arXiv:2301.05152v1 [math.DS] 12 Jan 2023

关于二维线性余循环边缘不稳定增长率的注记

IAN D. MORRIS 和 JONAH VARNEY

Abstract. Guglielmi 和 Zennaro 的一个定理表明，若全移位上的局部常值 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-余循环的一致范数增长不是指数级的，那么它必定有界或呈线性增长，不存在其他可能。我们给出了这一结果的另一种证明，并证明其结论不适用于全移位上两个符号的利普希茨连续余循环。

关键词：离散线性包含、遍历优化、联合谱半径、线性余循环、边际稳定性、边缘不稳定性。MSC2020 分类号：37H15（主要）、37D35、93C30（次要）

1. 引言与结果陈述

定义 $\Sigma_N := \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$，并赋予该集合无限乘积拓扑。在此拓扑下，它是一个紧致可度量拓扑空间。定义$T\colon \Sigma_N \to \Sigma_N$为移位变换 $T[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}] := (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$，它是一个同胚。若给定连续函数 $A\colon \Sigma_N \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$，我们可能会关注由下式定义的序列 (a_n) 的增长

$$a_n := \sup_{x\in\Sigma_N} \left\| A(T^{n-1}x)\cdots A(Tx)A(x) \right\|.$$

容易看出，该序列是次乘性的，即对所有 $n, m \geq 1$，都有 $a_{n+m} \leq a_n a_m$，这保证了极限的存在

$$\varrho(A) := \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_N} \left\| A(T^{n-1}x)\cdots A(Tx)A(x) \right\|^{\frac{1}{n}}.$$

用 $\varrho(A)^{-1}\cdot A$ 替换 A 后，不失一般性，可假设$\varrho(A) = 1$；本文余下部分均采用这一假设。本文将关注约化情形$\varrho(A) = 1$下序列 (a_n) 的行为。

若 $A\colon \Sigma_N \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$局部常值，则对于 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，矩阵 $A(x)$仅由符号 x_0 决定。此时，若A表示函数 A的值域，则有

$$\sup_{x\in\Sigma_N} \left\| A(T^{n-1}x)\cdots A(Tx)A(x) \right\| = \sup_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} \|A_n\cdots A_1\|. \tag{1}$$

由于与控制理论中的边际不稳定离散时间线性切换系统相关， A 为局部常值的情形已得到广泛研究；关于上述形式的序列 (a_n) 的研究，可见于许多著作，例如 [6, 15, 16, 19, 20, 25, 26, 27]。基于与符号动力系统中 k-正则序列这一概念截然不同的动机，同一问题也在 [2, 3] 中得到研究。在上述著作中，较简单的

公式(1)（对应于局部常值情形）是唯一得到研究的情形；而在遍历优化文献中，也有人探讨了更一般的情形，即不假设 A 为局部常值，尤其是 [4]，其中研究了使 (a_n) 成为有界序列的判据。

描述此类序列（a_n）若干可能行为的一项早期结果如下，该结果本质上归功于 N. Guglielmi 和 M. Zennaro：

定理 1. 设 $A\colon \Sigma_N \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 是局部常值的，并定义 $\mathbf{A} := \{A(x) : x \in \Sigma_N\}$. 假设

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_N} \left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|^{\frac{1}{n}} = 1.$$

那么以下结论之一成立：或者

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in\Sigma_N} \left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| > 0, \tag{2}$$

或者，我们有

$$\sup_{n\geq 1} \sup_{x\in\Sigma_N} \left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| < \infty.$$

此外，第一种情形成立，当且仅当由 $\mathbf{A}$ 生成的半群包含一个非平凡的单位行列式 Jordan 矩阵；而这又当且仅当以下两个条件同时满足：$\mathbf{A}$ 同时三角化，且 $\mathbf{A}$ 中行列式为 ± 1 的矩阵集合非空并且不能同时对角化。

我们指出，定理 1 所描述的情形相当微妙：如果将线性映射的维数从 2 提高到 3，或者允许在紧无限字母表上作移位，而不是使用有限字母表 $\{1,\ldots,N\}$，那么结论便不再成立，上述序列的增长速率可能严格介于线性增长与有界之间（见 [12, 19, 20]）。本文给出上述结果的另一种证明。该结果由第二位署名作者提出，此前已在博士论文 [26] 中呈现。我们指出，极限 (2) 的实际存在是本文的一项新贡献：[12, 26] 中证明了该序列的下极限和上极限有限且非零，但并未证明二者相等。

本文的第二项贡献是证明：若放宽局部常值这一条件，则定理 1 所断言的二分性不再成立。我们证明：

定理 2. 设 $T\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ 是由两个符号构成的全移位，且 d 是 Σ_2 上生成无限乘积拓扑的任意度量。那么存在 Lipschitz 连续函数 f、$g\colon \Sigma_2 \to (0,1]$ 和 $\phi\colon \Sigma_2 \to \mathbb{R}$，使得由下式定义的函数 $A\colon \Sigma_2 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

$$A(x) := \begin{pmatrix} f(x) & \phi(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix}$$

满足

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Sigma_2} \left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|^{\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in\Sigma_2} \left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| = 0$$

and

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|=\infty.$$

我们强调，度量 d 除在 Σ_2上生成通常的拓扑外，不假设具有任何其他性质。研究移位空间时，通常考虑 Σ_2 上满足以下条件的度量

$$\max_{y\in\Sigma_2}\operatorname{diam}\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Sigma_2\colon x_i=y_i \text{ for all } i \text{ such that } |i|\leq n\}=O(\theta^n)$$

