线性时间计算仙人掌图的 m-永恒支配数

Václav Blažej布拉格捷克理工大学信息技术学院，布拉格，捷克共和国**Jan MatyášKřišťan**F

布拉格捷克理工大学信息技术学院，布拉格，捷克共和国
Tomáš VallaF

布拉格捷克理工大学信息技术学院，布拉格，捷克共和国

arXiv:2301.05155v1 [cs.DS] 12 Jan 2023

摘要

在 m-永恒支配中，攻击者和防守者在图上进行博弈。起初，防守者将守卫放置在顶点上。每一回合，攻击者选择一个顶点进行攻击。随后，防守者可以将每个守卫移动到邻点，并且必须将一个守卫移动到被攻击顶点。m-永恒支配数是能够使图得到无限期防守所需的最少守卫数。

本文研究仙人掌图的 m-永恒支配数。我们考虑 m-永恒支配数的两种变体：一种允许多个守卫占据同一个顶点，另一种则要求守卫占据不同的顶点。我们提出若干工具，用于求解这些问题的下界和上界，并利用这些工具设计一种算法，计算这两种问题变体下仙人掌图所需的最少守卫数。

2012年 ACM 学科分类图论

关键词与短语图、算法、永恒支配

1 引言

考虑以下由攻击者和防守者在图 G 上进行的博弈。防守者控制一组守卫，并在初始时将它们放置在 G 的顶点上。每个顶点至多可被一个守卫占据。

每一回合中，攻击者首先选择一个顶点进行攻击。随后，防守者必须通过沿相邻边移动部分或全部守卫来防御此次攻击，使其中一个守卫移动到被攻击顶点。

如果攻击后被攻击顶点没有守卫占据，攻击者就获胜。如果防守者能够无限期地进行防御，则防守者获胜。

利用守卫在无限多个步骤中防御图免受攻击的研究由 Burger 等人提出 [3]。本文研究 m-永恒支配这一概念，该概念由 Goddard 等人提出 [6] （永恒支配最初称为永恒安全）。这里，字母“m”表示每一回合中可以移动多个守卫。Goddard 等人 [6] 还研究了该问题的一个变体，其中每一回合只能移动一个守卫；本文不考虑这一变体。

m-永恒支配数 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$ 是能够无限期抵御所有攻击所需的最少守卫数。Goddard 等人 [6] 精确地确定了 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 在路径、圈、完全图和完全二部图上的值。此后，一些研究致力于

作者感谢 OP VVV MEYS 资助项目 CZ.02.1.01/0.0/0.0/16_019/0000765“信息学研究中心”提供的支持。本研究获得布拉格捷克理工大学拨款机构资助，项目编号 SGS20/208/OHK3/3T/18。另获捷克科学基金会项目 22-19557S 资助。

在不同条件或图类下求得 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 的界。研究过的图类包括树 [12, 8, 14], 、网格 [4, 18, 16, 10, 5, 9, 15], 和区间图 [2, 17]。有关其他相关结果和主题的综述，可参见 Klostermeyer 和 Mynhardt [13]。

关于 m-永恒支配的算法方面，目前所知甚少。判定问题（询问 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq k$）是 NP-困难的，且属于 EXPTIME；然而，目前尚不清楚它是否属于 PSPACE 类 [13]。

1.1 原始结果

本文聚焦于仙人掌图这一类图（每条边至多属于一个环的连通图），并给出一种用于计算仙人掌图中 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 的算法。在第4节中，我们提供了一组工具，可广泛用于证明 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 的上界和下界。随后在第5节中，我们利用这些工具描述一组约简，从而计算仙人掌图的 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$。这是对 Klostermeyer 和 MacGillivray [11], 所提出基本原理的一项重要扩展，他们给出了一种用于计算树的 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 的算法。

我们的主要结果总结如下定理。

▶**定理 1.1**。设 G 是一个具有 n 个顶点的仙人掌图。那么存在一个多项式算法，可以计算 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$。

1.2 预备知识

现在，我们正式回顾所有标准概念。若图中的每条边至多位于一个环上，则称该图为仙人掌图。对于无向图 G，将其顶点的一个多重集称为一个配置 $C = \{c_1, \ldots, c_n \mid c_i \in V(G)\}$。我们将配置中的元素称为守卫。如果某个顶点是一个配置中的元素，则称该顶点被占据（被一个守卫占据）。若图 G 的两个配置 C_1 和 C_2 相互可 traversable，则存在某个对的集合 $\mathrm{T}(C_1, C_2) = \{(v_1, u_1), (v_2, u_2) \ldots, (v_n, u_n)\}$，使得 $C_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 且 $C_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$，并且对于从 1 到 n的所有 i，均有 $\{v_i, u_i\} \in E(G)$。我们将守卫视为在图中移动的令牌。$\mathrm{T}(C_1, C_2)$中的元素称为移动，其中任意一个有序对称为一个守卫的一次移动。若一个守卫在 $\mathrm{T}(C_1, C_2)$中移动后回到其出发顶点，则称其为静止的。G 中的策略是一个图 $S_G = (\mathbb{C}, \mathbb{F})$，其中 $\mathbb{C}$ 是 $V(G)$上的配置集合，所有配置的大小相同，而 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}^2$ 描述配置之间可能的转移。策略的阶是其每个配置中的守卫数量。相关论文通常假设策略边以隐式方式给出，即 $\mathbb{F} = \big\{\{C_1, C_2\} \in \mathbb{C}^2 \mid C_1$ 和 C_2 在 $G\big\}$中相互可 traversable。本文则需要显式规定策略。我们将在第 4.2 节介绍精确策略规定的概念。

我们称策略 S_G 为防御顶点攻击，如果对于任意 $C \in \mathbb{C}$，配置 C 及其在 S_G 中的邻点覆盖了 G 的所有顶点；也就是说，当顶点 $v \in V$（G）受到“攻击”时，总能通过切换到一个在顶点 v 处有守卫的配置来应对。形式上，如果 $S_G =$（$\mathbb{C}$，$\mathbb{F}$）满足以下条件，则称其具有防御性

$$(\forall C \in \mathbb{C})\,(\forall v \in V(G))\,\big(v \in C \vee (\exists C' \in \mathbb{C})(\{C, C'\} \in \mathbb{F} \wedge v \in C')\big).$$

注意，任何能够防御顶点攻击的策略中的配置都会在 G 中导出一个支配集，否则攻击者会在下一回合获胜。

我们研究该博弈的两种变体。两种变体的区别在于是否允许多个守卫占据同一个顶点。设 G 中的*m-永恒守卫策略*是一种能够防御 G 中顶点攻击的策略。

m-永恒支配

输入： 一个无向图 $G = (V, E)$。
问题： 最少需要多少名守卫 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$，才能使得存在一种 m-永恒守卫策略 S_G，其中每个顶点至多由一名守卫占据，以抵御 G 中的顶点攻击?

m-永恒守卫配置

输入： 一个无向图 $G = (V, E)$。
问题： 最少需要多少名守卫 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$，才能存在一种 m-永恒守卫策略 S_G，以抵御 G 中的顶点攻击?

G 中 u 的开邻域记作 $N_G(u)$。用 P_n 表示一条有 n 条边和 $n+1$ 个顶点的路径。用 $G[U]$ 表示由顶点集 $U \subseteq V(G)$ 在 G 中诱导的子图。

2 证明的高层概述

为了求解仙人掌图上的 m-永恒支配和 m-永恒守卫配置，我们对顶点数进行归纳。基本情形将在定义 5.6 中给出。在归纳步骤中，我们展示如何将仙人掌图 G 约简为一个更小的仙人掌图 G'，并以下述方式证明下界和上界。利用观察 4.3 和 4.8–4.10，可将 G 约简为 G'。这些观察直接给出下界$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + K$，其中某个常数为 K。接着，我们展示如何将 G' 扩展为 G。假设 G' 具有一个最优防御策略，并且该策略满足归纳过程中得到的若干良好性质。我们证明，图 G' 的一部分及其策略可以替换为另一部分及其策略，因为它们满足定义 4.25。随后，依据定义 4.27 替换这些部分，将 G' 扩展为 G，并证明观察 4.29 给出的上界适用。由此得到上界 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + K$（与下界中的$K$ 相同）。结合引理 4.2 得到的下界和上界，我们便能求出 G的最优守卫数。

根据观察 5.3，所用的约简取决于仙人掌图中包含的叶分量。一种情况是该子图为树；另一种情况是存在叶环 ——即带有叶节点、并通过单个割点与图的其余部分相连的环。我们将这些约简分为三组。

第 3 节中介绍的第一组称为叶约简，其中包含若干针对不与叶环相邻的叶节点的简单约简。Goddard、Hedetniemi 和 Hedetniemi [6]证明，这些约简足以确定任意树的 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$。我们在自己的框架中重新引入这些约简，并给出更一般的结果，使这些约简能够应用于非树图类中的树子图。它们也为如何使用第 4 节中的工具提供了一个入门示例。

进一步的约简更加复杂，需要对策略进行非平凡的操作。在归纳过程中建立具有良好性质的策略，有助于采用更强的归纳步骤。在第 5.2 节中，我们将介绍另外两组约简所用的性质。

最后两组称为环约简和常数分支归约，分别见第 5.3 节和第 5.4 节。环约简针对出现在叶环上的子结构。我们固定一个叶环，并在其上反复应用这些约简。每次约简都会缩短叶环。最终，环会变得很短，并通过常数分支归约进行约简。

经过这些约简后，叶环会被完全移除，原处只留下零个、一个或两个叶子。随后，这些叶子会作为树叶，或作为与另一个叶环相邻的叶顶点进行处理。

3 树约简

本节将直观地介绍用于求得下界和上界的工具，这些工具将在第4节中正式介绍。我们重点讨论树约简，这些约简最初由 Goddard、Hedetniemi 和 Hedetniemi [6] 提出，作为计算树上 m-永恒支配数 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 的线性算法的一部分。现在，我们将介绍这组约简，并在引理 3.1–3.3中证明其正确性。

对于图 G，设顶点 $u \in V(G)$ 与 $\ell \geq 1$ 个叶节点相邻，且度为 d。设 v 是与 u相邻的一个叶节点。我们将 G 到G' 的三种叶约简定义如下。各项界的证明示例见表1。

▶ **约简1**。 t_1 若 $\ell = 1$ 且 $d \leq 2$，则令 $G' = G \setminus \{u, v\}$。

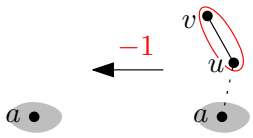
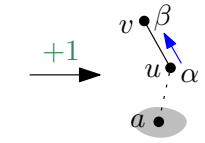
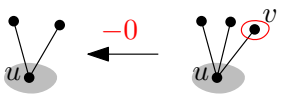
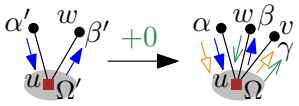
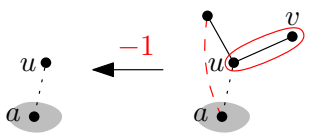
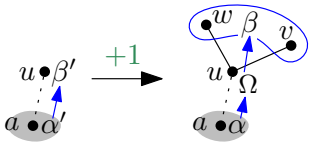
▶ **约简2**。 t_2 若 $\ell > 2$，令 $G' = G \setminus \{v\}$。

▶ **约简3**。 t_3 若 $\ell = 2$ 且 $d = 3$，令 $G' = G \setminus \{$与 u相邻的所有叶节点$\}$。

约简 t_2 和 t_3 可以合并为一个约简，该约简会移除一个满足 $\ell \geq 2$ 和 $d = \ell + 1$（用于 [6]）的顶点的所有叶节点。不过，约简 t_2 可用于更广泛的情形，因为它不要求 d具有特定值。

现在假设我们知道 G'（对于 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$ 和 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$）的最优守卫数。我们的目标是证明两件事。证明 G 始终比G' 至少多使用 K 个守卫，就能得到 G所需守卫数的下界。证明存在一种针对 G 的策略，其使用的守卫数至多比 G' 上的最优策略多 K 个，就能得到 G上的守卫数上界。综合这两个界，我们就能得到 G的最优守卫数。引理 4.2 对这一概念作了形式化介绍。

表1 叶约简；下界一侧展示团约简（移除标记顶点，并将其邻域与一个团连接）；上界一侧用希腊字母标注顶点，表示它们所属的状态，箭头则显示一个状态如何转移到另一个状态。标记顶点组根据定义 4.30 创建。

约简	下界	上界
t_1		
t_2		
t_3		

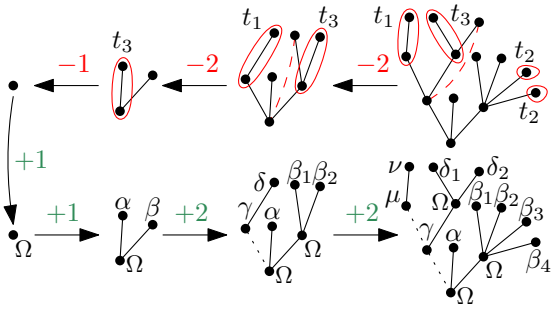


图1 在树图上应用叶约简的示例。虚线表示该策略不使用这条边，而子树上的策略彼此独立，这是由约简 t_1 导致的。注意，即使不存在顶点 a，也可以使用约简 t_3 。

掌握这些约简后，请看图1，其中展示了这些约简的一个示例
u用于构造树的策略。

现在我们继续展示由这些约简得到的界。一般来说，证明包含下界和上界两部分，配套示意图见表1。下界的证明相当简单——划定图中一个保证包含 K 个守卫的连通部分，将其移除，并将其邻域与一个团连接起来。上界则更为棘手——我们假设在 G' 上存在某个具有良好性质的最优策略，然后将其扩展到 G ，同时保持这些性质。以下证明中使用的记号定义于第4节。

我们称图 G 由 k 个守卫防守，如果 $k = \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) = \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$，并且使用 k 个守卫的策略符合性质 3 所定义的适当条件，该性质定义于第5节。这样我们就可以简洁地陈述引理。现在来看三个叶约简的证明。

▶**引理 3.1.** 设 G' 为应用约简 t_1后的 G 。 G 比 G'多用1 个守卫进行防守。

证明。由于 $\{u, v\}$ 是叶子及其邻点，因此总是至少有一个守卫，所以我们可以对 $\{u, v\}$ 应用观察 4.8，得到下界 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。为得到上界 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$，我们额外安排一个守卫，独立于策略的其余部分防守 $\{u, v\}$。结合引理 4.2，将下界和上界合并可得， G 比 G'多用 1 个守卫进行防守。◀

注意，约简 t_1 后的最终策略图是策略图 G' 与一个单边图的笛卡尔积。笛卡尔积是定义 4.30 的基础，我们将在该定义中引入一种运算，即使策略并非完全独立，也能将它们连接起来。我们将使用这一运算，以及引理 4.37 中证明的一条性质：可以改变策略，使得与多个叶节点相邻的顶点始终被占据。

为简化记号，我们将保留撇号 (′)，用来表示约化实例的结构，例如图 G'、防御策略 $\mathcal{B}'$、策略图 $S'_{G'}$、其状态（顶点）Ω' 和转移（边） $\mathbb{F}'$等。

▶**引理 3.2.** 设 G' 为应用约简 t_2后的结果。 G 可由与 G'相同数量的守卫防御。

证明。 的下界 0 可通过应用观察 4.3，将 v 与 u 等同，从而$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G')$。

6 在线性时间内计算仙人掌图的 m-永恒支配数

对于上界，由归纳法可得一个防御标记策略$\mathcal{B}'$，它属于 G'。我们希望对其进行调整，使其也能防御顶点 v。我们应用引理 4.37 调整$\mathcal{B}'$，使得在 Ω′的每个状态中， u 都被占据。设 w 是与 u 相邻且不同于 v的一个叶子。我们将策略 $S'_{G'}$ 的所有状态（顶点）划分如下。如果在 α' 中顶点 w被占据，则状态 α' 属于$\mathcal{S}'(w)$。

现在，我们在子集 S′(w) 上，将 $S'_{G'}$ 与单边 {α, β} 做图的笛卡尔积（定义 4.30）。简写为 $S_{G'} = S'_{G'} \square_{\mathcal{S}'(w)} \{\alpha, \beta\}$。这会将策略中 w 被占据的所有顶点一分为二。我们将新集合记为 α 和 β。这样，我们在约简图 G' 上得到了一个新的策略图 $S_{G'}$。现在，我们从 G' 扩展到G，同时对策略进行少许调整。在 β 中，我们将 w 上的守卫替换为v上的守卫。守卫将在 α 和 β 的状态之间按照 T (α, β) ={(w, u), (u, v)} 进行转移，而其余守卫不动。由于 w 和 v 是兄弟节点，因此可知，对于任意 $\gamma \in \Omega$，我们都可以按照与 v 相同的方式转移到 w，即使将它们互换也是如此。根据引理 4.32，这仍然构成防御。因此， $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G')$，并且根据引理 4.2，我们得到： G 以与 G' 相同数量的守卫得到防御。◀

所示策略以基本“相同的方式”防守 v 和防守 w。当守卫可以在一步内从一个位置转移到另一个位置，同时其余守卫保持静止时，我们就可以这样做。有关详细说明，请参见定义 4.30 及展示其性质的相关引理。

先前的归约界是通过详尽的说明证明的。在接下来的证明中，我们只需运用这些工具直接得出结果。请注意，使用非常相似的论证可以得到任意数量的叶节点。

▶**引理 3.3.** 令 G' 为应用约简 t_3之后的 G。 G 的防守所需守卫比 G'多 1 个。

证明。利用观察 4.8 作用于顶点 {u, v}，可得到下界 1；所得图与移除所有与 u 相邻的叶节点后得到的图同构，从而得到 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。对于上界，我们应用引理 4.33，使用一个额外守卫将两个叶节点添加到 u，直接得到 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。由引理 4.2 可知， G 的防守所需守卫比 G'多 1 个。◀

请注意，为约简 t_1、 t_2 和 t_3 设计的界并不要求图是树。我们可以在任何图类中使用这些约简。因此，我们可以约简作为其他图的一部分的子树中的任意叶节点。特别地，约简 t_2 也可用于将与任意顶点相邻的叶节点数约简至 2，因为 u 与其他顶点的连接不会妨碍该约简。请注意，在这种情况下，我们得到 m-永恒守卫配置的下界和 m-永恒支配的上界。

