。定义 $W^{\omega_G} := W \cap \mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$。设 $w \in W^{\omega_G}$，且 $v \in W^\perp \subseteq V(\rho)$。考虑解析函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$, $f(g) := \langle v, \rho(g)w\rangle$。设 $E_0\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$ 按定义 4.3.5 定义。由于 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$ 同时消去 $\mathcal{H}^\infty, \rho^{\mathfrak{n}_-}$ 和 W^{ω_G}，注意到对于任意 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, $\langle v, d\rho(x)w\rangle = \langle v, d\sigma(E_0(x))w\rangle = 0$。由此可得 $j_e^\infty(f) = 0$。由于 G 连通且 f 解析，我们利用命题 2.1.14 得出 $f = 0$。因为 W^{ω_G} 在 W 中稠密，所以 $W^\perp \perp \rho(G)W$。 □

引理 7.1.8. 设 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}_\rho^\omega$ 是一个线性子空间。那么 $d\rho(\overline{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))\mathcal{D}}$ 是由 $\mathcal{D}$ 生成的 $\mathcal{H}_\rho$ -不变闭线性子空间。

证明. 定义 $\mathcal{F} := d\rho(\overline{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))\mathcal{D}}$，并令 $\mathcal{F}'$ 表示由 $\mathcal{D}$ 生成的 G-不变闭线性子空间。包含关系 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ 显然。设 $v \in \mathcal{F}^\perp \subseteq \mathcal{H}_\rho$，并取 $\psi \in \mathcal{D}$。考虑由 $f(g) := \langle v, \rho(g)\psi\rangle$ 定义的解析函数 $f\colon G \to \mathbb{C}$。注意，对任意 $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$，都有 $\langle v, d\rho(x)\psi\rangle = 0$，因为 $d\rho(x)\psi \in \mathcal{F}$。因此 $j_e^\infty(f) = 0$。由于 G 连通且 f 解析，利用命题 2.1.14 可得 $f = 0$。于是我们得到 $v \perp \rho(G)\mathcal{D}$，因此实际上 $v \perp \mathcal{F}'$。故 $\mathcal{F}^\perp \subseteq (\mathcal{F}')^\perp$，这等价于 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$。□

定理 7.1.6 的证明: 定义 $\mathcal{D}_\chi := V(\rho) \cap \mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$。假设 (1) 成立。那么特别地， σ 在 $\boldsymbol{d}$ 处具有正能量。令 $\chi\colon \mathfrak{b}_- \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_\chi)$ 为 $d\sigma$ 到 $\mathfrak{b}_-$ 的平凡延拓，其定义域为 $\mathcal{D}_\chi$。根据 $V(\rho)$ 的定义， $\mathcal{D}_\chi$ 被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$ 消去。定理 4.2.4 中关于 V_σ 的条件对于 $(H, \mathfrak{b}_-)$-扩张对 $(\sigma|_H, \chi)$ 均成立，因此 (2) 可由定理 4.2.4 得出。

反过来，假设 $\rho|_G = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma|_H)$，且 σ在 $\boldsymbol{d}$ 处具有正能量。由定理 4.2.4 可知，存在一个 H-不变的闭线性子空间 $W \subseteq \mathcal{H}_\rho$，使得 W 对于 ρ 是循环的，并且 $W \cap \mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$在$W$ 中稠密，且被 $d\rho(\mathfrak{n}_-)$ 消去。利用引理 7.1.4，最后一个条件蕴含 $W \subseteq V(\rho)$。由引理 7.1.7 可得 $W = V(\rho)$。要证明 (1) 成立，只需再证明 ρ 在 $\boldsymbol{d}$ 处具有正能量。定义

$$\Phi : \mathcal{H}_\rho^\infty \to C^\infty(G, V_\sigma)^H, \qquad \Phi_\psi(g) := p_V \rho(g)^{-1}\psi \qquad (\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty),$$

其中 $p_V\colon \mathcal{H}_\rho \to V(\rho)$ 是正交投影。利用指数映射作为局部坐标图，将 $J_e^\infty C^\infty(G, V_\sigma)$ 与 $\cong P(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, V_\sigma)$ 进行 G-等变识别。令 A 表示如下复合映射

$$A : \mathcal{H}_\rho^\infty \xrightarrow{\Phi} C^\infty(G, V_\sigma)^H \xrightarrow{j_e^\infty} P(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, V_\sigma) \xrightarrow{restr} P(\mathfrak{n}_-, V_\sigma).$$

注意到

$$\begin{aligned}\Phi_{\rho(t)\psi}(g) &= p_V \rho(g)^{-1}\rho(t)\psi = p_V \rho(t)\rho(\alpha_{-t}(g))^{-1}\psi = \sigma(t) p_V \rho(\alpha_{-t}(g))^{-1}\psi \\ &= \sigma(t)\Phi_\psi(\alpha_{-t}(g)).\end{aligned}$$

因此，如果我们在 $P(\mathfrak{n}_-, V_\sigma)$ 上赋予由 $(\nu_t f)(\xi) := \sigma(t) f(\dot{\alpha}_{-t}(\xi))$（其中 $t \in \mathbb{R}$ 和 $f \in P^n(\mathfrak{n}_-, V_\sigma)$）定义的 $\mathbb{R}$-作用，则 A 是 $\mathbb{R}$-等变的。为 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 赋予强拓扑（参见定义 2.2.2）；关于该拓扑，由于 G 是一个正则 Fr´echet–李群 [JN19，命题 3.19]，所以它是完备的。回忆一下，$P(\mathfrak{n}_-, V_\sigma) = \prod_{n=0}^\infty P^n(\mathfrak{n}_-, V_\sigma)$ 带有乘积拓扑，而每个 $P^n(\mathfrak{n}_-, V_\sigma)$ 都带有紧集上一致收敛拓扑。我们证明 A 关于这些拓扑是连续的。对于任意 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，令 $f_\psi \in C^\infty(G, \mathcal{H}_\rho)$ $f_\psi(g) := \rho(g)\psi$ 表示轨道映射。利用 ρ 是酉的，注意到线性映射 $\mathcal{H}_\rho^\infty \to C^\infty(G, \mathcal{H}_\rho)$ $\psi \mapsto f_\psi$ 关于 $C^\infty(G, \mathcal{H}_\rho)$ 上的光滑紧开拓扑是连续的。这意味着 Φ 是连续的。由于根据命题 2.1.15， j_e^∞ 是连续的，故 A 的连续性得证。我们进一步指出，根据命题 6.2.27， $\mathbb{R}$-表示 $t \mapsto \rho(t)$ 在 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上是强连续且逐点多项式有界的，因此可根据定义 6.2.7 定义其 Arveson谱。类似地，由于 $\mathbb{R}$ 在 $\mathfrak{n}_-$ 和 V_σ 上的作用都具有多项式增长，并且是

强连续的，根据推论 6.2.26， $\mathbb{R}$-作用 ν 在 $P(\mathfrak{n}_-, V_\sigma)$ 上是强连续且逐点多项式有界的。由于 $\mathfrak{n}_-$ 和 V_σ 的谱分别是非正谱和非负谱（分别相对于 $\mathbb{R}$-作用 $\dot{\alpha}_t$ 和 $\sigma(t)$），由推论 6.2.26 和例 6.2.8，我们进一步得到

$$\inf \operatorname{Spec}_\nu \left(P\left(\mathfrak{n}_-, V_\sigma\right)\right) = \inf \operatorname{Spec}(V_\sigma) = \inf \operatorname{Spec}(-i\overline{d\sigma(\boldsymbol{d})}) \geq 0$$

接下来证明 A 是单射。设 $\psi \in \mathcal{H}_\rho^\infty$，并假设 $A(\psi) = 0$。那么 $p_V d\rho(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-))\psi = \{0\}$，这意味着 $\psi \perp d\rho(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+))\mathcal{D}_\chi$。由于 $\overline{\mathcal{D}_\chi}$ 是 $d\rho(\mathfrak{b}_-)$-不变的，注意到根据 PBW 定理，$d\rho(\mathcal{U}(\mathfrak{n}_+))\overline{\mathcal{D}_\chi} = d\rho(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}))\overline{\mathcal{D}_\chi}$。由引理 7.1.8 可知，这是由 $\mathcal{D}_\chi$ 生成的 $\mathcal{H}_\rho$ 的闭 G-不变子空间；由于 $\mathcal{D}_\chi$ 在 $V(\rho)$ 中稠密，且 $V(\rho)$ 是 ρ 的循环向量，因此该子空间就是整个 $\mathcal{H}_\rho$。于是 $\psi \perp \mathcal{H}_\rho$，所以 $\psi = 0$。因此， A 是单射、连续且 $\mathbb{R}$-等变。由命题 6.2.18 可得，$\operatorname{Spec}(\mathcal{H}_\rho^\infty) \subseteq \operatorname{Spec}_\nu \left(P\left(\mathfrak{n}_-, V_\sigma\right)\right)$，其中我们考虑 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上的 $\mathbb{R}$-作用 $t \mapsto \rho(t)$。因此

$$\inf \operatorname{Spec}(\mathcal{H}_\rho^\infty) \geq \inf \operatorname{Spec}_\nu \left(P\left(\mathfrak{n}_-, V_\sigma\right)\right) = \inf \operatorname{Spec}(-i\overline{d\sigma(\boldsymbol{d})}),$$