对于某个 $\theta\in(0,1)$，但在定理 2 中，允许该序列以任意缓慢或快速的速度趋于零。因此，函数 f、g、ϕ可以自由地取为 [5, 21]意义下的“超连续”函数。

定理 1 的证明直接明了，其思路是考察由集合 $\{A(x)\colon\ x\in\Sigma_N\}$生成的半群。定理 2 的证明在技术上更为微妙，并用到了遍历优化。下面将在第 2 节和第 3 节分别给出这两个证明。

2. 定理 1 的证明

鉴于恒等式 (1)，只需证明以下结论：若 A 是满足下列条件的实数 2×2 矩阵有限集

$$\lim_{n\to\infty}\max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}}\|A_n\cdots A_1\|^{\frac{1}{n}}=1,$$

则极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}}\|A_n\cdots A_1\|$$

存在；若 A 可同时上三角化，且集合 $\{A\in\mathsf{A}\colon\ |\det A|=1\}$ 不是同时可对角化的，则上述极限非零；若上述两个条件不同时成立，则由 A 生成的半群有界。

我们将首先在一个特殊情形下证明由 A 生成的半群有界。以下结果与 [12,引理 5.1] 密切相关，但其证明完全不同：

命题 2.1. 设 A 是任意有限个 2×2 实上三角矩阵组成的集合，其中每个矩阵的谱半径至多为 1，且行列式的绝对值严格小于 1。那么由 A 生成的半群有界。

证明。显然，我们可以不失一般性地假设 A 非空。由于 A 中每个元素的谱半径都不超过 1，因此其对角元的绝对值都不超过 1。由 A 的有限性可知，存在 $\beta\in[0,1)$ 和 $M\geq 0$，使得对于每个 $A\in\mathsf{A}$，A 的某个对角元的绝对值不超过 1，另一个对角元的绝对值不超过 β，且右上角元素的绝对值不超过 M。（特别地，我们可以取 $\beta:=\max_{A\in\mathsf{A}}|\det A|^{1/2}$ 和 $M:=\max_{A\in\mathsf{A}}\|A\|_\infty$）令 $|||\cdot|||_1$ 表示实矩阵 2×2 上的范数，其定义为矩阵各元素绝对值之和。若 $A_1,\ \dots,\ A_n$ 是任意实 2×2矩阵，$A_1',\ \dots,\ A_n'$ 是非负的 2×2矩阵，并且对于每个 $i=1,\ \dots,\ n$，A_i' 的每个元素都大于或等于 A_i 对应元素的绝对值，那么很容易看出

$$|||A_n\cdots A_1|||_1\leq|||A_n'\cdots A_1'|||_1.$$

（在上三角矩阵的情形下，这一事实尤其容易证明，而这正是我们所需的唯一情形。）因此，为了证明

$$\sup_{n\geq 1}\max_{A_1,\ldots,A_n\in\mathsf{A}}\|\!|A_n\cdots A_1|\!\|_1<\infty$$

只需证明

$$\sup_{n\geq 1}\max_{i_1,\ldots,i_n\in\{1,2\}}\|\!|B_{i_n}\cdots B_{i_1}|\!\|_1<\infty \tag{3}$$

其中

$$B_1:=\begin{pmatrix}1 & M\\ 0 & \beta\end{pmatrix},\qquad B_2:=\begin{pmatrix}\beta & M\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

因为每个 $A\in\mathsf{A}$的所有元素的绝对值，要么都小于或等于 B_1中的对应元素，要么相对于矩阵 B_2也具有相同性质。

因此我们证明（3）。任取一个 $n\geq 1$，并考虑由矩阵 B_1、 B_2构成的乘积 $B_{i_n}\cdots B_{i_1}$；在所有由 B_1和 B_2组成、长度为 n的乘积中，该乘积使 $\|\!|B_{i_n}\cdots B_{i_1}|\!\|_1$的值最大。我们断言，必然有 $B_{i_n}\cdots B_{i_1}=B_1^mB_2^{n-m}$，其中某个整数为 $m\in\{0,1,\ldots,n\}$。反设并非如此：那么 $B_{i_n}\cdots B_{i_1}$可分解为

$$B_{i_n}\cdots B_{i_1}=B_{i_n}\cdots B_{i_{k+1}}B_2B_1B_{i_{k-1}}\cdots B_{i_1}=X_1B_2B_1X_2,$$

也就是说，其中 X_1、 X_2 是可逆非负上三角矩阵（其中一个 o r（二者都可能是单位矩阵）。现在，矩阵

$$Z:=B_1B_2-B_2B_1=\begin{pmatrix}0 & 2(1-\beta)M\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

是非负且非零的，因此 X_1ZX_2 也非负且非零。由此可得

$$\|\!|X_1B_1B_2X_2|\!\|_1=\|\!|X_1B_2B_1X_2+X_1ZX_2|\!\|_1>\|\!|X_1B_2B_1X_2|\!\|_1$$

利用这些矩阵的非负性以及 X_1ZX_2 非零这一事实。由于 $X_1B_1B_2X_2$ 也具有 $B_{j_n}\cdots B_{j_1}$ 的形式，其中某个 j_1，.....， $j_n\in\{1,2\}$，这与 $\|\!|B_{i_n}\cdots B_{i_1}|\!\|_1$所假设的极大性矛盾。命题得证。由于对每个 $n\geq 1$

$$\max_{i_1,\ldots,i_n\in\{1,2\}}\|\!|B_{i_n}\cdots B_{i_1}|\!\|_1=\max_{0\leq m\leq n}\left|\!\left|\!\left|B_1^mB_2^{n-m}\right|\!\right|\!\right|_1$$