Goddard、Hedetniemi 和 Hedetniemi [6] 此前已证明，这些约简（最初以略有不同的形式给出）足以求解任意树图。请注意，通过以树为根，并反复对最深叶节点的父节点应用约简 t_1、 t_2 和 t_3，即可证明这一点。

另请注意，约简 t_1 和 t_3 并不要求其余图（由顶点 a 表示）必须存在，因此，这些约简可以求解只剩下一条单边或一个星形图的基本情形。

在树上使用这些约简后，我们会将顶点划分为若干子树，并分别对其进行防守。这些连通分量构成一种新殖民化，这是 Goddard 等人 [6]提出的概念，在当代论文中经常使用。

4 m-永恒支配工具箱

本节将介绍用于证明 m-永恒支配问题下界和上界的工具。在详细阐述方法之前，我们先介绍若干关键思想，并概述本节余下部分的结构。在本文中，我们用撇号（例如 G' 和α'）表示约化实例的结构。

▶ **观察 4.1**。 $\gamma(G) \leq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq 2 \cdot \gamma(G)$ 对于任意图 G。

证明。每种 m-永恒支配策略都可以作为 m-永恒守卫配置策略来应用，因此 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty} \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$。这些策略中的每个配置都必须导出一个支配集。因此，它们的下界都由支配数 γ给出。

此外，已知可以通过分别防御支配集中每个顶点的邻域，构造一种 m-永恒支配策略（对星形图采用简单策略）；如 Klostermeyer 和 Mynhardt 所示，该策略至多使用 2· γ (G) 个守卫。 [13]。◀

现在我们给出一个引理，总结如何获得最优策略的界。

▶**引理 4.2.** 设对于图 G、 G' 以及一个整数常数 k

$$\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + k, \tag{1}$$
$$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + k, \tag{2}$$
$$\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') = \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G'). \tag{3}$$

那么 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) = \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) = \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + k = \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + k$。

证明。 根据这些假设，我们有

$$\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \overset{(1)}{\leq} \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + k \overset{(3)}{=} \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + k \overset{(2)}{\leq} \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \overset{\text{Obs. 4.1}}{\leq} \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G).$$

由于第一项 和最后一项相同，所有这些值都 相等。 ◀

因此，只需证明对于 G 及其约简 G'，有 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G')+k$ 并且$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') \leq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) - k$。如果我们已经有了 G'的最优策略，那么结合我们的构造性上界和引理 4.2，就能得到 G的最优策略。

我们在第 4.1 节介绍用于求得下界的工具，在第 4.2 节介绍上界所需的术语和新概念，并在第 4.3 节介绍利用这些新概念求得上界的工具。详细的章节概览见图 2。

4.1 下界

本节首先给出关于策略的一些基本观察。接着，我们展示两个引理，它们是求得下界的主要工具。最后，利用这些引理，我们得到三个下界观察，并在第5节中频繁使用它们。

我们称 G' 是通过在 G 中将 u 与 v 识别而得到的，即移除 u，同时添加边，使得 $N_{G'}(v) = N_G(u) \cup N_G(v)$。

▶**观察 4.3** （顶点识别）。 设 G 是一个图， u 和 v 是它的两个不同顶点。对于图 G'，它是通过在 G中将 u 与 v 识别而得到的，则 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') \leq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$。

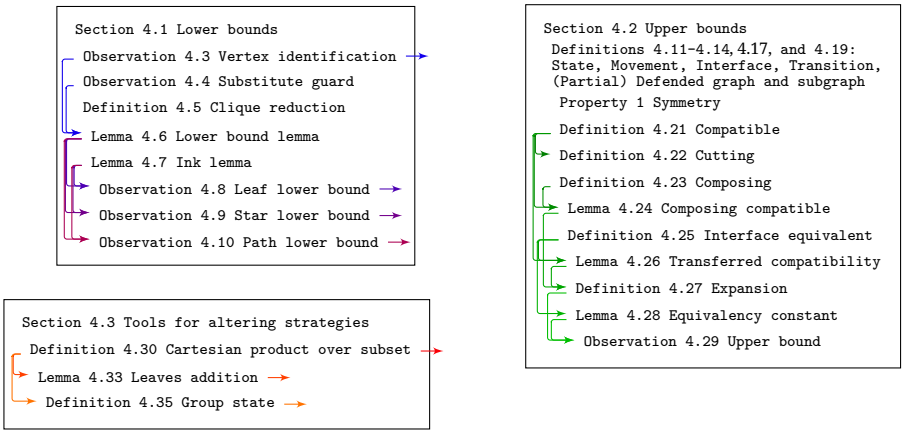


图 2 第4节概览。方框表示相应的小节；左侧箭头显示哪些概念用于证明其他概念；右向箭头显示哪些概念在第5节中经常用于得出仙人掌图的结果。

证明。 设 $v' \in V(G')$ 是通过在 G中将 u 与 v 识别而产生的顶点。设 S_G 是 G的一个最优策略。设 $S_{G'}$ 是 G' 上的一个策略，它与 S_G 相同，只是在每个配置中，每个 u 和 v 都替换为 v'。

在 S_G 中任何一对可遍历的构型在 $S_{G'}$ 中仍然可遍历，因为每个移动u 和 v 都可以替换为 v'。对 $V(G') \setminus \{v'\}$ 的任何攻击，都可以由 $S_{G'}$ 中的一个配置防御，该配置由 S_G 中相应的配置生成；而 v' 则由曾在 G 中防御 u 的配置来防御。◀

▶ **观察 4.4。** 如果一个图在不同顶点 u、v、w 上有一个团，那么守卫移动(u, v) 和 (v, w) 可以替换为移动 (u, w)，并在 v 上设置一个静止守卫。

除了顶点识别外，以下约简是获得下界的主要工具。

▶**定义4.5** (团缩减)。 设 G 为一个图， H 为其非空诱导连通子图。我们所说的将 H 在 G 中进行团缩减，是指创建一个新图G'：从 G 中移除 H，并将 H 在$G\setminus H$ 中的所有邻点两两用一条边连接。

团缩减的示意图见图 3。利用观察 4.3 和 4.4，我们现在证明团缩减蕴含 G 的一个下界，之后可用它来证明紧确的策略下界。

▶ **引理 4.6** (下界引理)。 设 G 为一个图， H 为其非空诱导连通子图，并且在至少一个最优 m-永恒守卫策略中， H上始终至少有 k 个守卫。设 G' 是将 H 在 G中进行团缩减后得到的图。那么

$$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') \leq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) - k.$$

证明。 如果 H 在 G中没有邻点，那么团缩减会移除 H 且不添加任何边。我们可以移走原先驻守在 H 上的所有守卫，因此 G' 显然由$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) - k$ 个守卫防守。

否则， $G \setminus H$中存在一个与 H 相邻的顶点，设为 v。令 $S_G = (\mathbb{C}, \mathbb{F})$ 为 G上的一个最优策略。我们使用观察 4.3 来识别所有满足 v 属于 G 的顶点 $V(H)$，从而得到

G' 的一个子图以及一个策略 $S_{G'}$。注意，在 G' 中， $S_{G'}$ 的每个构型在 v 上至少有 k 个守卫，因为在识别之前， H 总是包含 k 个守卫。类似地，防守 $S_{G'}$ 中 v 的构型在 v 上至少有 $k+1$ 个守卫。

设 $S^{-}_{G'}$ 是一种策略，与 $S_{G'}$ 相同，但在每个配置中， v 上的守卫少 k 个。我们看到，在 S_G 中防御 v 的每个配置在 v 上至少有 $k+1$ 个守卫，因此它在 $S^{-}_{G'}$ 中可以防御 v。防御 V 的守卫（G）$\setminus$（V（H）$\cup\{v\}$）保持不变。接下来需要检查，在 S_G 中可遍历的配置在 $S^{-}_{G'}$ 中是否仍然可遍历。

我们的目标是证明，对于 $S_{G'}$ 中每一对配置，都存在一组移动；这些配置在 v 上有 k 个静止守卫，而这些守卫对于防御 G' 并非必需。这样便可以移除这些守卫，得到 $S^{-}_{G'}$；剩余的移动表明相应的配置是可遍历的。

对于 S_G 中满足 $h \in V$（H）的每个移动（u, h）和（h, w），在 $S_{G'}$ 中都有相应的一对移动（u, v）和（v, w）。由于 u 和 w 分别是 V（H）的邻点，因此在构造 G' 时添加了一条边$\{u, w\} \in E$（G'）。根据观察 4.4，我们可以用（u, w）以及位于 v 上的一个静止守卫，替换移动（u, v）和（v, w）。

假设穷尽应用替换操作后， $S_{G'}$ 中的 v 上静止守卫少于 k 个。那么静止守卫至多有 $k-1$ 个，并且至少有一个守卫离开 v，或者至少有一个守卫到达 v；但两种情况不能同时发生（即不能同时有守卫离开和到达），否则它们会构成$(u,\ v)$、$(v,\ w)$对，从而可以应用替换操作。当守卫离开或到达时，最终配置或起始配置中的守卫分别至多有 $k-1$ 个，这与 v上至少有 k个守卫相矛盾。

从 $S_{G'}$ 中的 v 移除 k 个守卫后，得到 $S^{-}_{G'}$，其中每一对配置仍然可遍历，由此得证。◀

要使用引理 4.6，我们需要证明 G 的导出子图 H 总是至少被 k 个守卫占据。为此，我们有以下引理。

▶ **引理 4.7** (墨水引理)。 **</style}设是的一个导出子图。设**（v_1、v_2、...、v_k）是 H 中的一个顶点序列，使得对于每个 i 以及每个 $u \in V$（G）$\setminus V$（H），条件 d（u、v_i）$> i$ 成立；并且对于每个 $j < i$，条件 d（v_j、v_i）$> i - j$成立。那么，在每个防御型 *m*-永恒守卫配置中， H 上至少有k 个守卫。

证明。 令 C 为防御策略的任意固定配置。我们证明， C 至少包含 k 个守卫，位于 H上。

假设攻击者依次执行了一系列攻击（v_1、v_2.....、v_k）。在攻击序列的第 i步，以下结论成立。在攻击序列开始时站在V（{v10）$\setminus V$（H）上的守卫，距离 v_i 超过 i 条边，因此无法及时到达 v_i 进行防御。同样，使用 $j < i$防御了 v_j 的任何守卫，都无法防御对 v_i 的攻击，因为在防御 v_j时，它们与 v_i 之间的距离超过了 $i - j$。因此，没有任何守卫能够及时到达 v_i，我们需要在 H上增派一名守卫。

总之，要能够防御该攻击序列，配置中需要在 H 上部署 k 个守卫。这对任意配置都成立，因此每个防御策略在每个配置中都必须在 H 上部署 k 个守卫。◀

引理 4.6 中的运算，结合由引理 4.7 得到的下界，使我们能够缩小图，同时证明被移除部分至少需要一定数量的守卫。图 3 展示了引理 4.6 和引理 4.7 的一个应用示例。

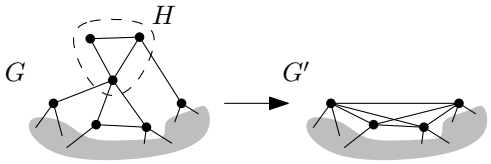


图 3 图 G 包含一个导出子图 H。通过定义4.5中的团缩减可得到图 G'。根据引理 4.7，每个配置在 H上至少包含 1 个守卫。因此，根据引理 4.6，有 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。

▶**观察 4.8**。 在图 G 中，设 v 是一个叶顶点， u 是它的邻点，并设 $H = G[\{u, v\}]$。由引理 *4.7* 及序列 (v) 可知， H 上有1 个守卫。换言之，每个叶子的闭邻域中都必须至少有一个守卫，否则就无法防御对该叶子的攻击。设 G' 是对 H 使用引理 *4.6* 中的运算得到的图，由此可得 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。

▶**观察 4.9**。 在图 G中，设 u 是一个与至少两个叶节点 $\{v_1, v_2, \ldots\}$相邻的顶点，并令 $H = N[u]$ 表示 u的闭邻域。根据引理 *4.7*，结合序列 (v_1, v_2) ，可知 H上有2 个守卫。换言之， u 的闭邻域必须至少包含2 个守卫，否则就无法防御对与 u 相邻的不同叶节点发起的连续攻击。设 G' 是对 H应用引理 *4.6* 中的运算所得的图，则有 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 2$。

▶**观察 4.10**。 设图 G 及其导出子图 H 同构于一条含三个顶点的路径。我们依次将 H 的这三个顶点标记为 u_1、u_2、u_3 。根据引理 *4.7*，使用序列(u_2) ，我们得到 H上守卫数量的下界为1 。设 G' 是对 $\{u_1$、u_2、$u_3\}$应用引理 *4.6* 中的运算所得到的图。由此得到 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}($ $G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。

4.2 上界

本节介绍用于描述实现 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$上界的策略的记号。假设我们有一个图 G 及其缩减副本 G'。核心思路是对 G' 的策略进行局部变换，从而得到 G的策略。为实现这种局部变换，我们说明如何切分并组合图的各个部分，同时保持其策略不变。本节最后，我们给出一组充分规则，以支持这种局部变换。随后，在第 4.3 节中，我们将介绍用于求得上界的工具。

在我们的构造中，我们需要能够控制守卫的移动。我们还需要一种方法来表示图 G 的某个导出子图上的部分策略。为此，我们引入状态（标记配置）和标记策略，用于规定状态转移时守卫的移动。

▶定义 *4.11*（状态）。设状态为标签集 Ω，并设 Ω 到 $V(G)$ 的状态顶点映射为 $P: \Omega \to 2^{V(G)}$，即，一个状态 $\alpha \in \Omega$ 表示图 G 的顶点 $P(\alpha) \subseteq V(G)$ 的一个子集（也称为守卫）。对每个 $v \in V(G)$，令 $S(v) = \{\beta \mid \beta \in \Omega\ v \in P(\beta)\}$（包含 v 的状态）。

我们将使用希腊字母，例如 α、β、γ、δ、φ，来表示状态或状态集合。守卫的移动仍然是一个有序顶点对（u， v），满足$\{u$， $v\} \in E$（G），或者是 $u = v$ （静止的守卫）。

为了构建标记策略的完整定义，我们首先提出一个更一般的概念——部分标记策略。这样，我们便可以针对子图上的一个定义明确的策略进行切割和组合。

▶**定义 4.12**（接口）。设图 G 相对于其超图 H 的一个接口 R 为满足以下条件的顶点子集

$$R = \{u \mid (\exists v)\, u, v \in V(H), \{u, v\} \in E(H), u \in V(G), v \notin V(G)\},$$

即，G 中在 H 中有邻点的那些顶点，这些顶点属于 V（H）∖ V（G）。

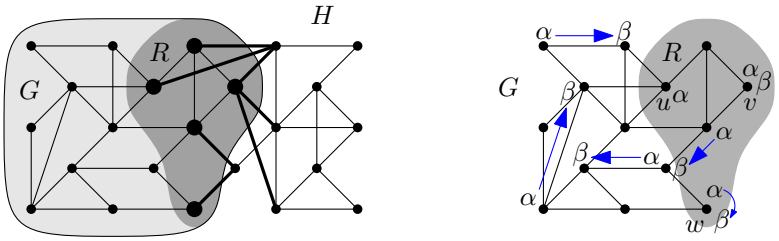


图 4 左：R 相对于 H 的 G 接口。粗边表示 V（G）与 V（H）\ V（G）之间的割，它使得顶点 R 成为接口顶点；右：从 α 到 β 的转移 $\mathcal{T}$（α，β）。箭头表示该转移中的移动。状态 α 和 β 中的所有顶点都必须与一个移动配对，除非它们位于接口 R 中。在接口中，一个守卫从 u 移动到 G 以外的图的其余部分，因此 u 缺少一次移动。注意 v 和 w 之间的区别：在 w 中，同一个守卫留在该顶点上；而在 v 中（因为不存在（v，v）移动），位于 v 的守卫移出，另一个守卫则移动到 v。

图 4 给出了一个接口示例。接口标示出策略可能不完整的顶点。状态之间的转移通过以下方式纳入接口：允许移动不完整。

▶**定义 4.13** (转移)。对于状态 α 和 β 以及带有接口 R的图 G，令 a转移（从 α 到 β）记为 $T(\alpha, \beta)$，它是一个移动集合，满足

- $T(\alpha, \beta) \subseteq \{(u, v) \mid u \in P(\alpha)\ v \in P(\beta), \{u, v\} \in E(G) \vee u = v\}$，对于每个
- $u \in P(\alpha) \setminus R$，恰好存在一个 $(u, v) \in T(\alpha, \beta)$；对于每个 $v \in P(\beta) \setminus R$，
- 恰好存在一个 $(u, v) \in T(\alpha, \beta)$；对于每个 $u \in P(\alpha) \cap R$，至多存在一个 $(u,$
- $v) \in T(\alpha, \beta)$；并且对于每个 $v \in P(\beta) \cap R$，至多存在一个 $(u, v) \in T(\alpha, \beta)$。

转移及其与接口的交互示例如图 4 所示。注意，如果接口 R 为空，则该转移会在各状态的守卫之间建立双射，从而精确规定它们如何在这两个状态之间移动。

转移意味着每个守卫至多与另一个守卫存在关系。在我们的情形中，每个顶点上至多有一个守卫。因此，对于转移所定义的配对集合，我们可以使用标准的关系术语。

▶ 定义 *4.14*（部分标记策略）。部分标记策略是 $(G, S_G, P, T \quad R)$，其中 G 是一个图，$S_G = (\Omega\ \mathbb{F})$ 是一个策略图，其中 Ω 是顶点（状态）的集合，$\mathbb{F}$ 是边的集合，P 是 Ω 到 $V(G)$ 的状态顶点映射，$R \subseteq V(G)$ 是 G 的接口，并且 T 将每条边 $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{F}$ 的方向 (α, β) 和 (β, α) 分别映射为转移 $T(\alpha, \beta)$ 和 $T(\beta, \alpha)$。

