arXiv:2301.05159v2 [math.AP] 6 Feb 2023

黎曼流形上的逼近、正则性与正性保持

STEFANO PIGOLA、DANIELE VALTORTA 和 GIONA VERONELLI

ABSTRACT. 本文聚焦于黎曼流形（M, g）上的 L^p-正性保持性质（简称L^p-PP）。该性质指出，任何满足 $1 < p < +\infty$的 L^p 函数 u ，若在 M 上以分布意义满足方程（$-\Delta + 1$）$u \geq 0$ ，则必为非负函数。我们的主要结果是：若（可能不完备的） M 相对于某个紧域有有限个端，且每个端对于某个可能各不相同的取值 $2p/(p-1) < q \leq +\infty$均为 q-抛物的，则 L^p-PP成立。当 $p = 2$时，由于 ∞-抛物性与测地完备性等价，我们的结果肯定地解决了 M. Braverman、O. Milatovic 和 M. Shubin 于 2002 年提出的一个猜想。另一方面，我们还证明了：从完备流形中去除一个可能奇异、豪斯多夫余维严格大于 $2p/(p-1)$ 的集合，或去除一个满足阶为$2p/(p-1)$ 的统一闵可夫斯基型上界估计的集合后， L^p-PP仍然成立。阈值 $2p/(p-1)$ 是尖锐的：我们证明，当被去除集合的豪斯多夫余维严格小于该阈值时， L^p-PP不成立。这给出了相当完整的图景。为开展研究，我们所用的工具包括光滑单调逼近及其导出的次调和分布正则性结果、Brezis-Kato 不等式的流形版本、低正则性下的 Liouville 型定理、关于 L^p-次调和分布的可去奇点结果，以及 Frostman 型引理。

自 T. Kato 的开创性著作以来， L^p-PP 一直与具有奇异势 $\Delta - V$ 的 Schr¨odinger 算子的谱理论相关联。本文将主要结果应用于 $V \in L^p_{loc}$ 的情形，探讨算子在 $p = 2$ 时的本质自伴性，以及 $C_c^\infty(M)$ 是否为 L^p 中 $\Delta - V$ 的算子核。

CONTENTS

1. 引言与主要结果 21.1. 基本记号 21.2. BMS 猜想 21.3. 黎曼流形与 L^p-正性保持 31.4. L^p-正性保持、抛物性、容量与可去集 42. 分布次解的光滑逼近 53. 正次调和分布的正则性提升 124. Kato 不等式的一种变体 145. 抛物性、容量与（L^p–PP）性质 166. 移除大尺寸集合 217. 本质自伴性与 L^p-薛定谔算子的算子核¨ 258. 致谢 27参考文献 27

Date：2023年2月7日。

1. Introduction and main results

1.1. 基本记号。设 (M,g) 是一个连通的、可能不完备的 n 维黎曼流形，$n \geq 2$，并赋有其黎曼测度 dv。除非另有说明，积分总是相对于该测度进行。黎曼度量 g 给出点 x、$y \in M$ 之间的内蕴距离 dist(x,y)。以 $o \in M$ 为中心、半径为 $R > 0$ 的相应开度量球记为 $B_R(o)$。符号 Riem 和 Ric 分别表示 (M,g) 的黎曼曲率张量和里奇曲率张量。最后，(M,g) 的拉普拉斯–贝尔特拉米算子记为 $\Delta = \text{trace Hess} = \text{div } \nabla$。我们强调，本文采用的符号约定使得在实数轴上，$\Delta = +\frac{d^2}{dx^2}$。

本文　　讨论涉及薛定谔算子的椭圆偏微分方程的次解

$$\mathcal{L} = \Delta - \lambda(x)$$

其中 $\lambda(x)$是一个光滑函数。

我们称 $u \in L^1_{loc}(M)$是 $\mathcal{L}u \geq f \in L^1_{loc}(M)$的一个分布解，若对于每个$0 \leq \varphi \in C^\infty_c(M)$,

$$\int_M u\mathcal{L}\varphi \geq \int_M f\varphi.$$

有时，我们将这样的 u 称为方程 $\mathcal{L}u = f$ 的分布次解。分布超解的概念通过反转不等号来定义；如果 $u \in L^1_{loc}(M)$ 同时是 $\mathcal{L}u = f$ 的次解和超解，我们就称其为 $\mathcal{L}u = f$ 的分布解。

若相关函数具有更高的局部正则性，我们也可以讨论同一不等式的弱解。具体而言，$u \in W^{1,1}_{loc}(M)$ 是 $\mathcal{L}u \geq f \in L^1_{loc}(M)$ 的弱解，如果对于每个 $0 \leq \varphi \in C^\infty_c(M)$，都有

$$-\int_M g(\nabla u, \nabla\varphi) \geq \int_M (\lambda + f)\varphi$$

通过稠密性论证，该不等式可以推广到测试函数 $0 \leq \varphi \in W^{1,\infty}_c(M)$。如果将 u 的正则性提高到 $W^{1,2}_{loc}(M)$，那么测试函数可以取自 $W^{1,2}_c(M)$。

最后，我们需要回顾一下，函数 $u \in W^{1,1}_{loc}(M)$ 是分布解，当且仅当它是同一不等式的弱解。

1.2. BMS猜想。 本文及其姊妹篇 [GPSV] 源自两位作者未发表的预印本 [PV21] 。本文的主要目标是扩展对可能不完备的黎曼流形上 BMS 猜想的研究。在 [GPSV] 中，作者在更为广泛的完备度量测度空间这一框架下，提出了一种基于全新分布次解概念的 BMS 猜想推广。

BMS猜想由 [BMS02，附录 B], 提出，其关注的是L^p-黎曼流形的保正性。我们回顾 B. G¨uneysu， [G¨un16]给出的这一性质的定义：

定义 1.1. 设 $1 \le p \le +\infty$。若黎曼流形 (M,g) 满足以下蕴含关系，则称其具有 L^p-保正性（简称 L^p-PP）：

$$(L^p\text{-PP}) \qquad \begin{cases} (-\Delta+1)u \ge 0 \ \textit{distributionally on } M \\ u \in L^p(M) \end{cases} \Longrightarrow u \ge 0 \ \textit{a.e. on } M.$$

更一般地，可以考虑任意函数族 $\mathscr{C} \subseteq L^1_{loc}(M)$，并称 (M,g) 具有 $\mathscr{C}$ 正性保持性，如果将上述蕴含关系中的 $L^p(M)$ 替换为 $\mathscr{C}$ 后，该蕴含关系仍成立。

以下猜想源于对协变薛定谔算子自伴性的研究（参见¨相关讨论：[G¨un17、G17] 以及下文第7 节），由 M. Braverman、O. Milatovic 和 M. Shubin 在 [BMS02附录 B]中提出。

猜想 1.2（BMS猜想）。假设 (M,g) 测地完备。那么，(M,g) 具有 L^2 正性保持性。

在对完备黎曼流形 (M,g) 的几何施加额外限制的条件下，BMS猜想已得到验证。更确切地说：

- 在开创性论文 [Kat72，第140], T. Kato 证明了 $\mathbb{R}^n$ 是 L^2-PP。
- 在 [BMS02 的命题 B.2] 中，假设 (M,g) 具有 C^∞-有界几何，即满足 $\|\nabla^{(j)}\text{Riem}\|_{L^\infty} < +\infty$ 对任意 $j \in \mathbb{N}$，且 $\text{inj}(M) > 0$。
- 在 [G¨un16], B. G¨uneysu 证明了 $\text{Ric} \ge 0$ 足以使猜想 1.2 成立。随后，在 [G17的定理 XIV.31], 中，他证明了若 $\text{Ric} \ge -K^2$，则 (M,g) 在整个尺度上是 L^p-PP $p \in [1,+\infty]$。
- 在 [BS18], D. Bianchi 和 A.G. Setti 指出，即使将里奇曲率条件放宽为

$$\text{Ric} \ge -C(1+r(x))^2$$

其中 $r(x) = \text{dist}(x,o)$，其中某个原点为 $o \in M$。在相同的曲率假设下，L^p-PP 几乎可以直接推广到任意 $p \in [2,\infty)$，稍作努力后还可推广到任意 $p \in [1,+\infty]$，[G17、MV21]。

- 在最新的 [MV21], 中，L. Marini 与第三位作者研究了 Cartan-Hadamard 流形的情形（完备、单连通且具有黎曼 ≤ 0）。在这一设定下，证明了 (M,g) 是 L^p-PP，对任意 $p \in [2,+\infty)$，只要满足

$$-(m-1)B^2(1+r(x))^{\alpha+2} \le \text{Ric} \le -(m-1)^2A^2(1+r(x))^\alpha$$

对于某个 $\alpha > 0$ 以及 $B > \sqrt{2}(m-1)A > 0$。

Kato 在 $\mathbb{R}^n$ 中的论证依赖于算子 $(-\Delta+1)^{-1}$ 作用于温和分布空间时的正性，而这一点又是利用其核的显式表达式证明的。相比之下，在上述所有关于黎曼流形的研究中，证明均源自 B. Davies 的论证，[BMS02，命题 B。3] 该论证依赖于存在梯度和拉普拉斯算子均受控的良好截断函数。显然，构造这些截断函数需要对曲率作出某些假设。

1.3. 黎曼流形与 L^p正性保持。本文证明了关于黎曼流形 M 的 L^p 正性保持性质的一些结果，并探讨了该性质与 M完备性、 M的 p抛物性，以及该性质在 $M \setminus K$上是否成立与 K大小之间的联系。

我们采用的方法与文献中已有的其他结果略有不同。特别是，我们的方法基于一项针对正次调和函数的全新先验正则性结果

分布（见第 3 节），并以黎曼流形上的 Brezis-Kato 不等式为基础，从而能够证明一个刘维尔型定理（见第 4 节）。这两项结果又都依赖于对 $\mathcal{L}u \geq 0$ 的分布解进行光滑单调逼近（见第 2 节）。这种逼近可以通过一般的位势论论证来证明，但本文还给出了一种显式构造，它利用黎曼格林函数作为一种磨光子，将任意 L^1 次解 u 光滑化。

这种方法不对流形 M施加任何曲率限制，并使我们能够证明

定理1.3. 设 (M, g) 为完备黎曼流形。则对每个 $p \in (1, +\infty)$， M 都具有 L^p-正性保持性质。特别地，BMS猜想成立。

事实上，我们的方法还带来一个推论：完备流形具有 $\mathscr{C}$-正性保持性质，其中

$$\mathscr{C} = \{u \in L^1_{loc}(M) : \|u\|_{L^p(B_{2R}\setminus B_R)} = o(R^{2/p}) \text{ as } R \to +\infty\},$$

其中 $p \in (1, +\infty)$（见注 5.3）。

注 1.4. 我们明确指出，在定理 1.3的陈述中，端点情形$p = 1$ 和 $p = +\infty$ 均不包括在内。这是因为相应性质一般可能不成立。事实上，众所周知，存在不具有 L^∞-正性保持性质的完备黎曼流形（因为它们在随机意义下不完备）。另一方面， [BM22] 中包含一个完备流形的例子，其截面曲率衰减至 $-\infty$ 的速度快于二次衰减，并且 L^1-正性保持性质不成立。

1.4. L^p-正性保持、抛物性、容量与可去集。 一个自然的问题是，测地完备性在多大程度上是（L^p–PP）性质成立的必要条件。我们给出两个方面的一系列结果：

(1) 定理 5.1 指出，即使黎曼流形 M 不一定完备，L^p–PP性质仍然成立，只要它有有限个端，且每个端都是 q-抛物的（对应的 $q > \frac{2p}{p-1}$值可以不同）。(2) 推论 5.6、命题 5.8 和第 6 节讨论形如 $M \setminus K$的流形，其中 M 是完备黎曼流形，而 K 是一个具有容量上界或闵可夫斯基型上界的紧子集。

关于容量和抛物性的背景知识，请参阅 [Mat95、DL08、Gri99] 。相关定义也将在第 5节中回顾。

这些结果的核心思想是，按照适当的意义足够“小”的集合不会影响 $(-\Delta + 1)u \geq 0$ 的解的行为，而流形的抛物性则保证无穷远边界 M 具有相同的性质。

更确切地说，我们证明以下结果：

命题 1.5. 设 $1 < p < +\infty$ 且设 $M = N \setminus K$，其中 (N, h) 是一个 n 维完备黎曼流形，$K \subset N$ 是一个紧集。假设 K 的豪斯多夫维数满足

$$\dim_H(K) < n - \frac{2p}{p-1}\,. \tag{1.1}$$

那么 M 是 L^p-保正的。

事实上，命题1.5 的结论在 K 是 q-极性的情况下仍然成立，其中 $\frac{2p}{p-1} < q \leq +\infty$是由豪斯多夫维数较小这一条件所蕴含的。

在对 K 的大小作出更强假设的情况下，也可以处理临界维数。具体而言，我们有如下结果。在本文的这一部分及后续部分中，给定完备黎曼流形 (N, h) 的子集 E，我们用 $B_r(E) = \cup_{x\in E} B_r(x)$ 表示其开管状邻域。

命题 1.6. 设 $1 < p < +\infty$，并设 $M = N \setminus K$，其中 (N, h) 是一个 n 维完备黎曼流形，且 $K \subset N$ 是有界集。若 K 的管状邻域具有如下形式的一致体积界

$$\operatorname{vol}\left(B_r\left(K\right)\right) \leq C r^{\frac{2p}{p-1}} \tag{1.2}$$

对于某个与 r 无关的 C，则 M 是 L^p-正性保持的。

另一方面，可以构造出明确的完备流形例子（M，h），当从中移除一个“足够大”的集合 K 后，它们会失去 (L^p–PP) 性质。具体而言，命题 6.2 表明，若集合 K 的豪斯多夫维数

$$\dim_H(K) > n - \frac{2p}{p-1}, \tag{1.3}$$

那么（L^p–PP）性质在 $M\setminus K$上不成立，因此维数阈值 $n-\frac{2p}{p-1}$本质上是锐的。

如上所述，（L^p–PP）性质对形如¨、具有奇异势 $\Delta - V$的薛定谔算子的谱理论有重要影响 $V \in L^p_{loc}$。在最后一节7 中，我们将应用主要结果，给出确保薛定谔算子¨本质自伴（当 $p = 2$时）或C_c^∞（M）是 L^p的一个 -核 $\Delta - V$的假设。