根据前面的命题，可得

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}\max_{i_1,\ldots,i_n\in\{1,2\}}\|\!|B_{i_n}\cdots B_{i_1}|\!\|_1&\leq\sup_{n,m\geq 0}\|\!|B_1^nB_2^m|\!\|_1\\&\leq\left(\sup_{n\geq 0}\|\!|B_1^n|\!\|_1\right)\left(\sup_{m\geq 0}\|\!|B_2^m|\!\|_1\right).\end{aligned}$$

由于 B_1 和 B_2 可同时对角化且谱半径为 1，集合 $\{\|\!|B_1^n|\!\|_1\colon\ n\geq 0\}$和 $\{\|\!|B_2^m|\!\|_1\colon\ n\geq 0\}$ 有界，因此结论成立。□

现在，我们按照本节开头所述的形式证明定理 1。首先，假设 A 不可同时上三角化。这等价于：不存在一个以特征向量为首个元素的基，使该特征向量对每个 $A\in\mathsf{A}$ 都是特征向量；这又等价于： $\mathbb{R}^2$ 的任何一维向量子空间都不被 A 中的每个元素保持。

众所周知（例如参见 [15, 定理 2.2]），在上述最后一个条件下，必然存在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个范数 $|||\cdot|||$，使得对于每个$A \in \mathsf{A}$，$\max_{A\in\mathsf{A}} |||Av||| = |||v|||$；此时，特别地，在相应的算子范数下，$\max_{A\in\mathsf{A}} |||A||| \leq 1$。这显然意味着，对于由 A 生成的半群中的每个 A，都有 $|||A||| \leq 1$，因此在这种情形下结论成立。此时极限 (2) 的存在性显然。

在证明的其余部分，我们可以假设 A 可同时上三角化。对 $\mathbb{R}^2$ 进行正交基变换后，不失一般性地假设每个 $A \in$A 都是上三角矩阵（且不影响所求极限 (2) 的存在性或取值）。如果某个 $B \in$A 的谱半径严格大于 1，那么我们就有

$$1 = \lim_{n\to\infty} \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} \|A_n \cdots A_1\|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{n\to\infty} \|B^n\|^{\frac{1}{n}} > 1$$

这就产生了矛盾，因此 A 的每个元素的谱半径都至多为 1，故其对角元的绝对值都至多为 1。显然，A 中元素的所有乘积也具有后一性质。

现在我们希望证明极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} \|A_n \cdots A_1\| \geq 0 \tag{4}$$

存在。定义实 2×2 矩阵向量空间上的一个半范数 $|\cdot|$：将$|A|$ 定义为 A的右上角元素的绝对值。直接计算可轻易证明，若 A 和 B 是对角元绝对值至多为 1 的 2×2 上三角矩阵，则 $|AB| \leq |A| + |B|$。由此可直接得到数列

$$n \mapsto \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} |A_n \cdots A_1|$$

是次可加的，因此极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} |A_n \cdots A_1| \geq 0$$

存在。另一方面，对于每一个乘积

$$A_n \cdots A_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

由 A 中元素构成的乘积，显然有

$$|b| \leq \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \max\{|a|, |c|\} + |b| \leq 1 + |b|$$

因此

$$\max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} |A_n \cdots A_1| \leq \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} \|A_n \cdots A_1\| \leq 1 + \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} |A_n \cdots A_1|$$

对于每个 $n \geq 1$。我们得出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} \|A_n \cdots A_1\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{A_1,\dots,A_n\in\mathsf{A}} |A_n \cdots A_1|$$

特别是，前一个极限按要求存在。

现在我们证明，极限 (4) 要么为正，要么由 A 生成的半群有界。定义

$$\mathsf{A}_0 := \{A \in \mathsf{A} \colon |\det A| < 1\},$$

$$\mathsf{A}_1 := \{A \in \mathsf{A} \colon |\det A| = 1\}.$$

我们注意到，A_1 中的每个矩阵都属于以下三种类型之一：等于正或负单位矩阵；非平凡的 Jordan 矩阵，且行列式为 1；或者行列式为 -1 的上三角矩阵。如果 A_1包含一个属于第二种类型的矩阵 B，那么显然

$$\max_{A_1,\ldots,A_n \in \mathsf{A}} \|A_n \cdots A_1\| \geq \|B^n\| \geq n|B| > 0$$

对每个 $n \geq 1$ 都成立。如果其中包含两个彼此不是数乘关系的第三类矩阵，那么很容易验证它们的乘积是一个非平凡的 Jordan 矩阵 B，因此对所有 $n \geq 1$

$$\max_{A_1,\ldots,A_{2n} \in \mathsf{A}} \|A_{2n} \cdots A_1\| \geq \|B^n\| \geq n|B| > 0.$$

在这两种情形中的任一种下，显然 A_1 不可同时对角化，且极限 (4) 为正。若这两种情形均不成立，则对于某个具有行列式 -1 和对角元 ± 1 的上三角矩阵 $X \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$，有 $\mathsf{A}_1 \subseteq \{I, -I, X, -X\}$。显然，在这种情况下 A_1 可同时对角化。令 $\mathsf{X} := \{I, -I, X, -X\}$。根据凯莱-哈密顿定理 $X^2 = I$，从而很容易推出 $\{I, -I, X, -X\}$ 是一个群。因此，由 A 生成的半群中的每个元素，要么是 X 的元素，要么包含于由集合生成的半群中

$$\hat{\mathsf{A}} := \mathsf{A}_0 \cup \{BA \colon B \in \mathsf{X} \text{ and } A \in \mathsf{A}_0\} \cup \{AB \colon B \in \mathsf{X} \text{ and } A \in \mathsf{A}_0\}.$$