12 仙人掌图的 m-永恒支配数：线性时间计算

出于各种目的，将策略图 S_G 视为有向图（允许非对称转移，见性质 1），甚至视为多重图（允许相同状态集合之间存在多个不同转移）可能会有所帮助。

若符合以下定义，标记策略就可以无限期地防御攻击。

▶ **定义 4.15** （防御）。部分标记策略（$G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P, T\quad R$）是防御型的 G，当且仅当对于每个状态 $\alpha \in \Omega$ 和每个顶点 $v \in V$（G），都存在 $\beta \in \Omega$ 使得 $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{F}$ 且$v \in P$（β）。

换言之，定义 4.15 表示，对于图中的每个顶点，每个状态要么占据该顶点，要么只需经过一次转移即可到达一个占据该顶点的状态。这直接引出以下观察。回想一下，$\mathcal{S}(u)$ 表示包含 u的一组状态。

▶ **观察 4.16**。若对于每个 $u \in V(G)$ 集合 $\mathcal{S}(u)$ 都是策略图 S_G 的支配集，则该策略可防御该图。

▶ **定义 4.17** (标记策略)。 若一个标记策略 是 $D\ = (G, S_G, P, T)$，且$(G, S_G, P, T\quad \emptyset)$是一个部分标记策略，则称其为标记策略。

注意，由于转移是双射，标记策略中的所有状态都必须包含相同数量的守卫。当策略为最优时，守卫数量对应于 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}$。

部分标记策略具有若干良好性质，下面将逐一介绍。当策略图是无向图时，自然要求转移具有对称性。

▶ 性质 *1*（对称性）。部分标记策略 $B\ = (G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P, T\quad R)$ 是对称的，当且仅当对于每个 $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{F}$，$T(\alpha, \beta)$ 是 $T(\beta, \alpha)$ 的逆关系（即，$T(\alpha, \beta)\ = \{(a, b)\ |(b, a)\ \in T(\beta, \alpha)\}$）。

▶ **引理 4.18.** 对于每个部分标记策略 $B\ = (G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P, T\quad R)$，都存在一个对称的部分标记策略 $B' = (G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P, T'\quad R)$。

证明。对于每一对状态 $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{F}$，任意固定一个定向 (α, β)，并取具有接口 R 且能给出 T (α, β) 的 T (α, β)。注意，在定义 4.13 中交换 u 与 v 以及α 与 β，即可得到相同的定义，只不过对应的是 T (β, α)。我们用这个新找到的转移替换转移 T (β, α)。对 $\mathbb{F}$ 中的每一对状态都进行这种替换，即可得到所需的 T′。◀

根据引理 4.18，我们总是假设部分标记策略是对称的。我们还利用这一性质推断转移。我们只展示转移映射的一个方向，另一个方向则是由对称性给出的逆向转移。

仅从形式化记号很难理解标记策略描述，因此我们将绘制许多辅助图示。顶点和边分别用小圆圈（或正方形）和线段表示；顶点可以用其字母名称标记；希腊字母表示包含相应顶点的状态；转移中的守卫移动用边上不同样式的箭头表示，箭头指向状态标签（注意，由于我们假设性质 1，箭头始终只朝一个方向绘制）；接口顶点用灰色填充区域标出；标记策略示例见图 5。

我们需要切掉标记策略的一部分，并用略有不同的内容替换它。为此，我们引入以下概念。

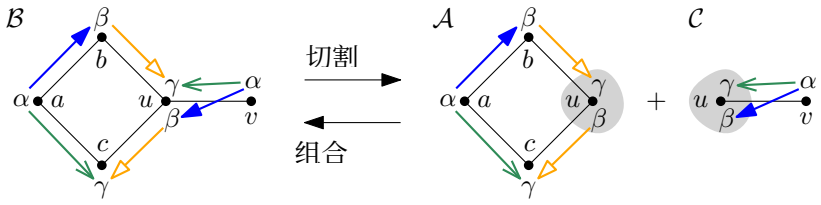


图 5 标记策略 B 以及两个部分标记策略 A 和 C 的示例；标记策略 B $=(G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P,\mathrm{T})$ 的完整形式化描述为 $G=(V,E)$，$V=\{a,b,c,u,v\}$,$E=\big\{\{a,b\},\{b,u\},\{u,v\},\{a,c\},\{c,u\}\big\}$, $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\mathbb{F}=\big\{\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\}\big\}$, $P(\alpha)=\{v,a\}$,$P(\beta)=\{u,b\}$, $P(\gamma)=\{u,c\}$, $(R=\emptyset)$, T $(\alpha,\beta)=\{(a,b),(v,u)\}$, T $(\alpha,\gamma)=\{(a,c),(v,u)\}$, T $(\beta,\gamma)=\{(b,u),(u,c)\}$；部分标记策略 A 和 C 的形式化描述与此类似，但仅限于各自的子图，并且包含一个接口 $R=\{u\}$。

▶ 定义 *4.19*（部分标记子策略）。对于图 G 的某个导出子图 G'，标记策略 $B=(G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P,\mathrm{T})$ 的部分标记子策略 B' 是一个部分标记策略 $B'=(G',(\Omega\ \mathbb{F})\ P',\mathrm{T}'\ \ R)$，其中 R 是相对于 G 的 G' 的接口；对于所有$\alpha\in\Omega$，均有 $P'(\alpha)=P(\alpha)\cap V(G')$；并且对于所有 $\beta,\gamma\in\Omega$，均有 $\mathrm{T}'(\beta,\gamma)=\{(a,b)\ \ |(a,b)\in\mathrm{T}(\beta,\gamma)\wedge a,b\in V(G')\}$。

定义 4.19 所构造的部分标记子策略是否确实构成部分标记策略，并非一目了然；因此我们接下来对此进行说明。

▶ **观察 4.20.** 标记策略 $B'=(G',(\Omega\ \mathbb{F})\ P',\mathrm{T}'\ \ R)$ 的部分标记子策略 $B=(G,(\Omega\ \mathbb{F})\ P,\mathrm{T})$ 是一个部分标记策略。

证明。G' 是一个图，Ω 是标签集合，而 R 是 $V(G')$ 的子集，符合定义 4.14。P' 是通过将 P限制在 $V(G')$ 的顶点上构造的。我们只是从映射中移除了一些守卫，因此根据定义 4.14，这没有问题。最后，唯一未包含在 T′ 中的守卫，是那些在 T 中的移动移出了 G' 的守卫。假设顶点 u 上有这样一个守卫，其移动为 (u,v)，其中 $v\notin G'$，因此根据定义 4.12，$u\in R$。如定义 4.13 所述，R 中的任何守卫都不必包含在一次移动中，因此任何部分标记子策略都是部分标记策略。◀

现在我们给出能够将两个部分标记策略合并为一个标记策略所必需的条件。在此基础上，我们展示如何将一个标记策略拆分为两个部分标记策略。图 5 展示了以下运算的一个示例。

▶**定义4.21**（相容）。如果两个部分标记策略 B_1 和 B_2（记为 $B_i=$（G_i、（Ω_i、$\mathbb{F}_i$）P_i、M_i、R_i））满足以下条件，则称它们是相容的。

- $R_1=R_2=V(G_1)\cap V(G_2)$，即它们的图恰好在接口处重叠，（$\Omega 1$，$\mathbb{F}_1$）=（$\Omega 2$，$\mathbb{F}_2$），
- 即策略图相同，M_1（α，β）$\cup M_2$（α，β）是 P_1（α）$\cup P_2$（α）与 P_1（β）$\cup P_2$
- （β）之间的一个双射，对每个α、$\beta\in\Omega_1$均成立。

相容的部分标记策略所需满足的条件，确保这些接口以一种恰当的方式重叠，使复合函数成为双射，从而我们可以按以下方式对它们进行割分和复合。

▶**定义 4.22** (割)。设有一个标记策略 B 和一个顶点割 R，它将 $G(B)$ 的顶点划分为 R、A 和 C，使得 A 与 C 之间没有边。我们称 B 沿着 R 割分为两个部分标记子策略 A 和 C，其中 A 是一个

14 线性时间计算仙人掌图的 m-永恒支配数

由 $V(G(A)) = R \cup A$ 诱导的部分标记子策略，C 是一个由 $V(G(C)) = R \cup C$ 诱导的部分标记子策略，并且 A 和 C 相容。

▶定义 *4.23*（组合）。将两个部分标记策略 B_1 和 B_2($B_i = (G_i, (\Omega_i, \mathbb{F}_i) P_i, M_i, R_i)$) 组合，是指得到 $(G^*, (\Omega\ \mathbb{F})\ P^*, T^*)$，其中 $G^* = (V(G_1) \cup V(G_2)\ E(G_1) \cup E(G_2))$，$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega 2$, $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \cup \mathbb{F}_2$, $\forall \gamma \in \Omega$，我们有 $P^*(\gamma) = P_1(\gamma) \cup P_2(\gamma)$，并且对于每个 $\alpha, \beta \in \Omega$，$T^*(\alpha, \beta) = M_1(\alpha, \beta) \cup M_2(\alpha, \beta)$。

▶**引理 4.24**。 两个相容的部分标记策略组合后会得到一个标记策略。

证明。我们使用定义4.21和4.23中的记号。我们需要检查（G^*, (Ω $\mathbb{F}$) P^*, T *, $\emptyset$）是否为部分标记策略。首先， G^* 是一个通过合并顶点和边构成的图，只有接口顶点重叠；由此得到的图定义良好，且没有重边和自环。相容的B_1 和B_2具有相同的状态Ω_1 。接下来，对每个 $\gamma \in \Omega_1$，通过合并各个集合$P_1(\gamma) \cup P_2(\gamma)$，将状态映射到顶点。现在，每个顶点在其原先受守卫保护的状态并集中都受到守卫保护。最后，我们检查 M_1 和 M_2 的并集是否总是映射到定义良好的转移；然而，定义4.21中 P_i 和 M_i 上的兼容性条件保证了这一点。◀

我们针对接口定义如下等价关系（自反、对称且传递）。

▶ 定义 *4.25*（接口等价）。如果 $G[R_1] = G[R_2]$，$\Omega_1 = \Omega 2$， $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$，对于所有$\alpha \in \Omega_1$，都有 $P_1(\alpha) \cap R_1 = P_2(\alpha) \cap R_2$，并且对于所有满足 $a = u \vee b = u$ 的 u，若对所有 β，$\gamma \in \Omega_1$，则有 $(a, b) \in M_1(\beta, \gamma) \Leftrightarrow (a, b) \in M_2(\beta, \gamma)$，则两个部分标记策略 B_1 和 B_2 ($B_i = (G_i, (\Omega_i, \mathbb{F}_i) P_i, M_i, R_i)$) 接口等价。

接口等价的部分标记策略相对于接口具有相同的状态。因此，我们可以推断其兼容性，如下列引理所述。

▶**引理 4.26**。 对于三个部分标记策略 B_1，B_2，和 B_3 ，如果 B_1 与 B_2，兼容，B_2 与 B_3，接口等价，并且 $V(G(B_1)) \cap V(G(B_3)) = R(B_3)$，那么 B_1 与 B_3兼容。

证明。令 $B_i = (G_i, (\Omega_i, \mathbb{F}_i) P_i, M_i, R_i)$。我们将检查定义 4.21 中所述的条件。由于 $V(G_1) \cap V(G_3) = R_3$，且根据接口等价有 $R_3 = R_2$，根据兼容性有 $R_2 = R_1$，因此第一个条件成立。由于 $G_3[R_3] = G_2[R_2]$，且 $V(G_1) \cap V(G_3) = R_3$，因此不存在任何可能由 G_1 和 G_3 共享、且位于 R_3 之外的边。根据它们的兼容性，$\Omega_1 = \Omega_2$；根据接口等价，$\Omega_2 = \Omega_3$，因此 $\Omega_1 = \Omega_3$。B_3 是一个部分标记策略，因此 $V(G_3) \setminus R_3$ 中每个顶点上的守卫都恰好由 M_3 覆盖一次。只有当 R_2 上的守卫被覆盖时， R_3 上的守卫才会被覆盖。由于 B_1 和 B_2 相容， R_2 上的守卫恰好在未被 M_2 覆盖时由 M_1 覆盖，反之亦然。因此，这一性质对 B_1 和 B_3 仍然成立。◀

前述概念和引理的综合结果是以下过程，我们将其作为证明上界的一个重要部分。

▶定义 *4.27*（扩展）。设有一个带标记策略 B，其中包含一个部分标记子策略 C。另设有一个部分标记策略 C' ，它与 C 接口等价。从 C 到 C' 对 B 进行扩展，包含以下操作序列：沿 $R(C)$ 切割 B，将其分为 C 和 D（见定义 *4.22*）；再将 D 与 C' 组合成一个带标记策略 R（见定义 *4.23*）。

根据引理 *4.26*，部分标记策略 D 和 C' 相容。根据引理 *4.24*，结果 R 是一个带标记策略。

为确定防守$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{R}$ 所用守卫数量的差异，我们有以下引理。

▶引理 4.28. </style}对于两个接口等价的部分标记策略 B和 B（如定义 4.25 所述），存在某个常数 ($P_1, P_2) \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $\alpha \in \Omega_1$，均有

$$K(P_1, P_2) = |P_2(\alpha)| - |P_1(\alpha)|.$$

证明。设有任意状态 $\alpha, \beta \in \Omega_1$，并令 $K_\alpha = |P_2(\alpha)| - |P_1(\alpha)|$ 和$K_\beta = |P_2(\beta)| - |P_1(\beta)|$。令 $M_1(\alpha, \beta)$ 为 B_1 的一部分，且 $M_2(\alpha, \beta)$ 为 B_2的一部分。它们分别定义了相应状态中守卫的配对。不过，接口上的守卫不必参与配对。因此，我们有 $|P_1(\alpha)| + g_1(\alpha, \beta) = |P_1(\beta)| + g_1(\beta, \alpha)$，其中 g_i 是未参与相应 M_i 守卫配对的守卫数量（我们假设移动是对称的）。类似地，对于 B_2，有 $|P_2(\alpha)| + g_2(\alpha, \beta) = |P_2(\beta)| + g_2(\beta, \alpha)$。

由于这些部分标记策略接口等价，因此不参与配对的守卫集合相同，所以对于所有 $\gamma, \delta \in \Omega_1$，$g_1(\gamma, \delta) = g_2(\gamma, \delta)$。我们得到

$$\begin{aligned} K_\alpha &= |P_2(\alpha)| - |P_1(\alpha)| \\ &= |P_2(\beta)| + g_1(\beta, \alpha) - g_1(\alpha, \beta) - (|P_1(\beta)| + g_2(\beta, \alpha) - g_2(\alpha, \beta)) \\ &= |P_2(\beta)| - |P_1(\beta)| + (g_1(\beta, \alpha) - g_2(\beta, \alpha)) + (g_2(\alpha, \beta) - g_1(\alpha, \beta)) \\ &= |P_2(\beta)| - |P_1(\beta)| = K_\beta. \end{aligned}$$

我们设 $K(P_1, P_2) = K_\alpha$，因为我们已证明无论选择哪个α，这个值都相同。◀

为了能够使用扩展，我们需要选取 C 作为$\mathcal{B}$的部分标记子策略，然后证明C 与C'接口等价。随后按照定义 4.27 进行扩展，并可根据以下观察得到一个上界。

▶观察 4.29。设我们有一个将 C 扩展为 C' 的扩展（定义 *4.27*），其结果为一个带标记策略 R。根据引理 *4.28*，该扩展使已使用的守卫数量增加$K(P(C)\ P(C'))$。假设 B 是一个最优策略，则我们得到$\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G(R)) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G(B)) + K(P(C)\ P(C'))$。

我们展示了描述标记策略的方法，以及如何更换其所依托的防御图。不过，要做到这一点，原图和扩展后的图必须采用相同的策略。因此，在开始扩展之前，我们会先调整原图上的策略。下一节将对此进行讨论。

4.3 调整策略的工具

本节将介绍更多概念，这些概念有助于在构造上界时运用策略。典型的上界证明会使用本节介绍的工具来调整策略，然后应用扩展（定义 4.27），根据观察 4.29 得出上界。

首先请注意，所有概念都可以视为“在同构意义下”成立，因为我们可以重新标记图的顶点或策略顶点，而重新标记并不会从根本上改变它们。为便于阅读，我们在定义中省略了这一点。从现在起，我们还设

$\mathcal{B} = (G, S_G, P, \mathcal{T}\ R)$ 和 $S_G = (\Omega\ \mathbb{F})$，类似地，$\mathcal{B}'$ 和 $\mathcal{B}^*$ 分别具有图 G' 和 G^*、策略、映射等。

现在，我们介绍用于改变策略图的主要运算。

▶ **定义 4.30** (子集上的图笛卡尔积)。 设有图 G_1 和 G_2，且$A \subseteq V(G_1)$。子集上的图笛卡尔积 A 记作 $G_1 \square_A G_2$，它是满足以下条件的图 H：

$$V(H) = \{(u, \emptyset) \mid u \in V(G_1) \setminus A\} \cup \{(u, v) \mid u \in A, v \in V(G_2)\},$$
$$\{(a, b), (c, d)\} \in E(H) \Leftrightarrow \big((a = c) \wedge (a \in A) \wedge (\{b, d\} \in E(G_2))\big) \vee$$
$$\vee \big(\{a, c\} \in E(G_1) \wedge ((b = d) \vee (b = \emptyset) \vee (d = \emptyset))\big).$$

定义 4.30 中的运算可以理解为一种笛卡尔积，其中由 G_1 生成、但不属于 A 的顶点集合会被合并为一个顶点。等价地， H 可以通过以下方式构造：取 $G[A]$和H的图笛卡尔积，添加 $G[V(G) \setminus A]$，将每个新顶点 u 重新标记为 $(u, \emptyset)$，并将每个这样的 $(u, \emptyset) \in V(G) \setminus A$ 连接到所有满足 $v \in N_{G_1}(u)$ 的 $(v, x) \in A \times V(H)$。在改变策略图时，这种运算将非常有用——我们很快就会在引理 4.37 和第5节中多次看到它的应用。此运算旨在使图的各个部分几乎能够独立地进行防守。由 G_1 生成的边表示图的一个部分内守卫位置的变化，而由 G_2 生成的边则表示另一个部分内的变化。当守卫在图的一个部分内移动时，另一部分中的守卫保持静止。集合 A 之所以必要，是因为一个部分中的策略假设有守卫占据某个顶点（例如 u），因此被改变的部分仅限于守卫所在的顶点（$A = \mathcal{S}(u)$）。图6展示了子集上的图笛卡尔积的一个应用示例。

