arXiv:2301.05151v1 [math.RT] 12 Jan 2023

幺幂特征标的局部—整体原理

Damiano Rossi

摘要

我们将 Dade 猜想和 Späth 特征三元组猜想改编为适用于 A、B、C 型单连通有限约化群的幺正特征标的形式。特别地，这给出了一个精确公式，用局部不变量来计数任意 Brauer ℓ 块 B 中每种缺陷的幺正特征标数量，其中这些局部不变量与 e-局部结构相关。由此，我们为有限群表示论中的局部-整体原理提供了一个几何版本。我们证明中的一个关键要素，是构造与特征三元组同构相容的幺幂广义 Harish-Chandra 系列的某些参数化。

目录

1 引言 21.1 论文结构.5

2 符号与背景材料 **5**

2.1 有限群的特征标与块.5 2.2 有限约化群与幺正特征标.7 2.3 e-Harish-Chandra 理论与幺正特征标.7 2.4 伪幺正特征.9

3 与特征三元组同构的相容性 10

3.1 等变性与极大可延拓性.10 3.2 构造 G^F-块特征三元组同构.14 3.3 定理 C 的证明.18

4 定理 C 的推论 **18**

4.1 Levi 子群的伪幺幂特征标参数化.19 4.2 关于 e-Harish-Chandra 级数.21

2010年 数学主题分类： 20C20, 20C33。关键词和短语： Dade 猜想、特征三元组猜想、有限约化群、幺正特征标。此项工作部分由英国工程与自然科学研究委员会资助项目 EP/T004592/1 资助，作者在佛罗伦萨大学进行学术访问期间完成。作者感谢 Silvio Dolfi 以及数学系代数群组的所有成员的热情接待，并特别感谢 Carolina Vallejo 就局部-整体原理提出的一些意见。此外，作者感谢 Lucas Ruhstorfer 就论文 Bro-Ruh 进行的有益讨论 [Bro-Ruh]。

5 迈向定理 A 和定理 B **22**
5.1 关于 e-链的预备知识.23 5.2 定理 A 的证明.27 5.3 定理 B 的证明.29

1 引言

局部-整体猜想是当前有限群表示论中最有趣、最具挑战性的一些问题。其中包括 McKay 猜想 [McK72]、阿尔佩林—麦凯猜想 [Alp76] 和阿尔佩林权猜想 [Alp87]；这些猜想都可以由一个更深层的陈述——Dade 猜想 [Dad92], [Dad94], [Dad97]——推导出来。后者还蕴含了著名的 Brauer 零高度猜想。该猜想最初发表于 [Bra56]，其证明最近已在 [MNSFT22] 和 [Ruh22a] 中完成，这一成果凝聚了许多作者的共同努力。

本文尤其关注*Dade* 猜想 。对于每个素数ℓ，该猜想都给出一个精确公式，用于计算有限群中具有给定 ℓ-缺陷且属于给定 Brauer ℓ-块的不可约特征标数量；公式以群自身的 ℓ-局部结构为依据。 [Spä17] 进一步推广了这一猜想，并通过引入特征三元组关于 N-块同构 的相容性，提出了特征三元组猜想 ，下文将这种相容性记作 $\sim_N$；其定义见 [Spä17，定义 3.6]。这一概念在群表示论的诸多方面都起着根本作用；正如我们稍后将看到的，它为我们提供了一种控制局部子群表示论的方法。此外，正如 [Spä17，定理 1.3]所述，它还被用于将 Dade 猜想约化到有限拟单群。

我们的目标是将上一段中描述的两个猜想调整并证明到有限约化群的幺正特征标情形。本文采用的方法受到作者在 [Ros22c] 中提出的思想启发，并为该论文 [Ros22c，猜想 C 和猜想 D] 中提出的猜想提供了进一步佐证。特别是，前文考虑的 ℓ- 局部结构被替换为更合适的 e-局部结构，这些结构源自底层代数群的几何，并与 Deligne–Lusztig 理论的框架相容。因此，我们的结果也表明，有限约化群表示论中可能存在一种 e 局部-整体原理。

更确切地说，设 G 是定义在正特征代数闭域上的 A、B 或 C 型单连通单纯群 p，且 $F : G \to G$ 是 G 的 Frobenius 端同态，使 G 作为簇具有某个 q 的 p幂所给出的$\mathbb{F}_q$-结构。我们将 G^F 记为 G 上的 $\mathbb{F}_q$-有理点构成的有限约化群。进一步，固定一个不同于 p的奇素数 ℓ，并将 e 记为 q模 ℓ的乘法阶。令 $L_e(G, F)$ 表示 (G, F) 的 e-链集合，其中链的形式为 $\sigma = \{G = L_0 > L_1 > \cdots > L_n\}$，且每个 L_i都是 (G, F) 的 e-分裂 Levi 子群。 e-链 σ的末项记为 $L(\sigma) = L_n$，而 $|\sigma| := n$ 是 σ的长度。注意，后者将集合 $L_e(G, F)$ 划分为集合 $L_e(G, F)_\pm$，其中包含满足 $(-1)^{|\sigma|} = \pm 1$的 e-链 σ。此外，注意到 G^F通过共轭作用于集合 $L_e(G, F)$，并将 e-链σ的稳定子记为 G^F_σ。由定义可直接得出，该作用保持 e- 链的长度，特别地，它限制为 G^F 在正长度 e- 链集合 $L_e(G, F)_{>0}$上的作用。

现在，对于每个非负整数 d 以及有限群 G^F的 Brauer ℓ-块 B，我们关联一个集合 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_{\pm}$，该集合由四元组 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta)$ 构成，其中 σ 是属于 $\mathrm{L}_e(\mathrm{G}\ F)_{\pm}$的 e-链；$(\mathrm{M}\ \mu)$ 是 $(\mathrm{L}(\sigma)\ F)$ 的单值 e-尖点有序对，且 M 不等于 G；ϑ 是 e-链稳定子 G^F_σ的一个不可约特征，属于由 d、B、σ 及 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 的选取所定义的特征标集 $\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathrm{M}\ \mu))$，具体如定义 5.5 所述。再一次，群 G^F通过共轭作用于 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_{\pm}$，并将相应的 G^F-轨道集合记为 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_{\pm}/\mathrm{G}^F$。此外，对于每个这样的轨道 ω，我们将相应的有序对 (σ, ϑ) 的 G^F-轨道记为 $\omega^\bullet$；其中 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta) \in \omega$，且 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 是某个单值 e-尖点有序对。

采用上述记号，我们现在可以陈述第一个主要结果。为简便起见，在下述定理中，我们假设当 $(\mathrm{G}\ F)$ 为 A 型$_n(\pm q)$ 时，素数 ℓ 不整除最大公因数 $(q \pm 1, n+1)$，其中 $\mathrm{A}_n(-q)$ 按照惯例表示 ${}^2\mathrm{A}_n(q)$。不过请注意，正如注 5.7 中所解释的，这一假设可以去除（更一般的陈述见定理 5.9）。

定理 A. 对于 $\mathbf{G}^F$ 的每个 *Brauer* ℓ-块 B 以及每个非负整数 d，存在一个自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_B$-等变双射

$$\Lambda : \mathcal{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_+/\mathbf{G}^F \to \mathcal{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_-/\mathbf{G}^F$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}^F_\sigma, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}^F_\rho, \chi\right)$$

对于每个 $\omega \in L^d_{\mathrm{u}}(B)_+/G^F$、任意 $(\sigma, \vartheta) \in \omega^\bullet$、任意 $(\rho, \chi) \in \Lambda(\omega)^\bullet$，其中 $X := G^F \rtimes Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$，且 $Aut_{\mathbb{F}}(G^F)$ 是第 *3.1* 节中描述的自同构群。

上述定理将 Späth 特征三元组猜想改编至 Deligne–Lusztig 理论的框架中，适用于有限约化群的幺正特征标。定理 A 也为 [Ros22c, Conjecture D], 的正确性提供了进一步证据——事实上，上文引入的集合 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_{\pm}$ 是 [Ros22c, Conjecture D] 中所考虑的四元组集合 $\mathrm{L}^d(B)_{\pm}$ 的子集；后者是通过仅选取这些四元组中出现的幺正 e-尖点有序对 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 来确定的。

接下来，我们将给出一个公式，根据与 e-局部结构相关的局部不变量，计算 Brauer ℓ-块 B 中 ℓ-缺陷为 d 的幺正特征标的数量。对于每个具有正长度的 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 e-链 σ，定义 $\mathrm{k}^d_{\mathrm{u}}(B_\sigma)$ 为属于某个幺正 e- 尖点对 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 对应的特征标集 $\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathrm{M}\ \mu))$ 中一个的特征标数量，其中该尖点对视为模去 G^F_σ-共轭作用（另见 (5.10)）。此外，令 $\mathrm{k}^d_{\mathrm{u}}(B)$ 和 $\mathrm{k}^d_{\mathrm{c},\ \mathrm{u}}(B)$ 分别表示具有 ℓ-缺陷 d、属于 Brauer ℓ-块 B，且分别为幺正和幺正e-尖点的不可约特征标数量。于是，利用定理 A 给出的双射，我们可以通过一个涉及由 e-局部结构 G^F_σ产生的各项 $\mathrm{k}^d_{\mathrm{u}}(B_\sigma)$ 的交错和，确定差值 $\mathrm{k}^d_{\mathrm{u}}(B) - \mathrm{k}^d_{\mathrm{c},\ \mathrm{u}}(B)$。

定理 B. 对于 $\mathbf{G}^F$ 的每个 *Brauer* ℓ-块 B 以及每个非负整数 d，都有

$$\mathrm{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B) - \mathrm{k}_{\mathrm{c,u}}^{d}(B) = \sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|+1}\mathrm{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma})$$

其中 σ 遍历一组代表元，这些代表元对应于$\mathbf{G}^F$在$\mathcal{L}_e(\mathbf{G}\ F)_{>0}$上的作用。

我们指出，在定理 A 之前为简化起见对素数 ℓ 所作的限制，仅涉及特征三元组同构的条件，因此不影响定理 B。与前文一样，该结果将 Dade 猜想改编到 Deligne– Lusztig 理论的框架中，适用于有限约化群的幺正特征标，并为 [Ros22c, Conjecture C]提供了新的支持。定理 B 等式中引入修正项 $\mathrm{k}_{\mathrm{c},\ \mathrm{u}}^{d}(B)$的必要性，可以理解为类似于 Dade 猜想陈述中排除中心缺陷块的情形；或者，视所采用的表述而定，类似于排除 $d = 0$的情形。关于这一点，我们请读者参阅定义 5.2 后一段中的详细讨论。最后，我们提到，定理 B 也为 Broué [Bro22a]最近提出的一个问题给出了肯定答案的依据。

特别值得注意的是，据作者所知，目前尚无现有技术能够直接推出定理 B；它只能作为存在定理 A 中所考虑的 G^F-块特征三元组同构的结果得到。事实上，虽然 Deligne–Lusztig 理论使我们能够控制有限约化群的表示论，但它不足以控制 e-链稳定子 G_{σ}^{F} 的表示论。不过，请注意，稳定子 G_{σ}^{F} 将有限约化群 $\mathrm{L}(\sigma)^F$ 作为正规子群包含其中。因此，我们可以先运用 Deligne–Lusztig 理论研究 $\mathrm{L}(\sigma)^F$ 的特征标，然后通过 G^F-块特征三元组同构应用 Clifford 理论，以控制 G_{σ}^{F} 的特征标（更多细节参见命题 4.5 和命题 5.6）。

为了完成后一步，我们需要使 Deligne–Lusztig 理论，更准确地说，使关于幺正特征标的 e-Harish-Chandra 理论与 G^F- 块特征三元组同构相容。这一想法最早由作者在 [Ros22c, ParametrisationB] 中提出，并在 [Ros22d] 中进一步研究。我们的下一个结果是定理 A 和定理 B 证明中的关键要素，它在上述假设下确立了这一关于幺正情形的猜想参数化。这也可以看作是将 Broué、Malle 和 Michel 在 [BMM93, 定理 3.2 (2)] 中引入的参数化推广到 G^F-块特征三元组同构的框架中。

定理 C。 对于 $(\mathbf{L}\ \lambda)$ 的每个幺 e-尖点对 $(\mathbf{G}\ F)$，存在一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-等变双射

$$\Omega_{(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}} : \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L},\lambda)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right)$$

该双射保持特征标的 ℓ-缺陷，并且满足

$$\left(X_{\chi}, \mathbf{G}^F, \chi\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(\mathbf{N}_{X_{\chi}}(\mathbf{L}), \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F, \Omega_{(\mathbf{L},\lambda)}^{\mathbf{G}}(\chi)\right)$$

对于每个 $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L}\ \lambda))$ 以及其中 $X := \mathbf{G}^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$。

证明　　定理 C，以及由此得到的定理 A 和定理 B，部分依赖于某些

关于 e-分裂 Levi 子群的特征标可扩张性的条件。这些条件最初是为解决 McKay 猜想和 Alperin–McKay 猜想的归纳条件而引入的，随后又在 [Ros22c] 的参数化 B 背景下得到进一步研究（精确表述见 [Ros22d，第 5.2] 条定义）。在某些假设下，文献 [BS20], [Bro22b] 和 [Bro-Ruh] 分别为 A、B、C 型群证明了这些条件。尽管如此，我们预期这些结果的某种版本普遍成立，因此相信本文针对奇素数 ℓ 给出的上述 A、B、C 型群定理，也能推广到一般情形。

1.1 论文结构

本文结构如下。第 2 节介绍必要的记号，并回顾全文所用的主要定义和结果。此外，在第 2.4 节中，我们引入伪幺正特征的概念（见定义 2.2），并证明一个关于覆盖含有此类特征标的块的正则性的结果。接下来，在第 3 节中，我们开始着手证明定理 C。首先，在第 3.1 节中，我们考察在 e-分裂 Levi 子群的特征标满足可扩张性条件时可以建立的一些等变性质。在此，我们还给出定理 C 所需双射 $\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}$ 的一个候选。接下来，在第 3.2 节中，我们构造所需的 G^F-块特征三元组同构。利用这些结果，我们便可在第 3.3 节中证明定理 C。下一步是将定理 C 给出的群 G 中幺幂 e-Harish-Chandra 级数的参数化，扩展为 (G F) 的 F-稳定 Levi 子群 K 中伪幺正 e-Harish-Chandra 级数的参数化。这由定理 4.4 完成。完成这一步后，在第 4.2 节中，我们利用 G^F-块同构理论，得到 e-Harish-Chandra 级数上的双射，从而控制 e-链稳定子 G^F_σ 的表示论。第 5.1 节对 G^F_σ 的特征标作了更详细的分析。特别地，我们在命题 5.6 中得到特征标集 $\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathrm{M}\ \mu))$ 的一个参数化。最后，在第 5.2 节和第 5.3 节中，我们分别应用这些结果证明定理 A 和定理 B。

2 记号与背景材料

2.1 有限群的特征标与块

我们回顾一些有限群表示论中的标准记号，例如可见于[Isa76] 和 [Nav98], 。令 $\mathrm{Irr}(G)$ 为普通不可约特征的集合。若 $N \trianglelefteq G$且 $\vartheta \in \mathrm{Irr}(N)$，则我们用 $\mathrm{Irr}(G \mid \vartheta)$ 表示 G 中位于ϑ之上的不可约特征标集合。更一般地，若 S 是 N的不可约特征标的子集，则我们用 $\mathrm{Irr}(G \mid \mathrm{S})$ 表示对于 $\vartheta \in \mathrm{S}$，集合 $\mathrm{Irr}(G \mid \vartheta)$ 的并集，也就是说， G 中位于集合 S 中某个特征标之上的不可约特征标集合。

接下来，我们用 G_ϑ 表示不可约特征标 $\vartheta \in \mathrm{Irr}(N)$ 在 G的共轭作用下的稳定子，并称 ϑ在 $G = G_\vartheta$时是 G-不变的。在这种情况下，我们称 (G, N, ϑ) 为一个特征三元组。这些对象为研究 Clifford 理论提供了重要信息，并在局部-整体猜想的许多方面发挥着关键作用。至关重要的是，要在特征三元组集合上引入某些二元关系。关于这些思想的更详细介绍以及所需的背景知识，请参阅 [Nav18，第 5 章，以及 10] 和 [Spä18]

射影表示。此处考虑的二元关系由 [Spä17, 《定义 3.6]》中引入，称为 N-块特征三元组同构，记作 $\sim_N$。这一等价关系随后在 [Ros22a] 中得到了进一步研究。

为了构造特征三元组的 N-块同构，证明关于特征标可扩张性的一些结果通常很有用。这里，我们引入极大可延拓性 的概念（见[MS16, 定义 3.5]），该概念将在以下各节中讨论。设 $N \trianglelefteq G$ 为有限群，且 S 是 N的不可约特征标集的一个子集。若对于包含关系 $N \trianglelefteq G$，S 中的每个特征标 $\vartheta \in$ 都能扩张到其稳定子 G_ϑ，则称集合 S 满足极大可延拓性。更精确地说，我们可以指定一个延拓映射

$$\Lambda : \mathcal{S} \to \coprod_{N \le H \le G} \mathrm{Irr}(H) \tag{2.1}$$

将 S 中的每个特征标 $\vartheta \in$ 映至 ϑ 的一个扩张 $\Lambda(\vartheta)$，使其扩张到稳定子 G_ϑ。

接下来，我们考虑关于固定素数 ℓ的模表示理论。对于 $\chi \in$Irr(G)，存在唯一的非负整数 d(χ)，称为 χ的 ℓ-缺陷，使得 $\ell^{d(\chi)} \nmid |G|_\ell/\chi(1)_\ell$；对于整数 n，我们用 n_ℓ 表示整除 n的最大 ℓ 次幂。对于任意 $d \ge 0$，令 Irr^d(G) 为满足 $d(\chi) = d$ 的 G 的不可约特征标 χ 所成的集合，并以 k^d(G) 表示其基数。与素数 ℓ相关的还有 G的 Brauer ℓ-块集合。每个块都由中心函数 λ_B 唯一确定（见 [Nav98, 第 49] 页）。对于每个 $\chi \in$ Irr(G)，我们用 bl(χ) 表示满足 $\chi \in$ Irr(bl(χ)) 的唯一块。此外，若 $H \le G$ 且 b 是 H的一个块，则 b^G 表示通过 Brauer 归纳得到的 G 的块（若其有定义）。若 B 是 G 的一个块且 $d \ge 0$，则令 Irr^d(B) 为属于块 B 且缺陷为 d的不可约特征标集合。Irr^d(B) 的基数记为 k^d(B)。

我们用一个适用于块的 [Isa76, 问题 5.3] 的类似结果结束这一引言部分，后文将用到它。

引理 2.1. 设 $H \le G$ 为有限群，并考虑 b 的块和 H 以及 B 的块 G。若 ζ 是 G的一个线性特征，则：

(i) 存在 H 的块 $b \cdot \zeta_H$ 和 G 的块 $B \cdot \zeta$，满足

$$\mathrm{Irr}(b \cdot \zeta_H) = \{\psi\zeta_H \mid \psi \in \mathrm{Irr}(b)\} \quad \textit{and} \quad \mathrm{Irr}(B \cdot \zeta) = \{\chi\zeta \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\};$$

(ii) If $b^G = B$, *then* $(b \cdot \zeta_H)^G = B \cdot \zeta$.