ˆ但是，A 满足命题 2.1 的假设，因此它所生成的半群是有界的。因此，由 A 生成的半群是有界的。我们注意到，只有在由 A 生成的半群包含一个具有单位行列式的非平凡 Jordan 矩阵时，才会出现无界性。证明完毕。

3. Proof of Theorem 2

3.1. 遍历理论预备知识与一个技术性结果。我们将从一个更一般的遍历理论命题推出定理 2。我们先给出一些必要的定义。如果 X 是一个紧致可度量拓扑空间，那么我们令 $\mathcal{M}(X)$ 表示 X 上所有博雷尔概率测度的集合。根据里斯表示定理，我们可以将 $\mathcal{M}(X)$ 识别为 $C(X)^*$ 的单位球面中的所有非负元素的集合，并通过这一识别，赋予 $\mathcal{M}(X)$ 从其作为 $C(X)^*$ 在弱-* 拓扑下的子空间所继承的拓扑。该拓扑使 $\mathcal{M}(X)$ 成为紧致且可度量的空间，并且在此拓扑下，对于每个 $\phi \in C(X)$，函数 $\mu \mapsto \int \phi \, d\mu$ 都是连续的。

若 $T\colon X \to X$ 是紧致度量空间上的连续变换，则我们用 $\mathcal{M}_T(X) \subseteq \mathcal{M}(X)$ 表示 T不变博雷尔概率测度的全体，用 $\mathcal{E}_T(X) \subseteq \mathcal{M}_T(X)$ 表示其中使 T遍历的所有测度。这两个集合均非空，前者在 $\mathcal{M}(X)$ 上的弱-* 拓扑下是闭集，因此也是紧致可度量拓扑空间。若 $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ 连续，则定义 $\beta(\phi) := \sup_{\mu \in \mathcal{M}_T(X)} \int \phi \, d\mu$。我们还将 $\mathcal{M}_{\max}(\phi)$ 定义为所有达到该上确界的 $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ 所组成的集合，即满足 $\int \phi \, d\mu = \beta(\phi)$ 的测度。根据紧致性和连续性的基本性质，集合 $\mathcal{M}_{\max}(\phi)$ 非空，并且与 $\mathcal{E}_T(X)$ 的交集也非空（例如参见[14, 命题 2.4]）。

下面的结果将用于证明定理 2：

定理 3. 设 $T\colon X \to X$ 是一个紧致度量空间上的同胚。设 $f, g\colon \Sigma \to (0,1]$ 连续，且 $\phi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ 连续，并假设 $\beta(\log f) = \beta(\log g) = 0$。对于每个 $x \in X$，定义

$$A(x) := \begin{pmatrix} f(x) & \phi(x) \\ 0 & g(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$

若 $\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g) \neq \emptyset$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \left\| A(T^{n-1}x) \cdots A(x) \right\| = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g)} \left| \int \phi \, d\mu \right| \geq 0$$

而若 $\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g) = \emptyset$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \left\| A(T^{n-1}x) \cdots A(x) \right\| = 0.$$

3.2. 定理3的证明概述及其与早期工作的关系。定理 3 的证明始于以下观察：对于每个 $n \geq 1$ 和 $x \in X$，乘积 $A(T^{n-1}x) \cdots A(x)$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} \prod_{j=0}^{n-1} f(T^j x) & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} f(T^j x) \right) \phi(T^k x) \left(\prod_{j=0}^{k-1} g(T^j x) \right) \\ 0 & \prod_{j=0}^{n-1} g(T^j x) \end{pmatrix}.$$

由于对角元必然属于 $(0,1]$, ，若该乘积的范数要趋于无穷大，那么它必然以与非对角项相同的速率增长

$$\Phi_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} f(T^j x) \right) \phi(T^k x) \left(\prod_{j=0}^{k-1} g(T^j x) \right)$$

因此，问题归结为证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} |\Phi_n(x)| = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g)} \left| \int \phi \, d\mu \right|$$

若 $\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log f)$ 非空，则.....；否则，同一极限等于零。

第二位署名作者在其博士论文中采用了如下方法来处理这个问题。为了得到足以证明定理 2 的例子，只需考虑 f 为常值函数的情形；此时我们只需研究稍微简单一些的表达式

$$\Psi_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k x) \left(\prod_{j=0}^{k-1} g(T^j x) \right). \tag{5}$$

这个表达式可以看作一种加权伯克霍夫平均，类似于诸如[1, 22, 28, 29] 等著作中出现的温纳-温特型遍历定理中的加权平均，并且可以通过对[22, 28]中所用策略稍作修改来研究。具体而言，可以将 (5) 重新表示为一个扩展的动力学

系统 T_g：由 $T_g(x,y) := (Tx, g(x)y)$ 定义，且连续函数 $\psi(x,y) := \phi(x)y$；通过简单归纳可得

$$\Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k x) \left(\prod_{j=0}^{k-1} g(T^j x) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi(T_g^k(x,1))$$

因此

$$|\Psi_n(x)| = \sup_{y\in[0,1]} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \psi(T_g^k(x,y)) \right|.$$

恒等式

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} |\Psi_n(x)| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{(x,y)\in X\times[0,1]} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \psi(T_g^k(x,y)) \right| \\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_{T_g}(X\times[0,1])} \left| \int \psi \, d\mu \right| \end{aligned} \tag{6}$$