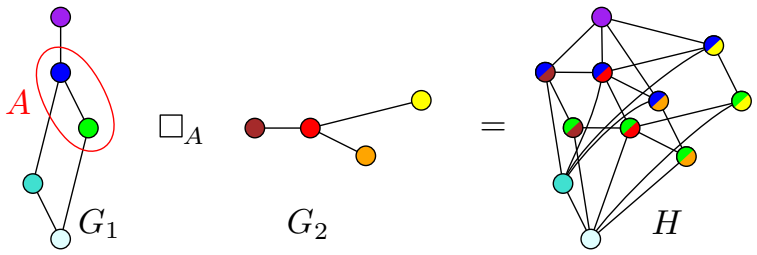


图6 在子集 A 上， G_1 与 G_2 的图的笛卡尔积示例。

我们将频繁使用 G' 与完全图在子集上的笛卡尔积，因此会采用简写，以便专注于所创建策略中的情况。

▶ **定义4.31** (简写)。 设 $G \square_A \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} = G \square_A K_n$，其中 $V(K_n) = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$，且 α_i 表示由 β_i 创建的状态集合，即 $\alpha_i = \{(a, \beta_i) \mid a \in A\}$。

我们将首先使用子集上的笛卡尔积来改变策略图。相乘得到的状态将像之前一样防御同一组顶点。然后，在扩展过程中，将移动守卫，以便防御图中的新部分。在此过程中，我们需要确保策略仍然具备防御能力。为此，我们给出以下引理，分别处理未改变和已改变的状态。

▶ **引理 4.32.** 设 $H = G_1 \square_A G_2$ 的顶点标签如定义 *4.30* 所示。

1. 若 C 是 G_1的支配集，则*{(c, b) | (c, b) ∈ V(H) c ∈ C, b = ∅ ∨ b ∈ A}*是 H的支配集。*2.* 若 A 是 G_1 的支配集，且 B 是 G_2的支配集，则 $A \times B$ （即*{(a, b) | a ∈ A, b ∈ B}*）是 H 的支配集。

证明。 设有一个顶点 (x, y) 属于 $V(H)$。

在情况 1 中，存在一个 $c \in C$，它在 G_1 中支配 x。因此，(c, y') 在 $y' = \emptyset$ （若 $c \notin A$）或在 $y' = y$ （若 $c \in A$）支配 (x, y)。

在情况 2 中，若 $x \notin A$ （因此 $y = \emptyset$），则存在某个 $a \in A$，它在 G_1 中支配 x。由于$|B| \geq 1$，存在一个 $(a, b) \in A \times B$，它在 H 中支配 (x, y)。否则 $x \in A$，因此存在一个 $b \in B$，它在 G_2 中支配 y。因此，(x, y) 在 H 中被 $(x, b) \in A \times B$ 支配。◀

改变策略时，我们希望保留引理 4.32 的性质，以确保标记策略具有防御性。

下面的引理给出了改变策略的第二种主要运算。它允许我们在任意顶点上添加叶节点，并用多一个守卫来防御新图。

▶ **引理 4.33** (叶节点添加)。 设有一个图 G，并且 $u \in V(G)$ 使其具有$\ell \geq 1$ 个相邻的叶顶点 $v_1, \ldots, v_\ell$。设 G' 为删除顶点 $v_1, \ldots, v_\ell$ 后得到的图 G。对于任意防御标记策略 B'，都存在一个防御标记策略 B，其策略图为 $S_G = S'_{G'} \square_{S(u)} K_\ell$，且比 B'多使用一个守卫。

证明。首先，令 $S_{G'} = S'_{G'} \square_{S(u)} \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$（参见定义 4.31 中的简写）。由于必须防御 u，因此 S(u) ≠ ∅。根据其构造，策略 $S_{G'}$ 的所有守卫都静止于 T (αi, αj) 上。令 $\delta' = \Omega' \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$。我们通过将 u 添加到δ（即 $P(\delta) = P'(\delta') \cup \{u\}$），并将 v_i 添加到 α_i，将策略从 $S_{G'}$ 扩展到 G。我们令 T (αi, αj) = {(vi, u), (u, vj)}，并用 (u, vi) 扩展 T (δ, αi)。

由于 α_i 支配团，且$\mathcal{S}'(u)$ 支配 $S'_{G'}$，由引理 4.32 可知，$\mathcal{B}$ 是 G 的防御标记策略。◀

▶**观察 4.34**。 引理 *4.33* 中的构造对任意数量的叶节点都同样适用，因此，我们可以在使用该构造后追溯性地添加更多叶节点。

我们将构造一些策略，使绝大多数叶节点都由引理 4.33 防御。这使得将所有此类状态视为相同状态具有优势，因为它们相对于图其余部分的转移是同构的。为此，我们提出以下概念。

▶**定义 4.35** （群状态）。 设组防御 为一组状态，这些状态由 G 与一个团 K_n 在某个子集上的笛卡尔积生成。

我们仅用组防御来描述叶节点组。根据观察 4.34，我们可以在构造过程中的任意时刻向此类组添加新的叶节点。

在群状态以及我们考察的一般策略中，似乎与多个叶节点相邻的顶点往往会被永久占据。为了从这一观察中得出具体结论，我们来说明如何调整一个 m-永恒支配策略，使这类顶点永久占据。

▶ **定义 4.36** (永久防御)。 若顶点 u 在 B 中满足 $S(u) = \Omega$，则称其永久防御（永久占据）；也就是说，对于每个 $\alpha \in \Omega$，均有 $u \in P(\alpha)$。

▶**引理 4.37.** 对于图 G 及其任意防御标记策略 B'，我们可以构造一个使用相同数量守卫的防御标记策略 B，使得每个与至少2 个叶节点相邻的顶点都得到永久防御。

证明。设顶点 u 是一个至少与 2 个相邻叶子相邻的顶点，且在策略 B′中， u 并非永久占据。设 α' 是一个没有守卫占据 u的状态。在 $P'(\alpha')$ 中，与 u相邻的每个叶子上都必须有一个守卫。设 v 和 w 是 G'中与 u 相邻的两个叶子。令 $S_{G'} = S'_{G'} \square_{\Omega \setminus S'(u)} \{\alpha_v, \alpha_w\}$（见定义 4.31 中的简写）。令$P'(\alpha_v) = P(\alpha') \cup \{u\} \setminus \{w\}$，并令 $P'(\alpha_w) = P(\alpha') \cup \{u\} \setminus \{v\}$，于是 $P(\alpha_v)$ 占据 v，而 $P(\alpha_w)$ 占据 w。

为构造转移$\mathcal{T}$，我们保持$\mathcal{S}'(u)$内各状态之间的所有转移不变。对于所有 $\beta \in \Omega \setminus \mathcal{S}'(u)$，我们将$\mathcal{T}(\alpha_v, \beta)$设为$\mathcal{T}(\alpha', \beta)$，其中每次移动中的 w 都替换为 u。这种替换仍然构成移动，因为 $N[w] \subseteq N[u]$。类似地，我们为$\mathcal{T}(\alpha_w, \beta)$构造转移。此外，我们设$\mathcal{T}(\alpha_w, \alpha_v) = \{(v, u),(u, w)\}$。注意，反向的转移可由对称性推导得到。这表明，所构造的策略图 S_G 的所有边都有有效转移。

在得到的策略$\mathcal{B}$ 中，顶点 u 受到永久防御。由于我们对一个支配子集与一个完全图取笛卡尔积，根据引理 4.32，该策略仍然具有防御能力。

我们对每个与至少 2 个叶节点相邻的顶点重复上述过程，直到所有此类顶点都受到永久防御。◀

5 仙人掌图的约简

在本节中，我们通过展示最优策略和无条件下界，证明对于仙人掌图， $\Gamma_m^\infty(G) = \gamma_m^\infty(G)$。核心思路是反复对仙人掌图 G 进行约简，从而得到更小的仙人掌图 G'。然后我们证明，针对 G的策略比针对 G'的最优策略多使用固定数量的守卫。相应的下界随后表明，针对 G 的策略确实也是最优的。我们将在第 5.1 节详细说明如何得到这些结果，但在此之前，先介绍证明的整体结构。

证明对顶点数量进行归纳。基本情形是一个较小的图（有 1 个或 2 个顶点），其最优策略显而易见（见定义 5.6）。归纳步骤将在后文详细说明。现在我们介绍仙人掌图的若干结构性质，这些性质使我们能够进行归纳。

▶ **定义 5.1**（叶环）。 叶环是一个环，其中至多有一个顶点（称为连接顶点）拥有一个邻点，而该邻点既不是这个环上的顶点，也不是叶子。

参见图 8 中的一个叶环。

▶ **定义 5.2**（叶分量）。 叶分量是指叶环，或与叶环不相邻的叶顶点。

▶**观察 5.3**。 每个至少有3 个顶点的仙人掌图都包含一个叶分量。

证明。 我们将仙人掌图表示为块割树 $\mathcal{T}$，并以任意一个块节点为根（见 [7, 块割树，第 36] 页）。 T 的每个块节点都表示一条单边或一个环。我们考察 $\mathcal{T}$中最深的节点，得到以下三种情况，见图 7。

A 存在一个代表环的最深节点。B 最深节点的祖父块是一个单边块。C 最深节点的祖父块是一个圈块。D 没有最深节点拥有祖父节点。

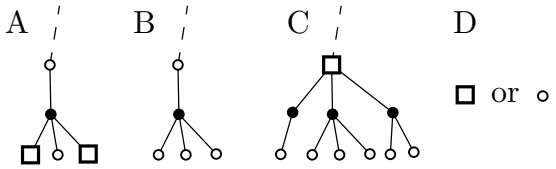


图 7 仙人掌图块割树中始终出现的结构示例子树。大方块表示环节点，小实心圆表示割点，小空心圆表示单边节点。

请注意，在情况 A 和 C 中，图包含一个叶环；在情况 B 中，图包含一个不与叶环相邻的叶顶点。情况 D 是平凡的，此时图要么是一个环，要么是一条单边。因此，仙人掌图总是包含一个叶分量。◀

▶**定义 5.4** (顶点颜色)。 叶环 C 上的非连接顶点 v 按照以下方式，根据相邻叶子的数量标记颜色 $\mathrm{col}(v)$ 。

$$\mathrm{col}(v)\ is \begin{cases} \widehat{0} & if\ v\ is\ adjacent\ to\ 0\ leaves \\ \widehat{1} & if\ v\ is\ adjacent\ to\ 1\ leaf \\ \widehat{2} & if\ v\ is\ adjacent\ to\ at\ least\ 2\ leaves \end{cases}$$

我们将 v 标记为 $\mathrm{col}(v) = \widehat{\mathtt{X}}$ ，如果 v 是 C的连接顶点。当一个顶点可以有不同的颜色（以便一次涵盖多种情况）时，我们用颜色集合列出它们。为此，我们可以用 $\widehat{0}$ 代替 $\{\widehat{0}\}$，$\widehat{1}$、 $\widehat{2}$和 $\widehat{\mathtt{X}}$也同理。此外，我们用一种简写来表示所有颜色 $\widehat{\star} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{\mathtt{X}}\}$。

图 8 展示了 $\widehat{0}$、 $\widehat{1}$和 $\widehat{2}$ 顶点的一个示例。

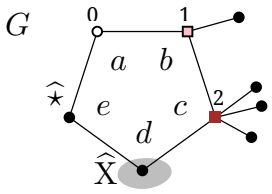


图 8 图 G 的一个叶环，带有部分标记策略$\mathcal{B}$，其中包含顶点 a、 b、 c、 d和e ，其颜色分别为 $\widehat{0}$、 $\widehat{1}$、 $\widehat{2}$、 $\widehat{\mathtt{X}}$和 $\widehat{\star}$。原图更大，其余部分与 d相连。为了单独考察这个叶环，我们在顶点 d 处割开该图；现在该顶点构成$\mathcal{B}$的接口。这个环将用叶序列 $(\widehat{\mathtt{X}}, \widehat{\star}, \widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{\mathtt{X}})$（或其逆序）表示。

为了描述叶组件上的约简，我们将用一种简洁的记号表示叶环，只需依次列出环上连续顶点的颜色。示例见图 8。

▶ **定义 5.5** (叶序列)。 设 $(v_1, \ldots, v_n)$ 为叶环上的 n 个连续顶点。顶点 $(v_1, \ldots, v_n)$ 的叶序列为 $(\mathrm{col}(v_1) \ldots, \mathrm{col}(v_n))$ ，其中 $\mathrm{col}(v_i) \subseteq \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{\mathtt{X}}\}$。此外，给定两个叶序列 A 和 B ，以及一个包含具有叶序列 A的叶环的图 G ，令 $A \to B$ 表示在 G 中将叶序列为 A 的子图约简为叶序列为 B 的子图，从而得到 G'。

请注意，如果叶序列以连接顶点开始并以连接顶点结束，且不包含$\widehat{\star}$，那么它描述的就是整个环，因为颜色对应叶节点的数量，并且叶环中只有一个连接顶点。

现在，我们展示基本情形以及归纳步骤的概述。

▶ **定义 5.6** (基本情形)。 令以下图及其最优防御带标记策略为基本情形。

- 通过标记策略防御一个没有边的孤立顶点

$$\big((\{u\},\emptyset),(\{\alpha\},\emptyset),\{\alpha\to\{u\}\},\emptyset\big).$$

- 通过标记策略防御一条孤立边

$$\Big(\big(\{u,v\},\{\{u,v\}\}\big),\big(\{\alpha,\beta\},\{\{\alpha,\beta\}\}\big),\big\{\alpha\to\{u\},\beta\to\{v\}\big\},\big\{(\alpha,\beta)\to\{(u,v)\}\big\}\Big).$$

5.1 技巧与概述

在归纳步骤中，每次约简都会将仙人掌图 G 转换为顶点数更少的 G' 。约简将在叶分量上进行；根据观察 5.3，顶点数至少为 3 的仙人掌图总是存在叶分量。顶点数至多为 2 的两种仙人掌图由定义 5.6 中的基本情形涵盖。

更确切地说，每次约简都会给出下界和上界。对于 m-永恒守卫配置，下界的证明会用到观察 4.3 和 4.8–4.10。这些工具会缩小图，并表明在任何防御策略中，被移除的部分都至少需要一定数量的守卫；由此可得下界 $\Gamma^{\infty}_{\mathrm{m}}(G) \geq \Gamma^{\infty}_{\mathrm{m}} G' + K$，其中 K 是某个常数。

m-永恒支配的上界通常通过两个独立步骤得出。第一步取约简图 G' 及其最优策略 $S'_{G'}$ ，并说明如何运用第 4.3 节中介绍的工具来调整该策略。这不会改变守卫的数量，只会改变防御的结构。第二步使用第 4.2 节中介绍的框架。它取出我们打算扩展的部分图（定义 4.27），将其割开，并按照观察 4.29 中的描述，用一个接口等价（定义 4.25）的部分标记策略替换。在扩展过程中，策略图 S_G 保持不变（因此$S_G = S_{G'}$），但图及其映射会发生变化。此时，标记策略将策略图中的状态映射为具有新守卫的状态，并且某些状态中的守卫会被移至图的其他顶点。我们还说明了发生变化的状态之间的转移如何改变。当图的防御由 K 个额外守卫维持时，就能得到上界 $\gamma^{\infty}_{\mathrm{m}}(G) \leq \gamma^{\infty}_{\mathrm{m}}(G') + K$ （与下界中的 K 相同）。

结合引理 4.2 得出的下界和上界，可得到 G 在 m-永恒支配和 m-永恒守卫配置中的最优守卫数量。

根据观察 5.3，所用的约简取决于仙人掌图中包含的叶分量。如果最深节点不与叶环相邻，则使用第 3 节所示的叶约简。反复应用这些约简后，最终会得到一个叶环（或基本情形）——我们将在引理 5.7 中很快证明这一点。

为了约简叶环，我们需要叶环边上的额外性质。这包括能够禁止沿某条边移动，以及强制沿某条边移动。我们通过将策略图的所有状态划分为树组来实现这一点，从而确保这些性质成立。这些性质将在第 5.2 节中确立。

具备这些性质后，我们取出叶环并观察其顶点颜色。如果某种颜色模式列在约简中，就有办法将其移除。约简分为两组。第一组只识别环的一小部分，并使环缩短——这些称为环归约，见第 5.3 节。第二组识别整个环并将其完全移除，只留下几个叶节点——这些是常值分量归约，见第 5.4 节。通过穷举图 14 所示的所有可能情况，我们证明总能使用其中一种约简；将这个函数加倍后，我们在引理 5.17 中给出一个略有不同的证明

通过对图 14 所示的所有可能情况进行穷举搜索；将此函数加倍后，我们在引理 5.17 中给出了一个略有不同的证明。

我们以此前给出的证明收尾本节：在应用叶约简后，仙人掌图具有所述结构；图 9 则概述了其余各节的内容。

▶**引理 5.7**。 对仙人掌图 G穷尽地应用约简 t_1、 t_2 和 t_3 ，最终要么到达基本情形，要么得到一个带有叶环的仙人掌图。

证明。 我们在观察 5.3 中看到，每个仙人掌图要么有一个叶环，要么存在一组 $\ell \geq 1$ 具有同一个父节点的叶节点，它们通过一条单边与图的其余部分相连。该组叶节点的数量 ℓ 直接决定了可以应用哪种树归约。如果 $\ell = 1$，则可以应用约简 t_1；如果 $\ell = 2$，则应用约简 t_3；最后，如果 $\ell > 2$，则应用约简 t_2。穷尽地应用这些约简后，我们要么到达基本情形，要么出现另一种情形——存在一个叶环。◀