证明。 第一点由 [Riz18, 引理 2.1]得出。接下来，设 $g \in G$，并用 $\mathfrak{Cl}_G(g)$ 表示 G的 g 共轭类，用 $\mathfrak{Cl}_G(g)^+$ 表示群代数中相应的共轭类和。由于交集 $\mathfrak{Cl}_G(g) \cap H$是 H共轭类的并集，我们可以找到 $h_1, \ldots, h_n \in \mathfrak{Cl}_G(g) \cap H$，使得

$$\mathfrak{Cl}_G(g) \cap H = \coprod_{i=1}^{n} \mathfrak{Cl}_H(h_i)$$

并且其中 n i 若 $\mathfrak{Cl}_G(g) \cap H$ 为空，则 s 为零。特别地，注意到 $\zeta(h_i) = \zeta(g)$，因为 λ 是一个

G的类函数。现在，采用 [Nav98, p.87] 的记号，我们得到

$$\begin{aligned}\lambda_{B\cdot\zeta}\left(\mathfrak{Cl}_G(g)^+\right) &= \lambda_B\left(\mathfrak{Cl}_G(g)^+\right)\overline{\zeta(g)}\\ &= \lambda_b^G\left(\mathfrak{Cl}_G(g)^+\right)\overline{\zeta(g)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_b\left(\mathfrak{Cl}_H(h_i)^+\right)\overline{\zeta(g)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_b\left(\mathfrak{Cl}_H(h_i)^+\right)\overline{\zeta_H(h_i)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_{b\cdot\zeta_H}\left(\mathfrak{Cl}_H(h_i)^+\right) = \lambda_{b\cdot\zeta_H}^G\left(\mathfrak{Cl}_G(g)\right)\end{aligned}$$

其中，对于每个代数整数 α of $\mathbb{C}$，我们用 $\overline{\alpha}$ 表示其模包含素数 ℓ 的极大理想的约化（见 [Nav98，第 2]章）。这表明 $B\cdot\zeta = (b\cdot\zeta_H)^G$，证毕。

□

2.2 有限约化群与幺正特征标

设 G 是定义在一个正特征 p（不同于 ℓ）的域的代数闭包上的连通约化群，并考虑与某个 $\mathbb{F}_q$-结构相关联的 Frobenius 端同态 $F : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$，其中 q 是 p 的一个幂。簇 G 上的 $\mathbb{F}_q$-有理点集合记为 G^F，称为有限约化群。滥用记号时，我们也将有序对 (G F) 称为有限约化群。

设 L 是 G 的一个抛物子群 P 的 Levi 子群，并假设 L（但不一定是 P）是 F-稳定的。利用 ℓ-进上同调，Deligne–Lusztig [DL76] 和 Lusztig [Lus76] 定义了一个$\mathbb{Z}$-线性映射

$$\mathbf{R}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}\left(\mathbf{L}^F\right) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}\left(\mathbf{G}^F\right)$$

伴随的

$$^*\mathbf{R}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}\left(\mathbf{G}^F\right) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}\left(\mathbf{L}^F\right).$$

精确定义见 [CE04，第 8.3] 节。几乎在所有情形下，这些映射都已知与抛物子群 P 的选择无关（见 [BM11] 和 [Tay18]）；特别是，本文所研究的情形也满足这一点。因此，我们将始终省略 P，并将 $\mathrm{R}_{\mathbf{L}\subseteq\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}$ 简记为 $\mathrm{R}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$。接下来，利用 Deligne–Lusztig 诱导，我们定义 G^F 的幺正特征标 。它们是 G^F 的不可约特征标 χ，并且是某个 F-稳定极大环面 T 的虚特征 $\mathrm{R}_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1_{\mathbf{T}})$ 的不可约成分。G^F 的幺正特征标集合记为 $\mathrm{Uch}(\mathrm{G}^F)$，其基数记为 $\mathrm{k_u}(\mathrm{G}^F)$。类似地，若 B 是 G^F 的一个块，且 d 是一个非负整数，则 $\mathrm{k_u^d}(B)$ 表示交集 $\mathrm{Uch}(\mathrm{G}^F) \cap$ 不可约特征标集 $^d(B)$ 的基数。

2.3 e-Harish-Chandra 理论：幺正特征标

记 e q 模 ℓ 的乘法阶为 ℓ（若其为奇数），否则记 $\ell = 2$模 4 的乘法阶为 e。本节汇集了关于幺正特征标的 [-Harish-Chandra 理论的主要结果。该理论最初由 Fong 和 Srinivasan 86] 为经典群引入，随后 Broué、Malle 和 Michel [进一步将其发展到幺正特征标。Cabanes 和 Enguehard 在 93] CEℓ中阐述了该理论与 Brauer [-块对好素数的相容性，并由

Enguehard 在 [Eng00] 中将其推广至坏素数。这些结果还描述了属于幺正块的特征标（见 [CE94，定理 (iii)]）。作者在 [Ros22c] 中针对素数 ℓ 的一些限制条件，给出了这些特征标的另一种描述（关于这两种描述的比较，另见 [Ros22c，注 4.14] ）。若要更全面地了解这一优美理论，请参阅专著 [CE04] 和 [GM20] 。

构成 e-Harish-Chandra 理论基础的 Φ_e-子群理论由 [BM92] 引入。沿用他们的术语，我们称 G 的一个 F-稳定环面 S 为 Φ_e-环面，如果它的阶多项式是 e-次分圆多项式的幂，也就是说，如果 $P_{(\mathbf{S},F)} = \Phi_e^n$ 对某个整数 n 成立，且 Φ_e 表示 e-次分圆多项式（参见 [CE04，定义 13.3]）。接着，如果存在一个 Φ_e-环面 S，使得 $\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{S})$，我们就称 G 的 Levi 子群 L 为 e-分裂 ***Levi* 子群**。更确切地说，为了强调 Frobenius 端同态 F 的作用，我们称 L 为 $(\mathrm{G}\ F)$ 的 e-分裂 Levi 子群。注意，对任意环面 T，都存在唯一的 T 的极大 Φ_e-环面，记作 T^{Φ_e}（参见 [CE04，命题 13.5 3.4]）。接着可以证明，G 的一个 F-稳定 Levi 子群 L 是 e-分裂的，当且仅当 $\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})^{\Phi_e})$（例如参见 [GM20，命题 3.5.5]）。

接下来，回顾一下，若 L 是 G 的 e-分裂 Levi 子群，且 $\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathrm{L}^F)$ 满足：对于每个 e-分裂 Levi 子群 $\mathrm{M} < \mathrm{L}$，都有 ${}^*\mathrm{R}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{L}}(\lambda) = 0$，则 $(\mathrm{L}\ \lambda)$ 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个幺正 e<style id='5'}-尖点有序对。具有上述性质的特征 λ 称为 L^F 的幺正 e<style id='22'}-尖点特征。我们用 $\mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\mathrm{G}\ F)$ 表示 G F 的幺正 e-尖点有序对的集合，并用 $\mathrm{k}_{\mathrm{c,u}}(\mathrm{G}^F)$ 表示 G^F 的幺正 e-尖点特征的数量。此外，我们将与 e-尖点有序对 $(\mathrm{L}\ \lambda)$ 相联系的 e-***Harish-Chandra* 级数**定义为虚特征 $\mathrm{R}_{\mathrm{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ 的不可约成分集合，记为 $\mathrm{E}(\mathrm{G}^F, (\mathrm{L}\ \lambda))$。

幺正特征标由 Broué、Malle 和 Michel [BMM93，定理 3.2] 借助 e-Harish-Chandra 理论给出参数化。他们的描述可分为两部分。首先，每个幺正特征标都属于唯一一个 e-Harish-Chandra 级数，即

$$\mathrm{Uch}\left(\mathbf{G}^F\right) = \coprod_{(\mathbf{L},\lambda)} \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L},\lambda)\right)$$

其中，$(\mathrm{L}\ \lambda)$ 遍历 G^F 在 $(\mathrm{G}\ F)$ 的幺幂 e-尖点有序对集合上的作用的代表元，详见 [BMM93，定理 3.2 (1)]。这是一个众所周知的事实，本文中将反复使用，恕不另行引用。由上述划分可知，接下来只需参数化幺幂 e-Harish-Chandra 级数。若 $(\mathrm{L}\ \lambda)$ 是一个幺幂e-尖点有序对，我们将对应的 **相对 *Weyl* 群**记为 $W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F := \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})_\lambda^F/\mathrm{L}^F$。于是，[BMM93，定理 3.2 (2)] 通过证明存在一个双射，利用相对 Weyl 群中的特征标来参数化一个 e-Harish-Chandra 级数中的特征标

$$\mathrm{Irr}\left(W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\lambda)^F\right) \to \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L},\lambda)). \tag{2.2}$$

在第 3 节中，我们重新表述 (2.2)，以便得到定理 C。

幺幂 e-Harish-Chandra 级数也用于参数化所谓的**幺正块**，即包含幺正特征标的那些块。这是 [CE94] 的主要结果。更准确地说，若 ℓ 为奇数且是 G 的好素数，并且当 ${}^3\mathrm{D}_4$ 是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个不可约有理分量时满足 $\ell \neq 3$，那么对于 G^F 的每个 ℓ-块 B，都存在一个幺正 e-尖点对 $(\mathrm{L}\ \lambda)$，且 $(\mathrm{L}\ \lambda)$ 在

G^F-共轭作用下唯一，使得 $R_L^G(\lambda)$ 的所有不可约成分都属于块 B。在这种情况下，我们记作 $B = b_{G^F}(L, \lambda)$，并且还有

$$\mathrm{Uch}(\mathbf{G}^F) \cap \mathrm{Irr}\left(b_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{L}, \lambda)\right) = \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L}, \lambda)).$$

此外，[CE94，命题 3.3 (ii) 和命题 4.2] 推出 $\mathrm{bl}(\lambda)^{\mathbf{G}^F} = B$。

2.4 伪幺正特征

记 (G^*, F^*) 为与 (G, F) 对偶的群，其中对偶关系是相对于 G 的一个 F-稳定极大环面 T 和 G^* 的一个 F^*-稳定极大环面 T^* 选定的。若 $\tau : G_{sc} \to [G, 且 G]$ 是单连通覆盖（见 [GM20，注 1.5.13]），则阿贝尔群之间存在同构

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{G}^*)^{F^*} &\to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{G}^F/\tau(\mathbf{G}_{\mathrm{sc}})\right) \\ z &\mapsto \hat{z}_{\mathbf{G}} \end{aligned}$$

根据 [CE04，(8.19)]。注意，若 L 是 G 的一个 F-稳定 Levi 子群，则其对偶 L^* 是 G^* 的一个 F^*-稳定 Levi 子群，并且有 $Z(G^*)^{F^*} \leq Z(L^*)^{F^*}$。特别地，每个 $Z(G^*)^{F^*}$ 中的元素 $z \in$ 都定义了一个 $\hat{}z_{\mathbf{L}}$ 的线性特征标，而特征标的限制给出等式

$$(\hat{z}_{\mathbf{G}})_{\mathbf{L}^F} = \hat{z}_{\mathbf{L}}.$$

在下一个定义中，我们考虑将这些线性特征与幺幂特征标相乘所得的特征标。

定义 2.2. 设 (K, F) 是一个有限约化群，并考虑 $L \leq K$ 的一个 Levi 子群以及一个不可约特征标 $\theta \in$ 不可约特征标集(L^F)。若存在一个元素 $z \in Z(K^*)^{F^*}$，使得 $\theta\hat{}z_{\mathbf{L}}$ 是幺幂的，则称 θ 为 (K, F)-伪幺正 。此外，对于每个幺幂特征标$\lambda \in \mathrm{Uch}(L^F)$，我们将形如 $\lambda\hat{}z_{\mathbf{L}}$ 的 (K, F)-伪幺正特征标集合记为 $\mathrm{ps}_K(\lambda)$，其中 $z \in Z(K^*)^{F^*}$。此外，我们将 L^F 的所有 (K, F)-伪幺正特征标组成的集合记为 $\mathrm{ps}_K(L^F)$。当群 K 与 L 相同时，我们将特征标集合 $\mathrm{ps}_L(L^F)$ 简记为 $\mathrm{ps}(L^F)$。

按照上文引入的术语，如果一个 (K, F) 的 e-Harish-Chandra 级数具有形式 $E(K^F, (L, \nu))$，其中某个 $\nu \in \mathrm{ps}_K(\lambda)$，且 (L, λ) 是 (K, F) 的幺正 e-尖点对，我们就称它为伪幺正的。在这种情况下，我们也称 (L, ν) 为伪幺正 e-尖点对。我们将所有与 $\mathrm{ps}_K(\lambda)$ 中的特征标相关联的级数取并集，记作 $E(K^F, (L, \mathrm{ps}_K(\lambda)))$。由于

$$\mathbf{R}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{K}}(\lambda\hat{z}_{\mathbf{L}}) = \mathbf{R}_{\mathbf{L}}^{\mathbf{K}}(\lambda)\hat{z}_{\mathbf{K}}$$

对于每个 $z \in Z(K^*)^{F^*}$，由 [CE04, (8.20)], 可推知，伪幺正e-Harish-Chandra 级数 $E(K^F, (L, \lambda\hat{}z))$ 中的元素恰好是形如 $\varphi\hat{}z_{\mathbf{K}}$ 的不可约特征标，其中 $\varphi \in E(K^F, (L, \lambda))$ 是某个幺正特征标。此外，根据 [CE04, Proposition 8.26], 我们指出，λ 是集合 $\mathrm{ps}_K(\lambda)$ 中唯一的幺正特征标。同样，集合 $E(K^F, (L, \mathrm{ps}_K(\lambda)))$ 中的幺正特征标就是级数 $E(K^F, (L, \lambda))$ 中的那些特征标。

下面的引理表明，覆盖伪幺正特征的块是正则的，正如[Nav98, p.210]中所定义。

引理 2.3。 设$\mathbf{L}$ 是$\mathbf{G}$ 的一个 F-稳定 *Levi* 子群，并假设 ℓ 是奇数且对$\mathbf{G}$良好。对于每个$\mathbf{L}^F \le H \le \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})${v23>中的元素，以及每个特征 $\vartheta \in$ 不可约特征标集(H)，若其位于$\mathrm{ps}(\mathbf{L}^F)$中的某个伪幺正特征之上，则块$\mathrm{bl}(\vartheta)$是$\mathbf{L}^F$-正则的。特别地，*Brauer* 诱导块$\mathrm{bl}(\vartheta)^H$有定义，并且是覆盖 $H\,\mathrm{bl}(\vartheta)$的唯一块。

证明。设 $\varphi \in$Uch(L^F) 和 $z \in$Z(L*)$^{F^*}$ 满足 $\varphi\hat{}z_{\mathbf{L}}$ 位于特征 ϑ 之下，并选择 L 的一个幺幂 e-尖点对 (M μ)，使得 $\varphi \in$E(L^F, (M μ)). 特别地，根据 [CE94]，bl(φ) $=b_{\mathbf{L}^F}$(M μ)。若 $Q :=$ Z(M)$_\ell^F$，则根据 [CE94, 命题 3.3 (ii)]，M^F = C$_{G^F}$(Q)。此外，注意到 [CE94, 命题 4.2] 蕴含 bl(φ) $= b_{\mathbf{L}^F}$(M μ) =bl(μ)$^{\mathbf{L}^F}$；而 [Riz18, 引理 2.1] 蕴含 bl(φ) 与 bl($\varphi\hat{}z_{\mathbf{L}}$) 具有相同的缺陷群。现在应用 [Nav98, 引理 4.13 和定理 9.26],，可以找到 bl(ϑ)、bl(φ) 和 bl(μ) 的缺陷群 D_ϑ、D_φ 和 D_μ，分别满足性质 $D_\mu \le D_\varphi \le D_\vartheta$。由于根据 [Nav98, 定理 4.8],， $Q \le$ O$_\ell$(M^F) $\le D_\mu$，我们推得 $Q \le D_\vartheta$，因此 C$_H(D_\vartheta)$ $\le$C$_H(Q)$ =M^F $\le$L^F。根据 [Nav98, 引理 9.20]，我们得出块 bl(ϑ) 是 L^F-正则的。引理的第二部分现在由 [Nav98, 定理 9.19]得出。 □

3 与特征三元组同构的相容性 s

本节旨在说明如何使双射 (2.2) 与特征三元组同构以及自同构群的作用相容。作者在 [Ros22c, 参数化 B] 中首次提出了这一性质，并在 [Ros22d]中作了进一步研究。我们的定理 C 为这一猜想结果在幺幂 e-Harish-Chandra 级数以及 A 、 B 、 C 型群的情形给出了一个解答。继续之前，我们先说明如何将参数化 (2.2) 改写为更便于使用的形式。为此，设 (L λ) 是 (G F) 的一个幺幂 e- 尖点对，并假设 $\widehat{\lambda}$ 是 λ 到稳定子 N$_{\mathbf{G}}$(L)$_\lambda^F$ 的一个扩张。于是，应用 Gallagher 定理 [Isa76, 推论 6.17] 和 Clifford 对应 [Isa76, 定理 6.11]，可得一个双射

$$\begin{aligned} \mathrm{Irr}\left(W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\lambda)^F\right) &\to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right) \\ \eta &\mapsto \left(\widehat{\lambda}\eta\right)^{\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F} \end{aligned}$$