注意到 $\mathcal{H}_\rho$ 和 $\mathcal{H}_\rho^\infty$具有相同的谱，因为 $\mathcal{H}_\rho^\infty$在 $\mathcal{H}_\rho$中稠密。因此

$$\inf \operatorname{Spec}(-i\overline{d\rho(\boldsymbol{d})}) = \inf \operatorname{Spec}(\mathcal{H}_\rho) = \inf \operatorname{Spec}(\mathcal{H}_\rho^\infty) \geq \inf \operatorname{Spec}(-i\overline{d\sigma(\boldsymbol{d})}) \geq 0.$$

因此， ρ 在 $\boldsymbol{d}$处具有正能量。所以 (1) 成立。最后，包含映射 $V(\rho) \subseteq \mathcal{H}_\rho$ 是 $\mathbb{R}$-等变的，因此根据命题 6.2.18，我们还得到反向不等式 $\inf \operatorname{Spec}(-id\rho(\boldsymbol{d})) \leq \inf \operatorname{Spec}(-id\sigma(\boldsymbol{d}))$。

□

现在陈述定理 7.1.6 的一些重要的直接推论。

引理 7.1.9。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G的光滑酉表示。令 $q_V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$ 表示到 $V(\rho)$ 上的正交投影。则 $q_V \in \rho(G)''$。

证明。设 $T \in \rho(G)' = \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$。则 $T\mathcal{H}_\rho^\infty \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty$以及

$$d\rho(\mathfrak{n}_-)T\mathcal{H}_\rho^{\infty,\mathfrak{n}_-} = Td\rho(\mathfrak{n}_-)\mathcal{H}_\rho^{\infty,\mathfrak{n}_-} \subseteq \{0\}.$$

因此 $T\mathcal{H}^{\infty,\,\rho\,^{\mathfrak{n}_-}} \subseteq \mathcal{H}^{\infty,\,\rho\,^{\mathfrak{n}_-}}$。由此可得 $TV(\rho) \subseteq V(\rho)$。由于 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$是 $*$-闭的，我们还证明了$T^*V(\rho) \subseteq V(\rho)$。因此 $q_V T = Tq_V$，从而 $q_V \in \rho(G)''$。 □

推论 7.1.10. 假设酉 $G^\natural$-表示 ρ 满足定理 7.1.6 的等价条件。那么 $T \mapsto T|_{V(\rho)}$ 定义了冯·诺伊曼代数的同构

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \cong \mathcal{B}(V(\rho))^H \qquad and \qquad \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^{G^\natural} \cong \mathcal{B}(V(\rho))^{H\times\mathbb{R}}.$$

证明. 由引理 7.1.9 和定理 4.4.4 可知， $T \mapsto T|_{V(\rho)}$ 定义同构 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G \to \mathcal{B}(V(\rho))^H$。因此，只需证明任意满足 $T|_{V(\rho)} \in \mathcal{B}(V(\rho))^{H\times\mathbb{R}}$ 的 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)^G$ 都自动与 $\mathcal{H}_\rho$ 上的 $\mathbb{R}$-作用 $t \mapsto \rho(t)$ 交换。取这样的 T，并令 $t \in \mathbb{R}$。那么

$$\begin{aligned} \rho(t)T\rho(g)v &= \rho(t)\rho(g)Tv = \rho(\alpha_t(g))\rho(t)Tv = \rho(\alpha_t(g))T\rho(t)v \\ &= T\rho(\alpha_t(g))\rho(t)v = T\rho(t)\rho(g)v \end{aligned} \tag{7.1}$$

for 任意 $g \in G$ 和 $v \in V(\rho)$。由于 $V(\rho)$ 对于 G 是循环的，因此可得，对所有 $t \in \mathbb{R}$， $T\rho(t) = \rho(t)T$. □

推论 7.1.11. 设酉 $G^\natural$-表示 ρ_1 和 ρ_2 满足定理 7.1.6 的等价条件。则以下断言成立：

1. 若 $V(\rho_1) \cong V(\rho_2)$ 作为酉 H-表示，则 $\rho_1|_G \cong \rho_2|_G$。
2. 若 $V(\rho_1) \cong V(\rho_2)$ 作为酉 $H \times \mathbb{R}$-表示，则 $\rho_1 \cong \rho_2$。

证明. 第一个断言由定理 4.3.4 立即得出。设酉 $u\colon V(\rho_1) \to V(\rho_2)$ 交织这些 $H \times \mathbb{R}$-作用。考虑作用在 $\mathcal{H}_{\rho_1} \oplus \mathcal{H}_{\rho_2}$上的酉 $G^\natural$-表示 $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$。注意到

$$V(\rho_1 \oplus \rho_2) = V(\rho_1) \oplus V(\rho_2) =: W$$

并且 ρ满足定理 7.1.6 中的条件。定义 $S \in \mathcal{B}(W)^{H\times\mathbb{R}}$为 $S(v_1, v_2) := (0, uv_1)$。根据推论 7.1.10，存在某个 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\rho_1} \oplus \mathcal{H}_{\rho_2})^{G^\natural}$使得 $T|_W = S$。由于 $V(\rho_1)$ 和 $V(\rho_2)$ 分别是 G 在 $\mathcal{H}_{\rho_1}$ 和 $\mathcal{H}_{\rho_2}$ 中的循环向量， T 具有如下形式：对于某个 U， $T(\psi_1, \psi_2) = (0, U\psi_1)$，其中 $\mathcal{H}_{\rho_1} \to \mathcal{H}_{\rho_2}$交织了$G^\natural$的作用。注意， S^*S 和 SS^* 分别是到 $V(\rho_1)$ 和 $V(\rho_2)$ 上的正交投影。由推论 7.1.10 可知， T^*T和 TT^* 分别是到 $\mathcal{H}_{\rho_1}$和 $\mathcal{H}_{\rho_2}$上的正交投影。这意味着 U 是酉的。 □

7.1.2 谱隙条件

接下来，我们假设所谓的谱隙条件成立；它是分裂条件的一个更强变体。我们将证明，在这种情况下，$V(\rho)$ 对正能量表示总是循环的。

定义 7.1.12. 如果存在某个 $\delta > 0$，使得

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}((-\infty, -\delta]) \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}([\delta, \infty)). \tag{7.2}$$

若 ρ 是 $G^\sharp$ 的光滑酉表示，且 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是一个子集，我们分别用 $\mathcal{H}_\rho(E)$ 和 $\mathcal{H}_\rho^\infty(E)$ 表示 $\mathcal{H}_\rho$ 和 $\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上的 $\mathbb{R}$-表示 $t \mapsto \rho(t)$ 所对应的闭谱子空间；回顾一下，根据命题 6.2.27，$\mathcal{H}_\rho^\infty$ 上的 $\mathbb{R}$-作用是逐点多项式有界的。另请回顾命题 6.2.27：$H_\rho^\infty(E) = \mathcal{H}_\rho(E) \cap \mathcal{H}_\rho^\infty$。

引理 7.1.13. 假设 (SG) 条件成立。设 ρ 是 $G^\sharp$ 的光滑酉表示，且在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处具有正能量。若 $\mathcal{H}_\rho \neq \{0\}$，则 $V(\rho) \neq \{0\}$。

证明。令 $\delta > 0$ 满足 (7.2)。令 $E_0 := -i\inf \mathrm{Spec}(d\rho(\boldsymbol{d}))$。令 $0 < \epsilon < \delta$ 并定义$U := [E_0, E_0 + \epsilon)$。根据 E_0 的定义，谱子空间 $\mathcal{H}_\rho(U)$ 非零。由命题 6.2.27(4)，$\mathcal{H}_\rho^\infty(U)$ 在 $\mathcal{H}_\rho(U) = \mathcal{H}_\rho((E_0 - \epsilon, E_0 + \epsilon))$ 中稠密。由于 $\mathcal{H}_\rho(U)$ 非零，$\mathcal{H}_\rho^\infty(U)$ 也非零。由命题 6.2.27 的最后一点可得，$d\rho(\mathfrak{n}_-)\mathcal{H}^\infty(U) \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty((-\infty, E_0 + \epsilon - \delta])$ $= \{0\}$。因此 $\mathcal{H}^\infty(U) \subseteq \mathcal{H}^{\infty,\ \rho\ ^{\mathfrak{n}_-}} \subseteq V(\rho)$。由此可得 $V(\rho) \neq \{0\}$。 □

命题 7.1.14. 假设 (SG) 得到满足。设 ρ 是 $G^\sharp$ 的一个在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处具有正能量的光滑酉表示。则 $V(\rho)$ 对于 ρ 是循环的。

证明。设 W 是由 $V(\rho)$ 生成的 $\mathcal{H}_\rho$ 的闭 $G^\sharp$-不变子空间。则 $W^\perp$ 承载 $G^\sharp$ 的一个在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处具有正能量的光滑表示。由 $(W^\perp)^{\infty,\ \mathfrak{n}_-} \subseteq \mathcal{H}^{\infty,\ \rho\ ^{\mathfrak{n}_-}} \subseteq V(\rho)$，我们得到 $(W^\perp)^{\infty,\ \mathfrak{n}_-} \subseteq W^\perp \cap V(\rho) = \{0\}$。利用引理 7.1.13，我们得出 $W^\perp = \{0\}$，因此 $W = \mathcal{H}_\rho$。 □