2. Smooth approximation of distributional subsolutions

在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中（因而在任意二维流形的等温局部坐标中），经典的欧几里得拉普拉斯算子的位势理论表明，次调和分布是光滑次调和函数的单调极限。特别地，给定一个次调和函数 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，我们可以考虑一个 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$磨光子$\phi_r(x) = r^{-n}\phi(x/r)$以及函数族 $u(x, r) = \phi_r * u$。利用标准估计可以证明，对于所有 $r > 0$，$u(x, r)$都是光滑次调和函数；当 $r \to 0$时，它们从上方单调收敛到 $u(x)$，且收敛意义为 L^1_{loc} 意义。

我们需要将这一性质推广到局部一致椭圆算子

$$\mathcal{L} = \Delta - \lambda(x)$$

在黎曼流形上，其中 $\lambda(x)$ 是一个光滑函数。

定理 2.1. 设 (M, g) 是一个开流形。对于任意 $0 \leq \lambda \in C^\infty(M)$，算子$\mathcal{L} = \Delta - \lambda(x)$ 具有局部光滑单调逼近 L^1_{loc}-次解的性质，即满足以下条件。

对于每个边界光滑的相对紧开区域 $\Omega \Subset M$，存在 $\Omega' \Subset \Omega \Subset M$，使得若 $u \in L^1(\Omega)$ 在 Ω 中满足 $\mathcal{L}u \geq 0$，则存在一个序列 $\{u_k\} \subseteq C^\infty(\Omega')$，具有以下性质：

a) $u \leq u_{k+1} \leq u_k$ *for all* $k \in \mathbb{N}$;
b) $u_k(x) \to u(x)$ *as* $k \to +\infty$ *for a.e.* $x \in \Omega'$;

c) $\mathcal{L}u_k \geq 0$ 在 Ω' 中对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立；d) $\|u - u_k\|_{L^1(\Omega')} \to 0$ 当 $k \to +\infty$时。

我们首先注意到，为了证明单调逼近，可以将 Schr¨odinger 算子 $\mathcal{L}$ 替换为形如 $\Delta_\alpha = \alpha^{-2}\mathrm{div}(\alpha^2\nabla\cdot)$ 的算子，其中 $\alpha > 0$是一个适当的光滑函数。事实上，给定 x_0的一个光滑邻域 $\Omega \Subset M$，令$\alpha \in C^\infty(M)$ 为问题的一个解

$$\begin{cases} \mathcal{L}\alpha = 0, \\ \alpha > 0, \end{cases} \quad \text{on } \Omega.$$

由极大值原理可知，这样的 α 例如可以取为狄利克雷问题 $\mathcal{L}\alpha = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上具有正的常数边界数据时的一个解。我们采用 M.H. Protter 和 H.F. Weinberger 在 [PW67] 中提出的以下技巧。

注 2.2。 定理 $\lambda \geq 0$ 2.1 中的假设可以通过选取足够小的 x_0邻域来避免。事实上，设 $\lambda(x_0) < 0$。由于 M 在 x_0中是渐近欧几里得的，Poincar´e 不等式中的常数在小区域上可以任意小。也就是说，存在一个足够小的邻域 U，使得 x_0 满足

$$\int_U -\lambda\varphi^2 \,\mathrm{dv} \leq -\frac{\lambda(x_0)}{2}\int_U \varphi^2 \,\mathrm{dv} \leq \int_U |\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{dv}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U),$$

即，$-\mathcal{L} = -\Delta + \lambda$ 在 U 上的谱 $\lambda_1^U(-\mathcal{L})$的底是非负的。由 $\lambda_1^U(-\mathcal{L})$关于定义域的单调性，我们因此得到，在某个更小的定义域 $\Omega \Subset U$上，$\lambda_1^\Omega(-\mathcal{L}) > 0$。相应地，存在 $\mathcal{L}\alpha = 0$在 Ω 上的严格正解。

引理 2.3. 函数 $w \in L^1_{loc}(M)$是 $\mathcal{L}w \geq 0$ 在 Ω 上的分布解，当且仅当 w/α 是 $\Delta_\alpha(w/\alpha)$的分布解：$= \alpha^{-2}\mathrm{div}(\alpha^2\nabla(w/\alpha)) \geq 0$ 在 Ω 上。

证明。设$0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$。由于 $\Delta\alpha = \lambda\alpha$，我们有

$$\begin{aligned} \alpha\Delta_\alpha(\varphi/\alpha) &= \alpha^{-1}\,\mathrm{div}(\alpha^2\nabla(\varphi/\alpha)) \\ &= \alpha^{-1}\,\mathrm{div}(\alpha\nabla\varphi - \varphi\nabla\alpha) \\ &= \alpha^{-1}(\alpha\Delta\varphi - \varphi\Delta\alpha) \\ &= \mathcal{L}\varphi. \end{aligned}$$

注意到算子 Δ_α 关于光滑加权测度$\alpha^2\mathrm{dv}$是对称的，我们得到

$$(\Delta_\alpha\frac{w}{\alpha}, \alpha\varphi) = \int_M \frac{w}{\alpha}\Delta_\alpha\frac{\varphi}{\alpha}\alpha^2 \,\mathrm{dv} = \int_M \frac{w}{\alpha}\alpha^2\frac{\mathcal{L}\varphi}{\alpha} \,\mathrm{dv} = \int_M w\mathcal{L}\varphi \,\mathrm{dv} = (\mathcal{L}w, \varphi).$$

由于 $0 \leq \alpha\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$，引理得证。 □

根据此引理，令 $v = \alpha^{-1}u$，我们可以从算子 Δ_α 的等价表述推得该定理的结论。事实上，由于 $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ 在 Ω 中分布意义下满足 $\Delta_\alpha v \geq 0$，若我们证明存在 $\Omega' \Subset \Omega$ 以及一个序列 $\{v_k\} \subseteq C^\infty(\Omega')$ 满足以下性质：

a') 对所有 $k \in \mathbb{N}$，$v \leq v_{k+1} \leq v_k$；b') 对几乎处处的 $x \in \Omega'$，$v_k(x) \to v(x)$ 当 $k \to +\infty$；c') 对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\Delta_\alpha v_k \geq 0$ 在 Ω'。

d’) $\|v - v_k\|_{L^1(\Omega')} \to 0$ 当 $k \to +\infty$。

那么，序列 $u_k = \alpha v_k$ 满足所需的 a)、b)、c) 和 d)。

有了这些准备，我们可以利用公理化位势理论中发展出的强大工具来证明定理[Sj73。事实上，根据 1], v 是一个Δ_α按 Herv´e 的意义定义的 [Her62]-次调和函数。因此，为了得出结论，我们可以采用 [BL13定理 7 的一个略作修改的版本。1]也就是说，可以验证，如果在证明中使用 Ω 上满足[BL13] 齐次边界条件的格林函数，那么 $\partial\Omega$ 上的定理 7.1 无需任何改动即可成立。反过来，这个格林函数的存在性可以通过不同方法推导出来。例如，从偏微分方程的角度来看，我们可以依据这样一个事实：狄利克雷问题在光滑相对紧区域上有唯一解；参见经典文献[LSW63]。在[BM22]中也采用了类似方法来获得单调逼近。

显然，这类论证相当复杂。因此，为方便读者，我们给出定理 2.1 的一个自包含证明，该证明不依赖任何抽象的位势理论。相反，它涉及一类颇为不同的逼近函数，带有类似卷积的特征；我们认为，这类函数本身也可能具有独立研究价值。

定理 *2.1*的证明。 由局部等温坐标的存在性，以及拉普拉斯算子在二维中的共形不变性可知，在这种情况下，定理可由欧氏情形轻易推出。

若 (M, g) 的维数为 ≥ 3，根据引理 2.3 我们可以专注于 Δ_α 的逼近问题；相对于度量 ${}_4\tilde{g}_{ij} = \alpha^{\overline{n-2}} g_{ij}$，它与拉普拉斯–贝尔特拉米算子成正比。因此，除改变度量外，我们只需研究流形 M 上标准拉普拉斯–贝尔特拉米算子的逼近问题。

设 Ω 是 x_0 的任意相对紧邻域，并且 $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$，其中 $d(\Omega', \Omega''^C) \geq \epsilon > 0$。为简单起见，假设 Ω 具有光滑边界。令 $G_\Omega(x, y) = G(x, y$为算子 Δ 在 Ω 上满足狄利克雷边界条件的格林函数，其中符号的选取使得 $\Delta G = -\delta$。我们回顾格林函数的一些标准事实（例如参见 [Aub82，定理 4。13]）：

(2.1) $G(x, y)$ 在 $\Omega \times \Omega \setminus D$ 上光滑，其中 $D = \{(x, x) \quad x \in \Omega\}$ 是对角线

(2.2) $G(x, y) > 0$

(2.3) $G(x, y) \leq Cd(x, y)^{2-n}$

(2.4) $|\nabla G(x, y)| \leq Cd(x, y)^{1-n}$

(2.5) $G(x, y) = G(y, x)$

(2.6) $\Delta_x G(x, y) = \Delta_y G(x, y) = -\delta_{x=y}$

下文中，当 x 固定时，我们将 $G_x(y)$ 记作 $= G(x, y)$。因此，我们也可以定义水平集 $G_x^{-1}(t)$ $= \{y \in M \quad s.t. \quad G_x(y) = t\} \subset M$。此外， $\nabla_y G_x(y) = \nabla_y G(x, y)$ 表示 G 关于 y 的梯度。当不存在混淆风险时，我们会省略下标[1]。有时，将 G 的定义扩展到 $M \times M$ 上会比较方便，方法是在 $\Omega \times \Omega$ 外将其设为 0。但这会使 G 成为 $\partial\Omega$ 上的非 C^1 函数，并且 (2.4)、(2.6) 仅在 $\Omega \times \Omega$ 上成立

[1]值得一提的是，尽管 G (±∇$_y$$G$ x y x y f $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ f x y $= xy$ x y $=$,) 关于 和 对称，但这并不意味着 $\nabla_x G$ (,) (,)。例如考虑对称函数： 其定义为 (,)。然而，由于

仅在 $\Omega \times \Omega$ 上。

沿用 [BL13], 另请参见 [Ni07] 中针对光滑函数的相关表示公式，我们可以利用格林函数显式构造逼近序列 v_k。设 $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个满足以下条件的光滑函数

$$\dot{\psi} \geq 0 \qquad \operatorname{supp}\left(\dot{\psi}\right) \subseteq [-1;1] \ , \qquad \int_{\mathbb{R}} \dot{\psi} = 1 \, . \tag{2.7}$$

定义单参数函数族

$$v(x,r) = \int_M \dot{\psi}\left(G(x,y) - r\right) u(y) \left|\nabla_y G(x,y)\right|^2 \ \mathrm{dv}(y) \, . \tag{2.8}$$

为方便起 见，若不会引起混淆，我们将省略积分符号 $\mathrm{dv}(y)$。

由于 $\operatorname{supp}\left(\dot{\psi}\right) \subseteq [-1;\, 1],$，且只要 $x \neq y \iff G(x,y) \neq \infty$，$G(x,y)$ 就是光滑的，因此对于任意固定的 $r < \infty$，函数 $v(x,r)$ 在 x 上光滑。利用余面积公式，我们可以将 $v(x,r)$ 重写为

$$\begin{aligned} v(x,r) &= \int_M \dot{\psi}\left(G(x,y) - r\right) u(y) \left|\nabla G(x,y)\right|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ds \ \dot{\psi}(s-r) \int_{G_x^{-1}(s)} u(y) \left|\nabla G(x,y)\right| \ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

从哲学角度 地，$v(x,r)$在球 $B_{r^{2-n}}(x)$ 上起到平滑化 $u(x)$ 的作用，当 $r \to$ ∞.