因此，(2.2) 成立当且仅当存在一个双射

$$\mathcal{E}(\mathbf{G}^F,(\mathbf{L},\lambda)) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right). \tag{3.1}$$

这一新的改述将使我们能够引入前述与特征三元组同构相容的相容性。

3.1 等变性与极大可延拓性

本节将考察参数化 (3.1) 的一些等变性质，这些性质与幺正特征标的极大可延拓性（见 (2.1)）有关。

与前几节一样，考虑一个连通约化群 G，带有 Frobenius 端同态 F : G $\to$ G，它在 G 上定义了一个 $\mathbb{F}_q$-结构。我们用 Aut$_{\mathbb{F}}$(G^F) 表示这样一组自同构：它们是通过将某个与 F 交换的代数群双射态射 σ : G $\to$ G 限制到 $\mathbb{F}_q$-有理点集合 G^F 上而得到的 G^F 的自同构。注意，这种

态射 σ 到 G^F，为方便起见，我们仍记作 σ，是有限群 G^F 的一个自同构。详情请参阅 [CS13, 第 2 节。4] 特别地，注意到任何具有上述性质的态射 σ 都由其在 G^F 上的限制唯一确定，但相差 F 的某个幂；因此 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$ 作用于 G 的 F-稳定闭连通子群集合。于是，给定 G 的一个 F-稳定闭连通子群 H，我们可以定义集合 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{\mathbf{H}}$，其中包含上述自同构 σ，它们稳定代数群 H。

现在，令 ℓ 为一个不整除 q 的素数，并用 e 表示 q 模 ℓ 的阶，或者在 $\ell = 2$时表示其模 4 的阶。为了控制自同构在单幺 e-Harish-Chandra 级数上的作用，我们利用 Cabanes 和 Späth 的一个结果。更确切地说，在 [CS13 的定理 3.4] 中，他们证明了 Broué、Malle 和 Michel 在 [BMM93 的定理 3.2 (2)] 中给出的参数化与集合 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$ 中那些自同构的作用相交换。注意， [CS13 的定理 3.4] 仅考虑单幺 e-尖点有序对 $(\mathrm{L}\ \lambda)$，其中 L 是极小的 e-分裂 Levi 子群（这足以处理 McKay 猜想）。然而，他们的证明对一般情形同样成立。

命题 3.1. 对于每个单幺 e-尖点有序对 $(\mathbf{L}\ \lambda)$，其中 $(\mathbf{G}\ F)$，都存在一个 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-等变双射

$$I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)} : \mathrm{Irr}\left(W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\lambda)^F\right) \to \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F,(\mathbf{L},\lambda)\right)$$

使得

$$I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\eta)(1)_\ell = \left|\mathbf{G}^F : \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L},\lambda)^F\right|_\ell \cdot \lambda(1)_\ell \cdot \eta(1)_\ell$$

对每个 $\eta \in$ 不可约特征标集$(W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}\ \lambda)^F)$。

证明。 这可由 [CS13，定理 3.4] 的证明推出。另见 [Ros22d，定理 3.4]。 □

如本节开头所述，若特征 λ 可延拓到稳定子 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F_\lambda$，则可利用双射 (2.2) 得到 (3.1)。类似的论证也可纳入上文所述的等变性性质，从而得到 (3.1) 的等变版本。注意，根据上文关于自同构的讨论，群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$ 在 e-尖点有序对 $(\mathrm{L}\ \lambda)$ 的集合上作用，因此我们可以定义稳定子 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$。此外，回顾一下，我们用 $d(\chi)$ 表示不可约特征标 χ的 ℓ-缺陷。

推论 3.2。 设 $(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是 $(\mathbf{G}\ F)$ 的一个幺零 e-尖点对，并假设 λ有一个扩张 $\lambda^\circ \in \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F_\lambda)$，且该扩张还是$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-不变的。那么存在一个$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-等变双射

$$\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F,(\mathbf{L},\lambda)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right)$$

使得

$$d(\chi) = d\left(\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\chi)\right)$$

对每个 $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{G}^F,\ (\mathbf{L}\ \lambda))$。

证明。 考虑命题 3.1 给出的双射 $I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}$，并定义映射

$$\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L},\lambda)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right)$$
$$I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\eta) \mapsto (\lambda^\circ\eta)^{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}$$

对每个 $\eta \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F)$，且其中 λ° 是命题中给出的 λ 到 $\mathrm{N_G(L)}^F_\lambda$ 的扩张。根据 Clifford 对应 [Isa76 定理 6.11] 和 Gallagher 定理 [Isa76 推论 6.17]，这是一个定义良好的双射。此外，对于每个满足 $(\mathrm{L}\ \lambda)^\alpha = (\mathrm{L}\ \lambda)$ 的 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$，以及每个 $\eta \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F)$，我们有

$$\left((\lambda^\circ\eta)^{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}\right)^\alpha = \left((\lambda^\circ\eta)^\alpha\right)^{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}$$
$$= (\lambda^\circ\eta^\alpha)^{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}$$

因为 α 稳定 λ°。另一方面

$$I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\eta)^\alpha = I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\eta^\alpha)$$

根据 $I^{\mathbf{G}}(\mathbf{L}\ \lambda)$ 的性质，因此我们得出 $\Omega^{\mathbf{G}}(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-等变的。此外，若我们考虑 $\eta \in \mathrm{Irr}(W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F)$，并定义特征标 $\chi := I^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\eta)$ 和 $\psi := (\lambda^\circ\eta)^{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}$，则命题 3.1 中的次数公式表明

$$\ell^{d(\chi)} = \frac{|\mathbf{G}^F|_\ell}{\chi(1)_\ell} = \frac{|\mathbf{N_G}(\mathbf{L},\lambda)^F|_\ell}{\lambda(1)_\ell \cdot \eta(1)_\ell} = \frac{|\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F|_\ell}{\psi(1)_\ell} = \ell^{d(\psi)}$$

因此，我们得出 $d(\chi) = d(\psi)$，如所需。 □

接下来，我们考虑 [CE04, (15.1)] 中定义的一个正则嵌入 $\mathrm{G} \le \widetilde{\mathrm{G}}$。于是，$\widetilde{\mathrm{G}}$ 是一个连通约化群，其连通中心非平凡，且导出子群与 G 的导出子群重合，亦即 $[\widetilde{\mathrm{G}},\widetilde{\mathrm{G}}] = [\mathrm{G},\mathrm{G}]$。特别地，注意到 $\widetilde{\mathrm{G}} = \mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{G}})\mathrm{G}$，$\widetilde{\mathrm{G}}$ 是 G 的正规子群，且商群 $\widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{G}$ 是一个阿贝尔群。此外，对于 G 的每个 Levi 子群 L，我们可得 $\widetilde{\mathrm{L}} := \widetilde{\mathrm{G}} \cap \mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{G}})\mathrm{L}$ 是 G 的一个 Levi 子群，且 $\mathrm{L} \le \widetilde{\mathrm{L}}$ 仍是一个正则嵌入。本文中将反复使用这些观察，不再另行说明。

我们还回顾一下，根据 [DM91, Proposition 13.20]，，特征标的限制给出了 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$ 的幺正特征标与 G^F 的幺正特征标之间的双射。特别地，G^F 的每个幺正特征标都是 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$-不变的。利用这一观察，我们可以比较 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$ 中的相对 Weyl 群与 G^F 中的相对 Weyl 群。

引理 *3.3.* 设 $(L\ \lambda)$ 是 $(G\ F)$ 的一个幺零 e-尖点对，令 $\widetilde{L} = LZ(G)$，并考虑 λ 到 $\widetilde{L}^F$ 的一个幺零扩张 $\widetilde{\lambda}$。那么，$N_{\widetilde{G}}(\widetilde{L}\ \widetilde{\lambda})^F \simeq W_{\mathbf{G}}(L\ \lambda)^F$。

证明。 由于 $\widetilde{\lambda}$ 延拓了 λ，显然稳定子 $\mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_{\widetilde{\lambda}}$ 包含于 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F_\lambda$ 中。另一方面，设 $x \in \mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_\lambda$，并注意到 $\widetilde{\lambda}^x$ 是 $\widetilde{\mathrm{L}}^F$ 的幺幂特征标，且其限制为 $\lambda^x = \lambda$。于是，[DM91，命题 13.20] 推出 $\widetilde{\lambda}^x = \widetilde{\lambda}$，因此 $x \in \mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_{\widetilde{\lambda}}$。由此我们还可得出 $\mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_{\widetilde{\lambda}} = \widetilde{\mathrm{L}}^F\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F_\lambda$，进而得到 $W_{\mathbf{G}}(\widetilde{\mathrm{L}}\ \widetilde{\lambda})^F \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F$。 □

作为上述引理的推论，我们证明：当 λ 延拓到其稳定子 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F_\lambda$ 时，$\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})$ 中每个在 λ 之上的不可约特征标都是 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F$-不变的，并且延拓到 $\mathrm{N}_{\sim\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F$。

推论 3.4. 设 $(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是 $(\mathbf{G}\ F)$ 的一个幺正 e-尖点对，并假设 λ 有一个扩张 $\lambda^\circ \in$ 不可约特征标集 $(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F_\lambda)$。那么，$\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F$ 中位于 λ 之上的每个特征标都可扩张到 $\mathbf{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$。

证明。首先，我们固定 $\widetilde{\lambda}$ 的一个幺正扩张 λ 到 $\widetilde{\mathrm{L}}^F$，并回顾根据引理 3.3，有 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_\lambda = \mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_{\widetilde{\lambda}}$。接着，应用 [Spä10, 引理 4.1 (a)]，可推出存在 $\widetilde{\lambda}^\circ$ 的一个扩张 λ° 到 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_\lambda$，且它也扩张了 $\widetilde{\lambda}$。现在考虑 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F$ 中位于 λ 之上的一个不可约特征标 ψ。由 Gallagher 定理 [Isa76, 推论 6.17] 以及 Clifford 对应 [Isa76, 定理 6.11],，可知存在相对 Weyl 群 $W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F$ 的一个不可约特征标 η，使得 ψ 由不可约特征标 $\psi_0 := \eta\lambda^\circ$ 诱导而来。此外，利用引理 3.3，可得 $W_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\widetilde{\mathrm{L}}\ \widetilde{\lambda})^F \simeq W_{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)^F$。于是，$\eta$ 视为 $\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F_\lambda$ 的一个特征标时，存在其扩张到 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F_\lambda$，记为 $\widetilde{\eta}$。现在，定义 $\widetilde{\psi}_0 := \widetilde{\eta}\widetilde{\lambda^\circ}$，并注意到 $\widetilde{\psi}_0$ 位于 $\widetilde{\lambda}$ 之上。由 Clifford 对应可知，由 $\sim\psi_0$ 诱导的 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F$ 的特征标 $\widetilde{\psi}$ 是不可约的，因此应用 [Isa76, 问题 5.2],，可得 ψ 扩张了 ψ_0。证明完毕。

□

现在，我们可以构造群 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$ 中幺正 e-Harish-Chandra 级数的参数化，使其与推论 3.2 中通过特征标限制给出的双射 $\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}$ 一致。

命题 *3.5.* 设 *$(L\ \lambda)$* 是 *$(G\ F)$* 的一个幺正 e-尖点对，并假设 λ 有一个扩张 $\lambda^\circ \in Irr(N_{\mathbf{G}}(L)^F_\lambda)$，且该扩张在 $Aut_{\mathbb{F}}(G^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$ 下不变。若 $\widetilde{\lambda}$ 是 λ 到 $\widetilde{L}^F$ 的一个幺正~扩张，则存在一个双射 $\widetilde{\Omega}^{\mathbf{G}}(\widetilde{L}\ \widetilde{\lambda})$，使下图交换

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}\left(\widetilde{\mathbf{G}}^F,(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})\right) & \xrightarrow{\widetilde{\Omega}^{\widetilde{\mathbf{G}}}_{(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}} & \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F \mid \widetilde{\lambda}\right) \\ \mathrm{Res}^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F}\downarrow & & \downarrow\mathrm{Res}^{\mathbf{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F}_{\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F} \\ \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F,(\mathbf{L},\lambda)\right) & \xrightarrow[\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}]{} & \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right) \end{array}$$

并且其中 $\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}$ 是推论 *3.2* 给出的双射。

证明。首先，根据 DM91，命题 13，注意到 λ 有一个扩张 $\widetilde{\lambda}$ 到 $\widetilde{\mathrm{L}}^F$。此外，根据 CE94，命题 3，限制从 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$ 到 G^F 诱导出一个双射，将集合 $\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{G}}^F, (\widetilde{\mathrm{L}}\ \widetilde{\lambda}))$ 映到 $\mathrm{E}(\mathrm{G}^F, (\mathrm{L}\ \lambda))$。接下来，考虑一个在 λ 之上的特征标 $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F)$，并注意到根据推论 3.4，$\psi$ 有一个扩张 $\widetilde{\psi}_0 \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F)$。令 $\widetilde{\lambda}_0$ 为限制 $\widetilde{\psi}_{0,\widetilde{\mathbf{L}}^F}$ 的一个不可约成分，并注意到由于 $\widetilde{\mathrm{L}}^F/\mathrm{L}^F$ 是阿贝尔群，$\widetilde{\lambda}_0$ 是 λ 的一个扩张。现在，Gallagher 定理 [Isa76，推论 6 表明，存在一个线性特征 $\nu \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{L}}^F/\mathrm{L}^F)$，使得 $\widetilde{\lambda}_0\nu = \widetilde{\lambda}$。由于 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F/\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F \simeq \widetilde{\mathrm{L}}^F/\mathrm{L}^F$，我们可以将 ν 与其到 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F$ 的扩张等同。由此可知，特征 $\widetilde{\psi} := \widetilde{\psi}_0\nu$ 是 ψ 到 $\mathrm{N}_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathrm{L})^F$ 的一个扩张，且在 $\widetilde{\lambda}$ 之上。于是，赋值 $\psi \mapsto \widetilde{\psi}$ 定义了 $\mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})^F \mid \lambda)$ 之间的一个双射

以及 $\mathrm{Irr}(N_{\tilde{G}}(L)^F \mid \tilde{\lambda})$，其逆映射由特征标的限制给出。现在我们可以定义

$$\tilde{\Omega}^{\tilde{\mathbf{G}}}_{(\tilde{\mathbf{L}},\tilde{\lambda})}(\tilde{\chi}) := \tilde{\psi}$$

对于每个 $\tilde{\chi} \in \mathcal{E}(\tilde{\mathbf{G}}^F, (\tilde{\mathbf{L}}\ \tilde{\lambda}))$ 以及 $\tilde{\psi} \in$ 不可约特征标集$(N_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F \mid \tilde{\lambda})$ 只要 $\Omega^{\mathbf{G}}(\mathrm{L}\ \lambda)(\tilde{\chi}_{\mathbf{G}^F}) = \tilde{\psi}_{N_{\mathbf{G}}(\mathrm{L})}$ 个 $_{F}$. □

3.2 特征三元组的G^F-块同构的构造

从现在起，我们假设 G 是单连通的单群，且属于 A、B 或 C 型。此外，假设 ℓ 为奇数，并将 q 模 ℓ的阶记为 e。

现在，我们对自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(G^F)$ 作更明确的构造。取一个最大分裂环面 T_0，使其包含于 G 的一个 F-稳定的 Borel 子群 B_0 中。这个选择对应于一组图自同构 $\gamma : G \to G$ 以及一个域自同态 $F_0 : G \to G$。更确切地说，若考虑与选择 $T_0 \subseteq B_0$,对应的单根集合 $\Delta \subseteq \Phi(G, T_0)$，则存在一个自同构 $\gamma : G \to G$，由 $\gamma(x_\alpha(t)) := x_{\gamma(\alpha)}(t)$ 给出，对每个 $t \in \mathbb{G}_a$ 和$\alpha \in \pm\Delta$ 均成立；其中 γ 是 Δ的 Dynkin图的一个对称，而 $F_0(x_\alpha(t)) := x_\alpha(t^p)$ 对每个 $t \in \mathbb{G}_a$ 和 $\alpha \in \Phi(G, T_0)$ 均成立。这里，我们用 $x_\alpha : \mathbb{G}_a \to G$ 表示与 $\alpha \in \Phi(G, T_0)$ 对应的单参数子群。我们将 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(G^F)$ 中由上述图自同构和域自同构生成的子群记为 A。

~此外，我们选择正则嵌入 $G \leq G$，使其定义方式保证图自同构和~域自同构都能扩张到 G （例如参见 [MS16, Section 2B]）。特别地，群 A 通过自同构作用于 $\tilde{G}^F$，因此我们可以构造作用于 G^F 的外半直积 $\tilde{G}^F \rtimes A$。事实证明，$\tilde{G}^F \rtimes A$ 和 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(G^F)$ 在有限群 G^F 上诱导相同的自同构集合（例如参见 [GLS98, Section 2.5]）。

在本节中，我们考虑 (G F) 的一个固定幺零 e-尖点对 (L λ)，以及 λ 到 $\tilde{L}^F$ 的一个幺零扩张 $\tilde{\lambda}$ （其存在性由 [DM91, Proposition 13.20] 保证）；一如既往，我们定义 L := LZ(G)。在下一个引理中，我们将证明在我们的假设下，推论 3.2 的条件成立。

引理 3.6. 存在一个将 λ 扩张到$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F_\lambda$的扩张 λ°，它是$(\tilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A})^{(\mathbf{L},\lambda)}$-不变的。