7.1.3 基态表示

现在我们将注意力转向基态表示，此时定理 7.1.6 在某种程度上得到了简化。若 ρ 是 $G^\sharp$ 在 $\mathcal{H}_\rho$ 上的一个光滑酉表示，我们定义 $\mathcal{H}_\rho(0) = \ker d\rho(\boldsymbol{d})$，$\mathcal{H}_\rho^\infty(0) := \mathcal{H}_\rho(0) \cap \mathcal{H}_\rho^\infty$以及$\mathcal{H}_\rho^{\omega G}(0) := \mathcal{H}_\rho(0) \cap \mathcal{H}_\rho^{\omega G}$。下面的定义将会很方便：

定义 7.1.15. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 $G^\sharp$ 的光滑酉表示，且在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处为基态。若 $\mathcal{H}_\rho^{\omega G}(0)$ 在 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 中稠密，则称 ρ 在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处为解析基态。

引理 7.1.16. 设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 $G^\sharp$ 的光滑酉表示，且在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处具有正能量。那么 $\mathcal{H}_\rho^\infty(0) \subseteq \mathcal{H}^{\infty,\ \rho\ ^{\mathfrak{n}_-}}$。若 ρ 在 $\boldsymbol{d}$ 处为解析基态，则 $V(\rho) = \mathcal{H}_\rho(0)$。

证明. 利用命题 6.2.19，我们得到 th at

$$d\rho(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}((-\infty, -\delta]))\mathcal{H}_\rho^\infty(0) \subseteq \mathcal{H}_\rho^\infty((-\infty, -\delta]) = \{0\}, \qquad \forall \delta > 0.$$

因此 $\mathcal{H}_\rho^\infty(0) \subseteq V(\rho)$。若 ρ 在 $\boldsymbol{d}$ 处为解析基态，则由前述内容可得 $\mathcal{H}_\rho(0) \subseteq V(\rho)$。利用引理 7.1.7，我们得出 $\mathcal{H}_\rho(0) = V(\rho)$。 □

以下内容阐明了在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处为解析基态的 $G \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ 的酉表示与全纯诱导之间的紧密关系：

Theo注 7.1.17。考虑定理 7.1.6 的情形。以下断言等价：

1. ρ 在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处为解析基态。
2. $\rho|_G = \mathrm{HolInd}_H^G(\sigma|_H)$ 和 $V(\rho) = \mathcal{H}_\rho(0)$。

证明。假设 (1) 成立。由引理 7.1.16，$V(\rho) = \mathcal{H}_\rho(0)$，故由定理 7.1.6 可得 (2)。反过来，假设 (2) 成立。由定理 7.1.6 可得，ρ 在 $\boldsymbol{d}$ 处具有正能量，$\mathcal{H}_\rho(0)$ 是 G 的循环向量，并且 $\mathcal{H}_\rho^{\omega G}(0)$ 在 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 中稠密。因此 (1) 成立。 □

我们用以下观察来补充定理 7.1.17：

命题 7.1.18. 设 ρ 是 G 的光滑酉正能量表示。令 ρ_0 表示其到 $G^\sharp$ 的最小正扩张。假设 ρ_0 满足定理 7.1.6 的等价条件。若 ρ 不可约，则 ρ_0 是解析基态，且 $V(\rho) = \mathcal{H}_{\rho_0}(0)$。

证明. 定义 $V_\sigma := V(\rho)$, $\sigma_0(h,t) := \rho_0(h,t)|_{V_\sigma}$ 以及 $\sigma(h) := \rho(h)|_{V_\sigma}$。令 $\mathcal{M} := \rho(G)''$ 为由 $\rho(G)$ 生成的冯·诺依曼代数。由推论 7.1.10 可得 $\mathcal{B}(V_\sigma)^H = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{V_\sigma}$。因此，对某个 $p \in \mathbb{R}$，有 $\sigma_0(t) = e^{itp}\,\mathrm{id}_{V_\sigma}$。由于 σ_0 具有正能量，我们有 $p \geq 0$。由定理 7.1.6 可知，$\inf$ 谱$(-id\rho_0(\boldsymbol{d})) = p$，因此 $\rho_1(t) := \rho_0(t)e^{-itp}$ 定义了 $\mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ $t \mapsto \mathrm{Ad}(\rho_0(t))$ 的正内实现。由于 $\rho_0(t)$ 是最小的，因此 $p \leq 0$。于是 $p = 0$，从而 $V(\rho) \subseteq \mathcal{H}_{\rho_0}(0)$。另一方面，由引理 7.1.16 可知，$\mathcal{H}^\infty_{\rho_0}(0) \subseteq V(\rho)$。由于 $\mathcal{H}^\infty_{\rho_0}(0)$ 包含所有形如 $\int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_0(t)v$ 的向量，其中 $f \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ 且 $v \in \overline{V(\rho)} \cap \mathcal{H}^{\omega_G}_\rho$，所以 $\mathcal{H}^\infty_{\rho_0}(0)$ 包含 $V(\rho) \cap \mathcal{H}^{\omega_G}_\rho$，而其在 $\overline{V(\rho)}$ 中稠密。因此 $\mathcal{H}^\infty_{\rho_0}(0) = V(\rho) = \mathcal{H}_{\rho_0}(0)$。这说明 ρ_0 是解析基态。 □

7.1.4 $\mathbb{T}$作用的强整基态表示

对于同时具有强整性且相对于 $\mathbb{T}$ 作用为基态的表示 ρ，上述结果尤其适用。在这种情况下，我们总能保证它们是解析基态:

引理 7.1.19. 假设 α 下降为一个 $\mathbb{T}$ 作用。令 ρ 为 $G \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ 的酉正能量表示。我们用 $\mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho$ 表示 $\mathcal{H}_\rho$ 中关于 G 作用为强整的向量。令 $P : \mathcal{H}_\rho \to \mathcal{H}_\rho(0)$ 表示正交投影。那么 $P\mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho \subseteq \mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho$。特别地，如果 $\rho|_G$ 为强整，则 $\mathcal{H}_\rho(0) \cap \mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho$ 在 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 中稠密。

证明. 对于紧子集 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $\psi \in \mathcal{H}^\infty_\rho$，我们记

$$p^n_B(\psi) := \sup_{\xi_j \in B} \|d\rho(\xi_1 \cdots \xi_n)\psi\|$$

对于 $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ 并令 $q_B(\psi) := \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} p^n_B(\psi)$。令 $\psi \in \mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho$，并令 $B \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为紧集。则 $B' := \alpha(\mathbb{T} \times B) \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是紧的、 $\mathbb{T}$- 不变的，并满足 $B \subseteq B'$。注意到

$$p^n_B(\rho(t)\psi) \leq p^n_{B'}(\rho(t)\psi) = p^n_{\alpha_{-t}(B')}(\psi) = p^n_{B'}(\psi), \qquad \forall t \in \mathbb{T}.$$

识别 $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，回顾一下， $P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho(t)dt$。注意，利用例如 [NSZ15, 引理 A.4] 可知 $P\mathcal{H}^\infty_\rho \subseteq \mathcal{H}^\infty_\rho$，此外

$$p^n_B(P\psi) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p^n_B(\rho(t)\psi)dt \leq p^n_{B'}(\psi), \qquad \forall \psi \in \mathcal{H}^\infty_\rho,\ n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

由此我们得到 $q_B(P\psi) \leq q_{B'}(\psi)$。因此 $P\mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho \subseteq \mathcal{H}^{\mathcal{O}_G}_\rho$。 □

结合定理 7.1.17 和引理 7.1.19，我们得到如下结论:

定理 7.1.20. 假设 α 是一个 $\mathbb{T}$-作用。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 $G \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ 的酉表示。假设 $\rho|_G$ 是强整的。设 σ 是 $H \times \mathbb{T}$ 在 $V(\rho)$ 上的酉表示。以下条件等价:

1. ρ 在 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g}^\sharp$ 处是基态。
2. $\rho|_G = \mathrm{HolInd}^G_H(\sigma|_H)$ *and* $V(\rho) = \mathcal{H}_\rho(0)$.