远离 Ω 的边界。证明我们希望展示的所有性质时，有一个技术要点：我们需要“远离 Ω 的边界”。下文的计算会让这一点变得清楚；此刻先指出，我们可以固定 $r_0 \gg 0$，使得对所有 $r \geq r_0$:

$$\forall x \in \Omega' \, , \ \forall y \in \Omega''^C \qquad \psi(G(x,y) - r) = 0 \, . \tag{2.10}$$

这是可行的，因为 ψ 的定义以及（2.4）中的上界。

我们的最终逼近序列定义如下:

$$v_k(x) = v(x, r_0 + k) \, . \tag{2.11}$$

$\mathbb{R}^n$ 中的通常格林函数具有平移不变性， $G(-\nabla_y G \ x \ y \qquad x \ y \ = \qquad ,)$ $= |x-y|^{2-n}$，那么在这种情况下 $\nabla_x G(\, ,)\, (\, ,)$。黎曼流形上则并非如此。

单调性的证明。假设 u 光滑，并记 n 为水平集 $G_x^{-1}(t)$ 的外法向量，我们计算 $v(x,r)$ 关于参数 r 的导数:

$$\frac{\partial}{\partial r}v(x,r) = \int_{\mathbb{R}} ds - \ddot{\psi}(s-r)\int_{G_x^{-1}(s)} u(y)\,|\nabla G| = \tag{2.12}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} ds - \ddot{\psi}(s-r)\int_{G_x=s} u(y) g\left(\nabla G, -n\right) =$$

$$= \int ds\ \ddot{\psi}(s-r)\int_{G_x\geq s} g\left(\nabla u, \nabla G\right) + \underbrace{\int ds\ \ddot{\psi}(s-r)}_{=0}\underbrace{\int_{G_x\geq s} u(y)\Delta_y G_x}_{=u(x)\quad \text{indep. of } s} =$$

$$= \int ds\ \ddot{\psi}(s-r)\int_s^\infty dt\int_{G_x=t} g\left(\nabla u, \frac{\nabla G}{|\nabla G|}\right) =$$

分部积分后，由于 ψ 具有紧支集，边界项消失，剩下:

$$= +\int ds\ \dot{\psi}(s-r)\int_{G_x=s} g\left(\nabla u, \frac{\nabla G}{|\nabla G|}\right) = -\int ds\ \dot{\psi}(s-r)\int_{G_x=s} g\left(\nabla u, n\right) =$$

$$= -\int ds\ \dot{\psi}(s-r)\int_{G_x\geq s}\Delta u = -\int_M \Delta u\int ds\ \dot{\psi}(s-r)\chi_{G_x\geq s} =$$

$$= \int_M \Delta u\int_{-\infty}^{G_x(y)} ds\ \dot{\psi}(s-r) = -\int_M \Delta u\cdot\psi(G_x(y)-r)\,.$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial r}v(x,r) = -\int_M \Delta u\cdot\psi(G_x(y)-r)\,. \tag{2.13}$$

根据 (2.10) 中 r_0 的定义，若 $r\geq r_0$，则对所有 $x\in\Omega'$， $\psi(G_x(y)-r)$ 的支集包含于 Ω'' 中，因此 $\psi(G_x(y)-r)$ 是关于 y [2] 的非负光滑函数。由于$\psi(s)=\int_{-\infty}^s \dot{\psi}(s)\geq 0$，我们可以利用 u 的分布意义下的次调和性，得出

$$\frac{\partial}{\partial r}v(x,r) = -\int_M \Delta u\cdot\psi(G_x(y)-r) = -\int_M u\cdot\Delta\left[\psi(G_x(y)-r)\right]\leq 0 \tag{2.14}$$

由于最后一串等式中的第一项和第三项在 L^1_{loc} 中当$u_j\to u$ 时都收敛，因此这个不等式对所有分布意义下次调和的 $u\in L^1$ 都成立；这里不要求 u 光滑。

次调和性的证明。我们用类似的方法证明 $v(x,r)$ 的次调和性（这里固定 r，并研究关于 $x\in M$ 的次调和性）。如上所述，假设 u 光滑，我们可以计算

$$v(x,r) = \int_{\mathbb{R}} ds\ \dot{\psi}(s-r)\int_{G_x=s} u\,|\nabla G| = -\int_{\mathbb{R}} ds\ \dot{\psi}(s-r)\int_{G_x=s} u\ g\left(\nabla G, -n\right) = \tag{2.15}$$

$$= u(x) - \int_{\mathbb{R}} ds\ \dot{\psi}(s-r)\int_{G\geq s} g\left(\nabla u, \nabla G\right)\,.$$

[2]问题在于， $G(x,y)$ 是 Ω 的格林函数，因此它在 Ω 上是 C^0，但不是 C^1

因此，重新排列各项后，我们得到

$$
\begin{aligned}
v(x,r)-u(x) &= -\int_{\mathbb{R}} ds\ \dot\psi(s-r)\int_{G\geq s} g\left(\nabla u,\nabla G\right) = \\
&= -\int_{\mathbb{R}} ds\ \dot\psi(s-r)\left[\int_{G=s} G\ g\left(\nabla u,n\right)-\int_{G_x\geq s} G\Delta u\right] = \\
&= -\int_{\mathbb{R}} ds\ \dot\psi(s-r)\int_{G_x\geq s}(s-G)\Delta u = \\
&= -\int_{\Omega}\Delta u\int ds\ (s-G(x,y))\dot\psi(s-r)\chi_{G_x\geq s}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

令 $\hat{}\ \psi(t)\ =\int_{-\infty}^{t} ds\psi(s)$ 为 ψ 的原函数。注意，

$$
\begin{aligned}
&\int ds\ (s-G(x,y))\dot\psi(s-r)\chi_{G_x\geq s} = \\
&= \int_{-\infty}^{G(x,y)} ds\ s\dot\psi(s-r) - G(x,y)\int_{-\infty}^{G(x,y)} ds\ \dot\psi(s-r) = \\
&= G\psi(G-r)-\hat\psi(G-r)-G\psi(G-r) = -\hat\psi(G(x,y)-r)\,.
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

综上，若 u 光滑，则

$$
v(x,r)-u(x)=\int_{\Omega}\hat\psi(G(x,y)-r)\Delta u(y)\,. \tag{2.18}
$$

我们可以通过以下方式计算 $v(x,r)$ 的拉普拉斯算子：

$$
\Delta_x v(x,r)-\Delta_x u(x)=\int_M\ \Delta_x(\hat\psi(G(x,y)-r))\Delta_y u(y)\ \mathrm{dv}(y)\,. \tag{2.19}
$$

直接计算可得：

$$
\begin{aligned}
\Delta\left[\hat\psi(G(x,y)-r)\right] &= \nabla_i\left[\psi(G(x,y)-r)\nabla_i G(x,y)\right] = \\
&= \dot\psi(G(x,y)-r)\left|\nabla G(x,y)\right|^2+\psi(G(x,y)-r)\Delta G(x,y) = \\
&= \dot\psi(G(x,y)-r)\left|\nabla G(x,y)\right|^2-\psi(G(x,y)-r)\delta_{x=y} = \dot\psi(G(x,y)-r)\left|\nabla G(x,y)\right|^2-\delta_{x=y}\,.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

因此我们得到

$$
\Delta_x v(x,r)-\Delta_x u(x) = -\Delta_x u(x)+\int_{\Omega}\dot\psi(G(x,y)-r)\left|\nabla_x G\right|^2\Delta u(y)\,\mathrm{dv}(y)\,, \tag{2.21}
$$

$$
\Delta_x v(x,r)=\int_{\Omega}\dot\psi(G(x,y)-r)\left|\nabla_x G\right|^2\Delta u\,\mathrm{dv}(y)=\int_{\Omega} u\ \Delta_y\left[\dot\psi(G(x,y)-r)\left|\nabla_x G\right|^2\right]\ \mathrm{dv}(y)\,.
$$

即使 u 仅属于 L^1_{loc} 而非光滑函数，最后一个等式仍有意义。

仿照单调性的证明，如果 $r\geq r_0$ 和 $x\in\Omega'$, $G(x,y)$ 在此积分中是光滑的，那么根据 u 的分布意义下的次调和性，我们可以得出

$$
\Delta_x v(x,r)\geq 0\,, \tag{2.22}
$$

正如所需。

.....的证明： L^1 收敛。为了证明 $v(x,\ r)\ \to v(x)$ 在 $L^1(\Omega')$ 意义下收敛至$r\to\infty$，我们将利用等式 (2.18以及以下事实：在分布意义下， Δu 是集合 Ω 上的一个有限（非负）测度″。

注意，若 u 是一个光滑次调和函数，则由（2.18）可得：

$$v(x,r)-u(x)=\int_\Omega \hat{\psi}(G-r)\Delta u\,. \tag{2.23}$$

因此， $v(x,r)\ -u(x)$ 的 $L^1(\Omega')$ 范数为

$$\int_{\Omega'}|v(x,r)-u(x)|\ \mathrm{d}v(x)=\int_{\Omega'}v(x,r)-u(x)\ \ \mathrm{d}v(x)= \tag{2.24}$$

$$=\iint_{\Omega'\times\Omega}\hat{\psi}(G(x,y)-r)\Delta u(y)\ \ \mathrm{d}v(x)\,\mathrm{d}v(y)=\int_\Omega \Delta u(y)\underbrace{\int_{\Omega'}\hat{\psi}(G(x,y)-r)\,\mathrm{d}v(x)}_{:=h(y,r)}\ \mathrm{d}v(y)\,.$$

根据（ r_0 2.10）中 h 的选取，其支集包含于 Ω''。

我们断言， h 是一个 Lipschitz函数，且 $\lim_{r\to\infty}|h(y,r)|_{L^\infty(\Omega'')}=0$。事实上，我们注意到

$$\nabla h=\int dx\ \psi(G(x,y)-r)\nabla G(x,y)\,, \tag{2.25}$$

并且只要 $r\geq r_0$和 $x\in\Omega'$， $\psi(G(x,\ y)-r)\nabla G(x,\ y)$ 是 y在远离 x 处的光滑函数，且支集包含于 Ω'' ，并且（2.4）中的估计成立。因此我们得到 h 是一个 Lipschitz函数。

此外，注意到

$$\hat{\psi}(G(x,y)-r)\leq\max\{G(x,y)-r+1;0\}\leq\max\left\{Cd(x,y)^{2-n}-r+1;0\right\} \tag{2.26}$$

现在，对于次调和函数 $u\in L^1$，我们可以利用这一事实证明，当 $r\to\infty$ 时，序列$v(x,r)$ 是一个 L^1 柯西序列。事实上，对于 $R>r>0$,

$$\int_{\Omega'}|v(x,r)-v(x,R)|\ \mathrm{d}v(x)=\int_{\Omega'}v(x,r)-v(x,R)\ \ \mathrm{d}v(x)= \tag{2.27}$$

$$=\iint_{\Omega'\times\Omega}\left[\hat{\psi}(G(x,y)-r)-\hat{\psi}(G(x,y)-R)\right]\Delta u(y)\ \ \mathrm{d}v(x)\,\mathrm{d}v(y)=$$

$$=\int_\Omega\Delta u(y)\underbrace{\int_{\Omega'}\left[\hat{\psi}(G(x,y)-r)-\hat{\psi}(G(x,y)-R)\right]\ \mathrm{d}v(x)}_{:=h(y,r,R)}\ \mathrm{d}v(y)\,.$$

$h(y,r,R)$ 是一个光滑函数，因此这个等式在分布意义下是有意义的。此外，$h(y,r,R)$ 是 C^0 中一致有界的序列，并且当 $r\to\infty$ 时收敛到 0。因此，$v(x,r)$ 是 r 中的一个 L^1 柯西序列。

为了证明当 $r\to\infty$ 时， $v(x,r)\ \to u(x)$，我们将证明，对于某个 $r\geq r_0$， $v(x,r)$ 的凸组合收敛到 $u(x)$。这一点以及 $v(x,r)$ 的 L^1 收敛性可以证明原来的收敛结论。

特别地，对于所有 r_0 ，固定一个函数 $\alpha_{r_0}(r)$，使得

- $\alpha_{r_0}\in C_c^\infty([0;\infty))$
- $\int\alpha_{r_0}(r)\ \ dr=1$
- $\forall r,\ \ 0\leq\alpha_{r_0}(r)\ \leq\frac{1}{r}$

• 如果 $r \leq r_0$ 或 $r \geq 10r_0$, $\alpha_{r_0}(r) = 0$

由于 $\int_{r_0}^{10r_0} \frac{dr}{r} = \ln(10) > 1$, 这是可能的。考虑凸组合 s

$$w(x, r_0) := \int \alpha_{r_0}(r) v(x, r) dr = \int_0^\infty ds \int_{G(x,y)=s} u(y) \, |\nabla G| \int dr \alpha_{r_0}(r) \dot{\psi}(s - r) = \tag{2.28}$$

$$= \int_M u(y) \, |\nabla G|^2 \int dr \alpha_{r_0}(r) \dot{\psi}(G(x, y) - r) \, \mathrm{dv}(y) \, .$$

注意，将 Cheng-Yau 梯度估计应用于球 $B_{d(x,y)/3}(x)$ 上，正调和函数 G 满足

$$\frac{|\nabla G|}{G} \leq c(d(x, y)^{-1} + 1) \, , \tag{2.29}$$

并且由于 $G(x, y) \leq C d(x, y)^{2-n}$，对于 $\bar{r} \gg 1$，我们有

$$|w(x, \bar{r}) - u(x)| \leq \int_M |u(y) - u(x)| \, |\nabla G|^2 \int dr \alpha_{\bar{r}}(r) \dot{\psi}(G(x, y) - r) \, \mathrm{dv}(y) \leq \tag{2.30}$$

$$\leq \int_M |u(y) - u(x)| \, d(x, y)^{-2} G^2(x, y) \frac{C}{G(x, y) - 1} 1_{\{\bar{r}-1 \leq G(x,y) \leq 10\bar{r}+1\}} \, \mathrm{dv}(y) \leq$$

$$\leq C \int_{A_{\bar{r}}(x)} \frac{1}{d(x, y)^n} \, |u(y) - u(x)| \, \mathrm{dv}(y) \, ,$$

其中 $A_{\bar{r}}(x) = \left\{ (c^{-1}(10\bar{r} + 1))^{1/(2-n)} \leq d(x, y) \leq (C^{-1}(\bar{r} - 1))^{1/(2-n)} \right\}$。最后一个不等式由 Ω' 上的局部估计 $G(x, y) \geq c \, d(x, y)^{2-n}$ 得出；例如参见 [MRS22, 定理 2.4]。设 x 是 u 的一个勒贝格点，则 $|w(x, \bar{r}) - u(x)| \to 0$，这证明了凸组合 $w(x, \bar{r})$ 几乎处处收敛到 $u(x)$，原始的 $v(x, r)$ 也因此几乎处处收敛。□

下文中，我们假设 $\lambda(x) \equiv 0$ 或 $\lambda(x) = \lambda$ 是一个正常数。对于 λ的每一种选择，光滑局部单调逼近的存在性在次调和分布的正则性理论中，或在传统 Kato 不等式某种变体的成立性方面，都有显著影响。

接下来的两节中，我们将分别分析这些应用。

3. Improved regularity of positive subharmonic distributions

我们将定义域 Ω 上的次调和分布定义为满足如下分布意义下不等式的函数 $u \in L^1_{loc}(\Omega)$: $\Delta u \geq 0$ 。注意，在这种情况下， Δu 是一个正拉东测度。