证明。 利用 [BS20，定理 4.3 (i)], [Bro22b，定理 1.2 (a)] 以及 [Bro-Ruh], 的结果，我们得到一个将 λ 扩张到 $N_{\mathbf{G}}(L)^F_\lambda$的扩张 λ°，它是 $(G^F A)^{(\mathbf{L},\lambda)}$-不变的。由于 $(\tilde{G}^F A)^{(\mathbf{L},\lambda)} = \tilde{L}(G^F A)^{(\mathbf{L},\lambda)}$，只需证明 λ° 是 $\tilde{L}^F$-不变的。然而，根据引理 3.3 和 [Spä10，引理 4.1 (a)]，后一个断言可直接由 λ° 可扩张到 $N_{\tilde{G}}(L)^F_\lambda$这一事实得出。 □

作为上述引理的直接推论，我们得出，$N_{\mathbf{G}}(L)^F$中每个位于 λ 之上的特征都可扩张到 $N_{\tilde{\mathbf{G}}}(L)^F$。这可视为 [DM91，命题 13.20]的局部类比。

Le引理 3.7. $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F$中每个在 λ 之上的不可约特征标都可扩张到 $N_{\tilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$。

证明。 这由推论 3.4 得出，其假设由引理 3.6 满足。 □

我们指出，在我们的假设下，$N_{\mathbf{G}}(L)^F$ 中位于 λ之上的每个不可约特征标都可以扩张到其在 $N_{\widetilde{\mathbf{G}}}(L)^F$中的稳定子，这是因为根据[GM20, Proposition 1.7.5]，商群 $N_{\widetilde{G}}(L)^F/N_{\mathbf{G}}(L)^F$是循环的。不过，在上面的引理中，我们还通过独立方法证明了每个这样的特征标都是 $N_{\widetilde{\mathbf{G}}}(L)^F$-不变的。

利用引理 3.6，我们现在可以定义双射 $\Omega := \Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}$ 和 $\widetilde{\Omega}^{\mathbf{G}}{}_{(\widetilde{\mathbf{L}},\widetilde{\lambda})}$，分别如推论 3.2 和命题 3.5 所述。下文中，我们考虑特征标集 $G := E(G^F, (L\ \lambda))$, $L := \mathrm{Irr}(N_{\mathbf{G}}(L)^F \mid \lambda)$, $\widetilde{G} := E(\widetilde{G}^F, (\widetilde{L}\ \widetilde{\lambda}))$ 和 $\widetilde{L} := \mathrm{Irr}(N_{\widetilde{\mathbf{G}}}(L)^F \mid \widetilde{\lambda})$。接下来，我们的目标是证明参数化 Ω 与特征三元组的 G^F-块同构相容。我们首先检查此类同构存在所需的群论性质（参见 [Spä17，注 3.7 (i)]）。

引理 *3.8.* 对每个 $\chi \in G$ 和 $\psi := \Omega(\chi) \in L$，我们有 $(\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\chi} = (\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\psi}$ 以及 $\widetilde{G}^F A_\chi = G^F(\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\psi}$。

证明。我们按照 [Ros22c, 引理 4.2] 的证明进行。首先注意到，由于映射 Ω 是 $(\widetilde{G}^F A)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-等变的，因此 $(\widetilde{G}^F A)_{(\mathbf{L},\lambda),\chi} = (\widetilde{G}^F A)_{(\mathbf{L},\lambda),\psi}$。令 $U(\chi) := (\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\chi}$，并令 $U(\psi) := (\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\psi}$。首先，考虑 $x \in U(\chi)$，并注意到，根据 [BMM93, 定理 3.2 (1)]，存在 $y \in N_{\mathbf{G}}(L)^F$，使得 $(L\ \lambda)^{xy} = (L\ \lambda)$。特别地，$xy \in (\widetilde{G}^F A)_{(\mathbf{L},\lambda),\chi} = (\widetilde{G}^F A)_{(\mathbf{L},\lambda),\psi}$，因此 $x \in U(\psi)$，因为 $\psi^y = \psi$。这表明 $U(\chi) \le U(\psi)$。另一方面，假设 $x \in U(\psi)$。由 Clifford 定理，存在 $y \in N_{\mathbf{G}}(L)^F$，使得 $\lambda^{xy} = \lambda$，因而 $xy \in (\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\psi} = (\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L},\chi}$。由于 $\chi^y = \chi$，我们推出 $x \in U(\chi)$，进而 $U(\chi) = U(\psi)$。最后，只需证明 $\widetilde{G}^F A_\chi = G^F U(\chi)$。首先注意到，由于 χ 是 $\widetilde{G}^F$- 不变的，$G^F U(\chi) \le \widetilde{G}^F A_\chi$。另一方面，对于 $x \in \widetilde{G}^F A_\chi$，根据 [BMM93, 定理 3.2 (1)]，我们知道 $(L\ \lambda)^x$ 与 $(L\ \lambda)$ G^F-共轭。因此，我们得到 $x \in G^F U(\chi)$，如上所述，这就完成了证明。

□

现在我们应用引理 3.8，证明映射 Ω 满足一些有用的等变性质。在此之前，我们需要引入一些记号。为此，考虑一对 (G^*, F^*) $\widetilde{}$，它与 $(G\ F)$ 对偶；再考虑一对 (G^*, F^*)，它与 $(G\ F)$ 对偶。令 $i^* : G^* \to G^*$ 为由对偶性从包含关系 $G \le \widetilde{G}$ 诱导的满射，并注意到 $\mathrm{Ker}(i^*) = Z(\widetilde{G}^*)$，因为 G 是单连通的（见 [CE04，第 15.1] 节）。如 [CE04, (15.2)], 所示，存在一个同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(i^*)^F &\to \mathrm{Irr}\left(\widetilde{\mathbf{G}}^F/\mathbf{G}^F\right) \\ z &\mapsto \widehat{z}_{\widetilde{\mathbf{G}}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

此外，若 L 是 G 的 F-稳定 Levi 子群，且 $z \in \mathrm{Ker}(i^*)$，则我们定义 $\widehat{z}_{\widetilde{\mathbf{L}}}$ 为 $\widehat{z}_{\widetilde{\mathbf{G}}}$ 在 $\widetilde{L}^F$ 上的限制，并定义 $\widehat{z}_{N_{\widetilde{\mathbf{G}}}(L)}$ 为 $\widehat{z}_{\widetilde{\mathbf{G}}}$ 在 $N_{\widetilde{G}}(L)^F$ 上的限制。令 $K := \mathrm{Ker}(i^*)$，从而得到群 K 在 $\widetilde{G}^F$、$\widetilde{L}^F$ 和 $N_{\widetilde{\mathbf{G}}}(L)^F$ 的特征标上的作用，该作用按 [Ros22d，定义 2.1] 中的方式定义。此外，我们考虑外半直积 $(\widetilde{G}^F A) \rtimes K$，其定义如下：当 $x \in \widetilde{G}^F A$ 且 $z \in K$ 时，令 z^x 为 K 中与商群 $\widetilde{G}^F/G^F$ 的特征 $(\widehat{z}_{\widetilde{\mathbf{G}}})^x$ 通过 (3.2) 中指定的同构相对应的唯一元素。于是，对于 G 的每个 F-稳定 Levi 子群 L，我们得到 $(\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L}} \rtimes K$ 在 $\widetilde{L}^F$ 和 $N_{\widetilde{\mathbf{G}}}(L)^F$ 的不可约特征标上的作用。我们用 $((\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L}} \rtimes K)_{\widetilde{\lambda}}$ 表示 $\widetilde{\lambda} \in \mathrm{Irr}(\widetilde{L}^F)$ 的稳定子。特别地，由此可知 $((\widetilde{G}^F A)_{\mathbf{L}} \rtimes K)_{\widetilde{\lambda}}$ 作用于特征标集 $\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{L}$。接下来，我们证明双射 $\widetilde{\Omega}$ 与此作用相容。

引理 3.9. 双射 $\widetilde{\Omega}$ 是$(\mathbf{N}\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F(\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A})^{(\mathbf{L},\lambda)}\rtimes\mathcal{K})\tilde{\lambda}$-等变的。

$\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\qquad\qquad\widetilde{\quad}\qquad\widetilde{\quad}\qquad\widetilde{\quad}$证明。 设 $\widetilde{\chi}\in\mathrm{G}$ 和 $\psi\in\mathrm{L}$。根据 Ω 的定义，我们有 $\Omega(\widetilde{\chi})=\psi$ 当且仅当 $\Omega(\chi)=\psi$ 其中$\chi:=\widetilde{\chi}_{\mathbf{G}^F}$且 $\psi:=\widetilde{\psi}_{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}$。现在，若考虑 $g\in\mathrm{N}\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{L})^F$、 $x\in(\widetilde{\mathrm{G}}^F\mathrm{A})^{(\mathbf{L},\lambda)}$ 和 $z\in\mathrm{K}$，使得$\widetilde{(gx,z)}$ 稳定 λ，那么我们得到

$$\widetilde{\Omega}\left(\widetilde{\chi}^{(gx,z)}\right)=\widetilde{\psi}^{(gx,z)}$$

当且仅当

$$\Omega\left(\left(\widetilde{\chi}^{(gx,z)}\right)_{\mathbf{G}^F}\right)=\left(\widetilde{\psi}^{(gx,z)}\right)_{\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F}. \tag{3.3}$$

然而，由于 $\widetilde{\chi}^{(gx,z)}$ 在 G^F 上的限制与 χ^x 一致，且 $\widetilde{\psi}^{(gx,z)}$ 在 $\mathrm{N_G(L)}^F$ 上的限制与 ψ^x 一致，我们根据推论 3.2 中所述 Ω 的等变性质，推得等式 (3.3) 成立。

□

构造用于得到 G^F-块特征三元组同构所需的射影表示，其主要依据之一是以下两个关于极大可延拓性的引理。

引理 3.10. 关于包含关系 $\mathbf{G}^F\trianglelefteq\mathbf{G}^F\mathcal{A}$，$\mathcal{G}$ 具有极大可延拓性；也就是说，每个特征 $\chi\in\mathcal{G}$ 都可以扩张到 $\mathbf{G}^F\mathcal{A}_\chi$。

证明。 若 G 是 B 型或 C 型，则由 [Isa76，推论 11.22] 可得结果，因为 A 是循环的。于是，我们可以假设 G 是 A 型；此时，结果由 [CS17，定理 4.1]得出（另见 [Mal08，定理 2.4]）。

□

Th上述引理的局部版本是 [BS20] 中所得结果的推论 .

引理 3.11. 关于包含关系 $\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F\trianglelefteq(\mathbf{G}^F\mathcal{A})_\mathbf{L}$，$\mathcal{L}$ 具有极大可延拓性；也就是说，每个特征 $\psi\in\mathcal{L}$ 都可以扩张到 $(\mathbf{G}^F\mathcal{A})_{\mathbf{L},\psi}$。

证明。 如同引理 3.10 的证明，只需在 G 为 A 型的情形下证明该结果。事实上，若 G 是 B 型或 C 型，则商群 $(\mathrm{G}^F\mathrm{A})^{(\mathbf{L},\psi)}/\mathrm{N_G(L)}^F$ 是循环的，因为它是 A 的一个子商。现在，若 G 是 A 型，则结果由 [BS20，定理 1.2] 得出。

□

最后，我们可以开始为双射 Ω 构造特征三元组同构。作为第一步，我们得到一种较弱的同构，称为 G^F-中心特征三元组同构，记作 $\sim^c_{\mathbf{G}^F}$。其要求见 [Spä17, 注 3.7 (i)-(iii)]，并将关于缺陷群的条件替换为要求 $\mathrm{C}_G(N)\leq H_1\cap H_2$，其中沿用该处的记号。精确定义见 [Ros22b, 定义 3.3.4]

命题 3.12. 对于每个 $\chi\in\mathcal{G}$ 和 $\psi:=\Omega(\chi)\in$，我们有

$$\left(\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A}_\chi,\mathbf{G}^F,\chi\right)\sim^c_{\mathbf{G}^F}\left((\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A})_{\mathbf{L},\psi},\mathbf{N_G}(\mathbf{L})^F,\psi\right).$$

证明。我们首先构造与 χ 和 ψ 相关的射影表示。根据命题 3.5，我们可以找到 χ 到 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$ 的幺正扩张 $\widetilde{\chi} \in \widetilde{\mathrm{G}}$。此外，根据引理 3.10，存在 χ 到 $\mathrm{G}^F\mathrm{A}\chi$ 的扩张 χ'。令 $\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{glo}}$ 为一个赋予 $\widetilde{\chi}$ 的 $\widetilde{\mathrm{G}}^F$ 表示，并令 $\mathrm{D}'_{\mathrm{glo}}$ 为一个赋予 χ' 的 $\mathrm{G}^F\mathrm{A}\chi$ 表示。现在， [Spä12, 引理 2.11] 蕴含

$$\mathcal{P}_{\mathrm{glo}} : \left(\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A}\right)_{\chi} \to \mathrm{GL}_{\chi(1)}(\mathbb{C})$$

由 $\mathrm{P}_{\mathrm{glo}}(x_1x_2) := \widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{glo}}(x_1)\mathrm{D}'_{\mathrm{glo}}(x_2)$ 定义，对每个 $x_1 \in \widetilde{\mathrm{G}}^F$ 和 $x_2 \in \mathrm{G}^F\mathrm{A}\chi$，它都是与 χ 相关联的射影表示。接下来，注意到 $\widetilde{\psi} := \widetilde{\Omega}(\widetilde{\chi}) \in \widetilde{\mathrm{L}}$ 是 ψ 到 $\mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$ 的一个扩张，并考虑由引理 3.11 给出的 ψ'，它是 ψ 到 $(\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{\mathbf{L},\psi}$ 的一个扩张。令 $\widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{loc}}$ 为 $\mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$ 的一个表示，使其赋予 $\widetilde{\psi}$；令 $\mathrm{D}'_{\mathrm{loc}}$ 为 $(\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{\mathbf{L},\psi}$ 的一个表示，使其赋予 ψ'。再次由 [Spä12, 引理 2.11] 可知，映射

$$\mathcal{P}_{\mathrm{loc}} : \left(\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A}\right)_{\mathbf{L},\psi} \to \mathrm{GL}_{\psi(1)}(\mathbb{C})$$

对每个 $x_1 \in \mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$ 和 $x_2 \in (\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{\mathbf{L},\psi}$，由 $\mathrm{P}_{\mathrm{loc}}(x_1x_2) := \widetilde{\mathrm{D}}_{\mathrm{loc}}(x_1)\mathrm{D}'_{\mathrm{loc}}(x_2)$ 给出的都是与 ψ 相关联的射影表示。我们分别将 $\mathrm{P}_{\mathrm{glo}}$ 和 $\mathrm{P}_{\mathrm{loc}}$ 的因子集记为 α_{glo} 和 α_{loc}。正如 [Ros22d, 定理 4.3], 的证明中所解释的，要证明 α_{glo} 经由同构 $\widetilde{\mathrm{G}}^F\mathrm{A}\chi/\mathrm{G}^F \simeq (\widetilde{\mathrm{G}}^F\mathrm{A})_{\mathbf{L},\psi}/\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F$ 与 α_{loc} 一致，只需证明

$$(\mu_x^{\mathrm{glo}})_{\mathbf{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F} = \mu_x^{\mathrm{loc}} \tag{3.4}$$

对每个 $x \in (\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{\mathbf{L},\chi}$ 且其中 $\mu_x^{\mathrm{glo}} \in \mathrm{Irr}(\widetilde{\mathrm{G}}^F/\mathrm{G}^F)$ 和 $\mu_x^{\mathrm{loc}} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F/\mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F)$ 由 Gallagher 定理确定（参见 [Isa76, 推论 6.17]），分别满足等式 $\widetilde{\chi} = \mu_x^{\mathrm{glo}}\widetilde{\chi}^x$ 和 $\widetilde{\psi} = \mu_x^{\mathrm{loc}}\widetilde{\psi}^x$。由于 $(\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{\mathbf{L},\chi} = \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F(\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{(\mathbf{L},\lambda),\chi}$，我们可以假设 x 稳定λ。设 $z \in \mathrm{K}$ 使得 $\mu_x^{\mathrm{glo}} = \hat{}z_{\widetilde{\mathbf{G}}}$，并注意到 (x, z) 是 $(\mathrm{G}^F\mathrm{A})_{(\mathbf{L},\lambda),\chi} \rtimes \mathrm{K}$ 中稳定 $\widetilde{\chi}$ 的一个元素。然后，应用 [BMM93, 定理 3.2 (1)],，我们推得 $\widetilde{\lambda}$ 和 $\widetilde{\lambda}^{(x,z)}$ 在 $\mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$ 下共轭，因此可以选取 $g \in \mathrm{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F$，使得 $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}^{(x,z)})^g = \widetilde{\lambda}^{(xg,z)}$。换言之

$$(xg, z) \in \left(\mathbf{N}_{\widetilde{\mathbf{G}}}(\mathbf{L})^F(\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A})_{(\mathbf{L},\lambda)} \rtimes \mathcal{K}\right)_{\widetilde{\lambda}}$$

因此，引理 3.9 表明，等式 $\widetilde{\chi} = \widetilde{\chi}^{(xg,z)}$ 成立当且仅当 $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}^{(xg,z)}$成立。由此，我们立即得到 (3.4) 中所需的等式。

接下来，分别用 ζ_{glo}和 ζ_{loc}表示与 $\mathrm{P}_{\mathrm{glo}}$和 $\mathrm{P}_{\mathrm{loc}}$相关联的标量函数。为了完成证明，还需证明 ζ_{glo}和 ζ_{loc}在 $\mathrm{C}_{(\widetilde{\mathbf{G}}^F\mathcal{A})\chi}(\mathrm{G}^F) = \mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{G}}^F)$上相等。与 Ros22d 的定理 4.3], 的证明类似，只需证明 $\widetilde{\chi}$和 $\widetilde{\psi}$在 $\mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{G}}^F)$上的限制都是某个共同不可约成分的倍数。这是因为幺正特征标的核包含中心。事实上，一方面，$1_{\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}^F)}$ 是 $\widetilde{\chi}_{\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}^F)}$ 的唯一不可约成分，因为 $\widetilde{\chi}$是幺幂特征标。另一方面，$\widetilde{\psi}$位于 $\widetilde{\lambda}$之上；又由于 $\mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{G}}^F) \leq \mathrm{Z}(\widetilde{\mathrm{L}}^F)$ 且 λ是幺幂特征标，我们可得 $1_{\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}^F)}$ 是 $\psi_{\mathbf{Z}(\widetilde{\mathbf{G}}^F)}$的唯一不可约成分。证明至此完成。 □