在这种情况下， σ 也是强整的。

由命题 2.3.6(3)可知，任何相对于光滑 $\mathbb{T}$作用 α 具有正能量的 ρ G 光滑酉表示，自动就是基态；此外， ρ 到 $G^\natural$的最小正扩张 ρ_0 也会下降到 $G \rtimes_\alpha \mathbb{T}$。结合定理 7.1.20、推论 7.1.10 和推论 7.1.11，得到:

推论 7.1.21. 假设 α 是一个光滑 $\mathbb{T}$作用，并且$\prec \qquad \prec G$ 的每个相对于 α 具有正能量的不可约酉表示都是强整的。那么存在一个单射 $G_{pos(\alpha)} \hookrightarrow H$，其定义为$\widehat{}$将 $\rho \in G_{pos(\alpha)}$ 映射到 $V(\rho)$上的不可约酉 H表示。

注 7.1.22. 回顾定理 3.1.6：若 G 是一个 R型有限维李群，则每个连续酉 G表示实际上都是强整的。

若能找到使 $V(\rho) \cap \mathcal{H}^{\omega_G}_\rho$在 $V(\rho)$ 中稠密的充分条件，将会很有益处。我们提出以下相关公开问题:

问题 7.1.23. 假设存在零邻域 $U \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$、$U_- \subseteq \mathfrak{n}_-$、$U_0 \subseteq \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 和 $U_+ \subseteq \mathfrak{n}_+$，使得映射

$$U_+ \times U_0 \times U_- \to U, \qquad (\xi_+, \xi_0, \xi_-) \mapsto \xi_+ * \xi_0 * \xi_-$$

是双全纯的，其中 $*$ 由 BCH 级数定义。我们将其逆映射记为 $\xi \mapsto (\xi_+, \xi_0, \xi_-)$。设 ρ是 G 的一个正能量酉表示。令 $V_\sigma := V(\rho)$，将其视为一个酉 H-表示。假设 V_σ 对 ρ是循环的。是否可以断定 $V_\sigma^\omega \subseteq \mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$? 取 $v \in V_\sigma^\omega$，这些假设意味着映射 $U \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \langle v, \sigma(e^{\xi_0})v\rangle$ 在某个零邻域上是解析的。若能证明映射 $\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$, $\xi \mapsto \langle v, \rho(e^{\xi})v\rangle$ 在 $\mathfrak{g}$的某个零邻域上有局部延拓，则由 [Nee11，定理 5.2] 可知 $v \in \mathcal{H}_\rho^{\omega_G}$。

8 个例子

例 8.1.1（类型为 R的有限维李群）。
设 G 是一个类型为 R 的连通有限维李群，且 α 是 G上的一个 $\mathbb{T}$-作用。设 $H := (G^\alpha)_0$是 α-不动点的连通子群。根据定理 3.1.6 和定理 7.1.20，任意连续基态表示 ρ 都由 $V(\rho)$全纯诱导而来。根据推论 7.1.21，这$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$定义了一个单射 $G_{\mathrm{pos}(\alpha)} \hookrightarrow H$。

例 8.1.2（全纯诱导，但非几何诱导）。

1. 考虑 $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，并设 ρ 是任意一个非平凡连续酉表示。显然，我们有 $\rho = \mathrm{HolInd}_G^G(\rho)$。然而，根据定理 3.1.6，$\rho$ 不含非平凡强整向量，因此它不是由自身几何全纯诱导而来。

2. 举一个稍微不那么平凡的例子，考虑群 $G = K \ltimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，其中 K 是连通紧致单李群。令 $T \subseteq K$ 为极大环面，并设 $\mathfrak{t} := \mathrm{L}(T)$。取一个正则元 $H \in \mathfrak{t}_{reg}$，令 $\Delta_+ := \{\alpha \in \Delta : -i\alpha(H) > 0\}$ 为相应的正根系，其中 $\Delta \subseteq i\mathfrak{t}^*$表示 $\mathfrak{k}$的所有根组成的集合。考虑 $\mathbb{T}$在 G 上的作用，其定义为 $\alpha_t(k,x) = (e^{tH}ke^{-tH}, x)$。设 $(\rho, \mathcal{H}_\rho)$ 是 G的连续不可约酉表示。于是，对于某些不可约酉 K表示 $(\nu, \mathcal{H}_\nu)$ 和 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 表示 $(\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$，分别有 ρ 分解为 $\mathcal{H}_\rho = \mathcal{H}_\nu \otimes \mathcal{H}_\sigma$。接着，$\rho$ 相对于 α 具有正能量，并且 $V(\rho) = \mathbb{C}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\sigma$，其中 $\mathbb{C}_\lambda \subseteq \mathcal{H}_\nu$ 是最低权子空间。由于 $\mathcal{H}_\rho^\omega = \mathcal{H}_\nu \otimes \mathcal{H}_\sigma^\omega$，定理 4.2.4 蕴含 ρ是由 $\mathbb{C}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\sigma$上的 $T \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-表示全纯诱导而来。根据定理 3.1.6，后者不含强整向量，因此 ρ 并非由 $\mathbb{C}_\lambda \otimes \mathcal{H}_\sigma$上的 $T \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$-表示几何全纯诱导而来。

例 8.1.3（海森堡群的正能量表示）。
设 V 是一个实 Fr´echet 空间，配备非退化连续反对称双线性形式 ω。设 $\beta\colon \mathbb{T} \to \mathrm{Sp}(V,\omega)$ 是一个具有光滑作用 $\mathbb{T} \times V \to V$的同态。那么，根据 Nee13，引理 A.3]，$\beta$ 是等度连续的。定义 $Dv := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \beta_t v$，并考虑闭子空间

$$V_0 := \ker D = \{ v \in V : \beta_t v = v \quad \forall t \in \mathbb{R} \}, \qquad V_{\mathrm{eff}} := \overline{\mathrm{Span}}\{ \beta_t v - v : t \in \mathbb{R}, v \in V \}. \tag{8.1}$$

作为所有 $t \in \mathbb{R}$的 $\beta_t^*\omega = \omega$，注意到 V_0和 V_{eff}是辛正交补，因此 $(V,\omega) \cong (V_0,\omega_0) \oplus (V_{\mathrm{eff}},\omega_1)$，其中 ω_0 和 ω_1 分别是 ω 在 V_0 和 V_{eff}上的限制。假设 $(V_{\mathrm{eff}})_{\mathbb{C}}$ 分解为 $(V_{\mathrm{eff}})_{\mathbb{C}} \cong L_+ \oplus L_-$，其中包含 $\mathbb{T}$-作用 β 的正 (L_+) 和负 (L_-) 傅里叶模。令$\mathfrak{heis}(V,\omega) \rtimes_D \mathbb{R}\boldsymbol{d}$为 $\mathrm{Heis}(V,\omega) \rtimes_\beta \mathbb{T}$的李代数。根据定理 7.1.17，对于 $\mathrm{Heis}(V,\omega) \rtimes_\beta \mathbb{T}$ 的任意酉表示 ρ，若其在 $\boldsymbol{d}$ 处为解析基态，则 $\rho|_{\mathrm{Heis}(V,\omega)}$ 由 $\mathrm{Heis}(V_0,\omega_0)$ 的某个解析酉表示全纯诱导而来。

我们来看一个具体的例子。假设对于每个非零 $v \in V_{\mathrm{eff}}$，$\omega_1(v, Dv) > 0$。令 $\mathcal{J}_1$ 为 V 上由 $\mathcal{J}_1(v+w) := iv - iw$（$v \in L_+$ 和 $w \in L_-$）定义的复结构。于是 $\mathcal{J}_1^*\omega_1 = \omega_1$，并且对于每个 $v \in V_{\mathrm{eff}}$，$\omega_1(v, \mathcal{J}_1 v) > 0$，因此 $\mathcal{J}_1$ 在 V_{eff} 上定义了一个相容正极化。若 $\mathcal{J}_0$ 是 V_0 上的一个相容正极化，则 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \oplus \mathcal{J}_1$ 在 V 上定义了一个相容正极化。与例 3.1.9 中一样，我们赋予（现在为复）向量空间 V 内积 $\langle v, w\rangle_{\mathcal{J}} := \omega(v, \mathcal{J}w) + i\omega(v,w)$，从而使 V 成为复预希尔伯特空间；对于任意 $t \in \mathbb{T}$，β_t 在其上酉作用。令 $\mathcal{H}$ 为其希尔伯特空间完备化，并令 $\mathcal{H}_0$和 $\mathcal{H}_1$ 分别为 V_0 和 V_{eff}在 $\mathcal{H}$ 中的闭包。考虑由 $t \mapsto u_t$ 定义的 $\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的酉表示 $u\colon \mathbb{T} \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$，其中 u_t 是 $\mathcal{H}$ 上扩张 β_t的酉算子。注意，作为酉 $\mathbb{T}$-表示，我们有 $(V_{\mathrm{eff}}, \langle -,-\rangle_{\mathcal{J}_1}) \cong (L_+, \langle -,-\rangle_{L_+})$，其中对于 $v, w \in L_+$，$\langle v, w\rangle_{L_+} := 2i\omega(\overline{v}, w)$。因此，$\mathcal{H}$ 上的酉 $\mathbb{T}$-表示 u 具有正能量。令 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 为对称代数 $\mathrm{S}^\bullet(\mathcal{H})$ 关于内积 (3.1) 的希尔伯特空间完备化，并令 ρ 为例 3.1.9 中构造的、作用于 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上的 b- 强整酉

表示。类似地，我们用 ρ_0 和 ρ_1 分别表示 Heis(V_0,ω_0) 和 Heis$(V_{\mathrm{eff}},\omega_1)$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$ 和 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 上的表示。令 $\mathbb{T}$ 按照 u 的二次量子化 $\mathcal{F}(u)$ 作用于 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$，则可将 ρ 扩张为 Heis$(V,\omega)\rtimes_\beta\mathbb{T}$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上的光滑表示，我们仍记作 ρ。明确地说，对于 $(g,t)\in$Heis$(V,\omega)\rtimes_\beta\mathbb{T}$，有 $\rho(g,t)=\rho(g)\mathcal{F}(u_t)$。相对于 β，此扩张是基态。我们有 $\mathcal{F}(\mathcal{H})\cong\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)\otimes\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$，并且

$$V(\rho)=\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)\otimes\Omega_1\subseteq\mathcal{F}(\mathcal{H}),$$