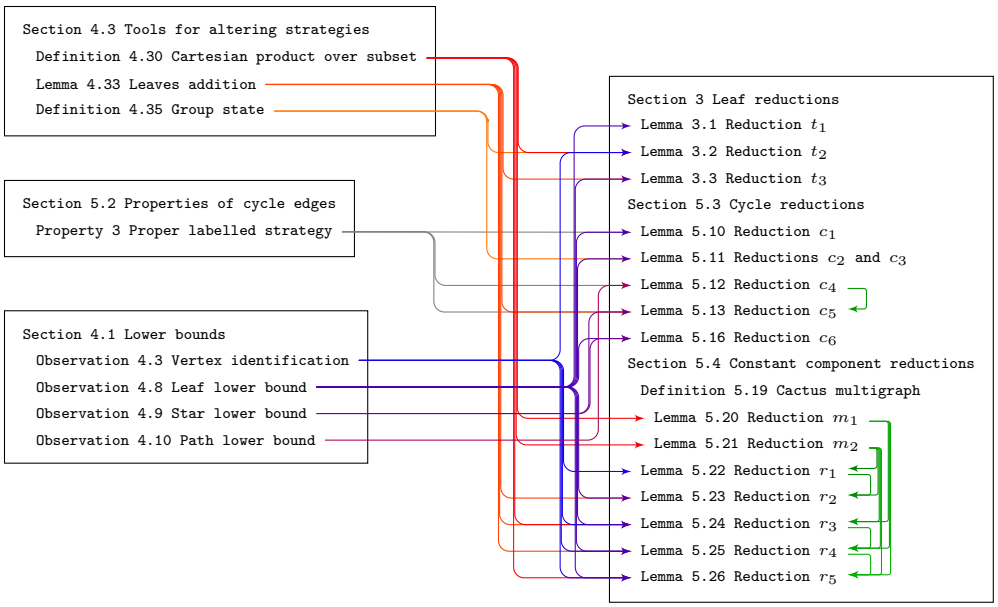


图 9 第 5 节概览。左侧方框表示第4节中获得的工具（见图 2）以及我们在第 5.2 节中引入的性质；右侧方框展示了第 5 节的结构；从左到右的箭头表示各项结果所用的工具。向右的绿色箭头表示某项约简部分基于或使用了另一项约简。

5.2 环边的性质

我们假设在图上构造的策略具有某些性质，从而使我们能够进行更强的归纳步骤。更具体地说，这些性质对于证明约简 c_1、 c_4和 c_5是必要的。

▶ **定义 5.8**（边状态）。 我们将Ω 中 （u, v）的 边状态 （其中 $\{u, v\} \in E$（G））定义为

22 线性时间计算仙人掌图的 m-永恒支配数

构造集合$L_{u,\ v}$, $R_{u,\ v}$和$N_{u,\ v}$，使得

$$\alpha \in L_{u,v} \text{ if } \exists \beta \in \Omega,\ (u,v) \in \mathcal{T}(\alpha,\beta),$$
$$\alpha \in R_{u,v} \text{ if } \exists \beta \in \Omega,\ (v,u) \in \mathcal{T}(\alpha,\beta),$$
$$N_{u,v} = \Omega \setminus (L_{u,v} \cup R_{u,v})$$

请注意，由于边的定向在这些定义中起作用，我们有$L_{a,\ b} = R_{b,\ a}$, $R_{a,\ b} = L_{b,\ a}$，以及 $N_{a,\ b} = N_{b,\ a}$。这些集合的名称反映了守卫可以从哪一侧穿过该边。还请注意，若假设对称性，那么在移入和移出 $N_{u,\ v}$ 时，边 $\{u,\ v\}$ 无法被穿过。我们提出以下边性质，它与观察 4.16 有些相似。

▶ **性质 2** (适当边状态)。 对于图 G 上的策略 B，边 $\{u, v\}$ 当且仅当其边状态 $L_{u,\ v}$, $R_{u,\ v}$, 以及 $N_{u,\ v}$ 均非空，$L_{u,\ v} \cap R_{u,\ v} = \emptyset$，且它们各自都是 S_G上的支配集时，满足性质2 。

边具有性质 2 会带来若干影响。由于 $L_{u,\ v} \cap R_{u,\ v} = \emptyset$，不存在可以选择穿过 $(u,\ v)$ 或 $(v,\ u)$ 的状态；也就是说，这两种移动至多有一种可用。与此同时，由于这些集合各自支配 S_G，因此我们可以通过一次转移进入其中任意一个集合。最后，由于每个集合均非空，我们可以在任意时刻移动到 $N_{u,\ v}$，从而迫使策略在当前转移及之后的一次转移中禁止穿过 $\{u,\ v\}$。此外，我们可以通过先移动到某个 $\alpha \in L_{u,\ v}$，再移动到 $\beta \in R_{u,\ v}$，迫使其穿过 $(u,\ v)$，使得按照定义 5.8，$(u,\ v) \in \mathcal{T}(\alpha,\ \beta)$。

与非适当边状态相比，适当边状态额外具有的所有性质，在对 $L_{u,v}$, $R_{u,v}$ 和 $N_{u,v}$ 进行任意置换后仍然成立。因此，我们可以在不同的边上使用相同的集合，只需对它们进行置换，并检查它们是否构成新边的边状态。

▶ **观察 5.9.** 对于边 $\{u, v\}$ 和 $\{a, b\}$，若将适当边状态 $L_{u,v}$, $R_{u,v}$，以及$N_{u,v}$ 映射到新集合$L_{a,b}$, $R_{a,b}$, 以及 $N_{a,b}$ （可以对它们进行置换），那么当且仅当它们构成 $\{a, b\}$ 的边状态时，它们才构成 $\{a, b\}$ 的适当边状态。

证明。 如果新的边状态 $L_{a,b}$, $R_{a,b}$，以及 $N_{a,b}$ 不构成边状态，那么它们显然不可能是适当边状态。当$L_{u,v}$, $R_{u,v}$，以及 $N_{u,v}$ 是适当边状态时，它们互不相交且非空。这些性质不受顺序影响，因此只要新的状态是边状态，它们就是适当的。◀

我们的目标是让至少与一个 0 顶点或 x 顶点相邻的叶环上的所有边都满足性质 2 $\hat{}$ $\hat{}$。我们还将说明，在某些特殊情况下该性质也成立，从而使若干约简更容易进行。

在约简过程中，我们会检查一条边是否满足性质 2。对此的直观理解如下：我们需要检查每条环边是否至少被经过一次，以及是否存在至少一个状态完全不经过该边。此外，这通常显而易见，但我们仍应检查是否不存在某个状态能沿两个方向经过该边。

▶ **性质 3** (正规标记策略)。 仙人掌图 G上的部分标记策略 B 满足性质 *3*，当且仅当每条位于环上的边都满足性质 *2*，并且

- 与一个 $\hat{0}$ 或 $\hat{x}$ 顶点关联，或位于叶环$(\hat{x}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{x})$上，
- $\hat{}$ $\hat{}$或与一个 x 顶点关联，但不
- 是位于叶环$(\hat{x}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{x})$ 或$(\hat{x}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{x})$上、连接 x 与一个2 顶点的边。

我们的目标是在每一步约简过程中都保持仙人掌图合法（符合性质 3）。为简单起见，我们将假设所有环上与$\widehat{0}$ 或 $\widehat{\mathtt{x}}$ 顶点关联的边都具有性质 2，并在观察 5.18 和引理 5.27 中单独处理这一规则的例外情况。

5.3 环约简

根据引理 5.7，我们知道，应用树约简可能会直接解决该实例，也可能得到一个叶环。本节将通过环约简处理叶环，使其归约为大小为常数的叶环。随后将在第 5.4 节中处理这些常数大小的叶环。

令 C 表示一个叶环，其顶点按照定义 5.4 标记了颜色。环约简由以下约简组成（记号见定义 5.5）。例如，约简 c_1 描述了这样一种变换：图 G 含有一个叶环，其中包含颜色为 $(\widehat{\star},\widehat{1},\widehat{\star})$ 的连续顶点U；通过将 U 替换为颜色为 $(\widehat{\star},\widehat{\star})$ 的顶点，可将其变为 G'（因此仅移除了 $\widehat{1}$）。与此同时，它还指出，$\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$，且$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。以上内容可简洁地写作 $(\widehat{\star},\widehat{1},\widehat{\star}) \to (\widehat{\star},\widehat{\star}) + 1$。

▶**约简 4**。 $c_1(\widehat{\star},\widehat{1},\widehat{\star}) \to (\widehat{\star},\widehat{\star}) + 1$ **其中** $(\widehat{\star},\widehat{\star})$ **满足性质 2**。▶**约简 5**。 $c_2(\widehat{2},\widehat{1},\widehat{\star}) \to (\widehat{2},\widehat{\star}) + 1$▶**约简 6**。 $c_3(\widehat{2},\widehat{2},\widehat{\star}) \to (\widehat{2},\widehat{\star}) + 1$▶**约简 7**。 $c_4(\widehat{\star},\widehat{0},\widehat{0},\widehat{0},\widehat{\star}) \to (\widehat{\star},\widehat{\star}) + 1$ **其中** $(\widehat{\star},\widehat{\star})$ **满足性质 2**。▶**约简 8**。 $c_5(\widehat{\star},\widehat{0},\widehat{2},\widehat{0},\widehat{\star}) \to (\widehat{\star},\widehat{\star}) + 2$ **其中** $(\widehat{\star},\widehat{\star})$ **满足性质 2**。

▶**归约 9**。 $c_6(\widehat{\mathtt{x}},\ \widehat{2},\ [\widehat{0},\widehat{2}]^{2k},\ \widehat{\mathtt{x}}) \to (\widehat{1}) + 3k + 1$ 以及 $(\widehat{\mathtt{x}},\ \widehat{2},\ [\widehat{0},\widehat{2}]^{2k+1},\ \widehat{\mathtt{x}}) \to (\widehat{2}) + 3k + 2$

令 a 和 b 分别为归约所描述的 G' 中叶环的第一个和最后一个顶点。显然，当 a 和 b 是不相连的不相交顶点时，也可以使用这些约简。需要注意的是，尽管结果在 G 中的 a 和 b 之间包含一对重边，但当 $\{a,\ b\} \in E(G')$ 时仍会使用这些约简。此外，即使在 $a = b$ 的情况下，也可以使用这些约简。在这种情况下应用约简会在 G' 中的 a 产生一个自环。虽然此过程可能会产生自环和重边，但它们会立即被移除。这些情况将在第 5.4.1 节中讨论。

约简 c_1、c_4 和 c_5 要求被扩展的边（ G'中的$\{a,\ b\}$ ）满足性质 2。我们将通过为 G' 保留性质 3 来确保这一点，同时确保每次扩展期间都保持此性质。

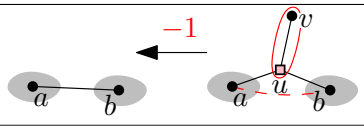
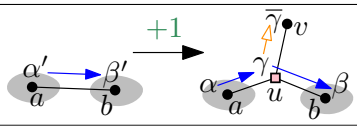
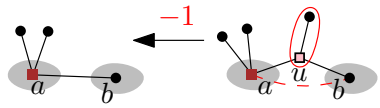
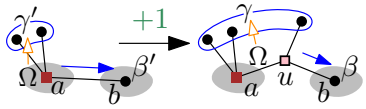
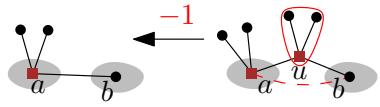
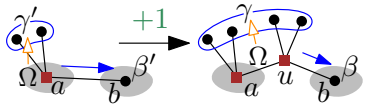
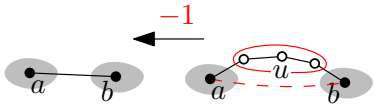
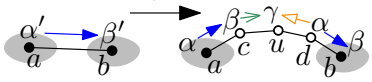
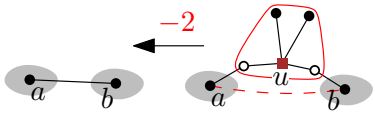
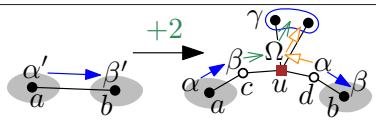
▶**引理 5.10**。 设 G' 是在应用约简 c_1后得到的。 G 受到防守时比 G'多一个守卫。

证明。 将颜色为 $(\widehat{\star},\ \widehat{1},\ \widehat{\star})$ 的顶点分别标记为 a、u、b。设 v 为与 u相邻的叶子。对顶点 $\{u,\ v\}$ 应用观察 4.8，可得下界 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。

对于上界，设 $L_{a,b}$、$R_{a,b}$ 和 $N_{a,b}$ 是策略中边 a、b 的边状态，该策略如定义 5.8 所述由 G' 得到。我们通过向 $L_{a,b}$ 和 $R_{a,b}$ 的所有状态中添加 u 来扩展这些状态，并将 v 添加到 $N_{a,b}$ 中。我们在 T（$L_{a,b}$、$R_{a,b}$）中用 {(a、u)、(u、b)} 替换移动（a、b），并将（u、v）添加到 T（$L_{a,b} \cup R_{a,b}$、$N_{a,b}$）中。由于性质 2 对 G' 中的 {a、b} 成立，新顶点得到防御，因为 $L_{a,b}$ 和 $N_{a,b}$ 支配着策略图。

24 仙人掌图的 m-永恒支配数：线性时间算法

表2 环约简列表；记号与表1相同

约简	下界	上界
c_1		
c_2		
c_3		
c_4		
c_5		
c_6	见图10和图11	

新边 $\{a,u\}$ 和 $\{u,b\}$ 在 G 中的边状态与 G' 中 $\{a,b\}$ 的边状态保持不变。因此，这些边现在在 G 中满足性质 2。通过用一个守卫扩展所有状态，我们获得了一个防御标记策略，因此 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。根据引理 4.2，我们得到 G 仅需比 G' 多一个守卫即可受到防御。◀

约简 c_2 和 c_3 将一组连续的红色和粉色顶点合并，并通过群状态（定义 4.35）守卫与它们相邻的叶节点。

▶**引理 5.11**。令 G' 为应用约简 c_2 或 c_3之后的 G 。 G 由比 G'多1个守卫来守卫。

证明。为了便于后续论证，我们将这些约简分别讨论，但它们的证明方式相同。我们将颜色为$(\widehat{2}$、$\{\widehat{1}$、$\widehat{2}\}$ $\widehat{\star})$的顶点分别标记为 a、u、b。令 R_1表示所有与 u相邻的叶节点。对 $R_1 \cup \{u\}$ 应用观察 4.8，可得下界$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。

对于上界，令 γ' 为守卫与 a相邻的叶节点的群状态。我们在叶节点R_1 上添加两个新顶点，如引理 4.33 所述，由 γ' 守卫。现在我们将u 与 a分开，并将其叶节点一并带走；这些叶节点现在标记为 R_2。叶节点之间的转移扩展为 $\mathrm{T}(R_1,R_2) = \{(R_1,a),(a,u),(u,R_2)\}$；类似地，我们扩展所有使用 a的转移。与 a 和 b 交互的转移得以保留，因此该约简扩展了接口等价的部分标记策略。尽管我们不需要性质 2，该图仍具有性质 3，因为新边$\{u,b\}$承担了$\{a,b\}$原有的确切转移。因此，如果$\{a,b\}$在 G'中满足该性质，那么$\{b,u\}$就在 G中满足该性质。

我们增加了一个守卫，因此 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$根据引理 4.2，我们得出 G比 G'多一个守卫防守。◀

▶**引理 5.12.** 设 G' 是应用约简 c_4 后的结果。 G 比 G' 多用 1 个守卫进行防御。

证明。将颜色为 $(\hat{\star}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{\star})$ 的顶点分别标记为 a, c, u, d, b。对 $\{c, u, d\}$ 使用观察 4.10，可得下界 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。

对于上界，设 $L'_{a,b}$、$R'_{a,b}$ 和 $N'_{a,b}$ 是根据定义 5.8 从 G' 的策略中得到的边 a、b 的边状态。由于 $\{a, b\}$ 在 G' 中满足性质 2，因此这些都是适当边状态。我们通过将 d 添加到 L'_a 的所有状态中、将 b 添加到 c 中以得到 $R'_{a,b}$，并将 u 添加到 N'_a 中以得到 b，从而扩展这些状态；这会生成集合 $L_{a,b}$、$R_{a,b}$ 和 $N_{a,b}$。我们在 T $(L_{a,b}, R_{a,b})$ 中，用 $\{(a, c), (d, b)\}$ 替换沿着 (a, b) 的移动，因此图中被交换的部分接口等价。我们将 (c, u) 加入 T $(R_{a,b}, N_{a,b})$，并将 (d, u) 加入 T $(L_{a,b}, N_{a,b})$。新的 $\{c, u, d\}$ 个顶点分别由非空集合 $R_{a,b}$、$N_{a,b}$ 和 $L_{a,b}$ 防守。新边的边状态如下。

$$\begin{aligned} L_{a,b} &= L_{a,c} = L_{d,b} = N_{c,u} = L_{d,u} \\ R_{a,b} &= R_{a,c} = R_{d,b} = L_{c,u} = N_{d,u} \\ N_{a,b} &= N_{a,c} = N_{d,b} = R_{c,u} = R_{d,u} \end{aligned} \tag{4}$$

根据观察 5.9，这些只是边集的排列，因此满足性质 2。我们得到 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$。由引理 4.2 可知，$G$ 的防御守卫数比 G'多一个。◀

▶**引理 5.13.** 设 G' 是应用约简 c_5后得到的 G。G 的防御守卫数比 G'多2 个。

证明。证明过程与引理 5.12 的证明非常相似，但所有状态$N_{a,b}$ 都应群组防御与 u 相邻的叶节点，而 u 将被永久占据。

我们分别将颜色为 $(\hat{\star}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{\star})$ 的顶点标记为 a, c, u, d, b。设 R为与 u相邻的叶节点。对 u 及其邻域应用观察 4.9，可得下界$\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \geq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 2$。

重复引理 5.12 证明中的相同步骤序列，该证明使用一个守卫；然后根据引理 4.33，在与 u 相邻的位置添加叶节点，并额外使用一个守卫。这不会改变与这些叶节点不相 incident 的边上的转移，因此根据观察 5.9，这些边仍满足性质 2。我们得到 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 2$。根据引理 4.2，我们得到 G 比 G' 多用两个守卫即可得到防守。◀