我们通过验证剩余条件 [Spä17，注 3.7 (iv)]，结束本节，并为映射 Ω 得到所需的 G^F-块特征三元组同构。

命题 3.13。 对于每个 $\chi \in \mathcal{G}$ 和 $\psi := \Omega(\chi) \in$ ，我们有

$$\left(\widetilde{\mathbf{G}}^F \mathcal{A}_\chi, \mathbf{G}^F, \chi\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left((\widetilde{\mathbf{G}}^F \mathcal{A})_{\mathbf{L},\psi}, \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F, \psi\right).$$

证明。 根据命题 3.12，只需检验 Spä17，注 3.7 (ii) 和 (iv) 给出的块论要求。首先注意，根据我们的假设，CE94，命题 3.3 (ii) 表明 L

$$\widetilde{}^F = {}_{\mathbf{G}^F} E \qquad E := {}^F_\ell \qquad {}_J = {}_J E \qquad {}^F \le J \le \mathrm{C}(),$$

其中 Z(L) 。特别地，对每个 G G^F，N (L) N ( )。此外，对 N_J(L) 的每个块以及 C_0 的每个缺陷群 D，我们都有 $\mathrm{O}_\ell(\mathrm{N}_J(\mathrm{L})) \le D$，因此 C $\sim_{\mathbf{G}^F}(D) \le \mathrm{N}\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{L})^F$。现在，KS15，定理 B 表明，对于覆盖 C_0的 N$\tilde{\mathrm{G}}$(L) 的每个块，诱导块 ${}_{\mathbf{G}^F}$ 和 $B_0 := C_0^J$均有定义，且覆盖 B_0。

$\widetilde{\chi} \in$ G 是 χ 的一个扩张，并令 $\psi := \Omega(\widetilde{\chi})$。由引理 2.3， C 的 ψ 块与诱导块 $\mathrm{bl}(\widetilde{\lambda})^{\mathbf{N}\tilde{\mathrm{G}}(\mathrm{L})^F}$一致。此外，由 [CE94 命题 4.2] 可知， $\widetilde{\chi}$的块 $\widetilde{B}$与 $b\sim\mathrm{G}^F(\widetilde{\mathrm{L}}\ \widetilde{\lambda}) = \mathrm{bl}(\widetilde{\lambda})^{\widetilde{\mathbf{G}}^F}$一致。于是，根据块诱导的传递性，我们得到 $\widetilde{B} = \widetilde{C}^{\widetilde{}}\mathrm{G}^F$。现在考虑上一段中的 $\mathrm{G}^F \le J \le \widetilde{}\mathrm{G}^F$，并注意到 $\mathrm{bl}(\widetilde{\chi}_J)$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$是被 B覆盖的 J 的唯一一个块。由于 $\mathrm{bl}(\psi_{\mathbf{N}_J}($ L)) 被 C覆盖，我们推得 $\mathrm{bl}(\widetilde{\psi}_{\mathbf{N}_J}(\mathrm{L}))^J$被 $\widetilde{B}$覆盖，因此

$$\mathrm{bl}\left(\widetilde{\chi}_J\right) = \mathrm{bl}\left(\widetilde{\psi}_{\mathbf{N}_J(\mathbf{L})}\right)^J. \tag{3.5}$$

正如 [Ros22d 定理 4.8] 的证明中所解释的，现在我们可以结合 (3.5) 和命题 3.12，通过应用 [Spä17 定理 4.1 (i)] 来完成证明。 □

3.3 定理 C 的证明

定理 *C* 的证明。 根据引理 3.6，在我们对 G 的限制条件下，推论 3.2 的假设成立，因此我们得到一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{(\mathbf{L},\lambda)}$-等变双射

$$\Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{G}^F, (\mathbf{L},\lambda)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F \mid \lambda\right)$$

它保持特征标的 ℓ-缺陷。接下来注意到，根据 [GLS98 第 2.5] 节中的描述，群 $\widetilde{}\mathrm{G}^F\mathrm{A}$ 和 $X := \mathrm{G}^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$ 在 G^F 上诱导相同的自同构。然后，应用 [Spä17 定理 5.3] 和命题 3.13，我们得出

$$\left(X_\chi, \mathbf{G}^F, \chi\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(\mathbf{N}_X(\mathbf{L})_\psi, \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})^F, \psi\right)$$

对于每个 $\chi \in \mathrm{E}(\mathrm{G}^F, (\mathrm{L}\ \lambda))$，且其中 $\psi := \Omega^{\mathbf{G}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\chi)$，证明至此完成。 □

4 定理 C 的推论

本节汇集定理 C 的一些推论。首先，我们将定理 C 中得到的参数化，从单群 G 的幺正 e-Harish-Chandra 级数扩展到 G 的 Levi 子群的伪幺正（见定义 2.2） e-Harish-Chandra 级数。更确切地说，对于 G 的每个 F-稳定 Levi 子群 K，我们构造与形如 (L λ) 的 e-尖点有序对相关联的 e-Harish-Chandra 级数的参数化，其中某个 (K F)-伪幺正特征$\lambda \in \mathrm{ps}_\mathrm{K}(\mathrm{L}^F)$。第二步，我们利用关于特征三元组同构的结果（见推论 4.6），在此参数化之上构造特征双射。这将使我们能够控制位于伪幺正特征标之上的 e-链稳定子的特征（见命题 5.6）。

4.1 Levi 子群伪幺正特征标的参数化

设 K 是 G 的一个 F-稳定 Levi 子群，并令 $\mathrm{K}_0 := [\mathrm{K}, \mathrm{K}]$。注意，由于群 G 是单连通的，根据 [MT11, 命题 12.14]，子群 K_0 也是单连通的。此外，根据我们对 G 类型的假设，可推得 K_0 的单分量只能属于 A、B 或 C 型。

命题 4.1. 对于每个幺正 e-尖点对 $(\mathbf{L}_0, \lambda_0)$，若其属于 $(\mathbf{K}_0, F)$，则存在一个保持缺陷的 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{K}_0^F)_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$-等变双射

$$\Omega^{\mathbf{K}_0}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{K}_0^F, (\mathbf{L}_0, \lambda_0)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{K}_0}(\mathbf{L}_0)^F \,\middle|\, \lambda_0\right)$$

使得

$$\left(Y_\vartheta, \mathbf{K}_0^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{K}_0^F} \left(\mathbf{N}_{Y_\vartheta}(\mathbf{L}_0), \mathbf{N}_{\mathbf{K}_0}(\mathbf{L}_0)^F, \Omega^{\mathbf{K}_0}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}(\vartheta)\right)$$

对于每个 $\vartheta \in \mathcal{E}(\mathbf{K}_0^F, (\mathbf{L}_0, \lambda_0))$，并且其中 $Y := \mathbf{K}_0^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{K}_0^F)$。

证明。注意，K_0 是单代数群 $\mathrm{K}1, \ldots, \mathrm{K}_n$ 的直积，并且 F 的作用置换单分量 K_i。记每个 F-轨道中单分量的直积为 $\mathrm{H}j$，其中 $j = 1, \ldots, t$。$(\mathrm{H}j, F)$ 是 $(\mathrm{K}\ F)$ 的不可约有理分量，并且我们有 $\mathrm{K}_0^F = \mathrm{H}_1^F \times \cdots \times \mathrm{H}_t^F$。类似地，若定义交集 $\mathrm{M}j := \mathrm{L}_0 \cap \mathrm{H}j$，则有分解 $\mathrm{L}_0^F = \mathrm{M}_1^F \times \cdots \times \mathrm{M}_t^F$。特别地，我们可以写成 $\lambda_0 = \mu_1 \times \cdots \times \mu_t$，其中 $\mu_j \in \mathrm{Irr}(\mathrm{M}_j^F)$。在这种情况下，注意 $(\mathrm{M}j, \mu_j)$ 是 $(\mathrm{H}j, F)$ 的幺正 e-尖点对。接下来，设 $\mathrm{H}j = \mathrm{H}_{j,1} \times \cdots \times \mathrm{H}_{j,m_j}$，并注意 $\mathrm{H}_j^F \simeq \mathrm{H}_{j\,1}^{F^{m_j}}$，。根据本节开头的讨论，我们知道 $\mathrm{H}_{j,1}$ 是 A 、 B 或 C 型的单连通单纯群，因此满足定理 C 的假设。于是，通过同构 $\mathrm{H}_j^F \simeq \mathrm{H}_{j\,1}^{F^{m_j}}$，，我们得到一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{H}_j^F)_{(\mathbf{M}_j,\mu_j)}$-等变双射

$$\Omega^{\mathbf{H}_j}_{(\mathbf{M}_j,\mu_j)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{H}_j^F, (\mathbf{M}_j, \mu_j)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{H}_j}(\mathbf{M}_j)^F \,\middle|\, \mu_j\right)$$

保持特征标亏 defect，且满足

$$\left(Y_{j,\vartheta}, \mathbf{H}_j^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{H}_j^F} \left(\mathbf{N}_{Y_{j,\vartheta}}(\mathbf{M}_j), \mathbf{N}_{\mathbf{H}_j}(\mathbf{M}_j)^F, \Omega^{\mathbf{H}_j}_{(\mathbf{M}_j,\mu_j)}(\vartheta)\right) \tag{4.1}$$

对每个 $\vartheta \in \mathrm{E}(\mathrm{H}_j^F, (\mathrm{M}j, \mu_j))$，且其中 $Y_j := \mathrm{H}_j^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{H}_j^F)$。由于集合 $\mathrm{E}(\mathrm{K}_0^F, (\mathrm{L}_0, \lambda_0))$ 和 $\mathrm{Irr}(\mathrm{N}^{\mathbf{K}_0}(\mathrm{L}_0)^F \mid \lambda_0)$ 中的特征标，分别是属于集合 $\mathrm{E}(\mathrm{H}_j^F, (\mathrm{M}j, \mu_j))$ 和 $\mathrm{Irr}(\mathrm{N}^{\mathbf{H}_j}(\mathrm{M}j)^F \mid \mu_j)$ 的特征标的直积，我们得到一个双射

$$\Omega^{\mathbf{K}_0}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{K}_0^F, (\mathbf{L}_0, \lambda_0)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{K}_0}(\mathbf{L}_0)^F \,\middle|\, \lambda_0\right)$$

通过定义

$$\Omega^{\mathbf{K}_0}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}(\vartheta_1 \times \cdots \times \vartheta_t) := \Omega^{\mathbf{H}_1}_{(\mathbf{M}_1,\mu_1)}(\vartheta_1) \times \cdots \times \Omega^{\mathbf{H}_t}_{(\mathbf{M}_t,\mu_t)}(\vartheta_t)$$

对于每个 $\vartheta_j \in \mathrm{E}(\mathrm{H}_j^F, (\mathrm{M}j, \mu_j))$. 最后，仿照 [Ros22c, Proposition 6.5], 的证明进行推导，我们得出双射 $\Omega^{\mathbf{K}_0}{}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$ 保持特征标的缺陷，且是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{K}_0^F)_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$-等变；此外，利用 (4.1)，它诱导出陈述中所要求的 K_0^F-块特征三元组同构。

□

在下一个结果中，我们将自同构群 $Y := \mathrm{K}_0^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{K}_0^F)$ 替换为稳定 K 的 G^F 的自同构群，即 $X := (\mathrm{G}^F \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F))_{\mathbf{K}}$。为此，我们应用所谓的 蝴蝶定理 [Spä17, Theorem 5.3]，它基本上指出，对于任意有限群 G，特征三元组的 G-块同构概念仅取决于在 G 上诱导的自同构。

推论 4.2。 设$(\mathbf{L}_0, \lambda_0)$ 是$(\mathbf{K}_0, F)$的一个幺零 e-尖点对。命题 *4.1* 给出的映射$\Omega^{\mathbf{K}_0}{}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$ 是自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_{\mathbf{K},(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$-等变的，并且满足

$$\left(X_\vartheta, \mathbf{K}_0^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{K}_0^F} \left(\mathbf{N}_{X_\vartheta}(\mathbf{L}_0), \mathbf{N}_{\mathbf{K}_0}(\mathbf{L}_0)^F, \Omega^{\mathbf{K}_0}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}(\vartheta)\right) \tag{4.2}$$

对于每个 $\vartheta \in \mathcal{E}(\mathbf{K}_0^F, (\mathbf{L}_0, \lambda_0))$，且其中 $X := (\mathbf{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F))_{\mathbf{K}}$。

证明。 首先注意到，$\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{\mathbf{K}}$ 包含于 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{K}_0^F)$，因为 K_0 是 K 的一个 F-稳定特征子群。特别地，我们可推得映射 $\Omega^{\mathbf{K}_0}{}_{(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$ 是 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{\mathbf{K},(\mathbf{L}_0,\lambda_0)}$-等变的。接下来，为了得到 (4.2)，我们将 [Spä17 的引理 3.8 和定理 5.3] 应用于命题 4.1 给出的特征三元组同构，具体如 [Ros22c 的推论 6.8]证明中所述。 □

特征三元组的同构在有限群表示论以及局部-整体猜想的研究中发挥着基础性作用。特征三元组同构存在的一个最重要的结果，是能够提升特征双射。例如， [NS14], 的主要结果展示了如何在 Alperin–McKay 猜想的背景下，运用这一技巧构造零高度特征之上的双射 [NS14, 定理 B]。该结果的主要推论源于 Murai 引入的一种论证方法 [Mur12], ，它为著名的 Brauer 零高度猜想给出了一个约化定理 [NS14, 定理 A]。这一策略最终促成了 Brauer 猜想的解决 [Ruh22a] 以及 [MNSFT22]。关于特征三元组同构的其他应用，参见 [Tur17], [NSV20], [Ros22a], [Ruh22b] [Ros23]以及 [MR22, 命题 1.1]。

在下一个结果中，我们利用这一思路，将命题 4.1 给出的双射提升到 Levi 子群 K。因此，我们将定理 C 对单群 G 给出的幺幂特征标 e-Harish-Chandra 级数的参数化，扩展为与 (K F)-伪幺正特征相关的 e-Harish-Chandra 级数的参数化，其中 K 是 G 的任意 F-稳定 Levi 子群。首先，我们需要一个预备引理。

引理 *4.3*。设 *(L λ)* 是 *(K F)* 的一个幺正 e-尖点对，并定义 $X := (G^F \rtimes$自同构群$_{\mathbb{F}}(G^F))_{\mathbf{K}}$。若 $K^F \leq H \leq N_{\mathbf{G}}(L)^F$且 Q 是 $N_H(L)$ 的一个 ℓ-根基子群，则 $C_X(Q) \leq N_X(L)$。

证明。 令 $E := \mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F$，并注意到根据 [CE94, 命题 3.3 (ii)], $\mathrm{L} = \mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(E)$。现在，由于 $\mathrm{O}_\ell(\mathrm{N}_H(\mathrm{L}))$ 是 $\mathrm{N}_H(\mathrm{L})$ 的最小 ℓ-根子群（见 [Dad92, 命题 1.4],），我们推得 $E \leq \mathrm{O}_\ell(\mathrm{N}_H(\mathrm{L})) \leq Q$，因此 $\mathrm{C}_X(Q) \leq \mathrm{C}_X(E) \leq \mathrm{N}_X(\mathrm{L})$，如所需。 □

定理 4.4. 对于 $(\mathbf{K}\ F)$ 的每个单幺正 e-尖点对 $(\mathbf{L}\ \lambda)$，存在一个缺陷保持的自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$ $_{\mathbf{K},(\mathbf{L},\lambda)}$-等变双射

$$\Omega^{\mathbf{K}}_{(\mathbf{L},\lambda)} : \mathcal{E}\left(\mathbf{K}^F, (\mathbf{L}, \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda))\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})^F \mid \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda)\right)$$

使得

$$\left(X_\chi, \mathbf{K}^F, \chi\right) \sim_{\mathbf{K}^F} \left(\mathbf{N}_{X_\chi}(\mathbf{L}), \mathbf{N}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})^F, \Omega^{\mathbf{K}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\chi)\right)$$

对于每个 $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{K}^F,(\mathbf{L},\mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda)))$ 以及其中 $X := (\mathbf{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F))_{\mathbf{K}}$。

证明。回顾 $\mathrm{K}_0 = [\mathrm{K},\ \mathrm{K}]$ 并定义 $\mathrm{L}_0 := \mathrm{L} \cap \mathrm{K}_0$ 以及 λ_0 将 λ 限制到 L_0^F。注意到 $(\mathrm{L0}, \lambda_0)$ 是 $(\mathrm{K0}, F)$ 的一个幺零 e-尖点对。令 $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{K}^*)^{F^*}$ 并考虑一个属于 $\mathrm{E}(\mathrm{K}^F, (\mathrm{L}\ \lambda\hat{}z_{\mathbf{L}}))$ 的特征χ。由于 $\lambda\hat{}z_{\mathbf{L}}$ 在 L_0^F 上的限制与 λ_0 相同，依据 [GM20，推论 3.3.25] 可知，χ 位于 $\mathrm{E}(\mathrm{K}_0^F(\mathrm{L0}, \lambda_0))$ 中某个特征之上。另一方面，假设 $\chi \in$ 不可约特征标集(K^F) 中的 $\chi_0 \in$ 位于 $\mathrm{E}(\mathrm{K}_0^F, (\mathrm{L0}, \lambda_0))$ 中某个特征之上。根据 [CE94，命题 3.1]，特征 χ_0 有一个扩张 $\chi' \in \mathrm{E}(\mathrm{K}^F, (\mathrm{L}\ \lambda))$，因此利用 Gallagher 定理 [Isa76，推论 6.17] 以及 [CE04，(8.19)],，我们可以找到 $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{K}^*)^{F^*}$，使得 $\chi = \chi'\hat{}z_{\mathbf{K}}$。由于根据 [CE04，(8.20)],，$\chi'\hat{}z_{\mathbf{K}}$ 是 $\mathrm{E}(\mathrm{K}^F, (\mathrm{L}\ \lambda\hat{}z_{\mathbf{L}}))$ 中的一个特征，我们得出

$$\mathcal{E}\left(\mathbf{K}^F, (\mathbf{L}, \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda))\right) = \mathrm{Irr}\left(\mathbf{K}^F \mid \mathcal{E}\left(\mathbf{K}_0^F, (\mathbf{L}_0, \lambda_0)\right)\right). \tag{4.3}$$