其中 $\Omega_1\in\mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ 是真空向量。由定理 7.1.20 可知，$\rho|_{\mathrm{Heis}(V,\omega)}$ 是由 Heis(V_0,ω_0) 在 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$ 上的表示 ρ_0 全纯诱导而来。此外，我们有 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)^\infty\otimes\Omega_1\subseteq\mathcal{H}_\rho^\infty$。事实上，真空向量 Ω_1 对于 Heis$(V_{\mathrm{eff}},\omega_1)$ 是光滑的，因此，如果 $\psi\in\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)^\infty$ 是 Heis(V_0,ω_0) 的光滑向量，那么

$$(z,v)\mapsto\rho(z,v)\psi=z\rho_0(v_0)\psi_0\otimes\rho_1(v_1)\Omega_1$$

是一个从 Heis(V,ω) 到 $\to\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 的光滑映射。因此，若 V_0 是巴拿赫空间，则根据定理 5.2.5 和例 5.1.5 可知，$\rho|_{\mathrm{Heis}(V,\omega)}$ 也是由 ρ_0 几何全纯诱导而来。

例 8.1.4（元辛表示）。

我们沿用例 8.1.3 中的记号和设定。令 $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ 为 $\mathcal{H}$底层的实向量空间。通过定义 $\omega(v,w):=\mathrm{Im}\langle v,w\rangle_\mathcal{J}$（其中 $v,w\in\mathcal{H}_\mathbb{R}$），辛形式 ω 可扩张到 $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ 上：V。定义

$$\mathcal{B}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R}):=\{\,A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R})\,:[\mathcal{J},A]\in\mathcal{B}_2(\mathcal{H})\,\},$$

其元素在某种意义上“接近”于 $\mathbb{C}$-线性。它是一个实巴拿赫代数，范数为 $\|A\|_{\mathrm{res}}:=\|A\|+\|[\mathcal{J},A]\|_2$，其中 $\mathcal{B}_2(\mathcal{H})$表示作用在 $\mathcal{H}$上的希尔伯特–施密特算子空间。受限辛群定义为

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega):=\mathrm{Sp}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)\cap\mathcal{B}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R}),$$

赋予子空间拓扑。由于它是 $\mathcal{B}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R})^\times$的一个代数子群，根据 [Nee04，命题 IV.14]，我们得到 Sp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 是一个以巴拿赫–李代数为模型的巴拿赫–李群：

$$\mathfrak{sp}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega):=\mathfrak{sp}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)\cap\mathcal{B}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R}).$$

由例 8.1.3 可知，阿贝尔巴拿赫–李群 $(\mathcal{H}_\mathbb{R},+)$ 在对称福克空间 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上有一个不可约射影酉表示$\overline{\rho}$，众所周知，该表示可扩张到半直积 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega):=\mathcal{H}_\mathbb{R}\rtimes$Sp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ [Nee10b，注 9.12]。我们仍用 $\overline{\rho}$表示这个扩张。令$\widetilde{}$Sp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 和 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 分别为 Sp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 和 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 的中心 $\mathbb{T}$-扩张，它们是沿着 $\overline{\rho}$对中心 $\mathbb{T}$-扩张 U$(\mathcal{F}(\mathcal{H}))\to$PU$(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ 作拉回得到的。令

$$\rho:\widetilde{\mathrm{HSp}}_{\mathrm{res}}(H_\mathbb{R},\omega)\to\mathrm{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$$

$\widetilde{}$为 $\overline{\rho}$的对应提升。[Nee10b 定理 9.3、注记 9.12] 证明了 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 和$\widetilde{}$Sp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 仍是巴拿赫–李群，并且（循环）真空向量 $\Omega\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 对于 $\rho,\widetilde{}$是光滑的，这意味着 ρ 是 HSp$_{\mathrm{res}}(H_\mathbb{R},\omega)$ 的光滑表示。通过$\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)\hookrightarrow\mathcal{F}(\mathcal{H})$ $\psi_0\mapsto\psi_0\otimes\Omega_1$，将 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$ 视为 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 的子空间。我们首先注意到，ρ 实际上是解析的，并且 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$ 包含一个稠密的 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$-解析向量集。为此，利用方程 (35) 以及 [Nee10b 定理 9.3] 证明中的后续注记可知，Ω 不仅是光滑向量，甚至还是$\widetilde{}$Sp$_{\mathrm{res}}(H_\mathbb{R},\omega)$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上作用时的解析向量。我们还从例 8.1.3 知道，Ω 对 Heis$(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 是解析的（甚至是 b-强整的），因此函数

$$\begin{aligned}&\mathrm{Heis}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)\times\widetilde{\mathrm{Sp}}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)\to\mathbb{C},\\&(v,A)\mapsto\langle\Omega,\rho(v)\rho(A)\Omega\rangle=\langle\rho(v)^{-1}\Omega,\rho(A)\Omega\rangle\end{aligned}$$

是实解析的。这意味着，根据 [Nee11 定理 5.2]，Ω 是 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上的表示 $\widetilde{\rho}$的解析向量。由于 Ω 对 Heis$((\mathcal{H}_0)_\mathbb{R},\omega_0)$ 在 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$ 上的作用 ρ_0 是循环的，因此 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)\subseteq\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 中对 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 的作用解析的向量构成的集合在 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$ 中稠密。还可推出 ρ 是解析的，因为 Ω 对 ρ 是循环的。

现在，假设 G 是一个连通正则 BCH Fr´echet–李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，且同态 $\alpha:\mathbb{T}\to\mathrm{Aut}(G)$ 在 G 上定义了一个光滑的 $\mathbb{T}$-作用。假设 α 满足第 7 节中的假设。令 $H:=(G^\alpha)_0$ 为 G 中由 α 固定点构成的连通子群。考虑由 $t\cdot(v,x):=(u_tv,u_txu_t^{-1})$ 和 $t\cdot U:=\mathcal{F}(u_t)U\mathcal{F}(u_t)^{-1}$ 分别定义的 HSp$_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_\mathbb{R},\omega)$ 和 U$(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ 上的 $\mathbb{T}$-作用

，其中 $(v,x) \in \mathrm{HSp}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}},\omega)$、 $U \in \mathrm{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ 和 $t \in \mathbb{T}$。这也使 $\mathbb{T}$-不变子群 $\mathrm{HSp}_{\mathrm{res}}(H_{\mathbb{R}},\omega) \subseteq \mathrm{HSp}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}},\omega) \times \mathrm{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ 带有一个 $\mathbb{T}$-作用。假设

$$\eta : G \to \widetilde{\mathrm{HSp}}_{\mathrm{res}}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}},\omega)$$

是一个连续且 $\mathbb{T}$等变的同态。那么，根据 [Nee06，定理 IV.1.18]， η 自动是解析的。令 $\mathbb{T}$ 通过 $t \mapsto \mathcal{F}(u_t)$作用于 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$，注意到 $\rho\circ\eta$ 可扩张为 $G \rtimes_\alpha \mathbb{T}$的光滑酉表示，且在$(0,1)$处具有正能量 $\in \mathfrak{g} \rtimes \mathbb{R}$。此外，由前文可知， $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$包含一个稠密集，其中的向量对于 G在 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$上的作用 $\rho\circ\eta$ 都是解析的。令 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{H})$为由 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$生成的闭$(G \rtimes_\alpha \mathbb{T})$不变线性子空间，由此可知， $G \rtimes_\alpha \mathbb{T}$在 $\mathcal{K}$ 上的酉表示在$(0,1)$处是解析基态 $\in \mathfrak{g} \rtimes \mathbb{R}$。根据定理 7.1.17，进一步可知，$G$表示 $\rho\circ\eta$ 在 $\mathcal{K}$ 上是由 H在 $\mathcal{F}(\mathcal{H}_0)$上的表示全纯诱导而来。

例 8.1.5（喷流群）。
设 K 是一个单连通紧单李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。设 V 是一个有限维实向量空间。我们考虑光滑映射 $V \to K$ 的 n 阶喷流在 $0 \in V$ 处构成的李群 $J_0^n(V,K)$。设 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ 是 $\mathbb{R}$ 在 V 上的连续表示，并设 $\phi \in \mathfrak{k}$。假设 $\mathbb{R}$ 作用 $\widetilde{\alpha}_t(f)(x) := e^{t\phi} f(\gamma_{-t}(x)) e^{-t\phi}$ 在 $C_c^\infty(V,K)$ 上可经由 $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 分解。由于 γ 固定原点， $\widetilde{\alpha}$ 下降为 $J_0^n(V,K)$ 上的光滑 $\mathbb{T}$ 作用，记作 α。设 $D := \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \dot{\alpha}_t$ 是李代数 $J_0^n(V,\mathfrak{k})$ 上相应的导子。设 G 是 $J_0^n(V,K) \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ 的一个中心 $\mathbb{T}$ 扩张，并设 $\boldsymbol{d} \in \mathfrak{g} := \mathrm{L}(G)$ 覆盖 $(0,1) \in J_0^n(V,\mathfrak{k}) \rtimes_D \mathbb{R}$。照例，我们将 α 中 G 的 α 不动点所构成的连通李子群写作 $H := (G^\alpha)_0 \subseteq G$，其李代数为 $\mathfrak{h} = \ker D$。由于 $G \cong N \rtimes K$ 对某个幂零李群 N，由命题 3.1.5 可知 G 属于 R 型。因此，由例 8.1.1 可得，任何关于 $\curvearrowright\alpha$ 具有正能量的连续酉 G 表示，都是可由某个酉 H 表示全纯诱导的。对 $G_{\mathrm{pos}(\alpha)}$ 的分类归结为确定 H 中可全纯诱导的元素。关于喷流群的酉正能量表示，在 [Nie23] 中有更详细的研究。