利用局部单调逼近存在这一事实，可以证明正次调和分布必然属于 $W^{1,\,2}_{loc}$。事实上，还可以证明一个更强的性质，即对于所有 $p \in (1, \infty)$，都有 $u^{p/2} \in W^{1,\,2}_{loc}$。这就是下一个定理的内容。据我们所知，在如此一般的情形下，这一结果在欧几里得情形中也是新的。

定理 3.1. 设 (M, g) 为一个黎曼流形。设 $u \geq 0$ 是一个 $L^1_{loc}(M)$-次调和分布。那么，对于任意 $s \in (1, \infty)$, $u \in L^\infty_{loc}$ 和 $u^{s/2} \in W^{1,\,2}_{loc}$。

此外，对于所有 $\varphi \in C_c^\infty(M)$ 和 $1 < s \le p$，我们有如下估计

$$\frac{(s-1)^2}{s^2}\int_{\{\varphi\ge 1\}} |\nabla u^{s/2}|^2 \le \int_M u^s |\nabla\varphi|^2 \le \left(\int_{\mathrm{supp}(\nabla\phi)} u^p\right)^{s/p} \left(\int_M |\nabla\varphi|^{\frac{2p}{p-s}}\right)^{(p-s)/p}, \tag{3.1}$$

证明。固定 $1 < s \le p < +\infty$ 并令 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ 为一个截断函数，使得 $0 \le \varphi \le 1$且 $\varphi \equiv 1$ 在某个有界开集 Ω 上 $_1 \neq \emptyset$。固定一个有界开集 Ω，使得 $\mathrm{supp}(\varphi) \Subset \Omega \Subset M$。根据定理 2.1，存在一个 u 的光滑逼近

$$u_k \ge u_{k+1} \ge u \ge 0$$

由 Ω 上的（经典）解构成。注意，若将 u_k 替换为 $u_k + 1/k$，我们可以假设 $u_k > 0$。现在，定义 $\psi = u_k^{s-1}\varphi^2$。由于 u_k 都是光滑、严格正且次调和的，我们得到

$$\begin{aligned} 0 &\ge -\int_M \Delta u_k \psi \\ &= \int_M g(\nabla u_k, \nabla\psi) \\ &= (s-1)\int_M \varphi^2 u_k^{s-2}|\nabla u_k|^2 + 2\int_M \varphi u_k^{s-1} g(\nabla u_k, \nabla\varphi) \\ &\ge (s-1-\varepsilon)\int_M \varphi^2 u_k^{s-2}|\nabla u_k|^2 - \varepsilon^{-1}\int_M u_k^s |\nabla\varphi|^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

对任意 $\varepsilon \in (0, s-1)$。进一步推导可得卡乔波利不等式

$$\begin{aligned} \varepsilon(s-1-\varepsilon)\int_{\Omega_1} u_k^{s-2}|\nabla u_k|^2 &\le \varepsilon(s-1-\varepsilon)\int_M \varphi^2 u_k^{s-2}|\nabla u_k|^2 \\ &\le \int_M u_k^s |\nabla\varphi|^2 \\ &\le \|\nabla\varphi\|_\infty^2 \int_\Omega u_s^p. \end{aligned} \tag{3.3}$$

取 $\epsilon = (s-1)/2$，并利用 $u_k \ge u_{k+1} > 0$ 这一事实，便得到 s

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_k^{s/2}|^2 = \frac{s^2}{4}\int_{\Omega_1} u_k^{s-2}|\nabla u_k|^2 \le \frac{s^2}{(s-1)^2}\int_\Omega u_k^s |\nabla\varphi|^2 \le \frac{s^2\|\nabla\varphi\|_\infty^2}{(s-1)^2}\int_\Omega u_1^s, \tag{3.4}$$

另外注意到 $\|u_k^{s/2}\|_{L^2(\Omega_1)} \le \|u_1^{s/2}\|_{L^2(\Omega_1)}$，因此我们得出序列 $\{u_k^{s/2}\}$在 $W^{1,2}(\Omega_1)$ 中有界，从而在 $W^{1,2}(\Omega_1)$ 中弱收敛（取一个子序列）到某个 $v \in W^{1,2}(\Omega_1)$。由于 $u_k^{s/2}$ 几乎处处逐点收敛于 $u^{s/2}$，因此在 Ω_1 上必然有 $v = u^{s/2}$ 几乎处处成立。特别地，在 Ω_1 的某个邻域内，$u^{s/2} \in W^{1,2}$。此外，将 $k \to \infty$（沿该子序列）代入（3.4），我们得到

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u^{s/2}|^2 \le \frac{s^2}{(s-1)^2}\int_\Omega u^s |\nabla\varphi|^2 \le \frac{s^2}{(s-1)^2}\left(\int_{\mathrm{supp}(\nabla\phi)} u^p\right)^{s/p} \left(\int_M |\nabla\varphi|^{\frac{2p}{p-s}}\right)^{(p-s)/p}, \tag{3.5}$$

其中最后一步用到了 H¨older 不等式。

□

4. A variant of the Kato inequality

T. Kato 提出的原始不等式，[Kat72，引理 A], 指出，若$u \in L^1_{loc}(M)$ 满足$\Delta u \in L^1_{loc}(M)$, 则

$$\Delta|u| \geq \mathrm{sgn}(u)\Delta u$$

或者，等价地，若令 $u_+ = \max(u, 0) = (u + |u|)/2$，则有

$$\Delta u_+ \geq 1_{\{u>0\}}\Delta u.$$

注意，在这些假设下，$|\nabla u| \in L^1_{loc}(M)$（见[Kat72，引理 1]），因此，$u \in W^{1,1}_{loc}(M)$。

仅要求 $u \in W^{1,1}_{loc}(M)$ 满足 $\Delta u = \mu$ 是一个（带符号的）拉东测度，A. Ancona 在 [Anc09，定理 5 中证明了 Kato 不等式的一个精确形式。1] 其思想源自论文[Fug92]，作者为 B. Fuglede。

在特殊情形下，$M = \mathbb{R}^n$ 且 Δ 是欧几里得拉普拉斯算子，H. Brezis 在 [Bre84，引理 A.1] 和 [Pon16，命题 6.9], 指出，函数的局部正则性可以由如下条件取代：u 满足如下形式的微分不等式：$\Delta u \geq f$ 在分布意义下，其中 $f \in L^1_{loc}$。证明采用标准磨光子，将 u逼近为满足同一不等式的光滑解。特别地，由于存在等温局部坐标，该方法在二维黎曼流形上局部成立。在下一个结果中，我们将利用光滑次调和逼近序列的存在性，把这一结论推广到高维流形。

命题 4.1（Brezis-Kato 不等式）。设 (M, g) 是一个黎曼流形。若 $u \in L^1_{loc}(M)$ 在分布意义下满足 $\Delta u \geq f$，其中某个 $f \in L^1_{loc}(M)$，则 $u_+ \in L^1_{loc}(M)$ 是 $\Delta u_+ \geq 1_{\{u>0\}} f$ 的分布解。

我们将使用以下逼近引理，参见 [Kat72，引理 2]。

引理 4.2。设 $u \in L^1_{loc}(M)$ 满足 $\Delta u \in L^1_{loc}(M)$。那么，对于任意固定的紧坐标域 $\Omega \Subset M$，存在一个函数序列 $u_k \in C^\infty(\Omega)$，使得

$$u_k \overset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow} u \quad and \quad \Delta u_k \overset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow} \Delta u.$$

（命题*4.1*的证明）。我们固定一个光滑坐标域 $\Omega \Subset M$，在该域上，次调和分布可由光滑次调和函数单调逼近。我们考虑狄利克雷问题

$$\begin{cases} \Delta g = f & \text{in } \Omega \\ g = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

并且我们注意到，由于 $f \in L^1(\Omega)$，因此它有唯一解 $g \in W^{1,1}_0(\Omega)$；参见[LSW63，定理 5。1]。新函数

$$w = u - g \in L^1(\Omega)$$

是一个次调和分布，即 $\Delta w \geq 0$。

令 $w_k \geq w_{k+1} \geq w$ 为 w 的一个单调逼近，由 $\Delta w_k \geq 0$的光滑解构成，并定义

$$u_k = w_k + g.$$

注意，根据构造，

$$i)\, u_k \searrow u \text{ a.e. in } \Omega, \quad ii)\, u_k \to u \text{ in } L^1(\Omega), \quad iii)\, \Delta u_k \geq f \text{ in } \Omega. \tag{4.1}$$

此外，由于 w_k 是光滑的，

$$u_k \in L^1(\Omega) \quad \text{and} \quad \Delta u_k \in L^1(\Omega).$$

根据引理4.2，对每个固定的 k，令 $\{u_k^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为满足以下条件的光滑函数序列

$$u_k^n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u_k \quad \text{and} \quad \Delta u_k^n \xrightarrow{L^1(\Omega)} \Delta u_k, \quad \text{as } n \to +\infty.$$

现在，令 et $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为满足 $H'(t)\ H''(t) \geq 0$ 的光滑函数。对于任意 $n \geq 1$ ，

$$\Delta(H(u_k^n)) \geq H'(u_k^n)\Delta u_k^n.$$

对于每个 $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega H(u_k^n)\Delta\varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta(H(u_k^n))\varphi \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega \Delta u_k^n H'(u_k^n)\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

我们将后者应用于 $H(t) = H_\varepsilon(t) = (t+\sqrt{t^2+\varepsilon})/2$。首先，令 $n\to\infty$。利用控制收敛定理，我们得到

$$\left|\int_\Omega (H_\varepsilon(u_k^n) - H_\varepsilon(u_k))\Delta\varphi \,\mathrm{d}x\right| \leq \|H_\varepsilon'\|_{L^\infty}\|\Delta\varphi\|_{L^\infty}\int_\Omega |u_k^n - u_k| \,\mathrm{d}x \longrightarrow 0,$$

and

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \Delta u_k^n H_\varepsilon'(u_k^n)\varphi \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta u_k H_\varepsilon'(u_k)\varphi \,\mathrm{d}x\right| \\
\leq &\left|\int_\Omega (\Delta u_k^n - \Delta u_k)H_\varepsilon'(u_k^n)\varphi \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_\Omega \Delta u_k (H_\varepsilon'(u_k^n) - H_\varepsilon'(u_k))\varphi \,\mathrm{d}x\right| \\
\leq &\|H_\varepsilon'\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^\infty}\int_\Omega |\Delta u_k^n - \Delta u_k| \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \Delta u_k |H_\varepsilon'(u_k^n) - H_\varepsilon'(u_k)|\,|\varphi| \,\mathrm{d}x \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

因此，由（4.1）、（4.2以及 H_ε'、 $\varphi \geq 0$这一事实可得

$$\int_\Omega H_\varepsilon(u_k)\Delta\varphi \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega H_\varepsilon'(u_k)\Delta u_k\varphi \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega H_\varepsilon'(u_k) f\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

接下来，我们回顾一下 $f \in L^1$ 并且根据（4.1 ii)， $u_k \to u$ 在 $L^1(\Omega)$ 中成立。因此，重复上述估计，并在（ $k\to+\infty$ 中取极限，可在（4.3）中得到

$$\int_\Omega H_\varepsilon(u)\Delta\varphi \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega H_\varepsilon'(u) f\varphi \,\mathrm{d}x.$$

最后，我们注意到 $H_\varepsilon(t) \to t_+$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛。此外， $H_\varepsilon'(t)$ 在 ε 和 t 中均一致有界，并且当 $\varepsilon \to 0$ 时几乎处处逐点收敛到示性函数$1_{(0,+\infty)}(t)$。令 $\varepsilon\to 0$ ，再应用控制收敛定理可得

$$\int_\Omega u_+\Delta\varphi \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega 1_{\{u>0\}} f\varphi \,\mathrm{d}x,$$

i.e.

$$\Delta u \geq 1_{\{u>0\}} f \quad \text{distributionally in } \Omega.$$

为完成证明，取 M 的一个覆盖，由存在单调逼近的坐标域 $\Omega_j \Subset M$ 组成，并考虑一个从属于该覆盖的单位分解 $\{\eta_k\}$，使得 $\tilde{}$ $\eta_j \in C_c^\infty(\Omega j)$ 且 $\sum_j \eta_j = 1$。给定 $\psi \in C_c^\infty(M)$，有

$$\int_M u_+ \Delta\psi \, \mathrm{dv} = \sum_j \int_M u_+ \Delta(\eta_j \psi) \, \mathrm{dv} \geq \sum_j \int_{\tilde{\Omega}_j} 1_{\{u>0\}} f \eta_j \psi \, \mathrm{dv} = \int_M 1_{\{u>0\}} f \psi \, \mathrm{dv}.$$

□

直接应用定理 3.1 和命题 4.1 可得以下结果

推论 4.3。设 (M, g) 是一个黎曼流形。若 $u \in L^1_{loc}(M)$ 满足 $\mathcal{L}u = \Delta u - \lambda u \geq 0$，其中 $\lambda \geq 0$，则 $u_+ \in L^1_{loc}(M)$ 是一个非负次调和分布，即 $\Delta u_+ \geq 0$。特别地，$u_+ \in L^\infty_{loc}(M)$，且对任意 $p \in (1, +\infty)$，$u_+^{p/2} \in W^{1,2}_{loc}(M)$。

注 4.4。也可以通过调整 [Bre84 的引理 A1] 和 [Pon16 的命题 69] 中的证明，在黎曼设置下证明推论 4.3，只需将其中使用的卷积逼近替换为定理 2.1 所提供的单调逼近。然而，对于一般的 $f \in L^1_{loc}$（即不是 λu 形式的），如命题 4.1 中的情形，这后一种策略似乎行不通。尽管特殊情形 $f = \lambda u$ 已足以满足本文的需要，我们仍决定陈述并证明一般形式的 Brezis-Kato 不等式，因为我们认为它有助于研究流形上的更一般偏微分方程。