我们指出，使用约简 t_1、t_2、t_3、c_1、c_4，以及一小组常值分量归约，就足以求解所谓的圣诞仙人掌图（每条边至多属于一个环，且每个顶点至多属于两个 2-连通分量的图）；对于这类图，我们在 [1] 中给出了最优策略。其余约简处理颜色为 $\hat{2}$ 的顶点，而这类顶点不会出现在圣诞仙人掌图中。

最后一种环约简是一个颇为特殊的情况，我们先来回顾一下。

▶**归约 9**。$c_6(\hat{\mathtt{X}}, \hat{2}, [\hat{0}, \hat{2}]^{2k}, \hat{\mathtt{X}}) \to (\hat{1}) + 3k + 1$ 以及$(\hat{\mathtt{X}}, \hat{2}, [\hat{0}, \hat{2}]^{2k+1}, \hat{\mathtt{X}}) \to (\hat{2}) + 3k + 2$

我们将先使用其他所有环约简；如果它们都无法使用，再使用归约 c_6。这使我们可以假设一种特定结构，下面将对其进行定义并证明。图 14 中关于归约应用的决策图也有助于理解这种结构背后的原因。

▶**定义 5.14** (RW-循环)。叶环 C 若由颜色交替的顶点组成，且首尾顶点的颜色均为 $\hat{2}$，则称为RW-循环，即 $C = (\hat{\mathtt{X}}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}, \ldots, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{X}})$。

▶**引理 5.15**。假设一个叶环 C 中的任何位置都无法应用约简 c_1、c_2、c_3、c_4 和 c_5。那么，$|C| \leq 6$ 或 C 是一个RW-循环。

证明。 首先，注意到如果叶环包含 $\hat{1}$ 个顶点，那么总会有一个 $\hat{1}$ 顶点与 $\hat{0}$ 或 $\hat{\mathtt{x}}$相邻，在这种情况下我们应用约简 c_1；或者它与 $\hat{2}$相邻，此时我们应用约简 c_2。因此，如果穷尽地应用约简 c_1 和 c_2，所有 $\hat{1}$ 顶点都会被移除。

接下来，由于只剩下 $\hat{2}$、 $\hat{0}$和 $\hat{\mathtt{x}}$ 顶点，彻底使用约简 c_3 可确保不存在两个相邻的 $\hat{2}$ 顶点。（注意，如果只剩下红色顶点，那么最终会得到（$\hat{\mathtt{x}}$、 $\hat{2}$、 $\hat{\mathtt{x}}$），通过约简 m_2 移除重边，然后使用约简 t_3。）

最后，如果叶环中存在（$\hat{2}$、 $\hat{0}$、 $\hat{0}$）部分，则 $\hat{2}$ 顶点要么也与$\hat{\mathtt{x}}$相邻，要么可以使用约简 c_5，因为（$\hat{\star}$、 $\hat{0}$、 $\hat{2}$、 $\hat{0}$、 $\hat{0}$）必然会出现。彻底使用约简 c_4 可确保此类情况不会发生。因此，只要存在两个 $\hat{0}$ 相邻顶点， $\hat{\mathtt{x}}$ 顶点与它们的距离至多为 2。这意味着该环要么至多有 5 个顶点，要么颜色 $\hat{2}$ 和 $\hat{0}$ 的顶点交替出现并构成一个 RW-循环。◀

RW-循环的下界不会比其他约简的下界难多少；不过，要得到上界，我们需要专为这种环设计恰当的策略。

▶**引理 5.16.** 约简 c_6 是正确的。

证明。 我们将环上的顶点依次标记为 u_1， u_2，……， u_n 其中 u_1 是连接顶点（因此 $\hat{2}$ 个顶点为偶数）。令 $u_{n+1} = u_1$。令 R_2， R_4等，分别为与红色顶点 u_2， u_4等相邻的叶节点。

首先，我们对 $\{u_6\} \cup R_6$应用观察 4.8；其次，我们对 $N[u_4]$应用观察 4.9。我们将环缩短了 4，并得到下界 3。重复这一论证 k 次后，最终得到一个大小为 2 或 4 的常数规模环。大小为 2 的环先通过 m_2 约简，再通过 t_3约简，从而得到下界 1。大小为 4 的 RW-循环形式为 $(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$，其下界在约简 r_4 中证明为 2。将每 4 个顶点对应的 $3k$ 与环大小分别为 2 和 4 时的下界 1 和 2 结合起来，即可得到所需的下界。图 10 展示了将环缩短 4 的示例。

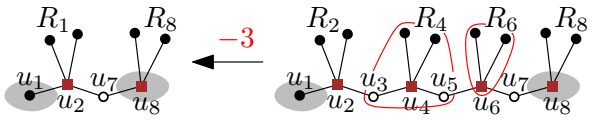


图 10 约简 c_6 下界证明的一部分

上界策略很难描述，因此我们先定义几个仅用于描述该策略的新概念。偶数 i 的红奇偶性 是 $i/2$ 的奇偶性。根据红奇偶性，RW-环中的红色顶点分为红奇顶点和红偶顶点。反向标记 是按相反顺序对 RW-环进行的标记，也就是说，若为 $u'_1 = u_{n+1}$, $u'_2 = u_n$, $u'_3 = u_{n-1}, \ldots, u'_n = u_2$, 和 $u'_{n+1} = u_1$，则 $u'_1, \ldots, u'_n$ 是相对于标记 $u_1, \ldots, u_n$ 的反向标记。

对于上界，我们根据 RW-环的大小区分两种情况。第一种情况是大小为 $n = 4k + 2$，第二种情况是大小为 $n = 4k$。

现在我们关注第一种情况，即 RW-循环的大小为 $n = 4k + 2$。请注意，对于这种大小的 RW-循环，反向标记不会改变红色顶点的红奇偶性。我们通过逐步扩展状态来调整策略，具体如下。

$$S^*_{G'} = S'_{G'} \,\square_{\mathcal{S}'(u_1)}\, \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_4, \beta_8, \ldots, \beta_{4k}\} \quad \text{and} \quad S_{G'} = S^*_{G'} \,\square_{\Omega \setminus \mathcal{S}'(u_1)}\, \{\beta_2, \beta_6, \ldots, \beta_{4k+2}\}$$

现在我们从 G' 扩展到 G，并将 S_G 的状态 Ω 设置如下。

$$P(\alpha_1) = \bigcup_{x=0}^{k} \{u_{4x+3}\} \qquad P(\alpha_2) = \bigcup_{x=0}^{k} \{u_{4x+1}\}$$
$$P(\beta_{4x}) = \big((P(\alpha_2) \cap \{u_j\}_{j<i}) \cup (P(\alpha_1) \cap \{u_j\}_{j>i})\big) \cup \{R_{4x}\} \tag{5}$$
$$P(\beta_{4x+2}) = \big((P(\alpha_1) \cap \{u_j\}_{j<i}) \cup (P(\alpha_2) \cap \{u_j\}_{j>i})\big) \cup \{R_{4x+2}\} \setminus \{u_1\}$$

注意，对于 $x = 0$， $u_1 \in P(\alpha_2)$ 是 $u_{4x+1} = u_1$；而对于 $x = k$， $u_1 \in P(\alpha_1)$ 是 $u_{4x+3} = u_{4k+3} = u_{n+1} = u_1$。对于 $P(\beta_{4x+2})$，交集表明 u_1 不包含在其中，但为清楚起见，我们明确提及这一点（因为尽管它等于 u_1，我们仍不认为 u_{n+1} 对于 $j < i$ 是 u_j）。状态 β_{2i} 会群组防御与 u_{2i} 相邻的叶节点。请注意，它们的行为因各自的红奇偶性而异。

现在来看转移。为了让记号简洁，我们将经过红色顶点的连续移动简写为 $F_i = \{(u_i, u_{i+1}), (u_{i+1}, u_{i+2})\}$ 和 $B_i = \{(u_i, u_{i-1}), (u_{i-1}, u_{i-2})\}$（分别表示向前和向后）。请注意，我们仅在 i 为奇数时使用 F_i 和 B_i。

设有整数 x 和 y，并且不失一般性地假设 $x \leq y$。我们将转移的移动设置如下。如果 $2x$ 和 $2y$ 具有相同的红奇偶性，那么

$$\mathcal{T}(\beta_{2x}, \beta_{2y}) = \{(R_{2x}, u_{2x}), (u_{2x}, u_{2x+1})\} \cup \bigcup_{i=x}^{y-4} F_{2i+3} \cup \{(u_{2y-1}, u_{2y}), (u_{2y}, R_{2y})\}. \tag{6}$$

否则，$2x$ 和 $2y$ 具有不同的红奇偶性。如果 x 为奇数（因此 y 为偶数），则它们的转移定义如下。

$$\mathcal{T}(\beta_{2x}, \beta_{2y}) = \{(R_{2x}, u_{2x}), (u_{2x}, u_{2x-1})\} \cup \bigcup_{i=2}^{x} B_{2i-3} \cup \bigcup_{i=y+1}^{2k-1} B_{2i+3} \cup \{(u_{2y+1}, u_{2y}), (u_{2y}, R_{2y})\}$$

如果红奇偶性不同且 x 为偶数，那么通过反向标记并交换 x 与 y，我们会得到红奇偶性仍然不同、但 x 为奇数的情形。这个情形已经解决。根据对称性（性质 1），这些转移的另一方向也随之确定。

剩下需要描述的是 α_1 和 α_2的转移。

$$\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \{(u_1, u_1)\} \cup \bigcup_{i=0}^{k-1} F_{4i+3}$$
$$\mathcal{T}(\beta_{4x}, \alpha_1) = \{(R_{4x}, u_{4x}), (u_{4x}, u_{4x-1})\} \cup \bigcup_{i=1}^{x-1} B_{4i+1} \tag{7}$$
$$\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \alpha_2) = \{(R_{4x+2}, u_{4x+2}), (u_{4x+2}, u_{4x+1})\} \cup \bigcup_{i=1}^{x} B_{4i-1} \tag{8}$$

注意，在反向标记下，α_1 是 α_2。因此，情形 $\mathcal{T}(\beta_{4x}, \alpha_2)$ 等价于反向标记下的 $\mathcal{T}(\beta_{4x}, \alpha_1)$。类似地，情形 $\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \alpha_1)$ 等价于反向标记下的 $\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \alpha_2)$。图11展示了该策略的一部分。

对于接口等价，请注意，在 α_1, α_2 中，β_{4k} 占据 u_1，而状态 β_{4k+2} 不占据 u_1。我们展示了如何在每一对状态之间转移，因此这些策略在接口上等价于一个具有扩展状态的粉色顶点，如 $S_{G'}$ 所示。

现在讨论第二种情况，即 RW-循环的大小为 $n = 4k$。请注意，在这种大小的 RW-循环中，反向标记会改变红色顶点的红奇偶性，而第一种情况并非如此。策略构造上的区别在于，现在我们从一个

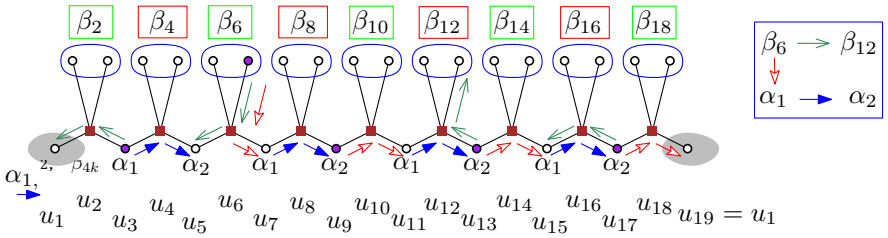


图11 红奇数规模为18的 RW-循环上的部分策略，守卫（以紫色显示）放置在 $P(\beta_6)$ 上。图中展示了几个选定的转移作为示例。

红色顶点开始。令 u'_1 和 u'_2 为该红色顶点的两个叶节点。令 $\delta' = \Omega' \setminus (\mathcal{S}(u'_1) \cup \mathcal{S}(u'_2))$。我们按以下方式逐步调整策略。

$$S^1_{G'} = S'_{G'} \square_{\mathcal{S}(u'_1)} \{\gamma, \beta_4, \beta_8, \beta_{12}, \ldots, \beta_n\}$$
$$S^2_{G'} = S^1_{G'} \square_{\mathcal{S}(u'_2)} \{\alpha_1, \beta_2, \beta_6, \ldots, \beta_{n-2}\}$$
$$S_{G'} = S^2_{G'} \square_{\delta'} \{\alpha_2\}$$

我们进行扩展以得到 S_G，使所有状态的定义都与第一种情况完全相同，见方程（5）。我们注意到一个重要区别：在第二种情况下，u_1 不是 $P(\alpha_1)$ 的元素。我们添加了一个额外的状态 γ，它具有 $P(\gamma) = P(\alpha_1)$。在证明边性质时，这个状态将具有重要意义。

现在我们描述在 G 上的策略转移。对于红奇偶性相同的 $2x$ 和 $2y$，转移方程（6）仍然成立。如果 $2x$ 和 $2y$（带有 $x < y$）的红奇偶性不同，则我们根据 $2x$ 的红奇偶性考虑两种不同的情况。

$$\mathcal{T}(\beta_{4x}, \beta_{4y+2}) = \{(R_{4x}, u_{4x}), (u_{4x}, u_{4x-1})\} \cup \bigcup_{i=1}^{x-1} B_{4i+1} \cup \bigcup_{i=y+2}^{k} B_{4i-1} \cup$$
$$\cup \{(u_{4y+1}, y_{4y+2}, (u_{4y+2}, R_{4y+2})\}$$
$$\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \beta_{4y}) = \{(R_{4x+2}, u_{4x+2}), (u_{4x+2}, u_{4x+1})\} \cup \bigcup_{i=0}^{x-1} B_{4i+3} \cup \bigcup_{i=y+2}^{k+1} B_{4i-3} \cup$$
$$\cup \{(u_{4y-1}, y_{4y}, (u_{4y}, R_{4y})\}$$

注意 u_1 – 转移$\mathcal{T}(\beta_{4x}, \beta_{4y+2})$与另一种情况的区别：它不会经过 u_1，因此u_1 在此过程中保持静止；而在$\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \beta_{4y})$中，会发生移动$\{(u_2, u_1), (u_1, u_n)\}$。为了涵盖 β_{2x} 之间所有可能的相互转移，我们添加通过反向标记和对称性得到的转移。

现在我们展示涉及 α_1 和 α_2的转移。注意，反向标记不会改变这两个状态。对于 β_{4x+2}，我们可以应用公式（8）得到$\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \alpha_2)$；反向标记后，还可以得到$\mathcal{T}(\beta_{4x}, \alpha_2)$。注意，经过此转移后，$G$ 上的守卫少了一个，因为它从接口$\{u_1\}$离开。特别地，$\mathcal{T}(\beta_{2x}, \alpha_2)$在 $2x$ 为红奇时，经由(u_2, u_1)移动到 u_1；在 $2x$ 为红偶时，则经由(u_n, u_{n+1})移动到 u_1。

同理，对于 β_{4x}，我们可以应用公式 (7) 得到 $\mathcal{T}(\beta_{4x}, \alpha_1)$；反转标号后，我们得到 $\mathcal{T}(\beta_{4x+2}, \alpha_1)$。这次转移未与接口交互。两个状态之间的转移如下。

$$\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2) = \bigcup_{i=0}^{k-1} F_{4i+3}$$

注意，这再次产生了一步移动 (u_n, u_{n+1})。

最后，我们引入新的状态 γ，它具有与 α_1 相同的守卫配置，但有一次转移不同。因此，$\mathcal{T}(\gamma, \beta_{2x}) = \mathcal{T}(\alpha_1, \beta_{2x})$，且 $\mathcal{T}(\gamma, \alpha_2) = \emptyset$（所有守卫均静止），但在反向标记中，$\mathcal{T}(\gamma, \alpha_2)$ 应为 $\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_2)$。更准确地说，

$$\mathcal{T}(\gamma, \alpha_2) = \bigcup_{i=0}^{k-1} B_{4i+3}.$$

其中包含一次移动 (u_2, u_1)。参见图 12，了解移动如何与接口相互作用。

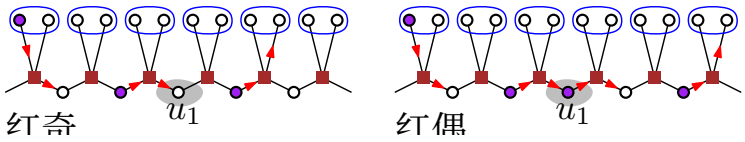


图 12移动 ^红奇和红偶情况下经过 x 顶点的 n 个 RW-循环。

我们讨论了所有转移对接口的影响，并指出它们与 $S_{G'}$中的转移等价，因此，交换后的策略接口等价。

接下来只需证明 S_G 在两种情况下都是适当策略。该策略起始于 S'_G，是一个团，并且通过对单个顶点取笛卡尔积后仍保持为团。因此，只需说明 $L_{u_i,u_{i+1}}$, $R_{u_i,u_{i+1}}$ 和 $N_{u_i,u_{i+1}}$中至少各有一个状态，并且对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都有$L_{u_i,u_{i+1}} \cap R_{u_i,u_{i+1}} = \emptyset$，因为团的任何非空顶点子集都是支配集。

现在我们展示如何将状态划分为 $L_{u_x,u_{x+1}}$,$R_{u_x,u_{x+1}}$ 和 $N_{u_x,u_{x+1}}$，其中每个$x \in \{1, \ldots, n\}$均如此，示意见图 13。首先注意，对于该策略中我们定义的所有状态，$4 \leq 2x \leq n-2$ 的 u_{2x} 闭邻域恰好包含 2 个守卫。设 x 为一个偶整数，使得 $4 \leq x \leq n-2$。令 $e = \{u_{x+1}, u_{x+2}\}$。

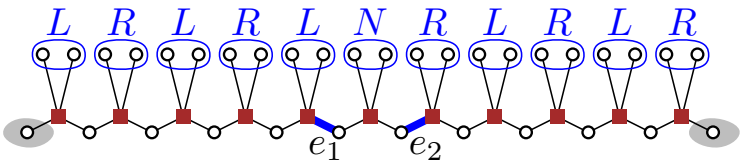


图 13 属于 L_e、R_e、N_e 的 β_{2x} 状态，其中 e 等于边 e_1 和 e_2。

我们通过矛盾证明 $\beta_x \in N_e$。假设在从 β_x 开始的某次转移中，一个守卫经过了 e。如 β_x 所示，顶点 u_{x+1} 未被占据，因此守卫必定是从 u_{x+1} 移动过来的。然而，这样一来，转移后 $N[u_x]$ 就会有 3 个守卫，这与我们观察到的情况不符；矛盾。