为使上述内容具体化，假设 $V = \mathbb{R}^2$, $n = 2k$ 对于某个 $k \in \mathbb{N}$， γ 是 $\mathbb{T}$ 通过旋转对$\mathbb{R}^2$ 的作用，并且 $\phi = 0$。那么 $\mathfrak{h} \cong \mathbb{R} \oplus_\omega (\mathbb{R}_k[x^2+y^2] \otimes \mathfrak{k})$，其中 $\mathbb{R}_k[c]$ 表示在 c 中的多项式环，截断于 k^{th} 次，并且 ω 是李代数 $\mathbb{R}_k[x^2+y^2] \otimes \mathfrak{k}$ 上的一个二余循环（在此情形下实际上必定是余边界）。每个关于 G 且相对于 α 具有正能量的连续酉表示 ρ，都全纯诱导自 H-表示在 $V(\rho)$上。

例 8.1.6（规范群）。
设 M 是一个紧致流形，P 是 M 上的一个结构群为 K的主丛，其中 K是一个单紧李群，其李代数为 $\mathfrak{k}$。考虑规范变换群 $\mathrm{Gau}(P) = \Gamma(M, \mathrm{Ad}(P))$，其中 $\mathrm{Ad}(P) = P \times_{\mathrm{Ad}} K$ 是伴随丛。该群是一个正则 BCH Fr´echet–李群，其李代数为$\mathfrak{gau}(P) = \Gamma(M, P \times_{\mathrm{Ad}} \mathfrak{k})$ [Nee06，定理 IV.1.12]。假设 $\gamma\colon \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(P)$是一个在 P上的光滑 $\mathbb{T}$-作用，且通过 P的自同构作用。令 $\eta\colon \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Ad}(P))$和 $\overline{\gamma}\colon \mathbb{T} \to \mathrm{Diff}(M)$分别表示在 $\mathrm{Ad}(P)$和 M上的诱导 $\mathbb{T}$-作用。具体而言， η由下式给出： $\eta_t([p,k]) := [\gamma_t(p)\ k]$，其中 $p \in P, k \in K$且 $t \in \mathbb{T}$。于是， $\mathbb{T}$通过 $\alpha_t(s) := \eta_t \circ s \circ \overline{\gamma}_{-t}$ 在 $\mathrm{Gau}(P)$上光滑作用，其中 $s \in \mathrm{Gau}(P)$且 $t \in \mathbb{T}$。论文 [JN21] 研究 $\mathrm{Gau}(P)$的射影酉表示，这些表示在具有稠密的光滑射线集的意义下是光滑的。根据 [JN19，推论 4.5、定理 7.3]，，它们对应于 $\mathrm{Gau}(P)$的一个中心$\mathbb{T}$-扩张的光滑酉表示。 [JN19] 的主要结果之一是对单位连通分支 $\mathrm{Gau}(P)_0$ 的光滑射影酉表示进行了完整分类，其中这些表示相对于 α具有正能量；前提是 M 没有$\overline{\gamma}$ [的不动点，见 $\mathbb{T}$JN21，定理 8.10]。考虑单位元的连通分支 $\mathrm{Gau}(P)_0$ 的一个中心 $\mathbb{T}$-扩张 G。假设 α 可提升为在 G上的光滑 $\mathbb{T}$-作用 $\widetilde{\alpha}$。根据 [JN21，命题 8.6]，，分类结果 [JN21，定理 8.10] 的一个推论是：每个关于 G 且相对于 $\widetilde{\alpha}$ 具有正能量的光滑酉表示 ρ （其中˜）都全纯诱导自 $H := (G^\alpha)_0$在 $V(\rho)$上的对应表示。允许 M 具有 $\mathbb{T}$不动点的更一般情形尚未得到全面理解。一种方法是在具体情形下确定 H 的哪些不可约酉因子表示可全纯诱导至 G，以此作为分类 G的可能更大一类正能量因子表示的中间步骤。

例 8.1.7（复合逆代数的酉群）。一个
第 7 节的理论适用这一点，值得通过所谓
有趣的类 别的 例子
的连续逆代数（CIA）得到。设 $\mathcal{A}$ 是一个含幺复 Fr´echet 代数，且为复合逆代数，这意味着它的可逆元群 $\mathcal{A}^\times$ 在 $\mathcal{A}$ 中是开集，并且求逆映射 $a \mapsto a^{-1}$ 是连续的 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$。进一步假设 $\mathcal{A}$ 带有一个连续的共轭线性代数对合 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}, a \mapsto a^*$。在此情形下， $\mathcal{A}^\times$ 是一个以 $\mathcal{A}$ [为模型的复 BCH Fr´echet–李群（Gl¨o02a，定理 5.6]）。假设李群 $\mathcal{A}^\times$ 还是正则的。 [GN12] 给出了这一点的一个充分条件。酉子群

$$\mathrm{U}(\mathcal{A}) := \left\{ a \in \mathcal{A}^\times : a^* = a^{-1} \right\}$$

是 $\mathcal{A}^\times$ 的实李子群，因此是一个嵌入子流形。它以李代数为模型

$$\mathfrak{u}(\mathcal{A}) := \{\, a \in \mathcal{A} : a^* = -a \,\},$$

装备交换子括号。为此，设 $U \subseteq \mathcal{A}$ 是一个零邻域，使得 $\exp_{\mathcal{A}}$ 将 U 微分同胚地映到其在 $\mathcal{A}^\times$ 中的像。必要时缩小 U，我们可以假设 $U = -U$ 且 $U^* = U$。根据 [Gl¨o02a，推论 4.11]，我们知道对所有 $a \in \mathcal{A}$，$\exp_{\mathcal{A}}(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}! a^n$。利用 $a \mapsto a^{-1}$ 和 $a \mapsto a^*$ 都是连续的，可得对所有 $a \in U$，$\exp_{\mathcal{A}}(a)^* = \exp(a^*)$，且 $\exp_{\mathcal{A}}(a)^{-1} = \exp_{\mathcal{A}}(-a)$。这意味着 $\exp_{\mathcal{A}}(U \cap \mathfrak{u}(\mathcal{A})) = \exp_{\mathcal{A}}(U) \cap \mathrm{U}(\mathcal{A})$。由于 $\mathrm{U}(\mathcal{A})$ 是局部指数李群 $\mathcal{A}^\times$ 的闭子群，根据 [Nee06，定理 IV.3.3]，可知 $\mathrm{U}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}^\times$ 是一个局部指数李子群。因此，它是一个正则 BCH Fr´échet–李群。还要注意，$\mathfrak{u}(\mathcal{A})_{\mathbb{C}} = (\mathcal{A}, [-,-])$ 是复李代数。

假设 $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 是一个同态，其作用 $\mathbb{R} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是光滑的，并且具有多项式增长。进一步假设分裂条件

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$$

得到满足。令 $G := \mathrm{U}(\mathcal{A})_0$，并令 $H := \mathrm{U}(\mathcal{A}_0)_0 = (G^\alpha)_0$,，则第4.2节和第 7 节的所有假设均得到满足。

通常，这类三元组 $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ 可以取作一个 C^*-动力系统 $(\mathcal{B}, G, \gamma)$ 的光滑点集，其中 $\mathcal{B}$ 是一个含幺 C^*-代数，G 是一个巴拿赫 – 李群，而 $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ 是 $\mathcal{B}$ 上由自同构给出的强连续 G- 作用。根据 Nee10a，定义 4.1，定理 6.2],，我们知道在这种情形下，光滑点集 $\mathcal{A} := \mathcal{B}^\infty$ 是一个 G-不变且 $*$-闭的子代数，并自然带有一个 Fr´echet 拓扑。此外，$\mathcal{A}$ 是一个复合逆代数，且 G-作用 $\gamma\colon G \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 关于此拓扑是光滑的。如果 G 是有限维的，那么此拓扑与由嵌入 $\mathcal{A} \hookrightarrow C^\infty(G, \mathcal{B})$ 所得的拓扑一致，其中 $C^\infty(G, \mathcal{B})$ 带有光滑紧开拓扑 [Nee10a，命题 4.6]]。若 $\iota\colon \mathbb{R} \hookrightarrow G$ 是 G 的一个单参数子群，且相应的 $\mathbb{R}$-作用 $\alpha := \gamma \circ \iota$ 在 $\mathcal{A}$ 上具有多项式增长并满足分裂条件 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_+$，则三元组 $(\mathcal{A}, \mathbb{R}, \alpha)$ 满足上述所有假设。

作为一个具体例子，设 $\mathcal{A}_\theta := C^\infty_\theta(\mathbb{T}^2)$ 是参数为 $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ 的光滑非交换二维环面：

$$\mathcal{A}_\theta := \left\{ \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} u^n v^m \;:\; \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} (1 + |n| + |m|)^k |a_{n,m}| < \infty \text{ for all } k \in \mathbb{N} \right\},$$