一旦我们得到一个 Brezis-Kato 不等式，L^p-PP 性质便进入关于 L^p-次调和分布的刘维尔型定理的范畴。这将在下一节中说明

引理 4.5. 设 (M, g) 是任意黎曼流形。考虑关于次调和分布的如下 L^p-刘维尔性质，其中 $p \in (1, \infty)$:

$$(L - Sub_p) \qquad \begin{cases} \Delta u \geq 0 \ on \ M \\ u \geq 0 \ a.e. \ on \ M \\ u \in L^p(M), \end{cases} \implies u \equiv const \ a.e. \ on \ M.$$

Then

$$(L - Sub_p) \implies (L^p\text{–PP}).$$

证明。假设 $u \in L^p(M)$ 满足 $\Delta u \leq u$。根据命题 4.1，

$$\Delta(-u)_+ \geq (-u)_+ \geq 0 \text{ on } M,$$

即 $(-u)_+ \geq 0$ 是一个次调和分布。显然，$(-u)_+ \in L^p(M)$。由 $(L - Sub_p)$ 可知 $(-u)_+ = 0$ 在 M上几乎处处成立 $u \geq 0$ 在 M上几乎处处成立，因此证明了 $(L^p\text{–PP})$ 的有效性。□

5. Parabolicity、capacity and $(L^p\text{–PP})$ property

回顾一下，给定 $\Omega \subset M$ 在 M 中的一个连通区域，以及 $D \subset \Omega$ 中的一个紧集，对于 $1 \leq p < \infty$，D 在 Ω 中的 p-容量定义为 $\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) := \inf \int_\Omega |d\varphi|^p$，其中下确界取遍所有支集紧包含于 Ω 且在 D上满足 $\varphi \geq 1$ 的 Lipschitz 函数。此外，若对每个 $\Omega \supseteq D$都有 $\mathrm{Cap}_p(D,\Omega) = 0$，则称 D 为 p-极性集。最后，若存在一个内部非空的紧集 $D \subset M$，使得 $\mathrm{Cap}_p(D, M) = 0$，则称 M 为 p-抛物型。若 M 具有非空紧边界 $\partial M \neq \emptyset$，则称其为 M p-抛物型，当且仅当其黎曼双 $\mathcal{D}(M)$ 是 p-抛物型。特别地，这适用于相对于给定光滑紧域而言的流形的端

这些端按广义意义理解，即移除光滑紧集后得到的非紧分支。还要注意，任何带边界（或无边界）的紧流形对每个 $1 < q < +\infty$ 都是 p-抛物型的。

定理 5.1。设 $p \in (1, \infty)$。设 M 是一个具有有限个端 $E_1, \ldots\ldots, E_N$的开连通（不一定完备）流形。若每个端 E_j对于某个 q_j都是抛物的$\frac{2p}{p-1} < q_j \leq \infty$，则 $(L - Sub_p)$ 在 M上成立，因此特别地 M是 L^p-PP。

证明。设 U 是将 M 分离的紧集，使得 $M = U \cup (\cup_{j=1}^{N} E_j)$，并设 $u \in L^p(M)$ 是一个非负次调和函数。由于 $u \in L^{\infty}_{loc}$，我们有 $\|u\|_{L^\infty(U)} < \infty$。固定一个端 E_J，并定义新函数

$$u_J := \begin{cases} (u - \|u\|_{L^\infty(U)})_+, & \text{in } E_J, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

注意，u_J 也非负、次调和，且属于 $L^p(M)$。设 $\{M_k\}$ 是 M 的一个穷竭，即 $M_k \Subset M_{k+1}$ 是紧集且 $M = \cup_k M_k$，并且不妨设 $M_1 \supset U$。根据端 E_J 的 q_J-抛物性定义，我们可以找到一列光滑紧支撑截断函数 $\{\varphi_k\} = \{\varphi_{J,k}\}$，使得在 $M_k \cup E_J^C$ 上 $\varphi_k \equiv 1$，且 $\|\nabla \varphi_k\|_{L^{q_J}}(E_J) \to 0$，当 $k \to \infty$ 时。将 (3.1) 应用于 u_J，其中 $\varphi = \varphi_k$ 且 $2p/(p-s)$ $= q_J$，也就是说 $s = \frac{q_J - 2}{q_J} p$，于是对所有 k 都有:

$$\int_{\{\varphi_k \geq 1\}} |\nabla u_J^{s/2}|^2 \leq C \left(\int_{\mathrm{supp}(\nabla \phi_k)} u_J^p \right)^{s/p} \left(\int_M |\nabla \varphi_k|^{q_J} \right)^{\frac{2}{q_J}}, \tag{5.1}$$

令 $k \to \infty$ 趋于极限，可推出 u_J 在 E_J 上为常数，因此为零。特别地，^{pq_J}u 在 E_J 上有界，因此 $u \in L^{\overline{q_J - 2}}(E_J)$。

现在，由（3.1）可得

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)^2}{p^2} \int_{\{\varphi \geq 1\}} |\nabla u^{p/2}|^2 &\leq \int_M u^p |\nabla \varphi|^2 \\ &= \int_U u^p |\nabla \varphi|^2 + \sum_{j=1}^{N} \int_{E_j} u^p |\nabla \varphi|^2 \end{aligned}$$

对任意 $\varphi \in C_c^\infty(M)$。将 $\varphi = \varphi_k$ 代入后者，其中 $\{\varphi_k\}$ 是一族截断函数，满足在 M_k 上 $\varphi_k \equiv 1$，且对任意 $j = 1, \ldots\ldots, N$，$\|\nabla \varphi_k\|_{L^{q_j}(E_j)} \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时。因此，

$$\int_{\{\varphi_k \geq 1\}} |\nabla u^{p/2}|^2 \leq \frac{p^2}{(p-1)^2} \sum_{j=1}^{N} \left(\int_{E_j} u^{\frac{pq_j}{q_j - 2}} \right)^{(q_j - 2)/q_j} \left(\int_{E_j} |\nabla \varphi_k|^{q_j} \right)^{2/q_j} \tag{5.2}$$

当 $k \to \infty$ 时趋于 0。因此，u 为常数，而引理 4.5 完成了证明 f. □

这里指出前一定理的一些直接推论。首先，我们可以将整个流形的 ∞-抛物性解释为测地完备性；例如参见[PS14] 以及 [AMP21]。这意味着以下结论

推论 5.2。设 $p \in (1, \infty)$。设 (M, g) 是一个完备黎曼流形。那么$(L - Sub_p)$ 成立，因此特别地 M 是 L^p-PP。

注5.3。 从推论 5.2 的证明中可以清楚地看出，对于任意给定的完备黎曼流形以及任意 $p \in (1,\infty)$, 刘维尔性质（$L-Sub_p$）以更强的形式成立：

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 \text{ on } M \\ u \geq 0 \text{ a.e. on } M \\ u \in L^p_{loc}(M) \text{ and } \|u\|^p_{L^p(B_{2k}(o)\setminus B_k(o))} = o(k^2), \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad u \equiv c \text{ a.e. on } M.$$

因此，在这个比 $L^p(M)$ 更大的函数类中，保正性也成立。

注 5.4。 端点情形 $p = 1$ 和 $p = +\infty$ 必须排除。众所周知，对于这些 $L-Sub_p$值， p 式 (L^1) 不成立。具体而言，双曲空间支撑无穷多个有界（因而为正的）调和函数；而在另一端，P. Li 和 R. Schoen 在 $-\infty$ 曲率超二次衰减至 [LS84] 中构造了完备黎曼曲面上正的非恒定 L^p-调和函数（其体积有限）。尽管这些函数的存在并不能说明 [-PP 性质不成立，但 22]BM 中也给出了这一性质的反例。

同样，将定理 5.1 重述于最简单的情形，可得：

推论 5.5. 设 $p \in (1,\infty)$。设 M 是某个 $\frac{2p}{p-1} < q \leq \infty$ 的开（可能不完备） q-抛物流形。那么 M 是 L^p-PP。

第三个推论讨论形如 $(N \setminus K, h)$ 的流形，其中 (N,h) 是完备黎曼流形，而 K 是紧集。事实上， $N \setminus K$ 的 p-抛物性与 K 在 N 中的容量自然相关。

推论 5.6. 设 $p \in (1,\infty)$。设 N 是完备黎曼流形， $K \subset N$ 是紧集。假设对于某个 $q > \frac{2p}{p-1}$, K 是 q-极集。那么 $M = N \setminus K$ 是 L^p-PP。

¯证明。取一个光滑相对紧区域 $U \Subset N$，使得 $K \subset U$。注意，作为一个具有光滑边界的紧流形， U 是q-抛物的。移除内部的 q-极集¯不会影响空间的 q-抛物性。因此，开黎曼流形 $M = N \setminus K$ 的端 $E_0 = D \setminus K$ 仍然是 q-抛物的。另一方面，由于 N 完备，$N \setminus D$ 有有限多个无界连通分支 E_1、 $\cdots$、 E_k。它们各自都是 M 的完备端，因而是 ∞- 抛物的。直接应用定理 5.1 可得，M 是 L^p-PP。□

现在假设 $\dim_{\mathcal{H}}(K) < q < n - \frac{2p}{p-1}$。因此 $\mathcal{H}^q(K) = 0$。根据标准位势理论，这意味着 K 是 $(n-q)$-极性集；例如参见 [HKM93] 或 [Tro99，定理 35]。因此，我们得到推论 5.6的以下直接推论。

推论 5.7。设 $p \in (1,\infty)$，设 N 是一个 n 维完备黎曼流形，并设 K 是 N 的一个紧集，满足 $\dim_{\mathcal{H}}(K) < n - \frac{2p}{p-1}$。则 $N \setminus K$ 是 L^p-PP。

从推论 5.7 自然引出的一个问题是，在阈值情形 $\frac{2p}{p-1} = q$及低于阈值时会发生什么。在这种情况下，豪斯多夫余维 $\frac{2p}{p-1}$ 不足以保持（L^p–PP）性质，但一致闵可夫斯基控制可以做到这一点。我们首先证明后者，并在例 5.12 中给出一个豪斯多夫余维失效的例子。

命题 5.8。设 (N,h) 是一个完备黎曼流形，且 E 满足如下形式的一致闵可夫斯基型估计

$$\operatorname{vol}\left(B_r\left(E\right)\right) \leq C r^{\frac{2p}{p-1}} \qquad for\ some\ \ p>1\,. \tag{5.3}$$

该 $N \setminus \overline{E}$ 是一个满足$(L-Sub_p)$ 性质的开流形，因此也满足$(L^p\text{–PP})$ 性质。

注 5.9. 在命题 1.6 的假设下，特别有，所有定义在 L^2 上的调和函数$N \setminus \overline{E}$ 必然都是常数。在非常特殊的情形下，若 E 是一个点，这一结果最近已由 [HMW21，定理 8]证明。

注 5.10. 对于若干具有非整数豪斯多夫维数的重要集合，闵可夫斯基含量在相应维数尺度上受到控制（例如自相似分形集就是如此）。因此，在所有这些情形下，命题 5.8 也为推论 5.7 提供了更简单、更直接的证明。此外，递归地应用命题 5.8（的证明），还可以处理闵可夫斯基含量在相应维数上并非有限、但受到适当控制的集合 K 。例如，若 $K=\cup_{j=0}^{N} K_j$可分解为有限个递增紧集构成的并 $K_j \subset K_{j+1}$，且 K_0和 $K_{j+1} \setminus K_j$、 $j=0$、.....、 $N-1$ 具有有限的 $(n-\frac{2p}{p-1})$ 维闵可夫斯基含量，就会出现这种情况，如玩具示例 $K=\{0\} \cup \{1/j\}_{j\geq 1} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$所示。然而，存在一些紧集，在 K的每一点附近，其局部闵可夫斯基维数都大于豪斯多夫维数，因此它们满足 L^p-PP 性质，但无法通过命题 5.8 中引入的技巧推出这一性质。具有这一特征的例子包括自仿射集，[Bed84、McM84、Bar07]，；也就是说，粗略地说，它们是自相似类型的分形集 $\mathbb{R}^n$ ，其自相似因子随方向而变化。

命题 5.8 的证明直接由以下关于 L^p 函数的、可能是标准的可去奇点引理得出。

引理 5.11. 设 (N,h) 是一个完备黎曼流形，并设 E 满足如下形式的一致闵可夫斯基型估计

$$\operatorname{vol}\left(B_r\left(E\right)\right) \leq \mathscr{C} r^{\frac{2p}{p-1}} \qquad for\ some\ \ p>1 \ \ and\ all\ \ r\in(0;1]\,. \tag{5.4}$$

若 $u \in L^p(N \setminus E) = L^p(N)$，且 u 在 $N \setminus \overline{E}$ 上的分布拉普拉斯算子非负，则 u 在 N 上的分布拉普拉斯算子非负。

证明。注意，一致体积估计意味着 E 是有界集，并且这些估计在取闭包后仍成立，也就是说，$\operatorname{vol}(B_r(E)) = \operatorname{vol}\left(B_r\left(\overline{E}\right)\right)$。

设 ψ_k 是一列截断函数，满足 $\operatorname{supp}(\psi_k) \subseteq B_{2k^{-1}}(E)$，并且

- $\psi_k = 1$ 在 $B_{k^{-1}}(E)$ 上
- $|\nabla \psi_k|_\infty \leq ck$
- $\left|\nabla^2 \psi_k\right|_\infty \leq ck^2$。

例如，ψ_k 可以通过对来自 E 的（Lip）距离函数进行平滑化得到。再令 $\varphi \in C_c^\infty(N)$ 为任意非负测试函数。我们有如下分布恒等式

$$\int_N \varphi \Delta u = \int_N \varphi(1-\psi_k)\Delta u + \int_N \varphi \psi_k \Delta u\,. \tag{5.5}$$