接下来，假设 $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{\mathbf{K}}(\mathrm{L})^F \mid \lambda\hat{}z_{\mathbf{L}})$。此时，$\psi$ 位于 $\lambda\hat{}z_{\mathbf{L}}$ 在 L_0^F 上的限制之上，而该限制恰与 λ_0 一致。特别地，存在某个 $\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}^{\mathbf{K}_0}(\mathrm{L}_0)^F \mid \lambda_0)$，使得 ψ 位于 φ 之上。另一方面，若 χ 位于某个这样的特征 $\varphi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}^{\mathbf{K}_0}(\mathrm{L}_0)^F \mid \lambda_0)$ 之上，则它也位于 λ_0 之上，因此我们可以找到 $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{K}^*)^{F^*}$，使得 $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_{\mathbf{K}}(\mathrm{L})^F \mid \lambda\hat{}z_{\mathbf{L}})$。这说明

$$\mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})^F \mid \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda)\right) = \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})^F \mid \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{K}_0}(\mathbf{L}_0)^F \mid \lambda_0\right)\right). \tag{4.4}$$

最后，考虑由命题 4.1 给出的映射 $\Omega^{\mathbf{K}_0}$ (L0,λ_0)。将 [Ros22c, 命题 6.1 和注 6.2] 应用于 (4.3) 和 (4.4)，并按照 [Ros22c, 推论 6.10] 的证明中所述，利用推论 4.2 中得到的 K^F-块特征三元组同构，即可得出结论。这里，我们考虑 $A := \mathrm{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$，$A_0 := \mathrm{N}_A(\mathrm{L})$，$K := \mathrm{K}_0^F$, $K_0 = \mathrm{N}^{\mathbf{K}_0}(\mathrm{L})^F = \mathrm{N}^{\mathbf{K}_0}(\mathrm{L}_0)^F$,$G := \mathrm{G}^F$, $X := (\mathrm{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F))_{\mathbf{K}}$, $\mathrm{S} := \mathrm{E}(\mathrm{K}_0^F, (\mathrm{L0}, \lambda_0))$, $\mathrm{S}_0 :=$ 不可约特征标集 $(\mathrm{N}^{\mathbf{K}_0}(\mathrm{L}_0)^F \mid \lambda_0)$，$V := (\mathrm{G}^F \rtimes$ 自同构群 $_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F))_{\mathbf{K},\mathcal{S}}$ 和 $U := (\mathrm{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F))_{\mathbf{K},\mathbf{L},\mathcal{Y}_0}$。注意，由引理 4.3 可知，满足 [Ros22c, 命题 6.1] 所要求的缺陷群条件。□

4.2 Above e-Harish-Chandra 级数

现在，我们通过正规包含关系提升定理 4.4 中的特征双射，进一步推广定理 C。

命题 4.5. 考虑定理 *4.4* 的设定，并设 $\mathbf{K}^F \le H \le \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K})^F$。那么，存在一个缺陷保持的 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_{H,\mathbf{K},(\mathbf{L},\lambda)}$-等变双射

$$\Omega^{\mathbf{K},H}_{(\mathbf{L},\lambda)} : \mathrm{Irr}\left(H \middle| \mathcal{E}\left(\mathbf{K}^F, (\mathbf{L}, \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda))\right)\right) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_H(\mathbf{L}) \middle| \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda)\right)$$

使得

$$(\mathbf{N}_X(H)_\chi, H, \chi) \sim_H (\mathbf{N}_X(H, \mathbf{L})_\chi, \mathbf{N}_H(\mathbf{L}), \psi)$$

对于每个 $\chi \in$ 不可约特征标集$(H \mid \mathcal{E}(\mathbf{K}^F,(\mathbf{L},\mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda))))$ 且其中 $X := (\mathbf{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F))_{\mathbf{K}}$.

证明。 我们将 [Ros22c，命题 6.1] 应用于定理 4.4 给出的双射。我们考虑 $A := \mathrm{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}$ (G^F)、 $G := \mathrm{G}^F$、 $K := \mathrm{K}^F$、 $A_0 := \mathrm{N}_A(\mathrm{L})$、 $X := \mathrm{N}_A(\mathrm{K})$、$\mathrm{S} := \mathrm{E}(\mathrm{K}^F, (\mathrm{L}, \mathrm{ps}_\kappa(\lambda)))$、$\mathrm{S}_0 :=$ 不可约特征标集$(\mathrm{N}_{\mathbf{K}}(\mathrm{L})^F \mid \mathrm{ps}_\kappa(\lambda))$、$U := X_{0,\ \lambda}$、 $V := X_{\mathcal{S}}$ 以及 $J := H$。注意，[Ros22c，命题 6.1] 的条件 (i)–(iii) 由 [BMM93，定理 3.2 (1)]满足。此外，关于缺陷群的要求由引理 4.3 满足。因此，正如 [Ros22c，命题 6.11], 所述，我们通过应用 [Ros22c，命题 6.1 和注 6.2]得到所声称的结果。 □

在继续之前，我们指出它与另一种重要特征对应之间一个有趣的类比。Glauberman 对应在局部-整体计数猜想的研究中发挥着基础性作用，也是大多数约化定理的核心。最基本的形式是：对于作用于有限 ℓ'-群 K上的每个有限 ℓ-群 L，都存在一个双射

$$f_L : \mathrm{Irr}_L(K) \to \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_K(L))$$

它建立在 K 的 L-不变特征标集合与正规化子 $\mathrm{N}_K(L)$ 的特征标之间（例如，参见 [Nav18, 第 2.3]节）。Dade [Dad80] 的一项深刻结果，最近由 Turull [Tur08], 重新证明，表明若有限群 G 的子群 K 和 L 满足 $KP \le H \le K\mathrm{N}_G(L)$，那么 Glauberman 对应 f_L 可以提升为关于 H的特征对应；也就是说，存在一个双射

$$f_L^H : \mathrm{Irr}\,(H \mid \chi) \to \mathrm{Irr}\,(\mathbf{N}_H(L) \mid f_L(\chi)) \tag{4.5}$$

对于每个 $\chi \in$ 不可约特征标集$_L(K)$。另一方面，Broué、Malle 和 Michel [BMM93 定理 3.2] 给出的幺幂 e-Harish-Chandra 级数的参数化，是有限约化群局部-整体计数猜想之证明的核心。值得注意的是，我们的方法给出了幺幂 e-Harish-Chandra 级数上的特征标双射，它与 Glauberman 对应背景下的 (4.5) 类似。这是命题 4.5 的直接推论。

推论 4.6。 考虑定理 *4.4* 的设定，并设 $\mathbf{K}^F \le H \le \mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{K})^F$。那么，存在一个双射

$$\Psi_\chi^H : \mathrm{Irr}\,(H \mid \chi) \to \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_H(\mathbf{L}) \;\middle|\; \Omega^{\mathbf{K}}_{(\mathbf{L},\lambda)}(\chi)\right)$$

对于每个 $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{K}^F, (\mathbf{L}, \mathrm{ps}_{\mathbf{K}}(\lambda)))$。

证明。 这可直接由命题 4.5 的证明得出，只需按照 [Ros22c, Proposition6.1] 中的构造进行。 □

5 迈向定理 A 和定理 B

最后，我们将应用前几节得到的结果来证明作为主要结果的定理 A。然后，我们运用 Broué、Malle 和 Michel [BMM93] 以及 Cabanes 和 En- guehard [CE94]为幺正特征标所发展出的 e-Harish-Chandra 理论，推导出定理 B 作为推论。在此之前，我们先引入相关记号并证明一些预备结果。

5.1 关于 e-链的预备知识

我们的首要目标是为有限约化群定义 e-局部结构；在此背景下，这些结构所起的作用类似于 Dade 猜想和特征三元组猜想中的 ℓ-链。e-链集合与 ℓ-链集合之间的联系已在 [Ros22c, Section 7.2] 中得到研究。这些结果提供了一种途径，使 Dade 猜想和特征三元组猜想能够作为 [Ros22c, Conjecture C and Conjecture D] 的推论得出。在 Dade 猜想的研究中，使用不同类型的链至关重要；Knörr 和 Robinson[KR89] 首先引入了这种做法。他们的研究受到许多作者先前工作的启发，其中包括 Brown[Bro75] 和 Quillen [Qui78]，后两者分析了相关单纯复形的同伦论。

定义 5.1。我们用 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 表示有限约化群 $(\mathbf{G}, F)$ 的 e-**链**集合，即形如以下形式的链

$$\sigma = \{\mathbf{G} = \mathbf{L}_0 > \mathbf{L}_1 > \cdots > \mathbf{L}_n\}$$

其中 n 是非负整数，且每个 $\mathbf{L}_i$ 都是 $(\mathbf{G}, F)$ 的 e-分裂 Levi 子群。我们将 $|\sigma| := n$ 记作 e-链 σ 的长度，并将 $\mathrm{L}(\sigma)$ 记作其末项。此外，我们定义 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)_{>0}$ 为长度严格大于 0 的 e-链集合。

注意，上述定义的长度将集合 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 划分为长度为偶数和奇数的 e-链。更准确地说，我们用 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)_{\pm}$ 表示满足 $(-1)^{|\sigma|} = \pm 1$ 的、属于 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 的那些 e-链 $\sigma \in$ 所构成的子集。

下文中，给定一个 e-链 σ 以及 $(\mathrm{L}(\sigma), F)$ 的一个 e-分裂 Levi 子群 $\mathbf{M}$，我们用 $\sigma + \mathbf{M}$ 表示将 $\mathbf{M}$ 添加到 σ 末端后得到的 e-链。我们也允许 $\mathbf{M} = \mathrm{L}(\sigma)$，此时有 $\sigma + \mathrm{L}(\sigma) = \sigma$。反之，我们用 $\sigma - \mathrm{L}(\sigma)$ 表示从 σ 中移除末项 $\mathrm{L}(\sigma)$ 后得到的 e-链。这样，我们得到 $(\sigma + \mathbf{M}) - \mathrm{L}(\sigma + \mathbf{M}) = \sigma$，其中按照惯例，$\mathrm{L}(\sigma + \mathbf{M})$ 表示 e-链 $\sigma + \mathbf{M}$ 的末项。这里约定，$\sigma_0 - \mathrm{L}(\sigma_0) = \sigma_0 = \sigma_0 + \mathbf{G}$，其中 $\sigma_0 = \{\mathbf{G}\}$ 是平凡的 e-链。

接下来，考虑由共轭作用诱导的 $\mathbf{G}^F$ 在 e-链集合 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 上的作用：对于每个 $g \in \mathbf{G}^F$ 和 $\sigma = \{\mathbf{L}_i\}_i$，我们定义

$$\sigma^g := \left\{\mathbf{G} = \mathbf{L}_0 > \mathbf{L}_1^g > \cdots > \mathbf{L}_n^g\right\}.$$

由此定义可知，稳定子 $\mathbf{G}_\sigma^F$ 与正规化子 $\mathbf{N}_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}_i)^F$ 的交集一致，其中 $i = 1, \ldots, n$。类似地，我们可以定义 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$ 在 $\mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 上的作用，并给出链的稳定子 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_\sigma$ 的类似描述。特别要注意，链的最后一项满足 $\mathrm{L}(\sigma)^F \trianglelefteq \mathbf{G}_\sigma^F$。利用这一观察，我们可以运用第 4.2 节的结果，控制 $\mathbf{G}_\sigma^F$ 中位于 $\mathrm{L}(\sigma)$ 的伪幺正级数之上的特征标。

定义 5.2. 对于每个 e-链 $\sigma \in \mathrm{L}_e(\mathbf{G}, F)$，我们将 $\mathrm{CP}_u(\sigma)$ 记为满足 $\mathbf{M} < \mathbf{G}$ 的幺幂 e-尖点有序对 $(\mathbf{M}, \mu) \in \mathrm{CP}_u(\mathrm{L}(\sigma), F)$ 的集合。此外，对于任意这样的有序对 $(\mathbf{M}, \mu) \in \mathrm{CP}_u(\sigma)$，我们定义特征标集

$$\mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}, \mu)) := \begin{cases} \mathrm{Irr}\left(\mathbf{G}_\sigma^F \mid \mathcal{E}\left(\mathbf{L}(\sigma)^F, \left(\mathbf{M}, \mathrm{ps}_{\mathbf{L}(\sigma)}(\mu)\right)\right)\right) & \mathbf{L}(\sigma) > \mathbf{M} \quad (5.1) \\ \mathrm{Irr}\left(\mathbf{G}_\sigma^F \mid \mathcal{E}\left(\mathbf{L}(\sigma)^F, \left(\mathbf{M}, \mathrm{ps}_{\mathbf{L}(\sigma - \mathbf{L}(\sigma))}(\mu)\right)\right)\right) & \mathbf{L}(\sigma) = \mathbf{M} \quad (5.2) \end{cases}$$

在下文命题 5.6 和定理 5.9 的证明中，我们将看到区分情形 (5.1) 和 (5.2) 的必要性。注意，在上述定义中，我们排除了退化情形 $\mathbf{G} = \mathbf{L}(\sigma) = \mathbf{M}$；因此，在情形 (5.2) 中，链 σ –$\mathbf{L}(\sigma)$ 总是有定义的。为理解我们为何排除这一情形，可以类比 Dade 猜想。回忆一下，对每个有限群 G，$\mathrm{k}(G)$ 表示其不可约特征标的数量；对任意非负整数 d，符号 $\mathrm{k}^d(G)$ 表示 ℓ-缺陷为 d 的不可约特征标数量。局部-整体计数猜想提供了一种根据局部结构确定整体不变量 $\mathrm{k}^d(G)$ 的方法。Isaacs 和 Navarro[IN20] 将这一思想精确化。根据他们的定义，Dade 猜想的无块版本可以表述为：对每个 $d > 0$，函数 k^d 都是链局部的。因此，由于链局部函数之和仍是链局部函数，我们可推得差 $\mathrm{k} - \mathrm{k}^0 = \sum_{d>0}\mathrm{k}^d$ 是链局部函数。另一方面，利用这样一个事实：存在 ℓ-亏零特征标的群具有平凡的 ℓ-核，不难看出 k^0 不是链局部函数。通过在幺幂特征标的背景下理解这些观察，可以解释为何要排除 $\mathbf{G} = \mathbf{L}(\sigma) = \mathbf{M}$ 这一情形。回忆一下，$\mathrm{k}_u(\mathbf{G}^F)$ 和 $\mathrm{k}_{c,u}(\mathbf{G}^F)$ 分别表示 $\mathbf{G}^F$ 的幺幂特征标数量和 $\mathbf{G}^F$ 的幺幂 e-尖点特征标数量。若 ℓ 不整除 $\mathrm{Z}(\mathbf{G}^F)$ 的阶，则 [CE94] 意味着 $\mathbf{G}^F$ 的幺幂 e-尖点特征标是亏零的。因此，与 Dade 猜想的情形一样，我们希望通过局部结构确定的整体不变量是 $\mathrm{k}_u(\mathbf{G}^F) - \mathrm{k}_{c,u}(\mathbf{G}^F)$。最后请注意，$\mathrm{k}_{c,u}(\mathbf{G}^F)$ 恰好是满足 $\mathbf{G} = \mathbf{L}(\sigma) = \mathbf{M}$ 的 $\mathbf{L}(\sigma)$ 的幺幂 e-尖点有序对 $(\mathbf{M}\ \mu)$ 的数量。

在下面的引理中，我们证明，若集合 $\mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}\ \mu))$ 非空，则 $(\mathbf{M}\ \mu)$ 在 $\mathbf{G}_\sigma^F$-共轭意义下唯一确定。

引理 *5.3.* 设 $\sigma \in L_e(G\ F)$，并考虑 $CP_u(\sigma)$ 中两个幺幂 e-尖点有序对 $(M\ \mu)$ 和 $(K\ \kappa)$。若集合 $Uch(G_\sigma^F, (M\ \mu))$ 与 $Uch(G_\sigma^F, (K\ \kappa))$ 有非平凡交集，则 $(M\ \mu)$ 和 $(K\ \kappa)$ 在 G_σ^F-共轭下等价。

证明. 设 ϑ 是属于 $\mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}\ \mu))$ 和 $\mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{K}\ \kappa))$ 的一个特征标。若令 $\mathbf{L} := \mathbf{L}(\sigma)$，则可找到元素 $s, t \in \mathrm{Z}(\mathbf{L}^*)^{F^*}$ 以及特征标 $\varphi \in \mathrm{E}(\mathbf{L}^F, (\mathbf{M}\ \mu))$ 和 $\psi \in \mathrm{E}(\mathbf{L}^F, (\mathbf{K}\ \kappa))$，使得 ϑ 在 $\varphi\hat{}s_{\mathbf{L}}$ 和 $\psi\hat{}t_{\mathbf{L}}$ 之上。由 Clifford 定理可得，$\varphi\hat{}s_{\mathbf{L}} = (\psi\hat{}t_{\mathbf{L}})^g$，其中某个 $g \in \mathbf{G}_\sigma^F$。此外，由于 $\hat{}s$ 是线性特征，我们得到 $\varphi = \psi^g(\hat{}t_{\mathbf{L}})^g(\hat{}s_{\mathbf{L}})^{-1}$。由于 φ 和 ψ^g 都是 $\mathbf{L}^F$ 的幺正特征标，利用 [CE04, Proposition 8.26] 可得 $(\hat{}t_{\mathbf{L}})^g(\hat{}s_{\mathbf{L}})^{-1} = 1_{\mathbf{L}}$，因此 $\varphi = \psi^g$。于是，[BMM93, Theorem 3.2(1)]表明 $(\mathbf{M}\ \mu)$ 和 $(\mathbf{K}\ \kappa)^g$ 在 $\mathbf{L}^F$-共轭下等价，结论得证。 □