随后可以利用遍历优化文献中的适当结果得到（例如参见 [14, 命题 2.2]）。通过仔细描述 T_g 的不变测度，并将其与 T 的不变测度联系起来，可以推导出一个类似于定理 3 中公式的表达式。这一方法还可以进一步发展，以允许 g 取值于 $[-1,1]$；不过在这种情况下，由于处理（5）中由 [14, 符号变化所产生的加性抵消存在困难，对极限的描述将变为不等式而非等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{x\in X} \left\| A(T^{n-1}x) \cdots A(x) \right\|$$

当 T 和 X 具有额外的正则性时，定理 3 还可以扩展到允许去除条件 $\sup g \leq 1$，因为借助诸如 [14, 定理 4.7] 之类的结果，可以从条件 $\beta(\log g) = 0$ 自动得到条件 $\sup g \leq 1$，代价是对 $\mathbb{R}^2$ 进行坐标变换，而该变换连续依赖于基点 $x \in X$：参见 [26, §5]。

在本文对定理 3 的处理中，我们将采用一种不同的方法，利用上述函数 Φ_n 具有次可加性的事实

$$|\Phi_{n+m}| \leq |\Phi_n \circ T^m| + |\Phi_m|$$

并应用次可加遍历优化中的技术（具体而言，来自 [18] 的附录），而不是 [14] 中的可加技术。这样做的优点是允许 f 为非常数，并且能够得到更简短的证明；但缺点是 f 和 g 被限制为取值于 $(0,1]$，而不是像 [26] 中那样取值于 $[-1,1]$。

以下标准结果的证明可见于例如 [9, 17]。

定理 4（次可加遍历定理）。设 T 是概率空间（X、$\mathcal{F}$、μ）上的遍历保测变换，并设（ψ_n）$_{n=1}^{\infty}$ 是一列可积函数 $X \to \mathbb{R}$，满足对每个 n、$m \geq 1$，$\psi_{n+m} \leq \psi_n \circ T^m + \psi_m$ 几乎处处成立。那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \psi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int \psi_n \, d\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int \psi_n \, d\mu$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in X$。

我们还要求满足 (6) 的以下次可加类比，它可见于 [18] 的附录。关于一些密切相关的早期结果，另请参见 [23, 24]。

定理 5. 设 $T\colon X \to X$ 是紧致度量空间上的连续变换，并设 $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一个连续函数序列 $X \to \mathbb{R}$，满足$\psi_{n+m}(x) \le \psi_m(T^n x) + \psi_n(x)$，对每个 $x \in X$和 $n, m \ge 1$均成立。那么

$$\inf_{n\ge1} \sup_{\mu\in\mathcal{M}_T(X)} \frac{1}{n}\int \psi_n \, d\mu = \sup_{\mu\in\mathcal{M}_T(X)} \inf_{n\ge1} \frac{1}{n}\int \psi_n \, d\mu$$
$$= \inf_{n\ge1} \sup_{x\in X} \frac{1}{n}\psi_n(x) = \sup_{x\in X} \inf_{n\ge1} \frac{1}{n}\psi_n(x).$$

在前三个表达式中，对 $n \ge 1$ 取下确界等于当 $n \to \infty$时同一表达式的极限。在所有情况下，对 $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$取的每个上确界都等于相应的对 $\mu \in \mathcal{E}_T(X)$取的上确界，并且由$\mathcal{E}_T(X)$中的一个元素取到。

现在我们开始证明定理 3，进而证明定理 2。

3.3. 定理 3 的证明。考虑连续函数序列 $\Phi_n\colon X \to \mathbb{R}$，其定义如下：

$$\Phi_n(x) := \sum_{j=0}^{n-1} f(T^{n-1}x)\cdots f(T^{j+1}x)\phi(T^j x)g(T^{j-1}x)\cdots g(x).$$

我们注意到关系

$$\Phi_{n+m}(x) = \Phi_m(T^n x)g(T^{n-1}x)\cdots g(x) + f(T^{n+m-1}x)\cdots f(T^n x)\Phi_n(x)$$

对每个 $x \in X$ 和 n、$m \ge 1$均成立，因此

$$|\Phi_{n+m}(x)| \le |\Phi_m(T^n x)| + |\Phi_n(x)|$$

对所有此类 n、m 和 x均成立。由此可知，定理 5 适用于函数序列 $|\Phi_n|$，因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sup_{x\in X}|\Phi_n(x)| = \sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(X)} \inf_{n\ge1} \frac{1}{n}\int |\Phi_n| \, d\mu.$$

现在，对每个 $x \in X$ 和 $n \ge 1$，我们有

$$A(T^{n-1}x)\cdots A(x) = \begin{pmatrix} \prod_{j=0}^{n-1} f(T^j x) & \Phi_n(x) \\ 0 & \prod_{j=0}^{n-1} g(T^j x) \end{pmatrix}$$

因此尤其

$$\Big|\big\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\big\| - |\Phi_n(x)|\Big|$$
$$= \left|\left\|\begin{pmatrix} \prod_{j=0}^{n-1} f(T^j x) & \Phi_n(x) \\ 0 & \prod_{j=0}^{n-1} g(T^j x) \end{pmatrix}\right\| - \left\|\begin{pmatrix} 0 & \Phi_n(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|\right|$$
$$\le \left\|\begin{pmatrix} \prod_{j=0}^{n-1} f(T^j x) & 0 \\ 0 & \prod_{j=0}^{n-1} g(T^j x) \end{pmatrix}\right\|$$
$$= \max\left\{\left|\prod_{j=0}^{n-1} f(T^j x)\right|, \left|\prod_{j=0}^{n-1} g(T^j x)\right|\right\} \le 1$$