由于 $\varphi(1-\psi_k) \in C_c^\infty(N \setminus \overline{E})$ 且其非负，根据假设，$\int_N \varphi(1-\psi_k)\Delta u \geq 0$。此外，我们可以估计（这里 $A_k = B_{2k-1}(E) \setminus B_{k-1}(E)$）：

$$\begin{aligned}(5.6)\qquad \left|\int_N \varphi\psi_k \Delta u\right| &\leq \int u\left[|\psi_k|\,|\Delta\varphi|_\infty + 2\,|\nabla\psi_k|\,|\nabla\varphi|_\infty + |\Delta\psi_k|\,|\varphi|_\infty\right] \leq \\ &\leq c\int u\left[|\psi_k| + |\nabla\psi_k| + |\Delta\psi_k|\right] \leq c\int_{B_{2k-1}(E)} u + c\int_{A_k} ku + k^2 u \leq \\ &\leq c\int_{B_{2k-1}(E)} u + c\left(\int_{A_k} u^p\right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(k^{2q}\mathrm{vol}\,(A_k)\right)^{\frac{1}{q}}}_{\leq \mathscr{C}} \leq c\left[\int_{B_{2k-1}(E)} u + \mathscr{C}\left(\int_{A_k} u^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\end{aligned}$$

其中 q 是 H¨older 指数 $q = \frac{p}{p-1}$。由于 $u \in L^p$，当 $k \to \infty$ 时 $\left|\int_N \varphi\psi_k\Delta u\right| \to 0$，由此得证。□

例 5.12。我们注意到，在阈值情形下，仅控制豪斯多夫维数是不够的。也就是说，存在一个紧致的 $K \subset \mathbb{R}^4$，使得 $\dim_{\mathcal{H}}(K) = 0$，但 $\mathbb{R}^4 \setminus K$ 不是 L^p-PP。

这样的 K 可以构造为广义康托集。设 $\{\alpha_j\}_{j=1}^\infty$ 是一个取值介于 0 和 1 之间的序列，并考虑通过从 $K_0 = [0,1]$ 开始，移除 K_0 中间的开 α_1 分之一来构造的广义康托集 C_α，依此类推。

定义 $C_\alpha = \cap_{j=0}^\infty K_j$ 和 $K = C_\alpha \times \{0\}_{\mathbb{R}^3} \subset \mathbb{R}^4$。我们选择 $\alpha_j = \frac{10^j-2}{10^j}$。[3] 显然，$\dim_{\mathcal{H}}(C_\alpha) = 0$，因为对于每个 $j \in \mathbb{N}$，它都小于 $\log_{10^j} 2 = j^{-1}\log_{10} 2$。现在，设 μ 是一个支集位于 K 上的博雷尔测度，使得对于 K_j的每个连通分支 I，都有 $\mu(\mathbb{R}^4) = \mu(K) = 1$ 且 $\mu(I \times \{0\}_{\mathbb{R}^3}) = 2^{-j}$。测度 μ 可按如下方式构造。令 $\tilde{\mathcal{H}}^{\log_3^2}$为限制在标准三分康托集 $C_{1/3}$上的归一化 $\log_3 2$ 维豪斯多夫测度，使得 $\tilde{\mathcal{H}}^{\log_3^2}(C_{1/3}) = 1$。也就是说，$C_{1/3} = C_{\alpha'}$，其中 $\alpha'_j = 1/3$ 对所有 j都成立；我们将 $C_{1/3}$构造中的迭代步骤命名为 K'_j。考虑一个连续递增双射函数 $f\colon [0,1] \to [0,1]$，按如下方式递归构造：对于每个 $j \in \mathbb{N}$，f 将 $K'_{j+1} \setminus K'_j$ 映射到 $K_{j+1} \setminus K_j$。定义 $\mu|_{C_\alpha}$ 为 $\tilde{\mathcal{H}}^{\log_3^2}$ 经由 f 得到的推前测度，并将其延拓为零，从而在整个 $\mathbb{R}^4$上得到一个测度 μ。

简单计算可得，对于 K_j 的每个连通分支 I，都有 $\mathrm{diam}(I) = \prod_{k=1}^j 10^{-k} = 10^{-\frac{j^2+j}{2}}$，而任意两个这样的连通分支之间的距离至少大 8 倍。因此，对每个 $x \in \mathbb{R}^4$，只要 $\epsilon \leq 4 \cdot 10^{-\frac{j^2+j}{2}}$，就有 $\mu(B_\epsilon(x)) \leq 2^{-j}$，即 $2\log_{10}(1/\epsilon) \geq j^2 + j - 2\log_{10}(4) \geq j^2$，于是

$$\mu(B_\epsilon(x)) \leq 2^{-\sqrt{\log_{10}(1/\epsilon^2)}} \leq (\log^2(1/\epsilon))^{-2}$$

当 ϵ 足够小时。应用引理 6.3 的一个改进版本（见注 6.4），我们推得 $\mathbb{R}^4 \setminus K$ 不是 L^2-PP。

注意，在这个例子中，$\mathcal{H}^0(K) = \infty$。我们不知道是否存在一些 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，其 $(n - 2p/(p-1))$ 维豪斯多夫测度有限，但并非L^p-PP。

[3]所得集合是一个完美集，由所有满足以下条件的 x 中的数构成：在 x 的十进制展开中，第 2^j 位到第（$2^{j+1}-1$）位之间的数字要么全为 0，要么全为 9。

本节最后，我们想指出，如何调整引理的证明5.11 ，从而直接推广 [GP19，定理 5] ，使其适用于移除一个小尺寸集合的情形。

命题 5.13. 设 (N,h) 是一个完备黎曼流形。固定 $p>1$ ，并令 E 满足如下形式的一致闵可夫斯基型估计

$$\mathrm{vol}\left(B_r\left(E\right)\right)\leq \mathscr{C}r^q \qquad \textit{for some}\ \ q>p\ \ \textit{and all}\ \ r\in(0;1]\,. \tag{5.7}$$

那么，空间 $C_c^\infty(N\setminus E)$ 在空间中稠密

$$\widetilde{W}^{2,p}(N\setminus E):=\{u\in L^p(N\setminus E)\ :\ \Delta u\in L^p(N\setminus E)\}$$

关于其典范范数 $\|f\|^p_{\widetilde{W}^{2,\ p}(N\setminus E)}=\|f\|^p_{L^p(N\setminus E)}+\|\Delta f\|^p_{L^p(N\setminus E)}$。

证明。设 $f\in\widetilde{W}^{2,p}(N\setminus E)$。于是 $f\in L^p(N)$，由引理 5.11 的证明可知， f 在 N 上的分布拉普拉斯算子（仍记为 Δf ）属于 $L^p(N)$。根据 O. Milatovic 的一个结果，存在一列函数 η_j ，属于 $C_c^\infty(N)$，当 $j\to\infty$ 时在 $\widetilde{W}^{2,p}(N)$ 中收敛于 f；参见 [GP19，定理 5]。固定 j，并令 ψ_k 为引理 5.11 的证明中引入的截断函数。为完成证明，只需证明当 $k\to\infty$ 时，$\widetilde{\psi_k\eta_j}$ 在 $W^{2,p}(N\setminus E)$ 中收敛于 η_j。为此，计算

$$\begin{aligned}\|\eta_j-\psi_k\eta_j\|_{\widetilde{W}^{2,p}(N\setminus E)}&=\|\eta_j(1-\psi_k)\|_{L^p(N\setminus E)}+\|(1-\psi_k)\Delta\eta_j\|_{L^p(N\setminus E)}\\&\quad+\|\eta_j\Delta\psi_k\|_{L^p(N\setminus E)}+2\||\nabla\eta_j||\nabla\psi_k|\|_{L^p(N\setminus E)}\end{aligned}$$

右侧的前两项由控制收敛定理可知为零。此外，

$$\begin{aligned}\|\eta_j\Delta\psi_k\|_{L^p(N\setminus E)}&\leq\|\eta_j\|_{L^\infty}\|\Delta\psi_k\|_{L^p(N\setminus E)}\leq c\|\eta_j\|_{L^\infty}k^{2-2q/p}\to 0,\\ \||\nabla\eta_j||\nabla\psi_k|\|_{L^p(N\setminus E)}&\leq\||\nabla\eta_j|\|_{L^\infty}\||\nabla\psi_k|\|_{L^p(N\setminus E)}\leq c\||\nabla\eta_j|\|_{L^\infty}k^{1-2q/p}\to 0,\end{aligned}$$

当 $k\to\infty$ 时。

□

6. Removing sets of large size

正如人们所料，推论 5.7 在集合 K 过大时并不成立。只需考察 $\Delta f=\mu$的解，就能轻易构造出反例，其中 μ 是限制在 K上的相应维数豪斯多夫测度。

例 6.1。 作为一个典型例子，考虑 $\mathbb{R}^n$ ，其中 $n\geq 3$ ，以及一个子集 K ，其形式为 $K=P\cap\overline{B_1(0)}$，其中 P是一个穿过原点的 k维平面。若聚焦于流形 $\mathbb{R}^n\setminus K$，根据命题 5.8，只要 L^p–PP）和（$L-Sub_p$）性质就成立。 $k\leq n-\frac{2p}{p-1}$。

在其他情况下，我们可以考虑测度 $\mu_K=\mathcal{H}^k|_K$，并考虑其基本解

$$\Delta u_1=-\mu_K\,,\qquad -\Delta u_2+u_2=\mu_K\,. \tag{6.1}$$

这些解 u_1 和 u_2 可以很容易地用格林函数 $|x-y|^{2-n}$和贝塞尔势 $J_2(x-y)$表示：

$$u_1(x)=\int_{\mathbb{R}^n}d\mu_K(y)\ |x-y|^{2-n}\,,\qquad u_2(x)=\int_{\mathbb{R}^n}d\mu_K(y)\ J_2(x-y) \tag{6.2}$$

根据 [Ada71] （另见 [Pon16，引理 10。12]），函数 u_1 和 u_2属于 $L^p(\mathbb{R}^n \setminus K) = L^p(\mathbb{R}^n)$，并且显然是以下方程的解

$$\Delta u_1 = 0 \qquad \text{on } \mathbb{R}^n \setminus K \tag{6.3}$$

$$\Delta u_2 - u_2 = 0 \qquad \text{on } \mathbb{R}^n \setminus K \tag{6.4}$$

然而， u_1 不是常数，且 u_2 不是非负的（例如 $u_2(x) \to -\infty$ 作为$x \to 0$）。因此， u_1 是()在 $\mathbb{R}^n \setminus K$上的一个反例，同样地， u_2 是(PP)在 $\mathbb{R}^n \setminus K$上的一个反例。

一般而言，我们有如下结论。

命题 6.2。设(N, h)是一个维数为 $n \geq 2$的完备黎曼流形，且$\emptyset \neq K \Subset N$的豪斯多夫维数为 k。若$k > n - \frac{2p}{p-1}$对某个 $p \in (1, \infty)$成立，则开流形$(N \setminus K, h)$既不具有$(L - Sub_p)$ 性质，也不具有$(L^p\text{–PP})$ 性质。

证明。这个命题的证明相当标准，遵循前一个例子中提出的思路。

首先，我们指出，如果 $n = 2$，那么结论显然成立，因为在这种情况下，对于固定的 $y_0 \in K$ 贝塞尔势 $J_2(x, y_0)$ 属于 L^p，因此可构成 $(L^p\text{–PP})$ 性质的反例。类似地，二维流形的格林函数属于 L^p，对所有 $p \in (1, \infty)$ 均成立，因此可用来构造 $(L - Sub_p)$ 性质的反例。

此外，若 $k \geq n-2$，则我们可以用一个豪斯多夫维数为 $k' \in (n - \frac{2p}{p-1}, n-2)$ 的子集 $K' \subset K$ 替换 K。若 $N \setminus K'$ 不具有 L^p-PP 性质，那么显然 $N \setminus K$ 也不具有该性质。因此，接下来我们可以假设

$$n \geq 3 \qquad \text{and} \qquad n - 2 > k > n - \frac{2p}{p-1}\,. \tag{6.5}$$

由于证明中涉及的所有思想都是局部的，假设 $K \Subset \Omega' \Subset \Omega$ 会更方便，其中 Ω 是一个相对紧的坐标邻域，且具有光滑边界。因此，我们可以使用 Δ 和 $\Delta - 1$ 的基本解，即 Ω 上的格林函数 $G(x, y)$（满足狄利克雷边界条件）以及 Ω 上的贝塞尔势 $J_2(x, y)$（满足狄利克雷边界条件）。为方便起见，我们选择符号，使得$G(x, y) \sim +cd(x, y)^{2-n}$，类似地 $J_2(x, y) \sim +cd(x, y)^{2-n}$，即

$$\Delta G(x, y) = -\delta_{x-y}\,, \qquad \Delta J_2(x, y) - J_2(x, y) = -\delta_{x=y}\,. \tag{6.6}$$

回顾一下，贝塞尔势例如可以通过热核定义（参见[Str83，式 4。2]）：

$$J_2(x, y) = \int_0^\infty dt\; e^{-t} H_t(x, y)\,. \tag{6.7}$$

我们回顾一下它与格林函数的比较：

$$G(x, y) = \int_0^\infty dt H_t(x, y)\,. \tag{6.8}$$

J_2 对几乎所有 x, y 都绝对收敛到一个正函数，该函数关于 x, y 对称。容易看出，与格林函数类似，对于所有 $x, y \in \Omega'$

$$cd(x, y)^{2-n} \leq J_2(x, y) \leq Cd(x, y)^{2-n}\,. \tag{6.9}$$

注意， 第二个不等式在整个 N上也成立，参见例如 [LSW63，定理 7.1].