接下来，我们描述与定义 5.2 中引入的集合内特征标相关联的块理论。

引理 5.4。设 $\sigma \in \mathcal{L}_e(\mathbf{G}\ F)$，并考虑一个单值 e-尖点对 $(\mathbf{M}\ \mu) \in \mathcal{CP}_u(\sigma)$ 以及一个特征 $\vartheta \in \mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}\ \mu))$。则：

(i) 块 $\mathrm{bl}(\vartheta)$ 是 $\mathbf{L}(\sigma)^F$-正则的；

(ii) 若特征 ϑ 位于某个 $\varphi\hat{}z_{\mathbf{L}(\sigma)} \in \mathcal{E}(\mathbf{L}(\sigma)^F, (\mathbf{M}\ \mu\hat{}z_{\mathbf{M}}))$ 之上，其中 $z \in \mathbf{Z}(\mathbf{L}(\sigma)^*)^{F^*}$，则有

$$\mathrm{bl}(\varphi\hat{z}_{\mathbf{L}(\sigma)}) = \mathrm{bl}(\mu\hat{z}_{\mathbf{M}})^{\mathbf{L}(\sigma)^F} \qquad \textit{and} \qquad \mathrm{bl}(\vartheta) = \mathrm{bl}(\varphi\hat{z}_{\mathbf{L}(\sigma)})^{\mathbf{G}_\sigma^F} = \mathrm{bl}(\mu\hat{z}_{\mathbf{M}})^{\mathbf{G}_\sigma^F}$$

(iii) 诱导块$\mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F}$有定义。

证明。第一点由引理 2.3 得出，取 $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\sigma)$ 和 $H = \mathbf{G}_\sigma^F$ 即可。此外，在 (5.2) 的情形下，注意到 $\mathbf{L}(\sigma) \le \mathbf{L}(\sigma - \mathbf{L}(\sigma))$，因此 $\mathbf{Z}(\mathbf{L}(\sigma - \mathbf{L}(\sigma))^*) \le \mathbf{Z}(\mathbf{L}(\sigma)^*)$。所以，我们总能找到满足 (ii) 中陈述的 φ 和 z。由于 φ 是虚特征 $\mathbf{R}^{\mathbf{L}(\sigma)}_{\mathbf{M}}(\mu)$ 的一个不可约成分，根据 [CE94 命题 4.2]（其假设由 [CE94 命题 3.3 (ii)] 满足），可知 $\mathrm{bl}(\varphi) = b_{\mathbf{L}(\sigma)^F}(\mathbf{M}, \mu) = \mathrm{bl}(\mu)^{\mathbf{L}(\sigma)^F}$。又由于 $\hat{} z_{\mathbf{M}}$ 是线性特征 $\hat{} z_{\mathbf{L}(\sigma)}$ 在 $\mathbf{M}^F$ 上的限制，由引理 2.1 可得

$$\mathrm{bl}(\varphi \hat{z}_{\mathbf{L}(\sigma)}) = \mathrm{bl}(\mu \hat{z}_{\mathbf{M}})^{\mathbf{L}(\sigma)^F}.$$

现在，[Nav98，定理 9.19] 蕴含

$$\mathrm{bl}(\vartheta) = \mathrm{bl}\left(\varphi \hat{z}_{\mathbf{L}(\sigma)}\right)^{\mathbf{G}_\sigma^F}$$

第二点则由块诱导的传递性得出。最后，令 $Q := \mathbf{Z}(\mathbf{M})_\ell^F$，并注意到，根据 [CE94，命题 3.3(ii)]，$Q \mathbf{C}_{\mathbf{G}^F}(Q) = \mathbf{M}^F \le \mathbf{N}_{\mathbf{G}^F}(Q)$。于是，[Nav98，定理 4.14] 蕴含 $\mathrm{bl}(\mu \hat{} z_{\mathbf{M}})^{\mathbf{G}^F}$ 有良好定义，因此由 (ii) 和块诱导的传递性可知，$\mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F}$ 也有良好定义。证明至此完成。 □

利用上面的引理，我们现在可以定义以下特征标集。由此得到一个 e-局部对象，借助它我们可以确定 $\mathbf{G}^F$ 中给定块 B 的幺正特征标数目及其给定缺陷 $d \ge 0$（见第 5.3 节）。

定义 5.5. 设 B 是 $\mathbf{G}^F$ 的一个块，d 是一个非负整数。对于每个 e-链 $\sigma \in \mathbf{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 以及幺正 e-尖点对 $(\mathbf{L}, \lambda) \in \mathcal{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$，我们定义特征标集

$$\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)) := \left\{ \vartheta \in \mathrm{Uch}\left(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}, \mu)\right) \;\middle|\; d(\vartheta) = d, \mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F} = B \right\}.$$

其中 $\mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F}$ 根据引理 5.4(iii)定义。此外，我们将这个集合的基数记为

$$\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)) := \left|\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu))\right|.$$

最后，我们说明命题 4.5 可用于参数化定义 5.5 中的特征标集合。

命题 5.6。 设 B 是 $\mathbf{G}$ 的一个块，d 是一个非负整数。若 $\sigma \in \mathcal{L}_e(\mathbf{G}, F)$ 且 $(\mathbf{M}, \mu)$ 是 $\mathcal{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$ 中的一个单幺正 e-尖点对，则存在一个自同构群 $\mathbb{F}(\mathbf{G}^F)_{B,\sigma,(\mathbf{M},\mu)}$-等变双射

$$\Omega_{\sigma,(\mathbf{M},\mu)}^{B,d} : \mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)) \to \mathrm{Uch}^d(B_{\sigma+\mathbf{M}}, (\mathbf{M}, \mu))$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}_\sigma^F} \left(X_{\sigma+\mathbf{M},\vartheta}, \mathbf{G}_{\sigma+\mathbf{M}}^F, \Omega_{\sigma,(\mathbf{M},\mu)}^{B,d}(\vartheta)\right)$$

对每个 $\vartheta \in \mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu))$，且其中 $X := \mathbf{G}^F \rtimes$ 自同构群 $\mathbb{F}(\mathbf{G}^F)$。

证明。 首先，注意若 M 与链 σ 的最后一项 L(σ) 重合，则有$\sigma+\mathrm{M}=\sigma$，这意味着 $\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathrm{M}\ \mu)) = \mathrm{Uch}^d(B_{\sigma+\mathbf{M}}, (\mathrm{M}\ \mu))$。在这种情况下，令 $\Omega_\sigma^{B\,d}{}_{,(\mathrm{M}\,\mu)}$ 为恒等映射即可得到结论。因此，可以假设 $\mathrm{M} < \mathrm{L}(\sigma)$，并定义 $\rho := \sigma+\mathrm{M}$。现在，根据 (5.1) 我们有

$$\mathrm{Uch}\left(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}, \mu)\right) = \mathrm{Irr}\left(\mathbf{G}_\sigma^F \mid \mathcal{E}\left(\mathbf{L}(\sigma)^F, (\mathbf{M}, \mathrm{ps}_{\mathbf{L}(\sigma)}(\mu))\right)\right). \tag{5.3}$$

另一方面，注意到 M 与链 ρ 的最后一项 L(ρ) 重合，且 ρ–L(ρ) = σ，可得等式 $\mathrm{E}(\mathrm{L}(\rho)^F, (\mathrm{M}, \mathrm{ps}^{\mathbf{L}(\rho-\mathbf{L}(\rho))}(\mu))) = \mathrm{ps}^{\mathbf{L}(\sigma)}(\mu)$。然后，观察到 $\mathrm{G}_\rho^F = \mathrm{N}^{\mathbf{G}_\sigma^F}(\mathrm{M})$，即可应用 (5.2) 得到等式

$$\mathrm{Uch}\left(\mathbf{G}_\rho^F, (\mathbf{M}, \mu)\right) = \mathrm{Irr}\left(\mathbf{N}_{\mathbf{G}_\sigma^F}(\mathbf{M}) \mid \mathrm{ps}_{\mathbf{L}(\sigma)}(\mu)\right). \tag{5.4}$$

接下来，应用命题 4.5，并将该命题中的群选为 $H = \mathrm{G}_\sigma^F$、$\mathrm{K} = \mathrm{L}(\sigma)$ 和 $(\mathrm{L}\ \lambda) = (\mathrm{M}\ \mu)$。由 (5.3) 和 (5.4)，可推出存在一个 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_{\sigma,\ (\mathrm{M},\mu)}$-等变双射

$$\Omega_{(\mathbf{M},\mu)}^{\mathbf{L}(\sigma),\mathbf{G}_\sigma^F} : \mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\sigma^F, (\mathbf{M}, \mu)) \to \mathrm{Uch}(\mathbf{G}_\rho^F, (\mathbf{M}, \mu)). \tag{5.5}$$

此外，结合 [Spä17，引理 3.8（b）]，，使用命题 4.5 给出的 H-块同构，可推出

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}_\sigma^F} \left(X_{\rho,\vartheta}, \mathbf{G}_\rho^F, \Omega_{(\mathbf{M},\mu)}^{\mathbf{L}(\sigma),\mathbf{G}_\sigma^F}(\vartheta)\right) \tag{5.6}$$

对于每个 $\vartheta \in \mathrm{Uch}^d(\mathrm{G}_\sigma^F, (\mathrm{M}\ \mu))$。最后，首先注意到 $\Omega^{\mathbf{L}(\sigma)}{}_{,\ \mathbf{G}_\sigma^F(\mathrm{M}\,\mu)}$ 将缺陷为 d 的特征标映射到缺陷为 d 的特征标。此外，利用块诱导的传递性并使用 (5.6)，我们得到

$$\mathrm{bl}(\vartheta)^{\mathbf{G}^F} = \mathrm{bl}\left(\Omega_{(\mathbf{M},\mu)}^{\mathbf{L}(\sigma),\mathbf{G}_\sigma^F}(\vartheta)\right)^{\mathbf{G}^F}.$$

这表明，(5.5) 中的双射将集合 $\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathrm{M}\ \mu))$ 中的特征标映射到集合 $\mathrm{Uch}^d(B_{\sigma+\mathbf{M}}, (\mathrm{M}\ \mu))$ 中的特征标，因此它限制为一个双射，记作 $\Omega_\sigma^{B\,d}{}_{,\ (\mathrm{M}\,\mu)}$，满足陈述中要求的性质。至此，证明完成。□

我们以一条关于命题 5.6 中得到的特征三元组同构的注记结束本节。

注 5.7。 假设当 G 为 A 型($\pm q$) 时，ℓ 不整除 $q \pm 1$。在这种情况下，根据 [CE04，命题 13.19]，G 的每个 e-分裂 Levi 子群 L 都满足 $\mathrm{L} = \mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F)$。这一事实可用于证明，命题 5.6 给出的 G_σ^F-块特征三元组同构可以扩展为 G^F-块特征三元组同构。首先，我们断言

$$\mathbf{C}_{\mathbf{G}^F X_{\sigma,\vartheta}}(D) \le X_{\sigma,\vartheta} \tag{5.7}$$

对于 G 的每个不可约特征标 ϑ $^F_\sigma$ 以及 $\mathrm{G}_{\sigma+\mathbf{M}}^F$的每个 ℓ-根子群 D。对链 σ中出现的每个 e-分裂 Levi 子群 L_i，定义 $Q_i := \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L}_i)_\ell^F$。然后，利用 D 是

ℓ-根的事实，我们得到包含关系 $Q_i \le \mathrm{O}_\ell(\mathrm{G}_\sigma^F) \le D$。因此，$\mathrm{G}^F X_\sigma$中的每个元素 $x \in \vartheta$，若中心化 D，也会中心化每个 Q_i，从而规范化每个 L_i。由此可得

$$\mathbf{C}_{\mathbf{G}^F X_{\sigma,\vartheta}}(D) \le (\mathbf{G}^F X_{\sigma,\vartheta})_\sigma = X_{\sigma,\vartheta}$$

如 (5.7) 所要求的。现在我们可以将命题 5.6 给出的 G_σ^F-块同构应用于 [Ros22a, 引理 2.11]，从而证明

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\sigma+\mathbf{M},\vartheta}, \mathbf{G}_{\sigma+\mathbf{M}}^F, \Omega_{\sigma,(\mathbf{M},\mu)}^{B,d}(\vartheta)\right)$$

对每个 $\vartheta \in \mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathrm{M}\ \mu))$ 均成立。

5.2 定理A的证明

我们终于可以证明主要定理了。该定理按照特征三元组猜想 [Spä17, 猜想 6.3] 的思路，为幺正特征标给出了一个双射。在本节中，我们证明一个稍强的结果，它进一步描述了 e-链的类型以及特征三元组同构。下面的定义引入了特征三元组猜想中所考虑的集合 $\mathrm{C}^d(B)_\pm$ 的类似对象，该集合的定义见 [Spä17, 第 1097] 页。

定义 5.8. 设 B 是 G^F 的一个块，并取一个非负整数 d。我们定义集合

$$\mathcal{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_\pm = \left\{(\sigma, \mathbf{M}, \mu, \vartheta) \;\middle|\; \sigma \in \mathcal{L}_e(\mathbf{G}, F)_\pm, (\mathbf{M}, \mu) \in \mathcal{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma), \vartheta \in \mathrm{Uch}^d\left(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)\right)\right\}.$$

G^F的共轭作用在 $\mathrm{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_\pm$ 上诱导出一个 G^F的作用，其定义为：对每个元素 $g \in \mathrm{G}^F$以及 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta) \in \mathrm{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_\pm$，有 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta)^g := (\sigma^g, \mathrm{M}^g, \mu^g, \vartheta^g)$。我们将相应的元组的 G^F-轨道集合 $\mathrm{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_\pm/\mathrm{G}^F$记作。进一步，对每个这样的轨道 ω，我们将相应的有序对 (σ, ϑ) 的 G^F-轨道记作 $\omega^\bullet$，其中 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta) \in \omega$对某个 ~~$(\mathrm{M}\ \mu) \in \mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$~~ 成立。换言之，若将 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta)$ ~~的 G^F-轨~~道记为 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta)$，则 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta)^\bullet$是有序对 (σ^g, ϑ^g) 的 G^F-轨道。

类似地，若 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$表示 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)$ 中稳定 B 的那些自同构 $\alpha \in$ 的集合，则对每个 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$ 以及 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta) \in \mathrm{L}_{\mathrm{u}}^d(B)$，我们可以定义 $(\sigma, \mathrm{M}\ \mu, \vartheta)^\alpha := (\sigma^\alpha, \mathrm{M}^\alpha, \mu^\alpha, \vartheta^\alpha)$。由此，我们得到群 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}}(\mathrm{G}^F)_B$ 在集合 $\mathrm{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_\pm$ 以及相应的轨道集合 $\mathrm{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_\pm/\mathrm{G}^F$ 上的作用。

定理 5.9。 对于 $\mathbf{G}$ B ^{F} 的每个块以及每个非负整数 d，都存在一个 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)_B$-等变双射

$$\Lambda : \mathcal{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_+/\mathbf{G}^F \to \mathcal{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_-/\mathbf{G}^F.$$

此外，对于每个 $\omega \in \mathcal{L}_{\mathrm{u}}^d(B)_+/\mathbf{G}^F$、任意 $(\sigma,\ \vartheta) \in \omega^\bullet$ 以及任意 $(\rho,\ \chi) \in \Lambda(\omega)^\bullet$，我们有

$$|\sigma| = |\rho| \pm 1$$

and

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}_\sigma^F, \vartheta\right) \sim_J \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}_\rho^F, \chi\right)$$

with $J = \mathbf{G}_\sigma^F$，若 $|\sigma| = |\rho| - 1$；或 $J = \mathbf{G}_\rho^F$，若 $|\sigma| = |\rho| + 1$；其中 $X := \mathbf{G}^F \rtimes$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F$).