根据反三角不等式。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in X}|\Phi_n(x)| = \sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(X)}\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\int|\Phi_n|\,d\mu$$

为了证明该定理，我们将对后者进行估计。我们依次考察以下情形： $\mu\in\mathcal{E}_T(X)$ 不属于 $\mathcal{M}_{\max}(\log\ g)$，不属于 $\mathcal{M}_{\max}(\log\ f)$，或同时属于这两个集合。

如果 $\mu\in\mathcal{E}_T(X)$ 不属于 $\mathcal{M}_{\max}(\log\ g)$，那么对于 μ-几乎处处的 $x\in X$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\big(g(T^{k-1}x)\cdots g(x)\big) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\log g(T^jx) = \int\log g\,d\mu < \beta(\log g) = 0$$

因此对于 μ-几乎处处的 $x\in X$

$$\begin{aligned}|\Phi_n(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(T^{n-1}x)\cdots f(T^{k+1}x)\phi(T^kx)g(T^{k-1}x)\cdots g(x)\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\big|\phi(T^kx)\big|\cdot g(T^{k-1}x)\cdots g(x)\\ &\leq \|\phi\|_\infty\sum_{k=0}^{\infty} g(T^{k-1}x)\cdots g(x) < \infty\end{aligned}$$

对于每个 $n\geq 1$ 都成立。由此可得，对于 $\frac{1}{n}|\Phi_n|\to 0$ μ-几乎处处成立，因此根据次可加遍历定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int|\Phi_n|\,d\mu = \inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\int|\Phi_n|\,d\mu = 0.$$

现在反过来假设 $\mu\in\mathcal{E}_T(X)$ 不属于 $\mathcal{M}_{\max}(\log\ f)$。由于 μ is$T$ 不变，它也具有 T^{-1} 不变性，因此将伯克霍夫遍历定理应用于T^{-1}，同样可得

$$\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}\log f(x)f(T^{-1}x)\cdots f(T^{-(\ell-1)}x) = \int\log f\,d\mu < \beta(\log f) = 0$$

因此，对于 μ-几乎处处的 $x\in X$

$$\begin{aligned}\left|\Phi_n(T^{-(n-1)}x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x)\cdots f(T^{k+2-n}x)\phi(T^{k+1-n}x)g(T^{k-n}x)\cdots g(T^{-(n-1)}x)\right|\\ &= \left|\sum_{\ell=0}^{n-1} f(x)\cdots f(T^{-(\ell-1)}x)\phi(T^{-\ell}x)g(T^{-\ell-1}x)\cdots g(T^{-(n-1)}x)\right|\\ &\leq \sum_{\ell=1}^{n} f(x)\cdots f(T^{-(\ell-1)}x)\cdot\big|\phi(T^{-\ell}x)\big|\\ &\leq \|\phi\|_\infty\sum_{\ell=1}^{\infty} f(x)\cdots f(T^{-(\ell-1)}x) < \infty\end{aligned}$$

对每个 $n\geq 1$ 都成立。因此，对于 μ-几乎处处的 $x\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\Phi_n\left(T^{-(n-1)}x\right)\right| = 0$$

从而特别有 $\frac{1}{n}|\Phi_n \circ T^{-(n-1)}| \to 0$ 依测度收敛；但由于 μ 是 T-不变的，这意味着 $\frac{1}{n}|\Phi_n| \to 0$ 依测度收敛。结合次可加遍历定理，可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int |\Phi_n| \, d\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int |\Phi_n| \, d\mu = 0.$$

结合刚才证明的两个事实，我们已经证明，若 $\mu \in \mathcal{E}_T(X)$ 不属于 $\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g)$，则

$$\inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int |\Phi_n| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int |\Phi_n| \, d\mu = 0.$$

若 $\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g)$ 为空集，这就证明了

$$\sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(X)} \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int |\Phi_n| \, d\mu = 0$$

这就完成了该情形下定理的证明。否则，假设$\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g)$ 非空。由于根据假设 $0 = \beta(\log f) \leq \sup \log f \leq 0$ 且 $0 = \beta(\log g) \leq \sup \log g \leq 0$，不难看出集合

$$Z := \{x \in X \colon \log f(x) = \log g(x) = 0\} = \{x \in X \colon f(x) = g(x) = 1\}$$

满足对每个 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g)$ 都有 $\mu(Z) = 1$，因此特别地它非空。此外，很容易验证

$$\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g) = \{\mu \in \mathcal{M}_T(X) \colon \mu(Z) = 1\} = \mathcal{M}_T(Z)$$

因此

$$\mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g) \cap \mathcal{E}_T(X) = \mathcal{M}_T(Z) \cap \mathcal{E}_T(X) = \mathcal{E}_T(Z).$$

现在，若 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\log f) \cap \mathcal{M}_{\max}(\log g) \cap \mathcal{E}_T(X) = \mathcal{E}_T(Z)$，那么对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，我们只需

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\Phi_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k x) \right| = \left| \int \phi \, d\mu \right|$$

利用伯克霍夫遍历定理，以及 f 和 g 在 Z 上恒等于 1 这一事实。因此

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}(\log f)\cap\mathcal{M}_{\max}(\log g)\cap\mathcal{E}_T(X)} \left| \int \phi \, d\mu \right| = \sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(Z)} \left| \int \phi \, d\mu \right|.$$