测度估计。若 $\dim(K) > k$，则 K的 k维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^k$ 为无穷大。我们想证明，存在一个子集 $S \subset K$ 和一个（可能很大的）常数$C > 1$，使得

$$\begin{aligned} &\forall r,\, x: && \mathcal{H}^k(B_r(x) \cap S) \le C r^k, \\ &\exists x \;\; s.t. \;\; && \limsup_{r\to 0} r^{-k}\mathcal{H}^k(B_r(x) \cap S) \ge C^{-1} \end{aligned} \tag{6.10}$$

根据标准 [Mat95，定理 819] 应用于 K，存在一个紧子集 $S_1 \subset K$，其 k维豪斯多夫测度为正且有限。考虑测度 $\mathcal{H}^k|_{S_1}$的上密度，即极限

$$\Theta^{*,k}(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^k(S_1 \cap B_r(x))}{\omega_k r^k}, \tag{6.11}$$

根据 [Mat95，定理 62] 可知，对于 $\mathcal{H}^k$几乎所有的 $x \in S_1$

$$2^{-k} \le \Theta^{*,k}(x) \le 1 \tag{6.12}$$

且 $\Theta^{*,\,k}(x) = 0$ 对于 $\mathcal{H}^k$-几乎所有的 $x \notin S_1$。

令 $S_2 \subseteq S_1$ 为满足（6.12）的子集，并令 $r_u: S_2 \to (0, \infty)$ 定义为

$$r_u(x) = \sup\left\{ r > 0 \;\; s.t. \;\; \forall s \le r: \;\; \mathcal{H}^k(S \cap B_s(x)) \le 7\omega_k s^k \right\}. \tag{6.13}$$

由于对所有 $x \in S_2$，$r_u(x) > 0$，因此由下式定义的可测子集 $S_i \subset S_2$

$$\tilde{S}_i = \left\{ x \in S_2 \;\; s.t. \;\; r_u(x) > i^{-1} \right\} \tag{6.14}$$

构成 $\hat{}$ e 一个收敛到 S_2 的单调序列，因此存在某个 i，使得 t

$$\mathcal{H}^k(\tilde{S}_{\hat{i}}) > \mathcal{H}^k(S_1)/2 > 0. \tag{6.15}$$

现在，若考虑子集 $S = S_{\hat{i}}$，则对所有 $x \in B_{\hat{i}^{-1}}(S)$，有：

$$\mathcal{H}^k(B_r(x) \cap S) \le \begin{cases} 7\omega_k (2r)^k & \text{if } \; r \le \hat{i}^{-1}/2, \\ \mathcal{H}^k(S_1) < \infty & \text{if } \; r \ge \hat{i}^{-1}/2. \end{cases} \tag{6.16}$$

因此我们可以得出结论，存在一个常数 C（依赖于 $\hat{i}$），使得 $\mathcal{H}^k(B_r(x) \cap S) \le C r^k$对所有 x，r。此外，由于 $\mathcal{H}^k(S) > 0$，根据 [Mat95，定理 6.2]，$\Theta^{*,\,k}(S, x) > 2^{-k}$对 $\mathcal{H}^k$-几乎所有 $x \in S$成立，因此存在一点 $\bar{x} \in S$，使得

$$\limsup_{r\to 0} r^{-k}\mathcal{H}^k(B_r(\bar{x}) \cap S) \ge 2^{-k}. \tag{6.17}$$

由此，我们证明了 (6.10) 中所有所需的性质。为方便起见，从现在起我们采用以下记号

$$\mu_K(E) := \mathcal{H}^k(S \cap E) \tag{6.18}$$

表示满足条件（6.10）的测度。

关于 $L - Sub_p$ 和 L^p–PP 性质的反例。 我们将证明，以下方程的基本解

$$\Delta u_1 = -\mu_K, \qquad -\Delta u_2 + u_2 = -\mu_K. \tag{6.19}$$

满足狄利克雷边界条件时，$u_1, u_2 \in L^p$, $u_1(x)$ 为正但非常数，而$u_2(x)$ 没有下界。

下界。首先，我们注意到，如果 x 是 μ_K 的密度点，即如果 $\limsup_{r\to 0} r^{-k}\mu(B_r(x)) \geq c > 0$，那么

$$\limsup_{y\to x} u_1(y) = \limsup_{y\to x} \int G(z,y)d\mu_K(z) \geq \limsup_{y\to x} \int_{B_r(x)} G(z,y)d\mu_K(z)\,. \tag{6.20}$$

鉴于存在无穷多个 radia $r_i \to 0$，使得 $\mu_K(B_{r_i}(x)) \geq cr_i^k$，我们有：若 $d(x,y) \sim r_i$：

$$u_1(x) \geq cr_i^{2-n} r_i^k \to +\infty\,, \tag{6.21}$$

其中我们 使用了（6.5）。类似地，我们可以得到，在密度点 x 附近有

$$\limsup_{y\to x} u_2(x) = -\infty\,. \tag{6.22}$$

证明中最复杂的部分是 L^p 估计；不过，经过对黎曼设置的简单调整，这些估计见于 [Ada71](另见 [Pon16，引理 10。12]）。为方便读者，我们在下述引理中给出证明，该引理将完成本命题的证明。□

引理 6.3. 设 $0 < s < n-2$ 和 μ 是一个正测度，其支集位于 $B_1(P)$ 中，其中 P 为某个值，并假设

$$\mu(B_r(x)) \leq Cr^s\,, \qquad \forall x, r\,. \tag{6.23}$$

此外，假设对所有 $x \in \Omega'$ 和 $r \leq 2$，$\mathrm{Vol}(B_r(x)) \leq Cr^n$。那么

$$\int G(x,y)d\mu(y) \in L^p\,, \qquad p \in \left(\frac{n}{n-2}, \frac{n-s}{n-2-s}\right)\,, \tag{6.24}$$

$$\int J_2(x,y)d\mu(y) \in L^p\,, \qquad p \in \left(\frac{n}{n-2}, \frac{n-s}{n-2-s}\right)\,. \tag{6.25}$$

证明。我们考虑格林函数的情形，因为贝塞尔势估计的证明完全类似。我们有

$$\int G(x,y)d\mu(y) \leq C\int d(x,y)^{2-n}d\mu(y) = C\int_0^\infty dt\ \mu\left\{d^{2-n} > r\right\} = C\int_0^\infty dr\ \mu\left\{d < r^{\frac{1}{2-n}}\right\} =$$
$$= C(n-2)\int_0^\infty d\hat{r}\ \hat{r}^{1-n}\ \mu\{d < \hat{r}\} = C\int_0^\infty \frac{dr}{r}\frac{1}{r^{n-2}}\mu(B_r(x))\,. \tag{6.26}$$

令 $1 < q < \infty$ 和 q' 为其共轭指数。根据闵可夫斯基不等式（连续形式），

$$\left\|\int G(x,y)d\mu(y)\right\|_{q'} \leq C\int_0^\infty \frac{dr}{r^{n-1}}\left\|\mu(B_r(x))\right\|_{L^{q'}(x)}\,. \tag{6.27}$$

我们很容易估计得

$$(\mu(B_r(x)))^{\frac{q}{q-1}} = (\mu(B_r(x)))^{\frac{1}{q-1}}\mu(B_r(x)) \leq \min\left(Cr^s,\ \mu(M)\right)^{\frac{1}{q-1}}\mu(B_r(x))\,. \tag{6.28}$$

还请注意，

$$\int_M dx\ \mu(B_r(x)) = \int_M dx\ \int_{B_r(x)} d\mu(y) = \int_M d\mu(y)\int_{B_r(y)} dy \leq Cr^n\mu(M)\,. \tag{6.29}$$

将这两者结合起来，我们得到

$$\|\mu\|_{q'}^{q'} = \int_M dx\ \mu\left(B_r\left(x\right)\right)^{\frac{q}{q-1}} \leq \min\left(Cr^s,\ \mu(M)\right)^{\frac{1}{q-1}} \int_M \mu\left(B_r\left(x\right)\right) \leq \tag{6.30}$$

$$\leq C\min\left(C\mu(M)r^{\frac{s}{q-1}+n},\ \mu(M)^{q'}r^n\right),$$

$$\|\mu\|_{q'} \leq C\min\left(C\mu(M)^{\frac{q-1}{q}}r^{\frac{s}{q}+\frac{n(q-1)}{q}},\ \mu(M)r^{\frac{n(q-1)}{q}}\right)$$

因此，如果

$$2q-n<0\,,\qquad s+2q-n>0\,, \tag{6.31}$$

我们得到 $\forall\kappa>0$:

$$\left\|\int G(x,y)d\mu(y)\right\|_{q'} \leq C\mu(M)^{\frac{q-1}{q}}\int_0^\kappa r^{\frac{s-n}{q}+1} + C\mu(M)\int_\kappa^\infty r^{1-\frac{n}{q}} = \tag{6.32}$$

$$= C\mu(M)^{\frac{q-1}{q}}\int_0^\kappa r^{\frac{s+q-n}{q}} + C\mu(M)\int_\kappa^\infty r^{\frac{q-n}{q}} = C\mu(M)^{\frac{q-1}{q}}\kappa^{\frac{s+2q-n}{q}} + C\mu(M)\kappa^{\frac{2q-n}{q}}$$

通过选择“最佳”的 k，即使最后一个表达式最小的 k（该表达式为 $k=c\mu(M)^{\frac{1}{s}}$），我们得到

$$\left\|\int G(x,y)d\mu(y)\right\|_{q'} \leq C\mu(M)^{\frac{q-1}{q}}\kappa^{\frac{s+2q-n}{q}} + C\mu(M)\kappa^{\frac{2q-n}{q}} = C\mu(M)^{1-\frac{n-2q}{sq}}\,. \tag{6.33}$$

选择 $q'=p$，即可得到结果。注意，由于 q必须满足（6.31），即 $q\in\left(\frac{n-s}{2},\ \frac{n}{2}\right)$我们有 $p\in\left(\frac{n}{n-2},\frac{n-s}{n-s-2}\right)$。

还要注意，若 $q>\frac{n-s}{2}$，则指数为 $1-\frac{n-2q}{sq}>0$。 □

注 6.4。 请注意，引理 6.3 在以下情况下仍然成立：对于 $p=\frac{n-s}{n-2-s}$，若用更强的条件 6.23)取代条件(

$$\mu(B_r\left(x\right)) \leq Cr^s(1+|\log(r)|)^{-2}\,,\qquad \forall x,r,\quad 0\leq s<n-2\,. \tag{6.34}$$

事实上，在此假设下，可以在($\kappa=\infty$ 6.32)中取

7. Essential self-adjointness and L^p-operator cores for Schrödingeroperators

该 L^p-PP 性质首次以一种略为隐含的形式出现在具有开创意义的论文[Kat72] 中，T. Kato 在文中探讨了欧几里得空间中具有奇异势的薛¨定谔算子的自伴性问题。后来，人们系统地研究了该性质在黎曼流形上的有效性，旨在将 Kato 的结果推广到向量丛上具有奇异势的协变薛¨定谔算子；例如参见 [BMS02、G¨un16] 及其中的参考文献。更一般地，薛 L^p 定谔算子谱理论中的一个基本问题，是要弄清势和底流形需满足哪些条件，才能使光滑紧支撑函数空间成为该算子的¨核心，也就是说，该空间在算子的极大实现的定义域中稠密。同样，在欧几里得空间中，这是 Kato 的经典结果（见 L^p Kat [）；在黎曼情形下（假设具有有界几何），参见86]Mil[；对于具有下有界里奇曲率的测地完备流形，参见06], GP19，附录 A]。

在这一框架下考察时，我们论文中的结果可用于证明一类定义在可能不完备流形上的薛¨定谔算子的谱性质 L^p。稍后我们将看到，这些结果甚至对拉普拉斯–贝尔特拉米算子也具有参考价值。

假设 $V \in L^p_{loc}(M)$ 和 $V \geq 0$，我们将 $(\Delta - V)_{\min,\, p}$ 定义为 $(\Delta - V)|_{C^\infty_c(M)}$ 在 $L^p(M)$ 中的闭包。此外，$(\Delta - V)_{\max,\, p}$ 定义为

$$(\Delta - V)_{\max,p} u := (\Delta - V)u, \quad \forall u \in \{w \in L^p(M) : Vw \in L^1_{loc}(M) \text{ and } (\Delta - V)w \in L^p(M)\}.$$

命题 7.1。设 M 满足命题 *1.5* 或命题*1.6*的假设。设 $p \in (1, +\infty)$， $V \geq 0$ 以及 $V \in L^p_{loc}(M)$。

(a) 则算子 $(\Delta - V)_{\min,\, p}$ 在 $L^p(M)$ 中生成一个压缩半群。(b) 此外，$(\Delta - V)_{\min,\, p} = (\Delta - V)_{\max,\, p}$ 换言之， $C^\infty_c(M)$ 是 $(\Delta - V)_{\max,\, p}$的算子核。(c) 特别地，若 $p = 2$，则算子 $\Delta - V$在 $C^\infty_c(M)$ 上本质自伴。

证明。 (c) 由 [G¨un16、命题 2.9 (a)] 以及 L^2-PP 性质（命题 1.5 或上文的命题 1.6 ）可得。

(a) 由 [G¨un16、命题 2.9 (b)] 以及 L^p-PP 性质（命题 1.5或上文的命题 1.6 ）可得。

(b) 注意到，(a) 与 $V \equiv 0$ 告诉我们，$\Delta_{\min}$ 生成了 $L^q(M)$ 中的压缩半群，其中 q 是 p 的 H¨older 共轭。现在，我们可以重复证明 [GP19, Theorem 5] 中的论证，以证明 $\Delta_{\min,\, p} = \Delta_{\max,p}$。在确立了 (a)，并且可以使用 $\Delta_{\min,p} = \Delta_{\max,p}$ 之后，我们只需记住命题 1.5 或命题 1.6 的 L^p-PP 性质，并注意到 [Mil06] 第 2 节和第 3 节中的论证适用于我们的情形。这就证明了性质 (b)。□