证明。定义 $A :=$ 自同构群$_{\mathbb{F}}(\mathbf{G}^F)$，并注意到 $X = \mathbf{G}^F \rtimes A$。首先，我们构造一个从形如 $(\sigma, \mathbf{M}\ \mu)$ 的三元组构成的集合到另一个集合的等变双射。更确切地说，令 S 表示由满足 $\sigma \in \mathrm{L}_e(\mathbf{G}\ F)$ 且 $(\mathbf{M}\ \mu) \in \mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$ 的此类三元组 $(\sigma, \mathbf{M}\ \mu)$ 构成的集合。我们定义一个映射

$$\Delta : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$$

通过设定

$$\Delta\left((\sigma, \mathbf{M}, \mu)\right) := \begin{cases} (\sigma + \mathbf{M}, \mathbf{M}, \mu), & \mathbf{L}(\sigma) > \mathbf{M} \\ (\sigma - \mathbf{M}, \mathbf{M}, \mu), & \mathbf{L}(\sigma) = \mathbf{M}. \end{cases}$$

注意，根据 $\mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$ 的定义，由于 $\mathbf{M} < \mathbf{G}$，链 σ–M 总是有定义的。此外，从上述定义可清楚看出，映射 Δ 是 A-等变的，并满足 $\Delta^2 = \mathrm{Id}$。因此，注意到 $|\sigma \pm \mathbf{M}| = |\sigma| \pm 1$，我们得出结论：$\Delta$ 限制为一个 A-等变双射

$$\Delta : \mathcal{S}_+ \to \mathcal{S}_-$$

其中，$\mathrm{S}_\pm$ 表示 S 中满足 $\sigma \in \mathrm{L}_e(\mathbf{G}\ F)_\pm$ 的那些三元组 $(\sigma, \mathbf{M}\ \mu)$ 构成的集合。此外，再次注意，若 $\Delta((\sigma, \mathbf{M}\ \mu)) = (\rho, \mathbf{K}\ \kappa)$，则

$$|\sigma| = |\rho| \pm 1. \tag{5.8}$$

现在，固定 S_+ 中一个 A_B-横截集 T_+，并注意，由于 Δ 的等变性，T_+ 在映射 Δ 下的像（记为 T_-）是 S 中的一个 A_B-横截集。考虑 $(\sigma, \mathbf{M}\ \mu) \in \mathrm{T}_+$，并记 $\Delta((\sigma, \mathbf{M}\ \mu)) = (\rho, \mathbf{M}\ \mu)$。下文中，不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{L}(\sigma) > \mathbf{M}$ 且 $\rho = \sigma + \mathbf{M}$；否则，只需将 $(\sigma, \mathbf{M}\ \mu)$ 替换为 $(\rho, \mathbf{M}\ \mu)$，逐字重复上述论证。由命题 5.6，我们得到一个 $A_{B,\ \sigma,\ (\mathbf{M},\mu)}$-等变双射

$$\Omega^{B,d}_{\sigma,(\mathbf{M},\mu)} : \mathrm{Uch}^d\left(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)\right) \to \mathrm{Uch}^d\left(B_\rho, (\mathbf{M}, \mu)\right)$$

使得

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}^F_\sigma, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F_\sigma} \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}^F_\rho, \chi\right) \tag{5.9}$$

对每个 $\vartheta \in \mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}\ \mu))$，且其中 χ 是 ϑ 的像。因此，若 $\mathrm{U}^{(\sigma,\mathbf{M},\mu)}_+$ 是特征标集 $\mathrm{Uch}^d(B_\sigma, (\mathbf{M}\ \mu))$ 中的一个$A_{B,(\sigma,\mathbf{M},\mu)}$-横截集，那么根据上述双射，其像记为 $\mathrm{U}^{(\rho,\mathbf{M},\mu)}_-$，是特征标集 $\mathrm{Uch}^d(B_\rho, (\mathbf{M}\ \mu))$ 中的一个 $A_{B,(\rho,\mathbf{M},\mu)}$-横截集，因为 $A_{B,(\sigma,\mathbf{M},\mu)} = A_{B,(\rho,\mathbf{M},\mu)}$。

现在，根据上一段的讨论并利用引理 5.3，我们得出 $\mathbf{G}^F$-轨道集合

$$\mathcal{L}_+ := \left\{ \overline{(\sigma, \mathbf{M}, \mu, \vartheta)} \;\middle|\; (\sigma, \mathbf{M}, \mu) \in \mathcal{T}_+, \vartheta \in \mathcal{U}^{(\sigma,\mathbf{M},\mu)}_+ \right\}$$

and

$$\mathcal{L}_- := \left\{ \overline{(\rho, \mathbf{M}, \mu, \chi)} \;\middle|\; (\rho, \mathbf{M}, \mu) \in \mathcal{T}_-, \chi \in \mathcal{U}^{(\rho,\mathbf{M},\mu)}_- \right\}$$

分别是集合 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_+/\mathbf{G}^F$ 和 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_-/\mathbf{G}^F$ 中的 A_B-横截集。最后，我们可以通过设定来定义双射 Λ

$$\Lambda\left(\overline{(\sigma, \mathbf{M}, \mu, \vartheta)}^x\right) := (\rho, \mathbf{M}, \mu, \chi)^x$$

对于每个 $x \in A_B$，以及每一对 $(\sigma, \mathbf{M}\ \mu, \vartheta) \in \mathrm{L}_+$ 和 $(\rho, \mathbf{M}\ \mu, \chi) \in \mathrm{L}_-$，满足 $\Delta(\sigma, \mathbf{M}\ \mu) = (\rho, \mathbf{M}\ \mu)$，且使得

$$\chi = \begin{cases} \Omega^{B,d}_{\sigma,(\mathbf{M},\mu)}(\vartheta), & \rho = \sigma + \mathbf{M} \\ \left(\Omega^{B,d}_{\rho,(\mathbf{M},\mu)}\right)^{-1}(\vartheta), & \rho = \sigma - \mathbf{M}. \end{cases}$$

结合 (5.8)、(5.9) 以及 Λ 的定义，我们得出，陈述中要求的性质均已满足，证明至此完成。 □

现在，根据定理 5.9 和注 5.7，我们终于可以证明定理 A。

定理 *A* 的证明。 假设当 $(\mathrm{G}\ F)$ 为 $\mathrm{A}(\pm q)$ 型时，ℓ 不整除 $q \pm 1$。考虑定理 5.9 中的双射 Λ，并选择 $\omega \in \mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_+/\mathrm{G}^F$、$(\sigma, \vartheta) \in \omega^\bullet$ 和 $(\rho, \chi) \in \Lambda(\omega)^\bullet$。于是，我们有

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}^F_\sigma, \vartheta\right) \sim_J \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}^F_\rho, \chi\right)$$

若 $|\sigma| = |\rho| - 1$，则为 $J = \mathrm{G}^F_\sigma$；若 $|\sigma| = |\rho| + 1$，则为 $J = \mathrm{G}^F_\rho$。在这两种情形下，应用注 5.7 可推出

$$\left(X_{\sigma,\vartheta}, \mathbf{G}^F_\sigma, \vartheta\right) \sim_{\mathbf{G}^F} \left(X_{\rho,\chi}, \mathbf{G}^F_\rho, \chi\right)$$

如定理 A 所要求的。 □

5.3 定理 B 的证明

我们的最终目标是将定理 5.9 作为推论，得到关于幺正特征标的计数论证。回顾一下，Dade 猜想提供了一种方法，可根据 ℓ-局部结构来确定给定 ℓ-块 B 中具有给定缺陷 d 的特征标数量。定理 B 通过与 e-Harish-Chandra 理论相容的 e-局部结构，将这一思想推广到有限约化群的幺正特征标上（见定义 5.5）。对于每个 $\sigma \in \mathrm{L}e(\mathrm{G}\ F)$，我们定义

$$\mathbf{k}^d_{\mathrm{u}}(B_\sigma) := \sum_{(\mathbf{M},\mu)} \mathbf{k}^d_{\mathrm{u}}(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)) \tag{5.10}$$

其中 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 遍历 G^F_σ 在 $\mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$ 上作用的一组代表元。此外，回顾一下，$\mathrm{k}^d_{\mathrm{u}}(B)$ 和 $\mathrm{k}^d_{\mathrm{c},\ \mathrm{u}}(B)$ 分别表示属于块 B 且具有缺陷 d 的幺正特征标和幺正 e-尖点特征标的数量。

定理 *B* 的证明。 首先，我们确定 G^F-轨道集合 $\mathrm{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_\pm/\mathrm{G}^F$ 的基数。应用引理 5.3，我们得到

$$\left|\mathcal{L}^d_{\mathrm{u}}(B)_\pm/\mathbf{G}^F\right| = \sum_{\sigma,(\mathbf{M},\mu)} \mathbf{k}^d_{\mathrm{u}}(B_\sigma, (\mathbf{M}, \mu)) = \sum_\sigma \mathbf{k}^d_{\mathrm{u}}(B_\sigma) \tag{5.11}$$

其中，σ 遍历一组代表元，例如，作用于 $\mathrm{L}e(\mathrm{G}\ F)_\pm$ 上的 G^F 的一组代表元 $\mathrm{L}_\pm$；而 $(\mathrm{M}\ \mu)$ 遍历作用于 $\mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma)$ 上的 G^F_σ 的一组代表元。接下来，我们分离出平凡链 $\sigma_0 := \{\mathrm{G}\} \in \mathrm{L}e(\mathrm{G}\ F)_+$ 对 (5.11) 中求和的贡献。在这种情况下，我们有 $\mathrm{L}(\sigma_0) = \mathrm{G}$，因此对于每个 $(\mathrm{M}\ \mu) \in \mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma_0)$，$\mathrm{ps}^{\mathrm{L}(\sigma)}(\mu) = \{\mu\}$，因为中心 $\mathrm{Z}(\mathrm{G}^*)^{F^*}$

在我们的假设下是平凡的。因此，利用定义 5.2 和定义 5.5，我们推得

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma_0}) &= \sum_{(\mathbf{M},\mu)} \mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma_0},(\mathbf{M},\mu)) \\ &= \sum_{(\mathbf{M},\mu)} \left|\mathrm{Irr}^{d}(B)\cap\mathcal{E}(\mathbf{G}^{F},(\mathbf{M},\mu))\right| \\ &= \mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B)-\mathbf{k}_{\mathrm{c,u}}^{d}(B)\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中，最后一个等号由 [BMM93, 定理 3.2 (1)] 得出，并注意到每一对 $(\mathbf{M},\mu)\in\mathrm{CP}_{\mathrm{u}}(\sigma_0)$ 都满足 $\mathbf{M}<\mathbf{G}=\mathrm{L}(\sigma_0)$。接下来，定理 5.9 表明集合 $\mathrm{L}_{\mathrm{u}}^{d}(B)_{+}/\mathbf{G}^{F}$ 和 $\mathrm{L}_{\mathrm{u}}^{d}(B)_{-}/\mathbf{G}^{F}$ 的基数相同，因此由 (5.11) 和 (5.12) 可得

$$\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B)-\mathbf{k}_{\mathrm{c,u}}^{d}(B)+\sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{L}_{+}\\ \sigma\neq\sigma_0}}\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma})=\sum_{\sigma\in\mathcal{L}_{+}}\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma})=\sum_{\sigma\in\mathcal{L}_{-}}\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma}). \tag{5.13}$$

最后，注意到对于每个 $\sigma\in\mathrm{L}_{\pm}$，都有 $(-1)^{|\sigma|+1}=\mp1$，我们可以将 (5.13) 改写为

$$\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B)-\mathbf{k}_{\mathrm{c,u}}^{d}(B)=\sum_{\sigma\in\mathcal{L}_{-}\cup\mathcal{L}_{+}}(-1)^{|\sigma|+1}\mathbf{k}_{\mathrm{u}}^{d}(B_{\sigma})$$

这正是定理 B 陈述中的等式。 □

参考文献

[Alp76] J. L. Alperin. 块理论的主要问题。载于《有限群会议论文集（犹他大学，犹他州帕克城，*1975*年）》，第341–356页。学术出版社，纽约，1976年。[Alp87] J. L. Alperin. 有限群的权。载于《阿卡塔有限群表示会议（加利福尼亚州阿卡塔，*1986*年）》，《纯粹数学专题讨论会论文集》第47卷，第369–379页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1987年。[BM11] C. Bonnafé 和 J. Michel. $q>2$的 Mackey 公式的计算机证明。《代数杂志》，327:506–526，2011年。[Bra56] R. Brauer. 关于有限阶群的数论研究。载于《*1955*年代数数论国际研讨会论文集（东京和日光）》，第55–62页。日本学术会议，东京，1956年。[Bro22a] M. Broué. Gunter 年逾六十。2022年。发表于艾萨克·牛顿研究所（英国剑桥）研讨会《计数猜想及其拓展》。[BM92] M. Broué 和 G. Malle. 有限域上约化群的通用 Sylow 定理。《数学年刊》，292(2):241–262，1992年。[BMM93] M. Broué, G. Malle 和 J. Michel. 李型有限群的一般块。《*Astérisque*》，(212):7–92，1993年。[Bro22b] J. Brough. $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$ 中 d-分裂 Levi 子群正规化子的特征标。*arXiv:2203.06072*，2022年。

[Bro-Ruh] J. Brough 和 L. Ruhstorfer. 等变特征双射与归纳阿尔珀林–麦凯条件。准备中。[BS20] J. Brough 和 B. Späth. 关于 A 型单群的阿尔珀林-麦凯猜想。《代数杂志》，558:221–259，2020年。[Bro75] K. S. Brown. 群的欧拉示性数： p-分数部分。《数学发明》，29(1):1–5，1975年。[CE94] M. Cabanes 和 M. Enguehard. 关于幺正块及其普通特征。《数学发明》，117(1):149–164，1994年。[CE04] M. Cabanes 和 M. Enguehard. 《有限约化群表示论》，新数学专著第1卷。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[CS13] M. Cabanes 和 B. Späth. 连通中心有限约化群中的等变性与可扩张性。《数学杂志》，275(3-4):689–713，2013年。[CS17] M. Cabanes 和 B. Späth. A 型的等变特征对应与归纳 McKay 条件。《纯粹与应用数学杂志》，728:153–194，2017年。[Dad80] E. C. Dade. 特征标对应。载于《圣克鲁兹有限群会议（加州大学，圣克鲁兹，加利福尼亚州，1979年）》，《纯粹数学专题讨论会论文集》第37卷，第401–403页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1980年。[Dad92] E. C. Dade. 块中的特征标计数。一。《数学发明》，109(1):187–210，1992年。[Dad94] E. C. Dade. 块中的特征标计数。二。《纯粹与应用数学杂志》，448:97–190，1994年。[Dad97] E. C. Dade. 块中的特征标计数。II.9。载于《有限群表示论（俄亥俄州哥伦布，1995年）》，俄亥俄州立大学数学研究所出版物第6卷，第45–59页。德古意特出版社，柏林，1997年。[DL76] P. Deligne 和 G. Lusztig. 有限域上约化群的表示。《数学年刊》（第2辑），103(1):103–161，1976年。[DM91] F. Digne 和 J. Michel. 《李型有限群的表示》，伦敦数学会学生教材第21卷。剑桥大学出版社，剑桥，1991年。[Eng00] M. Enguehard. 关于有限约化群的 l-幺正块，当 l 为坏数时。《代数杂志》，230(2):334–377，2000年。[FS86] P. Fong 和 B. Srinivasan. 有限经典群幺正特征标的广义哈里什-钱德拉理论。《代数杂志》，104(2):301–309，1986年。[GM20] M. Geck 和 G. Malle. 《李型有限群的特征标理论：导论》，剑桥高等数学研究丛书第187卷。剑桥大学出版社，2020年。[GLS98] D. Gorenstein, R. Lyons 和 R. Solomon. 《有限单群分类》第3号。第一部分。A章，数学调查与专著第40卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年。

[IN20] I. M. Isaacs and G. Navarro. 有限群上的局部函数。《表示论》，24:1–37, 2020年。[Isa76] I. M. Isaacs. 有限群的特征标理论。学术出版社 [Harcourt Brace Jo- vanovich, Publishers], 纽约-伦敦，1976年。[KR89] R. Knörr and G. R. Robinson. 关于 Alperin 猜想的一些评述。《伦敦数学会杂志》(2)，39(1):48–60, 1989。[KS15] S. Koshitani and B. Späth. 诱导块中特征标的 Clifford 理论。《美国数学会会刊》，143(9):3687–3702, 2015。[Lus76] G. Lusztig. 关于幺正类数量的有限性。《数学发明》，34(3):201–213, 1976。[Mal08] G. Malle. 幺幂特征标的扩张与归纳 McKay 条件。《代数杂志》，320(7):2963–2980, 2008。[MNSFT22] G. Malle, G. Navarro, M. Schaffer Fry, and H. T. Tiep. Brauer 零高度猜想。arXiv:2209.04736, 2022年。[MS16] G. Malle and B. Späth. 奇数次数特征标。《数学年刊》(2)，184(3):869–908, 2016。[MT11] G. Malle and D. Testerman. 线性代数群与李型有限群，剑桥高等数学研究丛书第133卷。剑桥大学出版社，剑桥，2011。[MR22] J. M. Martínez and D. Rossi. Alperin–McKay 对应中的次数整除性。arXiv:2204.10124, 2022年。[McK72] J. McKay. 奇数次数的不可约表示。《代数杂志》，20:416–418, 1972。[Mur12] M. Murai. 关于 Brauer 零高度猜想。《日本学士院纪要 A 辑数学科学》，88(3):38–40, 2012年。[Nav98] G. Navarro. 有限群的特征标与块，伦敦数学会讲义系列第250卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998。[Nav18] G. Navarro. 特征标理论与 McKay 猜想，剑桥高等数学研究丛书第175卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018年。[NS14] G. Navarro and B. Späth. 关于 Brauer 零高度猜想。《欧洲数学会杂志》(JEMS), 16(4):695–747, 2014。[NSV20] G. Navarro, B. Späth, and C. Vallejo. Galois–McKay 猜想的一个约化定理。《美国数学会汇刊》，373(9):6157–6183, 2020年。[Qui78] D. Quillen. 群的非平凡 p子群偏序集的同伦性质。《数学进展》，28(2):101–128, 1978。[Riz18] N. Rizo. 相对于正规子群的一个特征标的 p-块。《代数杂志》，514:254–272, 2018年。

[Ros22a] D. Rossi. p-可解群的特征三元组猜想。《代数杂志》，595:165–193, 2022年。[Ros22b] D. Rossi. 特征三元组猜想：迈向李型群的 Dade 猜想归纳条件。博士论文，伍珀塔尔贝吉舍大学，2022年。[Ros22c] D. Rossi. 有限约化群中的计数猜想与 e-局部结构。arXiv:2204.00428, 2022年。[Ros22d] D. Rossi. 归纳局部-整体条件与广义哈里什-钱德拉理论。arXiv:2204.10301, 2022年。[Ros23] D. Rossi. McKay 猜想与中心同构特征三元组。《代数杂志》，618:42–55, 2023年。[Ruh22a] L. Ruhstorfer. 素数 2 的 Alperin–McKay 猜想。arXiv:2204.06373, 2022年。[Ruh22b] L. Ruhstorfer. Alperin-McKay 猜想的 Jordan 分解。《数学进展》，394:论文编号108031，2022年。[Spä10] B. Späth. 经典群的 Sylow d-环面与 McKay 猜想。II。《代数杂志》，323(9):2494–2509, 2010年。[Spä12] B. Späth. 定义特征下的归纳 McKay 条件。《伦敦数学会公报》，44(3):426–438, 2012年。[Spä17] B. Späth. Dade 射影猜想的一个约化定理。《欧洲数学会杂志》(JEMS), 19(4):1071–1126, 2017年。[Spä18] B. Späth. 若干整体-局部猜想的约化定理。载于《局部表示论与单群》，EMS 数学讲义系列，页码 23–61。欧洲数学会，苏黎世，2018年。[Tay18] J. Taylor. 关于中心连通群的 Mackey 公式。《群论杂志》，21(3):439–448, 2018年。[Tur08] A. Turull. Glauberman 对应之上。《数学进展》，217(5):2170–2205, 2008年。[Tur17] A. Turull. p-可解群的 Dade 射影猜想的精化。《代数杂志》，474:424–465, 2017年。

乌戈·迪尼数学与计算机科学系，莫尔加尼大道 67/A，佛罗伦萨，意大利

电子邮件地址：damiano.rossi00@gmail.com