对于论证中无法处理的边，因为它们离顶点 x̂ 太近—— $e_1 = \{u_1, u_2\}$ 以及 $e_2 = \{u_3, u_4\}$。我们观察到，对于红偶 RW-环，$\alpha_1 \in N_{e_1}$ 和 $\gamma \in N_{e_2}$。对于红奇 RW-环，$\beta_2 \in N_{e_2}$ 和 $\beta_n \in N_{e_1}$。

现在我们断言，对于任意偶数 x，只要 $2 \leq x \leq n$, $e = \{u_{x+1}, u_{x+2}\}$，状态 β_y 当且仅当 $y \neq x$ 属于 L_e 且 $u_{x+1} \in P(\beta_y)$ 时成立，否则它们属于 R_e。我们将以更直观的方式证明这一点；否则，也可以通过穷举列出所有转移中的所有边来证明该断言。首先请注意，从 β_y 出发且不与叶节点相接的所有移动，都是沿着环的一段连续部分进行的，这段部分始于 u_y，而移动方向是从 u_y “远离”并朝向该部分的另一端。移动总是将一个

被占据的 $\hat{0}$ 移至 $\hat{2}$；如果这段部分继续延伸，则将 $\hat{2}$ 移至相邻的 $\hat{0}$（即使经过 $\hat{x}$ 顶点时也成立）。因此，如果 e（不与 $\hat{x}$ 相接）包含在移动路径中，那么当且仅当 x_{x+1} 被占据时，我们才移动 (u_{x+1}, u_{x+2})；当且仅当 u_{x+1} 未被占据时，我们才移动 (u_{x+2}, u_{x+1})。这就证明了该断言。

从偶数位置开始的其余边及其 N、L 和 R 集合，可通过对反向标记使用相同的论证得出。

◀

5.4 常数分支归约

以下引理表明，考虑常值分量情形后，所有必要的约简便已涵盖完毕。

▶**引理 5.17**。设有一个仙人掌图 G。穷尽地应用叶子归约和环归约后，约化仙人掌图 G' 要么是基本情形，要么包含一个大小为常数的叶环。

证明。首先，根据观察 5.3，仙人掌图始终包含一个叶分量。若穷尽地应用树归约，根据引理 5.7，我们要么已完成，要么会得到一个叶环 C。在 5.15 中我们看到，穷尽地应用环规则后，结果要么是基本情形，要么是一个含有交替的 $\hat{2}$ 和 $\hat{0}$ 顶点的环，这种情况可通过归约 c_6处理。剩下的情形是大小为常数且无法应用任何归约的环。◀

我们通过以下过程获得常数叶环列表。首先，我们穷尽地应用约简 c_1 和 c_2。这会移除叶环上的所有粉色顶点。现在，沿着环按顶点的线性顺序扫描叶环上的顶点，从连接顶点开始。一方面，只要已扫描的顶点上存在可应用的环归约，我们就可以应用它。因此，这样的叶环不属于常数叶环情形。另一方面，当环绕回连接顶点且仍然无法使用任何环归约时，该环便构成一个常数叶环。我们在图 14 中给出了完整的搜索示意图。

同样，我们将按照定义 5.5 中的定义，简洁地表示这些约简。然而，在常数分支归约中，叶序列描述的是整个叶环，连接顶点列为首个和最后一个顶点。叶环上的顶点记为 u、u_1、u_2、.....、u_{n-1}、u，其中 u是连接顶点。令 R_1、.....、R_{n-1}分别表示与顶点 u_1、.....、u_{n-1}相邻的所有叶子所组成的集合。注意，大小$0 \leq |R_i| \leq 2$ 直接对应于相应顶点的颜色。关于常数叶环的叶序列及其顶点记号示例，请参见图 15。

请注意，即使环约简的结果并非简单图，这些环约简仍然可以使用；这一问题将在第 5.4.1 节中解决。

▶ **观察 5.18.** 叶环(u, u_1, u_2, u) 的一种策略是以这样的方式构建的：边(u_1, u_2) 满足性质 *2*（尽管它不与某个 $\hat{0}$顶点关联），因此可以沿着这条边扩展约简 c_4 或 c_5。

证明。这个叶环通过约简 c_3，然后通过 m_2，最后通过树归约t_3进行约简。我们证明，由扩展所得的策略在边 $\{u, u_1\}$和 $\{u, u_2\}$上满足性质 2。图 15 展示了一个示例。检查该策略的具体移动可得：

$$(u_1, u_2) \notin \mathcal{T}(L_{u,u_1}, R_{u,u_1}), (u_1, u_2) \notin \mathcal{T}(L_{u,u_1}, N_{u,u_1}), (u_1, u_2) \in \mathcal{T}(R_{u,u_1}, N_{u,u_1}).$$

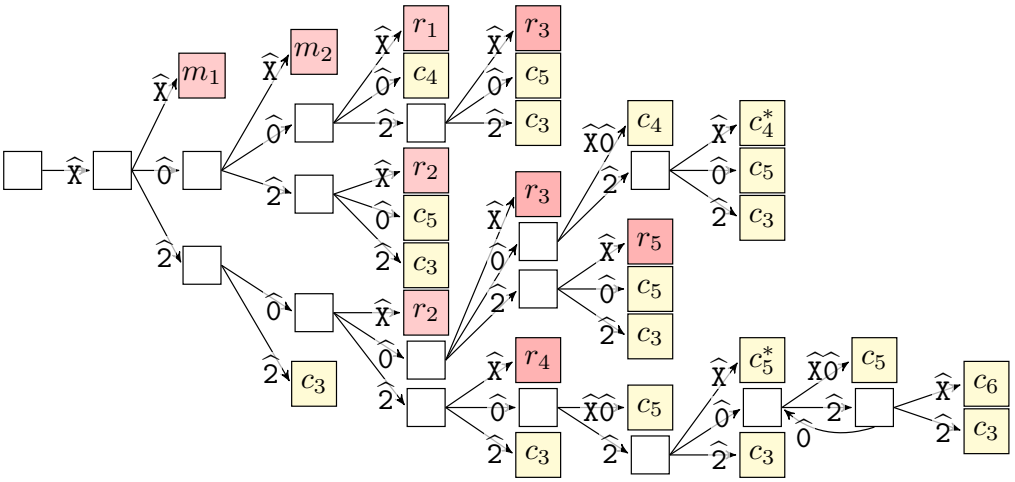


图 14 叶环上所应用约简的情形分析。首先，通过穷尽地应用其约简移除顶点 $\hat{1}$。沿连接顶点开始，按顺序扫描叶环上的顶点，我们识别出以下情形。叶子表示扫描该叶环时应使用的约简。标签 c_1 至 c_5 （黄色叶子）表示环约简；标签 m_i 和 r_i （红色叶子）表示常数分支归约；带星号 * 的节点需要用到观察 5.18。我们可以看到，所有内部（空）节点都有标记为 $\hat{0}$、$\hat{2}$ 和 $\hat{\mathtt{x}}$的出边，从而确认这些情形涵盖了所有情况。

特别地，我们可以令 $L_{u,u_1} = N_{u_1,u_2}$, $R_{u,u_1} = L_{u_1,u_2}$，以及 $N_{u,u_1} = R_{u_1,u_2}$。由于边移动集 $\{u, u_1\}$ 满足要求这些集合均非空的性质，因此对于 $\{u_1, u_2\}$，这些性质同样成立。◀

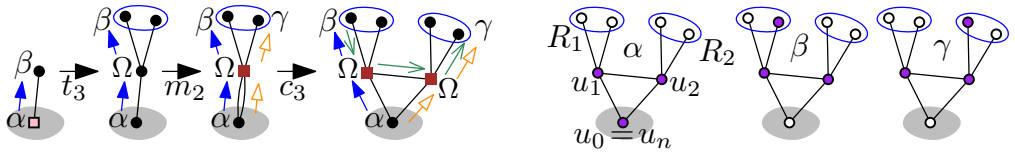


图 15 左侧： 为一个 $(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$ 叶环构建策略。状态 α、β 和 γ 分别代表集合 $L_{u,a}$、$R_{u,a}$ 和 $N_{u,a}$。**右侧：** 状态 α、β 和 γ的守卫配置示例。

根据观察 5.18，我们知道，情形 $(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$ 和 $(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$ 分别可以通过约简 c_4 和 c_5 进行约简。参见图 14 中的这些情形。

5.4.1 自环和重边

与观察 5.18 类似，对于常值情形，我们需要证明这些性质成立。通过允许在顶点 a 和 b 相邻甚至相同的情形下应用环约简，我们允许约简结果包含重边或自环。图的这种中间形式可以视为广义仙人掌图。

▶**定义 5.19** (仙人掌多重图)。仙人掌多重图是一个连通的多重图（可能含有自环），且其每条边至多位于一个环上。

仙人掌多重图与仙人掌图的区别在于，前者允许任意顶点上存在自环（大小为 1 的环），也允许某些顶点之间存在 2 条重边（大小为 2 的环）。

32 线性时间计算仙人掌图的 m-永恒支配数

移除重边和自环后，仙人掌多重图即可转化为仙人掌图。以下两种约简可处理这一问题。

▶**归约 10**。 m_1 设 G' 为移除一个自环后的 G 。

▶ **归约 11**。m_2 设 G' 为将重边 $\{u,v\}$（2 条边）变为单边后的 G，其中 v 的度为2 （1 个邻点）。

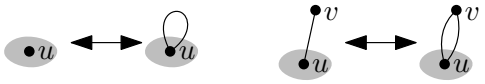


图 16 左图： 环归约 m_1；**右图：** 重边归约 m_2

观察图 16 中的这些约简。现在证明它们不需要额外的守卫。

▶**引理 5.20**。 设 G' 为对 G 应用约简 m_1 后得到的图。G 使用与 G'相同数量的守卫进行防守。

证明。 在 G 上的策略可以轻松调整为适用于 G' ： 将沿 u 的自环进行的任何守卫移动改为不移动 u上的守卫即可，因此 $\Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') \leq \Gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G)$。同时， G' 上的任何策略都适用于 G，所以 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G')$。根据引理 4.2 可得等式。不过，我们希望 u 中的自环满足性质 2。

直观来说，为了保持这些性质，我们可以这样规定：在 u 被占据的任何配置下，守卫可以沿自环向任意方向移动，也可以禁止其沿自环移动，同时保持配置不变。形式上，我们可以通过设定 $S_G = S'_{G'} \square_{\mathcal{S}'u} \{\alpha, \beta, \gamma\}$ 来实现同样的效果。现在我们设定 $\mathsf{T}(\alpha, \beta) = \{(u, u)\}$。这会生成 $L_{u,u} = \alpha, R_{u,u} = \beta$， 以及 $Q_{u,u} = \Omega \setminus \{\alpha, \beta\}$。由于集合 $L_{u,u}$, $R_{u,u}$ 和 $N_{u,u}$ 均非空且支配 S_G （因为 $\mathsf{S}'(u)$ 支配$S'_{G'}$），因此这一调整后的策略使 u 的自环满足性质 2。◀

在我们的情形中，对（$\widehat{\mathtt{x}}$，$\widehat{\mathtt{0}}$，$\widehat{\mathtt{0}}$，$\widehat{\mathtt{0}}$，$\widehat{\mathtt{x}}$）应用约简 c_4，或对（$\widehat{\mathtt{x}}$，$\widehat{\mathtt{0}}$，$\widehat{\mathtt{2}}$，$\widehat{\mathtt{0}}$，$\widehat{\mathtt{x}}$）应用约简 c_5后，便会使用约简 m_1。在应用约简 c_1后，也可以将其用于（$\widehat{\mathtt{x}}$，$\widehat{\mathtt{1}}$，$\widehat{\mathtt{x}}$）；但在这种情况下，我们可以先移除重边。

▶**引理 5.21.** 设 G' 是应用约简 m_2之后的 G 。用与 G'相同数量的守卫即可防守G 。

证明。 设 e_1， e_2是两条不同的边 $\{u,\ v\}$ 在 G中定向为$(u,\ v)$ G' 是 G ，且移除了 e_2 。下界和上界显然，因为沿着 e_2 的每一步移动都可以改为沿着 e_1 移动，而针对 G' 的策略无需改变即可应用于 G 。难点仍在于证明性质 2 对 e_1 和 e_2 在 G中成立。

令 $\beta' = \mathcal{S}'(v)$ 且 $\alpha' = \Omega' \setminus \beta$。为证明关于 e_1 和 e_2 的性质，我们将按以下方式修改 G' 上的策略。若 $\beta' \neq \Omega'$，则在 G' 中存在沿着 e_1 的一次移动。在这种情况下，我们令 $S_{G'} = S'_{G'} \square_{\beta'} \{\beta, \gamma\}$，同时修改移动 $\mathcal{T}(\alpha, \gamma)$，使其沿着 e_2 而非 e_1 移动。边状态分别为 $\alpha \in L_{e_1}$、 $\beta \in R_{e_1}$ 和 $\gamma \in N_{e_1}$， 对于 e_2 也类似（交换 β 和 γ）。

第二种情况是 $\beta' = \Omega'$ ，而 $\alpha' \neq \Omega'$。此处，我们调整策略，使得在所有 u 未被占据的状态中，都将守卫从 v 移动到 u。这样一来，在状态 α 中， v 就会被占据；我们现在按照前一种情况中的相同方式，将其分为 α_1 和 α_2 。

最后一种情况是 $\beta' = \Omega'$，而 $\alpha' \neq \Omega'$。此处我们设定 $S_{G'} = S'_{G'} \square_{\Omega'} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$，并设定 $\mathcal{T}(\{\alpha_1, \alpha_2\}) = \{(u, v), (v, u)\}$，即沿着 e_1 和 e_2 朝相反方向转移。此外，$\mathcal{T}(\alpha_1, \alpha_3)$ 和 $\mathcal{T}(\alpha_2, \alpha_3)$ 中的所有守卫均保持静止。这样，边状态为 $\alpha_1 \in L_{e_1}$、$\alpha_2 \in R_{e_1}$和 $\alpha_3 \in N_{e_1}$，而完全相同的边状态也适用于 e_2。

在所有情况下，边状态都非空，因此，约简 m_2后，e_1 和 e_2 满足性质 2。◀

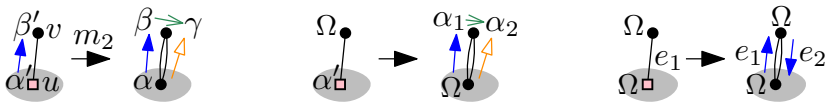


图 17 约简 m_2的情况。**左：** 沿边移动。**中：** 叶子被永久占据。**右：** 叶子及其邻点被永久占据。

请注意，在我们的策略中，v 不会处于永久防御状态。

如果不使用约简 m_2，常数规模叶环归约的数量会显著增加。在通过 c_1约简$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{1}, \hat{\mathtt{x}})$或$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{1}, \hat{1}, \hat{\mathtt{x}})$、通过$c_2$约简$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{1}, \hat{\mathtt{x}})$、通过 c_3约简$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$、通过 c_4约简$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{\mathtt{x}})$或$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$，以及通过 c_5约简$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{\mathtt{x}})$或$(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}})$后，都会用到它。如果不使用约简 m_2，就必须分别分析上述每种情况。

5.4.2 常数规模叶环约简

根据引理 5.17，最后需要解决的情形可通过以下约简处理。下界和上界证明的示意图见表 3。证明中所用概念的示意图另见图 9。

▶ **归约 12**。 $r_1(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{\mathtt{x}}) \to (\hat{1}) + 0$▶ **归约 13**。 $r_2(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}}) \to (\hat{1}) + 1$▶ **归约 14**。 $r_3(\hat{\mathtt{x}}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}}) \to (\hat{2}) + 1$▶ **归约 15**。 $r_4(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}}) \to (\hat{2}) + 2$▶ **归约 16**。 $r_5(\hat{\mathtt{x}}, \hat{2}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{2}, \hat{\mathtt{x}}) \to (\hat{2}) + 2$

现在我们来证明这些约简的正确性。第一组约简将一个叶环约简为 $\hat{1}$ 顶点 u 及其叶子 v。扩展的叶环的顶点记为 u、u_1、u_2、……、u_{n-1}、u。

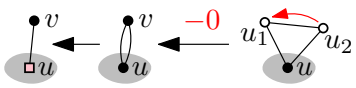
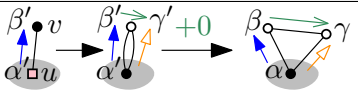
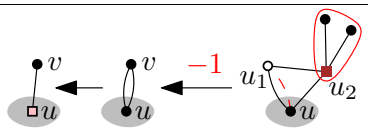
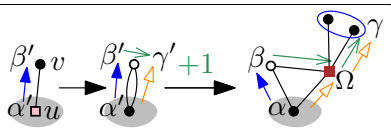
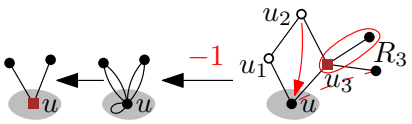
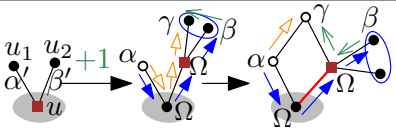
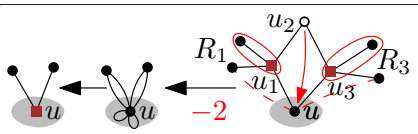
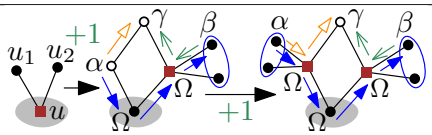
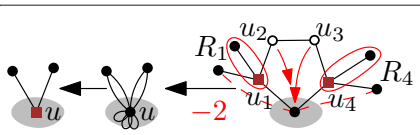
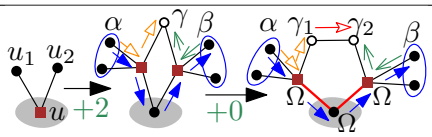
▶**引理 5.22**。 设 G' 是应用约简 r_1之后得到的 G。 G 与 G'一样，只需相同数量的守卫即可防守。