由于我们已经证明

$$\sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(X)\setminus(\mathcal{M}_{\max}(\log f)\cap\mathcal{M}_{\max}(\log g))} \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} \int |\Phi_n| \, d\mu = 0$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(X)}\inf_{n\geq 1}\frac{1}{n}\int|\Phi_n|\,d\mu &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}(\log f)\cap\mathcal{M}_{\max}(\log g)\cap\mathcal{E}_T(X)}\left|\int\phi\,d\mu\right|\\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{E}_T(Z)}\left|\int\phi\,d\mu\right|\\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_T(Z)}\left|\int\phi\,d\mu\right|\\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}(\log f)\cap\mathcal{M}_{\max}(\log g)}\left|\int\phi\,d\mu\right|\end{aligned}$$

如所需。定理的证明完毕。

3.4. 定理 2 的证明。取 d 在 Σ_2 上的一个度量，使其生成无限乘积拓扑。令 $[1]\subset\Sigma_2$ 表示所有满足 $x_0=1$ 的 $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Sigma_2$ 的集合；根据无限乘积拓扑在 Σ_2 上的定义，该集合既是闭集也是开集。根据适当版本的 Jewett-Krieger 定理（例如参见 [8, §29]），或通过诸如 [7, 10, 11], 的各种直接构造，存在一个紧致的 T-不变集 $Z\subset\Sigma_2$，具有以下性质：存在唯一的 $\nu\in\mathcal{M}_T$，使得 $\nu(Z)=1$；T 关于这个唯一测度 ν 是弱混合的；ν 的支撑恰好是 Z；并且 Z 不是单点集。由于 Z 不是单点集，我们有 $0<\nu([1])<1$，因此 $e^{2\pi i\nu([1])}\neq 1$，这一性质将在后文发挥重要作用。对所有 $x\in\Sigma_2$，定义 $f(x)=g(x)=e^{-\operatorname{dist}(x,Z)}$，其中 $\operatorname{dist}(x,Z):=\inf_{y\in Z}d(x,y)$。显然，$f$ 和 g 是利普希茨连续的，并且满足 $\beta(\log f)=\beta(\log g)=0$ 以及 $\mathcal{M}_{\max}(\log f)=\mathcal{M}_{\max}(\log g)=\{\nu\}$。另外，定义 $\phi(x):=\chi_{[1]}(x)-\nu([1])$。根据无限乘积拓扑的定义，$\phi\colon\Sigma_2\to\mathbb{R}$ 是连续的；由于 Σ_2 关于 d 是紧致度量空间，ϕ 关于 d 一致连续；又由于 ϕ 恰好取两个值，这意味着 ϕ 关于 d 是利普希茨连续的，符合要求。按照定理陈述中的定义，令 $A\colon\Sigma_2\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$。显然，定理 3 适用。由于

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_{\max}(\log f)\cap\mathcal{M}_{\max}(\log g)}\left|\int\phi\,d\mu\right|=\left|\int\phi\,d\nu\right|=|\nu([1])-\nu([1])|=0,$$

由定理 3 得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sup_{x\in\Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|=0. \tag{7}$$

反设

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|<\infty,$$

在这种情况下，由于 $f \equiv g \equiv 1$ 在 Z上，

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in Z}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\phi(T^j x)\right| &\leq \sup_{n\geq 1}\sup_{x\in Z}\left\|\begin{pmatrix}1 & \sum_{j=0}^{n-1}\phi(T^j x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\| \\ &= \sup_{n\geq 1}\sup_{x\in Z}\left\|\begin{pmatrix}1 & \phi(T^{n-1}x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}1 & \phi(Tx)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \phi(x)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\| \\ &= \sup_{n\geq 1}\sup_{x\in Z}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| \\ &\leq \sup_{n\geq 1}\sup_{x\in \Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| < \infty.\end{aligned}$$

我们借鉴 Hal´asz [13] 的一个论证，推导出 T 不可能相对于 ν 弱混合，从而得到所需的矛盾。鉴于上述界，我们可以定义一个有界的博雷尔可测函数 $\psi\colon Z \to \mathbb{R}$，定义为 $\psi(x) := \limsup_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\phi(T^j x)$。显然，对每个 $x \in Z$，都有 $\psi(x) = \phi(x) + \psi(Tx)$，因此

$$e^{2\pi i\psi(x)} = e^{2\pi i\phi(x)}e^{2\pi i\psi(Tx)} = e^{2\pi i\chi_{[1]}(x)}e^{-2\pi i\nu([1])}e^{2\pi i\psi(Tx)} = e^{-2\pi i\nu([1])}e^{2\pi i\psi(Tx)}$$

对每个 $x \in Z$ 都成立，这里我们用到了函数 $\chi_{[1]}$ 只取整数值这一事实。特别地，$e^{2\pi i\psi}\circ T = e^{2\pi i\nu([1])}e^{2\pi i\psi}$ ν-几乎处处成立，因此 $e^{2\pi i\psi}$ 是复合算子 $h \mapsto h\circ T$ 在 $L^2(\nu)$ 上、对应特征值 $e^{2\pi i\nu([1])} \neq 1$ 的特征函数，这与 T 相对于 ν 是弱混合这一事实矛盾。我们得到了所需的矛盾，并由此推知必有

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\| = \infty. \tag{8}$$

极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\sup_{x\in\Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|$$

由次可加性可知该极限显然存在。根据（7），该极限不可能严格大于零；根据（8），也不可能严格小于零。因此，该极限为零，也就是说

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\Sigma_2}\left\|A(T^{n-1}x)\cdots A(x)\right\|^{\frac{1}{n}} = 1$$

这正是定理陈述所要求的结果。定理的证明至此完成。

4. Acknowledgements

定理1、2和3以及命题 2.1的版本此前曾发表于第二位署名作者的博士论文 [26]。J. Varney获得了EPRSC博士培训合作项目资助（项目编号EP/R513350/1）。I. D. Morris获得了Leverhulme信托基金研究项目资助RPG-2016-194的部分资助。

References

[1] Assani, I. *Wiener Wintner ergodic theorems*. 世界科学出版社, 新泽西州里弗埃奇, 2003.