其中 u 和 v 是满足 $uv = e^{i2\pi\theta} vu$ 的酉算子，且 $\mathcal{A}_\theta$ 配备半范数 $p_k(a) := \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} (1 + |n| + |m|)^k |a_{n,m}|$，其中 $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$。这是一个带有连续对合的含幺 Fr´echet 复合逆代数，由参数为 θ 的“连续”非交换二维环面 $C_\theta(\mathbb{T}^2)$ 上自然的 $\mathbb{T}^2$ 作用的光滑点构成。此外，[GN] 还证明了李群 $\mathcal{A}_\theta^\times$ 是正则的。考虑 $C^\infty_\theta(\mathbb{T}^2)$ 上光滑且等度连续的 $\mathbb{T}$ 作用 α，它满足对所有 n、$m \in \mathbb{Z}$ 和 $z \in \mathbb{T}$，$\alpha_z(u^n v^m) := z^m u^n v^m$。定义 $G := \mathrm{U}(\mathcal{A}_\theta)_0$。那么，对于任何关于 α 为解析基态的 $G \rtimes_\alpha \mathbb{T}$ 的酉表示 ρ，由定理 7.1.17 可知，$\rho|_G$ 是由连通阿贝尔群 $H := (\mathrm{U}(\mathcal{A}_\theta)^\alpha)_0 \cong C^\infty(\mathbb{T}, \mathbb{T})_0$ 在 $\mathcal{H}_\rho(0)$ 上对应的酉表示全纯诱导而来。特别地，若 $\rho(G)''$ 是因子，那么由于 H 是阿贝尔群，由推论 7.1.10 可知，$\rho|_G$ 是由 H 的一个特征全纯诱导而来。由推论 7.1.10，这意味着 $\rho|_G$ 是不可约的。

A 再生核希尔伯特空间上的表示

下面我们总结酉群表示背景下再生核希尔伯特空间的相关性质。设 $\mathcal{H}$ 和 V 为希尔伯特空间，G 为一个群。我们用 V^G 或 $\mathrm{Map}(G, V)$ 表示函数 $G \to V$的空间，并用 $V^{(G)}$ 表示有限支集函数 $G \to V$的空间。

定义 A.1.1. 假设 $\mathcal{H} \subseteq V^G$。若对于每个$x \in G$，线性映射 $\mathcal{E}_x\colon \mathcal{H} \to V, \psi \mapsto \psi(x)$ 有界，则称 $\mathcal{H}$ 具有连续求值映射。

定义 A.1.2. 若函数 $Q\colon G \times G \to \mathcal{B}(V)$ 满足以下条件，则称其为正定函数

$$\|v\|_Q^2 := \sum_{x,y\in\mathrm{supp}(v)} \langle v_x, Q(x,y) v_y \rangle_V \geq 0, \qquad \forall v \in V^{(G)}.$$

定理 A.1.3（[Nee00，定理 I.1.4]）。
设 $Q\colon G\times G\to\mathcal{B}(V)$ 是一个函数。以下断言等价:

1. Q 是正定的

2. 存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_Q\subseteq V^G$，其点求值 $\mathcal{E}_x\colon\ \mathcal{H}_Q\to V$ 连续，且对所有 $(x,y)\in G\times G$，$Q(x,y)=\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*$。

在此情形下，$\mathcal{H}_Q$ 在酉等价意义下唯一，且 $\{\mathcal{E}_x^*v\colon\ x\in G,v\in V\}$ 在 $\mathcal{H}_Q$ 中是稠密的。

定义 A.1.4. 若函数 $Q\colon G\times G\to\mathcal{B}(V)$ 满足 Q 为正定的且 $\mathcal{H}\cong\mathcal{H}_Q$，则称其为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 的再生核。

命题 A.1.5. 设 G 是一个拓扑群，$H\subseteq G$ 是一个闭子群。设 (σ,V_σ) 是一个强连续酉 H-表示。设 $Q\in C(G\times G,\mathcal{B}(V_\sigma))^{H\times H}$，因此对所有 $x_1,x_2\in G$ 以及 $h_1,h_2\in H$，$Q(xh_1,yh_2)=\sigma(h_1)^{-1}Q(x,y)\sigma(h_2)$。假设 Q 是正定的。

1. G 在 $V_\sigma^{(G)}$上的左正则作用诱导出 $\mathcal{H}_Q$ 上的酉 G-作用 π，当且仅当 Q 是 G-不变的。在这种情况下，存在一个函数 $F\colon G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$，使得 $Q(x,y)=F(x^{-1}y)$。 2. 假设 Q 是 G-不变的。存在一个具有连续点求值映射 $\mathcal{E}_x$ 的 G-等变线性映射 $\mathcal{H}_Q\hookrightarrow\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$，适用于 $x\in G$。它们满足等变条件 $\mathcal{E}_x\pi(g)=\mathcal{E}_{g^{-1}x}$，对所有 $x,y\in G$均成立。 3. 假设 $Q\colon\ G\times G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$是 G-不变且强连续的。那么酉 G-表示 $\mathcal{H}_Q$ 是强连续的。 4. 设$(\rho,\mathcal{H}_\rho)$是一个酉 G-表示，并且存在一个具有连续点求值映射 $\mathcal{E}_x:=\mathrm{ev}_x\circ\Phi$（适用于 $x\in G$）的 G-等变单射线性映射 $\Phi\colon\ \mathcal{H}_\rho\hookrightarrow\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$。则相应的核 Q 是 G-不变的，并且 $\mathcal{H}_\rho\cong\mathcal{H}_Q$ 作为酉 G-表示。

证明。令 l_g 表示由左乘给出的 G 在自身上的左作用。回忆 $\mathcal{H}_Q=\overline{V_\sigma^{(G)}/\mathcal{N}_Q}^{\langle-,-\rangle_Q}$，其中 $\mathcal{N}_Q:=\left\{f\in V_{(G)\sigma}\colon\ \|f\|_Q=0\right\}$。对于任意 $x\in G$，我们有一个映射 $\delta_x\colon V_\sigma\hookrightarrow V_{(G)\sigma}$，其定义方式是将 V_σ 的元素视为定义在 G 上、支集为 $\{x\}$的函数。令 $q_x\colon\ V_\sigma\to\mathcal{H}_Q,v\mapsto[\delta_x(v)]$ 为它与商映射 $V_\sigma^{(G)}\to\mathcal{H}_Q$的复合。于是有 $\mathcal{E}_x=q_x^*$（更多细节参见 [Nee00, Thm. I.1.4] ）。嵌入 $\mathcal{H}_Q\hookrightarrow V_\sigma^G$ 定义为 $f\mapsto f_\psi$，其中 $f_\psi(x)=\mathcal{E}_x(\psi)$。

1. 对于 $g\in G$ 和 $f\in V_{(G)\sigma}$，我们将 $g.f:=f\circ l_g^{-1}$ 记为 G 在 $V_\sigma^{(G)}$ 上的左正则作用。令$x,y\in G$。取 $v,w\in V_\sigma$。于是 $g.\delta_x(v)=\delta_{gx}(v)$ 和 $g.\delta_y(w)=\delta_{gy}(w)$ 的支集分别包含于 $\{gx\}$ 和 $\{gy\}$。因此 $\langle g.\delta_x(v)\ g.\delta_y(w)\rangle_Q=\langle v,Q(gx,gy)w\rangle$，而 $\langle q_x(v)\ q_y(w)\rangle_Q=\langle v,Q(x,y)w\rangle$。第一个断言得证。若 Q 是 G-不变的，则 $F(x):=Q(e,x)$ 满足 $F(x^{-1}y)=Q(x,y)$。

2. 令 $x\in G$ 和 $h\in H$。由 $Q(xh,y)=\sigma(h)^{-1}Q(x,y)$ 可得，对于任意 $y\in G$ 和 $v\in V_\sigma$，$\mathcal{E}_{xh}\mathcal{E}_y^*v=\sigma(h)^{-1}\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*v$。由于 $\{\mathcal{E}_y^*v\colon$ 根据定理 A.1.3，$y\in G,v\in V_\sigma\}$ 在 $\mathcal{H}_Q$ 中是完备的，因此 $\mathcal{E}_{xh}=\sigma(h)^{-1}\mathcal{E}_x$。于是，对于任意 $\psi\in\mathcal{H}_Q$，$f_\psi\in\mathrm{Map}(G,V_\sigma)^H$。我们证明 $\psi\mapsto f_\psi$ 是 G-等变的。对于每个 x、$g\in G$ 和 $v\in V_\sigma$，有 $\pi(g)\mathcal{E}_x^*v=\pi(g)q_x(v)=q_{gx}(v)=\mathcal{E}_{gx}^*(v)$。因此，对于每个 x、$g\in G$，$\pi(g)\mathcal{E}_x^*=\mathcal{E}_{gx}^*$ 且 $\mathcal{E}_x\pi(g)=\mathcal{E}_{g^{-1}x}$。于是，对于 $\psi\in\mathcal{H}_Q$，我们得到 $f_\psi(g^{-1}x)=\mathcal{E}_{g^{-1}x}\psi=\mathcal{E}_x\pi(g)\psi=f_{\pi(g)\psi}(x)$，所以 $\psi\mapsto f_\psi$ 是 G-等变的。

3. 由于 G 在 $\mathcal{H}_Q$ 上酉地作用，只需证明对于某个稠密子空间中的任意 ψ，$G\to\mathbb{C}\ g\mapsto\langle\psi,\pi(g)\psi\rangle_Q$ 连续。考虑任意 $x\in G$ 和 $v\in V_\sigma$所对应的 $\psi=\mathcal{E}_x^*v$。根据定理 A.1.3，这些向量在 $\mathcal{H}_Q$ 中构成一个稠密集。对于 $g\in G$，我们有

$$\langle\psi,\pi(g)\psi\rangle_Q=\langle v,\mathcal{E}_x\pi(g)\mathcal{E}_x^*v\rangle_V=\langle v,\mathcal{E}_x\mathcal{E}_{gx}^*v\rangle_V=\langle v,Q(x,gx)v\rangle_V.\tag{A.1}$$

作为 $Q:G\times G\to\mathcal{B}(V_\sigma)$ 关于强拓扑连续，因此映射 $g\mapsto\langle\psi,\pi(g)\psi\rangle_Q$ 连续 .