证明。 利用观察 4.3 将 u_2 与 u_1 等同，再应用约简 m_2 可得下界为0。

对于上界，我们首先按照约简 m_2将 $\{u, v\}$ 扩展为重边 e_1 和 e_2。然后取 G'，将 v 拆分为两个顶点 u_1 和 u_2，从而将其改为 G。我们通过将 $P(\beta')$ 中 v 的所有出现替换为 u_1来构造 β，并通过将 $P(\gamma')$ 中 v的所有出现替换为 u_2来构造 γ。它们之间的转移变为 $\mathcal{T}(\beta, \gamma) = \{(u_1, u_2)\}$。该策略在接口上等价，因为策略没有改变接口的状态或转移。

我们设置 $L_{u_1,u_2} = N_{u,u_1}$，$R_{u_1,u_2} = N_{u,u_1}$，以及 $N_{u_1,u_2} = L_{u,u_1}$，因此新边 $\{u_1, u_2\}$满足性质 2，而针对 G 的策略满足性质 3。

表 3 常数分支归约列表；粗红边不满足性质 2。

约简	下界	上界
r_1		
r_2		
r_3		
r_4		
r_5		

没有添加守卫，因此 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G')$，根据引理 4.2，我们得出 G 在与 G'相同数量的守卫保护下得到防御。◀

回顾一下，我们用 R_i 表示与 u_i相邻的所有叶节点。

▶**引理 5.23**。令 G' 为应用约简 r_2后的 G 。 G 比 G'多使用一个守卫进行防守。

证明。对 $\{u_2\} \cup R_2$ 应用观察 4.8，然后使用约简 m_2，得到下界 1。

我们进行与引理 5.22 的证明中相同的扩展。之后，我们使用引理 4.33 将叶节点 R_2 添加到 u_2，同时使用一个额外的守卫对其进行防守。根据引理 5.22 证明中的相同论证，图满足性质 3。我们添加了一个额外的守卫，从而得到 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$，并且根据引理 4.2，我们得到 G 比 G'多使用一个守卫进行防守。◀

现在我们证明另外三种情况的正确性。约简图 G' 现在由单个 $\widehat{2}$ 顶点 u （及其叶节点）组成。G' 上的部分标记策略具有状态 α' 和β'，可防守与 u相邻的两个叶节点。此外，令 $\delta' = \Omega' \setminus (\alpha' \cup \beta')$，该集合可能为空。

▶**引理 5.24.** 设 G' 为应用约简 r_3之后的 G 。 G 的防守所需守卫比 G'多 1 个。

证明。对 u_3 及其一个叶节点应用观察 4.8，将 u_2 与 u 合并（使用观察 4.3），并使用约简 m_1 和 m_2 移除自环和重边，得到下界1。

对于上界，设 u_1 和 u_3 是 G'中与 u 相邻的两个叶节点。设 α' =S′(u_1) 和 β' = S′(u_3)。令 $S_{G'}$ = $S'_{G'}$ □$_{\beta'}$ {β, γ}。现在，我们通过首先对 u_3应用引理 4.33，使用额外的一个守卫为其添加 2 个新叶节点，从而扩展图 G' 。接着，添加一个顶点 u_2 ，将其连接到 u_1 和 u_3 ，并把 γ 从 R_3 移到u_2 ；这很容易实现，因为 u_2 是 u_3的邻点。转移中唯一较大的变化是，T (α, γ) ={(u_1, u_2), (u, u), (u_3, u_3)}，而不是 {(u_1, u), (u, u_3), (u_3, u_2)}。其他转移均未改变，且 u 的行为也相同，因此交换后的图接口等价。策略见图 18 S_G。

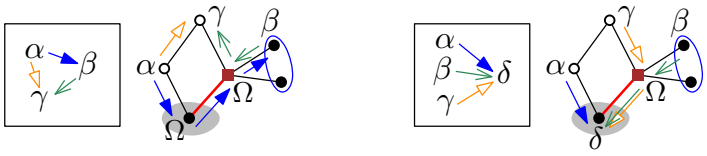


图 18 ($\widehat{\mathtt{X}}$、$\widehat{\mathtt{0}}$、$\widehat{\mathtt{0}}$、$\widehat{\mathtt{2}}$、$\widehat{\mathtt{X}}$) 叶环的策略

我们注意到，每条边都会在某个时刻被遍历，并且$\alpha \in N_{u_2,\ u_3}$, $\beta \in N_{u_1,\ u_2}$，以及$\gamma \in N_{u,\ u_1}$，因此这些边满足性质 2，而针对 G 的策略满足性质 3。边{u、 u_3} 无需满足该性质，因为它是引理 5.27 中处理的特殊情况。

我们得到了 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 1$，根据引理 4.2 可知， G 比 G' 多一个守卫进行防守。◀

▶**引理 5.25.** 设 G' 是应用约简 r_4 后的 G 。 G 比 G' 多 *2* 个守卫进行防守。

证明。 首先对 {u_1， v_1} 应用观察 4.8，其中 $v_1 \in R_1$；然后再次对 {u_3， v_3} 应用观察 4.8，其中 $v_3 \in R_3$；再根据观察 4.3，将 u_2 与 u 合并，并应用约简 m_1 和 m_2 移除自环和重边，得到下界 2。

对于上界，完全重复引理 5.24 中针对 G' 的扩展，该扩展使用一个额外的守卫。接着，对 u_1 应用引理 4.33，该引理使用一个额外的守卫添加叶节点 R_1 ，同时返回 G上的防御标记策略。根据引理 5.24，边 {u_1, u_2}、{u_2, u_3}的性质以及接口等价仍然成立。不过，我们可以将 γ 拆分为两个状态 γ_1 和 γ_2 ，分别表示 T (γ_i, δ) 是经过 {(u_2, u_1), (u_1, u)}，还是经过 {(u_2, u_3), (u_3, u)}。这确保了 {u, u_1} 和 {u, u_3} 满足性质 3，因为前者无法从 γ_2 经过，而后者无法从 γ_1经过。因此，我们有 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 2$；根据引理 4.2，我们得到 G 由比 G'多两个的守卫进行防御。◀

▶**引理 5.26**。 令 G' 为应用约简 r_5后得到的 G 。 G 比 G'多由2 个守卫防守。

证明。 首先在 {u_1， v_1} 上应用观察 4.8，其中 $v_1 \in R_1$；然后再次在 {u_4， v_4} 上应用，其中$v_4 \in R_4$；最后根据观察 4.3 将 u_2 和 u_3 分别与 u 对应，得到下界 2。

对于上界，完全重复引理 5.25 中对 G' 的扩展，该扩展使用两个额外的守卫（我们不使用证明其中用于证明该性质的部分）。然后我们令$S_{G'} = S'_{G'}$ □$_{S'(u_2)}$ {γ_1， γ_2}，即将 γ 拆分为 γ_1 和 γ_2。我们通过将u_2 拆分为 u_2 和 u_3 ，把 G' 扩展为 G （同时将 u_3 重命名为 u_4）。我们保留 u_2 上的一个 γ_1 守卫，以及 u_3上的一个 γ_2 守卫。它们之间的转移将为$\mathcal{T}$(γ_1， γ_2) ={(u_2， u_3)，(u， u)}。这是接口等价的。策略 S_G见图 19。

我们满足性质 3，因为每条边都被遍历过，并且不能从 γ_2 遍历 {u_1, u_2} ， 不能从 α 遍历 {u_2, u_3} ， 也不能从 γ_1 遍历 {u_3, u_4} 。我们注意到另外两个环

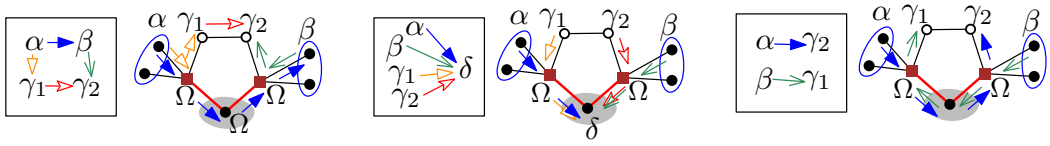


图 19 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{2}, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{\mathtt{x}})$ 叶环的策略

边 $\{u, u_1\}$ 和 $\{u, u_4\}$ 属于引理 5.27 所处理的例外情况。因此，我们有 $\gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G) \leq \gamma_{\mathrm{m}}^{\infty}(G') + 2$，并且根据引理 4.2 可知，$G$ 比 G' 多由两个守卫防护。◀

现在我们来处理性质 3 中会影响约简 r_3 和 r_5的例外情况。

▶**引理 5.27**。可以调整约简顺序，使得对于$(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{\mathtt{x}})$ 或$(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{2}, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{\mathtt{x}})$ 叶环，连接 $\widehat{\mathtt{x}}$ 顶点和 $\widehat{2}$顶点的边不需要满足性质 *2*。

证明。我们将 e 标记为连接 $\widehat{\mathtt{x}}$ 和 $\widehat{2}$ 顶点的边。要求边满足性质 2 的约简有 c_1、c_4和 c_5。如果 e 不是由这些约简中的任何一个产生的，那么 e 就无需满足性质 2。否则，我们分别分析这些情况。

- 约简 c_1 得出了 e——约简前我们有 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{1}, \widehat{2}, \dots)$，此时可以改用约简 c_2。这样得到 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{2}, \dots)$，无需满足 e 的性质。约简 c_4 得出了 e——约简前我们有 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{0}, \widehat{0}, [\widehat{2},] \widehat{\mathtt{x}})$。因此，我们可以改用约简 c_5。这样得到 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{0}, \widehat{0}, \widehat{0}, [\widehat{2},] \widehat{\mathtt{x}})$，其中 e具有该性质。
- 约简 c_5 得出了 e——约简前我们有 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{0}, \widehat{0}, [\widehat{2},] \widehat{\mathtt{x}})$，因此可以对第二个 $\widehat{2}$ 顶点使用约简 c_5。这样得到 $(\widehat{\mathtt{x}}, \widehat{0}, \widehat{2}, \widehat{0}, [\widehat{2},] \widehat{\mathtt{x}})$，其中 e具有该性质。

我们采用了其他约简，以避免通过需要性质 2 的约简到达这些叶组件。所述的第一个情形可以在任意阶段使用。最后两个情形用于常量叶组件；由于结果不同，因此可以得出它们的边具有该性质。◀

至此，常值分量归约告一段落；它们与环连通分量以及第 5.1 节所述的方法相结合，为求解 m-永恒支配提供了一个多项式算法。

6 未来工作

本文介绍的工具有助于未来研究不同图类上的 m-永恒支配。例如，$\{3, 5\} \times n$ 大小的网格已得到广泛研究 [16, 18]。我们认为，研究这些工具在研究维度限制较少的网格时能发挥多大作用，将会很有意义。

另一类值得关注的图是所谓的对偶弦图，其中许多支配相关问题都可以在多项式时间内求解。值得研究的是，m-永恒支配是否也能在多项式时间内求解。

此外，正如引言中所述，m-永恒支配问题的判定变体的计算复杂性目前仍大多未知。该问题是否属于 PSPACE，以及是否为 PSPACE-困难，仍然是开放问题。

参考文献

1 Václav Blažej、Jan Matyáš Křisťan 和 Tomáš Valla。仙人掌图的 m-永恒支配数。载于《可达性问题——第13届国际会议》，RP 2019，《计算机科学讲义》第11674卷，第33–47页。施普林格，2019年。 2 Andrei Braga、Cid C. de Souza 和 Orlando Lee。真区间图的永恒支配集问题。《信息处理快报》，115(6)：582–587，2015年。 3 Alewyn P. Burger、Ernest J. Cockayne、W. R. Gründlingh、Christina M. Mynhardt、Jan H. van Vuuren 和 Wynand Winterbach。图中的无限阶支配。《组合数学与组合计算杂志》，50：179–194，2004年。 4 Stephen Finbow、Margaret-Ellen Messinger 和 Martin F. van Bommel。$3 \times$ n 网格图上的永恒支配。《澳大拉西亚组合学杂志》，61：156–174，2015年。 5 Stephen Finbow 和 Martin F van Bommel。$3\times$ n 网格图的永恒支配数。《澳大拉西亚组合学杂志》，76：1–23，2020年。 6 Wayne Goddard、Sandra M. Hedetniemi 和 Stephen T. Hedetniemi。图中的永恒安全。《组合数学与组合计算杂志》，52：169–180，2005年。 7 Frank Harary。《图论》。Addison-Wesley Publishing Company, Inc.，1969年。 8 Michael A. Henning 和 William F. Klostermeyer。具有较大 m-永恒支配数的树。《离散应用数学》，211：79–85，2016年10月。 9 Fionn Mc Inerney、Nicolas Nisse 和 Stéphane Pérennes。网格中的永恒支配。载于《计算机科学讲义》，第311–322页。Springer International Publishing，2019年。 10 Fionn Mc Inerney、Nicolas Nisse 和 Stéphane Pérennes。永恒支配：D维笛卡尔网格与强网格及其之间的一切。《算法学》，83(5)：1459–1492，2021年2月。 11 William F. Klostermeyer 和 Gary MacGillivray。图中的永恒支配集。《组合数学与组合计算杂志》，68：97–111，2009年2月。 12 William F. Klostermeyer 和 Gary MacGillivray。树中的永恒支配。CoRR，2021年。arXiv预印本 arXiv:2112.03107。 13 William F. Klostermeyer 和 Christina M. Mynhardt。使用移动守卫保护图。《应用分析与离散数学》，10，2014年7月。 14 William F. Klostermeyer 和 Christina M. Mynhardt。支配、永恒支配与团覆盖。《数学讨论：图论》，35(2)：283，2015年。 15 Ioannis Lamprou、Russell Martin 和 Sven Schewe。永恒支配大网格。《理论计算机科学》，794：27–46，2019年11月。 16 Margaret-Ellen Messinger。弥合差距：3 x n 网格上的永恒支配。《离散数学贡献》，第12卷：第1期（2017年），2017年。 17 Martín Rinemberg 和 Francisco J. Soulignac。区间图的永恒支配集问题。《信息处理快报》，146：27–29，2019年6月。 18 Christopher M. van Bommel 和 Martin F. van Bommel。$5 \times$ n 网格图的永恒支配数。《组合数学与组合计算杂志》，97：83–102，2016年。

一种完备策略

我们注意到，如果策略 S_G 是一个完全图，那么应用引理 4.37 所创建的策略 S'_G 也是一个完全图。

▶ **性质 4.** 若部分标记策略 $B = (G, S_G, P, T \quad R)$ 满足完备，则 S_G 是完全图，即对于每个 α, $\beta \in \Omega$，都有 $\{\alpha, \beta\} \in \mathbb{F}$ 。

我们注意到，存在一些图，其中每个最优策略都不是完备策略；此类示例见附录 B。完备策略可以通过以下方式有效剪枝，使其最多包含 $|V(G)|$ 个状态。

▶**引理 A.1**。对于任意基数为 k 且顶点数最少的完整防御标记策略 S_G，均有 $|V(S_G)| \leq |V(G)| - k + 1$。

证明。任取一个使用 k 个守卫的完整防御策略 S_G。对于每个$v \in V(G)$，我们将选取一个状态 $\alpha_v \in V(S_G)$，使得 $v \in P(\alpha)$。首先，任取一个 $\alpha \in V(S_G)$，并将其指定为每个 $v \in P(\alpha)$ 的状态。然后，对于每个 $v \in V(G) \setminus P(\alpha)$，将 $\alpha_v \in S(v)$ 指定为其状态。我们刚刚选取了 $|V(G)| - k + 1$ 个状态，它们构成一个策略，其中任意一对状态都可相互转换；该策略也是防御策略，因为它覆盖了 G 的所有顶点。◀

与策略的完备性类似，我们也可以讨论 S_G 的图类，以描述其性质。

B 非完全策略

▶ **观察 B.1.** 5×5 网格上的最优 m-永恒支配策略至少需要 7 个守卫。

证明。我们用 $u_{i,j}$ 表示网格的顶点，其中 $1 \leq i, j \leq 5$。

首先，我们证明下界为 7。反设存在一个防御策略 S_6，只使用至多 6 个守卫。S_6 的任何状态都需要支配全部 25 个顶点。必定存在一个状态 C，其中 $u_{2,2}$ 被占据。在 C 中，每个角点的闭邻域内也必须至少有一个守卫（$u_{1,1}$、$u_{5,1}$、$u_{1,5}$ 和 $u_{5,5}$）。在网格中，一个顶点最多可以支配 5 个顶点，而位于网格边界上的顶点最多可以支配 4 个顶点。角点闭邻域中的所有顶点都位于网格边界上。此外，支配 $u_{1,1}$ 的顶点最多只能支配 2 个新顶点，因为 $u_{2,2}$ 已经支配了其邻域中的许多顶点。因此，C 的 6 个守卫最多只能支配 $2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 = 24$，这就产生了矛盾。◀

通过构造一种策略可以证明上界，但我们没有好的工具证明所有策略都不是完全图——这是通过完整的策略空间搜索发现的。一个使用 7 个守卫的构造包含三个状态，以及它们的大部分反射和旋转，见图 20。在这种情况下，我们不展示该策略，因为它大约包含 20 个状态（具体数量取决于轻微的优化，可能更少），这些状态将包含 190 个转移。

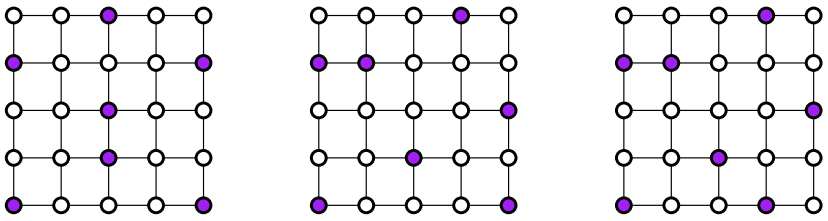


图 20 5×5 网格有 19 个 m-永恒支配集。每个构型都可以表示为这 3 个基本构型之一的旋转和反射组合。策略中 19 个构型缺一不可，并且每个构型最多可以转移到其他 12 个状态。