[2] Bell, J. P., Coons, M., and Hare, K. G. 正则序列的最小增长。*Bull. Aust. Math. Soc. 90*, 2 (2014), 195–203. [3] Bell, J. P., Coons, M., and Hare, K. G. 整数矩阵有限生成半群的增长次数分类。 *Semigroup Forum 92*, 1 (2016), 23–44.

[4] Bochi, J. and Garibaldi E. *J. Éc. polytech.* , , *Math. 6* 2019 947 1004
纤维束化余循环的极值范数。 ( ), – . [5] Bochi,
J. and Zhang Y. *Int.* , , 普遍超连续函
Math. Res. Not. IMRN 19 2016 5988 6017
数的遍历优化。 , ( ), – . [6] Chitour, Y., Mason, P., and Sigalotti, M. 线性切换系统的边缘不稳定性。
Systems Control Lett. 61, 6 (2012), 747–757. [7] Dekking,
F. M. and Keane M. *Z. Wahrscheinlichkeit-* , , 替换的混合性
stheorie und Verw. Gebiete 42 1 1978 23 33
质。 , ( ), – . [8] Denker, M., Grillenberger, C., and Sigmund, K. *Ergodic theory on compact spaces*.
数学讲义，第527卷。Springer-Verlag, 柏林—纽约, 1976.[9] Derriennic,
Y. ´ ` *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 关于次可加遍历
281 22 1975 985 988
定理。 , ( ), Aii, A –A . [10] Grillenberger,
C. *K* *Z. Wahrschein-* 严格遍历系统的
lichkeitstheorie und Verw. Gebiete 25 1972 73 335 342
构造，II：-系统。 (/), – . [11] Grillenberger, C., and Shields, P. 严格遍历系统的构造，III：伯努利系统。
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 33, 3 (1975/76), 215–217. [12] Guglielmi, N.,
and Zennaro, M. 关于矩阵族的渐近性质。*Linear Algebra Appl. 322*, 1-3 (2001), 169–192. [13] Halász,
G. *Acta Math. Acad. Sci.* 关于伯克霍夫遍
Hungar. 28 3 4 1976 389 395
历定理中的余项的备注。 , - ( ), – . [14] Jenkinson, O. 遍历优化。 *Discrete Contin. Dyn. Syst. 15*, 1 (2006),
197–224. [15] Jungers, R. *The joint spectral radius: theory and applications*, vol.
385 *Lecture Notes in* of .
Control and Information Sciences 2009
Springer-Verlag, 柏林, . [16] Jungers, R. M., Protasov, V., and Blondel, V. D. 用于判定整数矩阵乘积增
长类型的高效算法。 *Linear Algebra Appl. 428*, 10 (2008), 2296– 2311.[17] Katznelson,
Y. and Weiss B. *Israel J. Math.* , , 若干遍历定理
42 4 1982 291 296
的简洁证明。 , ( ), – . [18] Morris, I. D. 矩阵序列的马瑟集及其在联合谱半径研究中的应用。
Proc. Lond. Math. Soc. (3) 107, 1 (2013), 121–150. [19] Morris, I. D. 轨迹增长高度不规则的边际不稳定离散
时间线性切换系统。 *Systems Control Lett. 163* (2022), 105216. [20] Protasov, V. Y., and Jungers,
R. M. 切换系统的共振与边缘不稳定性。 *Nonlinear Anal. Hybrid Syst. 17* (2015), 81–93. [21] Quas, A.,
and Siefken, J. 移位空间上超连续函数的遍历优化。 *Ergodic Theory Dynam. Systems 32*, 6 (2012), 2071–
2082. [22] Santos, S. I., and Walkden, C. 通过非阿贝尔李群扩张得到的拓扑维纳–温特纳遍历定理。
Ergodic Theory Dynam. Systems 27, 5 (2007), 1633–1650. [23] Schreiber,
S. J. *J. Differential* 半流的次可加函
Equations 148 2 1998 334 350
数增长率。 , ( ), – . [24] Sturman, R., and Stark, J. 半一致遍历定理及其在受迫系统中的应用。
Nonlinearity 13, 1 (2000), 113–143. [25] Sun,
Z. *IEEE Trans. Automat. Control* 关于切换系统边
53 2 2008 625 631
际稳定性的札记。 , ( ), – . [26] Varney, J. *Marginal instability of matrix systems*. 博士论文，萨里大学，英国
吉尔福德，2022.[27] Varney, J., and Morris, I. D. 关于矩阵乘积的边际增长率。预印本：
arXiv:2209.00449, 2022. [28] Walters, P. 拓扑维纳–温特纳遍历定理与随机 L^2 遍历定理。
Ergodic Theory Dynam. Systems 16, 1 (1996), 179–206. [29] Wiener, N., and Wintner, A. 调和分析与遍
历理论。 *Amer. J. Math. 63* (1941), 415–426.

I. D. Morris: School of Mathematical Sciences, Queen Mary University of London,
Mile End Road, London E1 4NS, United Kingdom*Email address*: i.morris@qmul.ac.uk

J. Varney: Mathematics Department, University of Surrey,
Guildford GU2 7XH,United KingdomEmail address: jonahvarney@gmail.com