与现有文献作一番简要比较，有助于明确我们的结果定位并凸显其新颖之处。

在[CdV82], 中，证明了挖去一点的流形上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的本质自伴性；在 [Mas99] 中，研究则扩展到形如 $M = N \setminus K$ 的不完备黎曼流形，其中删去集 K 是余维大于 3 的光滑闭子流形 K 。在最新的[HMS22] 中（另见 [HKM17]），研究了奇异删去集 K 的情形（在度量测度空间的一般框架下）。作者证明，对于满足 $\dim_H(K) < n - 2p$ 的闭集（可能非紧） K ，空间$C^\infty_c(M)$ 是 L^p拉普拉斯算子的算子核；因此，当 $p = 2$ 时，拉普拉斯算子是本质自伴的。他们还证明，如果奇异集 K 的黎曼测度为零且豪斯多夫维数 $\dim_H(K) > n - 2p$，这一性质便不成立。通过在豪斯多夫测度中适当地加入对数修正，临界情形 $n - 2p$ 也纳入了这一框架。因此，从相当精确的意义上说，我们的结果补充了 [HMS22]中的结果。事实上，对于固定维数，该文证明了当 p取较小值时拉普拉斯算子的 L^p算子核性质，而我们则能够处理 $p \geq 2$取较大值的情形。还应指出，将[HMS22] 与我们的命题 7.1 结合起来可知，正如某种程度上所预期的那样， L^p正性保持与 L^p拉普拉斯算子的算子核性质是两个不同的概念。

在另一个相关但不同的方向上，在 [Mas99 中， GM13] 作者研究了 Gaffney 拉普拉斯算子 Δ_G 的谱性质： $W^{1,\, 2}(M) \to L^2(M)$ 在不完备流形上，依据抛物性和随机完备性等概率性质，以及与被移除部分的闵可夫斯基含量相关的条件，得到了该算子自伴的条件；在某种程度上，这与我们的命题 1.6 的思路相似。

在薛定谔算子¨的背景下，在我们对 V 的假设下且当 $p \neq 2$时，命题 7.1 即使在 M 测地完备的情形下也是新的。事实上，注意到，对于测地完备流形，性质 (a) 和 (b) 也已在 [Mil19], 中得到，但其假设更为严格： $0 \leq V \in L^{\infty}_{loc}(M)$。当 M 测地完备时，命题 7.1 (iii) 属于（各种）已知的自伴性结果；例如参见 [GP13], 的主要结果，其中作者允许 V 的负部在 M上属于 Kato 类。

测地不完备流形上的薛定谔算子¨也在 [MT16]中得到了研究，作者不对 M的几何 V作任何假设，但要求势函数在 M的柯西边界附近具有受控的行为。

8. Acknowledgments

我们谨向 Andrea Bonfiglioli 和 Ermanno Lanconelli 致谢，感谢他们澄清了其论文 [BL13] 中的一些问题；也感谢 Peter Sj¨ogren 与我们分享了关于次调和函数的 Brelot-Herv´e 理论及光滑逼近过程的一些有益意见。我们还感谢 Jun Masamune 提供相关参考文献 [HKM17、HMS22]，并感谢 Ognien Milatovic 仔细阅读论文初稿，并提出多项建议，改进了论文的表达以及第7节的结果。最后，我们非常感谢 Batu G¨uneysu 向我们指出了 BMS 猜想，并在过去几年间就这一主题与我们进行了多次富有成效的讨论。

部分经费由 INdAM-GNAMPA 支持。

References

[Ada71] D. R. Adams, *Ann. Scuola Norm.* 平移不变算子所 *Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **25** 1971 203 217 287301 产生势的迹, ( ), – . MR . [Anc09] A. Ancona, 椭圆算子、共法向导数与函数正部, *J. Funct. Anal.* **257** 第7期 (2009), 2124–2158, 附有 Ha¨ım Brezis 撰写的附录。https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.12.019。[AMP 21] D. a. J. Araújo, L. Mari和 L. F. Pessoa, 通过无穷拉普拉斯算子的位势理论判定 Finsler 流形的完备性, *J. Differential Equations* **281** (2021), 550–587. MR 4216961. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.005. [Aub 82] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* **252**, Springer-Verlag, 纽约, 1982. MR 681859. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5734-9. [Bar07] K. Barański, *Adv.* 若干平面几何构 *Math.* **210** 1 2007 215 245 2298824 10 1016 2006 06 005 造之极限集的豪斯多夫维数，第( )期 ( ), – . MR . https://doi.org/ . /j.aim. . . . [Bed84] T. Bedford, *Crinkly curves, Markov partitions and dimension*, 博士论文，华威大学，考文垂，1984。[BS18] D. Bianchi 和 A. G. Setti, 流形上的拉普拉斯截断函数、孔隙介质与快速扩散及其他应用， *Calc. Var. Partial Differential Equations* **57** 第1期 (2018), 文章4, 33. https://doi.org/10.1007/s00526-017-1267-9. [BM22] A. Bisterzo 和 L. Marini, L^{∞}保正性与随机完备性, *Potential Anal.* (2022). https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11118-022-10041-w. [BL 13] A. Bonfiglioli 和 E. Lanconelli *J. Eur.* , 次黎曼背景下 *Math. Soc. (JEMS)* **15** 2 2013 387 441 3017042 10 4171 364 的次调和函数，第( )期 ( ), – . MR . https://doi.org/ . /JEMS/ . [BMS02] M. Braverman, O. Milatovich和 M. Shubin, 流形上薛定谔型算子的本质自伴性， *Uspekhi Mat. Nauk* **57** 第4期(346) (2002), 3–58. https://doi.org/10.1070/RM2002v057n04ABEH000532. [Bre84] H. Brezis, R^N 中的半线性方程：无穷远处无条件， *Appl. Math. Optim.* **12** 第3期 (1984), 271–282. MR 768633. https://doi.org/10.1007/BF01449045.

[DL08] C. De Lellis, *Rectifiable sets densities and tangent measures* *Zurich Lectures in Ad-* , , , 欧洲数 *vanced Mathematics* ¨ 2008 2388959 学会 (EMS), 苏黎世, . MR . https://doi.org/10.4171/044. [Fug92] B. Fuglede, 与 ∂ *Po-* -次调和函 *tential Anal.* **1** 4 1992 355 371 1245891 10 1007 00301788 数相关的 Riesz 电荷的一些性质，第( )期 ( ), – . MR . https://doi.org/ . /BF . [Gri99] A. Grigor'yan, 黎曼流形上布朗运动常返性与非爆炸性的分析及几何背景， *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **36** 第2期 (1999), 135–249. MR 1659871. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-99-00776-4. [GM13] A. Grigor'yan 和 J. Masamune, 以格林公式刻画流形的抛物性与随机完备性， *J. Math. Pures Appl. (9)* **100** 第5期 (2013), 607–632. MR 3115827. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2013.01.015. [G¨un16] B. Güneysu, 拉普拉斯截断函数序列， *J. Geom. Anal.* **26** 第1期 (2016), 171–184. https://doi.org/10.1007/s12220-014-9543-9. [G¨un 17] B. Güneysu, BMS猜想，载于 *Ulmer Seminare*, 20, 2017，预印本见 https://arxiv.org/pdf/1709.07463.pdf，第97–101页。[G17] B. Güneysu, *Covariant Schrödinger semigroups on Riemannian manifolds* *Oper-* , , *ator Theory: Advances and Applications* **264** ¨ 2017 Birkhauser/Springer, Cham, . https://doi.org/10.1007/978-3-319-68903-6. [GP19] B. Güneysu 和 S. Pigola, L^p-插值不等式与全局 Sobolev 正则性结果，*Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **198** 第1期 (2019), 83–96，附有 Ognjen Milatovic 撰写的附录。MR 3918620. https://doi.org/10.1007/s10231-018-0763-7. [GPSV] B. Güneysu, S. Pigola, P. Stollmann和 G. Veronelli，局部平滑空间上的次调和性新概念，以及 Braverman、Milatovic、Shubin 的一个猜想， *Preprint 2022*. [GP13] B. Güneysu 和 O. Post，路径积分与非紧流形上微分算子的本质自伴性， *Math. Z.* **275** 第1-2期 (2013), 331–348. MR 3101810. https://doi.org/10.1007/s00209-012-1137-2. [HKM93] J. Heinonen, T. Kilpeläinen和 O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate ellipticequations*, *Oxford Mathematical Monographs*，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1993，牛津科学出版物。MR 1207810. [Her62] R.-M. Hervé，关于上调和函数与位势理论的公理化研究， *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **12** (1962), 415–571. MR 139756. 可见 http://www.numdam.org.unimib.idm.oclc.org/item?id=AIF_1962__12__415_0. [HKM17] M. Hinz, S. Kang和 J. Masamune，本质自伴性与奇点可去性的概率刻画， *Mat. Fiz. Kompyut. Model.* 第3期(40) (2017), 148–162. MR 3706135. https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.11. [HMS22] M. Hinz, J. Masamune和 K. Suzuki，流形与度量测度空间上的可去集及 L^p-唯一性，2022。 https://doi.org/10.48550/ARXIV.2204.01378. [HMW21] B. Hua, J. Masamune和 R. K. Wojciechowski, 本质自伴性与 L^2-刘维尔性质， *J. Fourier Anal. Appl.* **27** 第2期 (2021), 论文编号26, 27. MR 4231682. https://doi.org/10.1007/s00041-021-09833-2. [Kat72] T. Kato，含奇异势的薛定谔算子， *Israel J. Math.* **13** (1972), 135–148 (1973). https://doi.org/10.1007/BF02760233. [Kat86] T. Kato，含奇异势的薛定谔算子 K 理论，载于 , , North-Holland, 阿姆斯特丹, 1986, 第63–78页。MR 859719. [LS84] P. Li 和 R. Schoen, 黎曼流形上次调和函数的平均值性质， L^p 第3-4期 (1984), 279–301. https://doi.org/10.1007/BF02392380. [LSW63] W. Littman, G. Stampacchia和 H. F. Weinberger，不连续系数椭圆方程的正则点， *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3)* **17** (1963), 43–77. [MRS22] L. Mari, M. Rigoli和 A. G. Setti, 关于由 p-拉普拉斯逼近的 $1/H$-流：利用 Ricci 曲率下界下的伪距离获得新估计， *Amer. J. Math.* **144** 第3期 (2022), 779–849. MR 4436145. https://doi.org/10.1353/ajm.2022.0016. [MV21] L. Marini 和 G. Veronelli, *Some functional properties on Cartan-Hadamard manifolds of very* *negative curvature* 2105 09024 2021 ，预印本 见 https://arxiv.org/pdf/ . .pdf, .

[Mas99] J. Masamune，分形边界黎曼流形上拉普拉斯算子的本质自伴性， *Comm. Partial Differential Equations* **24** 第3–4期（1999年），749–757。MR 1683058。https://doi.org/10.1080/03605309908821442。[Mat95] P. Mattila，
Geometry of sets and measures in Euclidean spaces Cambridge Studies in Ad- ，，剑桥大学出版社，
vanced Mathematics **44**
剑桥，1995年，分形与可求长性。MR 1333890。https://doi.org/10.1017/CBO9780511623813。[McM84] C. McMullen，
一般谢尔宾斯基地毯的豪斯多夫维数， *Nagoya Math. J.* **96** （1984年），1–9。MR 771063。
https://doi.org/10.1017/S0027763000021085。[Mil06] O. Milatovic，有界几何流形上 L^p-空间中的 m-耗散薛定谔算子，*J. Math. Anal. Appl.* **324** 第2期（2006年），762–772。MR 2265078。
https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.12.061。[Mil19] O. Milatovic，具有无界漂移的协变薛定谔算子的m-耗散性，
Ann. Global Anal. Geom. **55** 第4期（2019年），657–679。MR 3951751。
https://doi.org/10.1007/s10455-018-09645-6。[MT16] O. Milatovic 和 F. Truc，黎曼流形上微分算子的自伴扩张，
Ann. Global Anal. Geom. **49** 第1期（2016年），87–103。MR 3454026。
https://doi.org/10.1007/s10455-015-9482-0。[Ni07] L. Ni，流形上的平均值定理， *Asian J. Math.* **11** 第2期（2007年），
277–304。MR 2328895。https://doi.org/10.4310/AJM.2007.v11.n2.a6。[PS14] S. Pigola 和 A. G. Setti，
Global divergence theorems in nonlinear PDEs and geometry Ensaios ，，巴西数学学会，里
Matemáticos [Mathematical Surveys] **26** 2014
约热内卢，。MR 3236356。[PV21] S. Pigola 和
G. Veronelli L^p *Positivity Preserving and a conjecture by M. Braverman O.* ，，，。
Milatovic and M. Shubin 2021 10 48550 2105 14847
https://doi.org/。/ARXIV。。[Pon16] A. C. Ponce， *Elliptic PDEs, measures and capacities*，
EMS Tracts in Mathematics **23**，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2016年，从泊松方程到非线性托马斯-费米问题。
https://doi.org/10.4171/140。[PW67] M. H. Protter 和 H. F. Weinberger，
Maximum principles in differential equations，普伦蒂斯-霍尔公司，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1967年。[Sj
73] P. Sjögren， *Ark.*
Mat. **11** 1973 153 165 346173 10 1007 02388513
关于椭圆线性微分算子的伴随算子及其位势理论，（），–。MR 。https://doi.org/。/BF 。[Str83] R. S. Strichartz，
J. Functional 完备黎曼流形上的拉普
Analysis **52** 1 1983 48 79 705991 10 1016 0022 1236 83 90090 3
拉斯算子分析，第（），–。MR 。https://doi.org/。/-（）-。[Tro99] M. Troyanov，流形的抛物性，
Siberian Adv. Math. **9**第4期（1999年），125–150。MR 1749853。[CdV
82] Y. Colin de Verdière *Ann. Inst. Fourier* ，伪拉普拉斯算
(Grenoble) **32** 3 1982 275 286 688031
子。I，第（），xiii，–。MR 。可访问 http://www.numdam.org.unimib.idm.oclc.org/item?id=AIF_1982__32_3_275_0。

Università degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, ViaCozzi 55, 20126 Milano - Italy - EU*Email address*: stefano.pigola@unimib.it

Università degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, ViaCozzi 55, 20126 Milano - Italy - EU*Email address*: daniele.valtorta@unimib.it

Università degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, ViaCozzi 55, 20126 Milano - Italy - EU*Email address*: giona.veronelli@unimib.it