4. 由于 Φ 是 G-等变的，对于任意 x、$g\in G$，我们有 $\mathcal{E}_x\rho(g)=\mathcal{E}_{g^{-1}x}$。由于 ρ 是酉的，这意味着相应的核 $Q(x,y):=\mathcal{E}_x\mathcal{E}_y^*$ 是不变的。根据定理 A.1.3，该核还是正定的，因此根据第一项，$\mathcal{H}_Q$ 是一个酉 G-表示。根据定理 A.1.3，我们已经知道 $\mathcal{H}_Q\cong\mathcal{H}_\rho$ 作为希尔伯特空间。同构 $U\colon\ \mathcal{H}_Q\to\mathcal{H}_\rho$ 在稠密子空间 $V_{(G)\sigma}/\mathcal{N}_Q$上由 $Uq(f):=\sum_{x\in\mathrm{supp}(f)}\mathcal{E}_x^*f(x)$给出，其中 $q\colon\ V_{(G)\sigma}\to\mathcal{H}_Q$表示商映射。记 π 为 $\mathcal{H}_Q$上的酉 G-作用。利用 $q_x=\mathcal{E}_x^*$、$q_{gx}=\pi(g)q_x$ 和 $\rho(g)\mathcal{E}_x^*=\mathcal{E}_{gx}^*$，我们得到

$$U\pi(g)q_x(v)=Uq_{gx}(v)=\mathcal{E}_{gx}^*v=\rho(g)\mathcal{E}_x^*v=\rho(g)Uq_x(v),\qquad\forall v\in V_\sigma.\quad\square$$

参考文献

[AM66] L. Auslander 和 C.C Moore。《可解李群的酉表示》。Mem. Amer. Math. Soc.，1966。[Arv74] W. Arveson。算子代数的自同构群。《J. Func. Anal.》，15:217–243，1974。[Bel05] D. Beltiţ˘a。巴拿赫流形上的解析几乎复结构的可积性。《Ann. Global Anal. Geom.》，28(1):59–73，2005。[BGN20] D. Beltita、H. Grundling 和 K.-H. Neeb。复合逆代数上可能为奇异作用的协变表示。《Diss. Math.》，549:1–94，2020。 C^*-代数。[Bor66] H.-J. Borchers。量子场论中的能量和动量作为可观测量。《数学物理通讯》，2:49–54，1966。[Bor87] H.-J. Borchers。量子场论中谱条件与局域性之间的相互作用。载于《算子代数与数学物理》，第62卷，第143–152页。Amer. Math. Soc.，1987。[BR87] O. Bratteli 和 D.W. Robinson。《算子代数与量子统计力学 1》。Springer-Verlag，纽约，第二版，1987。 C^*-和 W^*-代数、对称群、态的分解。[BR97] O. Bratteli 和 D.W. Robinson。《算子代数与量子统计力学 2》。Springer-Verlag，柏林，第二版，1997。平衡态。量子统计力学模型。[BS71a] J. Bochnak 和 J. Siciak。拓扑向量空间中的解析函数。《Studia Math.》，39:77–112，1971。[BS71b] J. Bochnak 和 J. Siciak。拓扑向量空间中的多项式与多重线性映射。《Studia Math.》，39:59–76，1971。[DK00] J.J. Duistermaat 和 J.A.C. Kolk。《李群》。Springer-Verlag，柏林，2000年。[Gl¨o02a] H. Gl¨ockner。单位群为李群的代数。《Studia Math.》，153(2):147–177，2002。[Gl¨o02b] H. Gl¨ockner。没有完备性限制的无限维李群。载于《有限维与无限维李群上的几何与分析》，第55卷，第43–59页。波兰科学院数学研究所，2002。[GN] H. Gl¨ockner 和 K.-H. Neeb。《无限维李群》。编写中。[GN12] H. Gl¨ockner 和 K.-H. Neeb。连续逆代数的单位群何时为正则李群。《Stud. Math.》，211(2):95–109，2012。[Goo69] R.W. Goodman。李群表示的解析向量与整向量。《美国数学会汇刊》，143:55–76，1969。[Haa92] R. Haag。《局域量子物理》。Springer-Verlag，柏林，1992。[Jen73] J.W. Jenkins。连通局部紧群的增长。《J. Func. Anal.》，12:113–127，1973。[JN19] B. Janssens 和 K.-H. Neeb。无限维李群的射影酉表示。《京都数学杂志》，59(2):293–341，2019。[JN21] B. Janssens 和 K.-H. Neeb。规范群的正能量表示 I：局域化，2021。编写中。可于 arXiv:2108.03501 获取。[Kir76] A.A. Kirillov。《表示论基础》。Springer-Verlag，柏林—纽约，1976。[KM97] A. Kriegl 和 P.W. Michor。《整体分析的便利框架》，第53卷。AMS，普罗维登斯，1997。[Lis95] W. Lisiecki。相干态表示：综述。《Rep. Math. Phys.》，35(2-3):327–358，1995。[LM75] M. L¨uscher 和 G. Mack。量子场论中的整体共形不变性。《数学物理通讯》，41:203–234，1975。

[Mil84] J. Milnor。《相对论、群与拓扑》：关于无限维李群的注记，第1007–1057页。North-Holland，阿姆斯特丹，1984年。[Mun00] J.R. Munkres。《拓扑学》。Prentice Hall, Inc.，2000年。[Mur90] G.J. Murphy。 C^*-代数与算子理论。Academic Press, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1990年。[Nee98] K.-H. Neeb。表示论中与复几何相关的一些公开问题。载于《李理论中的正性：开放问题》，第26卷，第195–220页。de Gruyter，柏林，1998年。[Nee00] K.-H. Neeb。《李理论中的全纯性与凸性》，第28卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2000年。[Nee01] K.-H. Neeb。环群的Borel-Weil理论。载于《无限维K¨ahler流形》，第31卷，第179–229页。Birkh¨auser Verlag，2001年。[Nee04] K.-H. Neeb。无限维群及其表示。载于《李理论》，第228卷，第213–328页。Birkh¨auser Boston，2004年。[Nee06] K.-H. Neeb。趋向于局部凸群的李理论。《日本数学杂志》，1(2)：291–468，2006年。[Nee10a] K.-H. Neeb。关于无限维李群表示的可微向量。《函数分析杂志》，259(11)：2814–2855，2010年。[Nee10b] K.-H. Neeb。无限维李代数中的半有界表示与不变锥。《融合数学》，2(1)：37–134，2010年。[Nee11] K.-H. Neeb。关于无限维李群酉表示的解析向量。《傅里叶研究所年刊》，61(5)：1839–1874，2011年。[Nee12] K.-H. Neeb。厄米李群的半有界表示。《数学论文集》，21(5)：29–109，2012。´Nee[K.-H. Neeb。巴拿赫-李群酉表示的全纯实现。载于《李群：结构、作用与表示》，第306卷，第185–223页。Birkh13] auser/Springer，纽约，2013年。¨Nee[K.-H. Neeb。希尔伯特环群双重扩张的半有界酉表示。《傅里叶研究所年刊》，64(5)：1823–1892，2014年。14] Nie[M. Niestijl。喷流群的广义正能量表示。《数学文献》，28(3)：709–763，2023年。23] NR[K.-H. Neeb和F.G. Russo。拓扑群的基态表示。《数学年刊》，第1–60页，2022年。22] NS[K.-H. Neeb和H. Salmasian。Virasoro 群正能量表示的分类。《国际数学研究通知》，2015年(18)：8620–8656。15] NSZ[K.-H. Neeb、H. Salmasian和C. Zellner。关于光滑向量空间的不变性。《京都数学杂志》，55(3)：501–515，2015年。15] Ol’[G.I. Ol’shanski81] ı。李代数、李半群和全纯离散系列中的不变锥。《函数分析及其应用》，15(4)：53–66，1981年。˘Pen[R. Penney。整向量与表示的全纯延拓。《美国数学会汇刊》，198：107–121，1974。74] Per[A. Perelomov。《广义相干态及其应用》。Springer-Verlag，柏林，1986年。86] PS[A. Pressley和G. Segal。《环群》。牛津大学出版社，1986年。86] Rud[W. Rudin。《泛函分析》。McGraw-Hill, Inc.，纽约，第二版，1991年。91] Seg[G. Segal。某些无限维群的酉表示。《数学物理通讯》，80(3)：301–342，1981年。81]SW[R.F. Streater和A.S. Wightman。《PCT、自旋与统计，以及其他》。Benjamin，纽约，1964年。

[Tre67] F. Treves。《拓扑向量空间、广义函数与核》。Academic Press，纽约-伦敦，1967年。[TW71] J.A. Tirao和J.A. Wolf。齐性全纯向量丛。《印第安纳大学数学杂志》，20：15–31，1970/71年。