arXiv:2301.05162v1 [cs.PL] 12 Jan 2023

二元幺半群富集的 Freyd 范畴*

Chris Heunen[0000−0001−7393−2640] 和 Jesse Sigal[0000−0002−5117−8752]

英国爱丁堡大学信息学院，{chris.heunen, jesse.sigal}@ed.ac.uk

摘要。 Freyd 范畴通过捕捉积的两种不同求值顺序，为一阶带效应编程语言提供语义。我们在双幺半范畴中富化 Freyd 范畴，由此带来一种全新的第三种并行复合选择。双幺半范畴具有两种幺半结构，分别对应顺序复合与并行复合。通过恰当选择双幺半范畴，可以将传统框架恢复为一个全余反射子范畴。我们给出了这一统一框架的若干具体示例，包括参数化状态单子、资源的基本分离语义，以及富集变换中的一些有趣情形。

关键词： Freyd 范畴 · 双幺半范畴 · Kleisli 范畴 · Lawvere 理论 · 单子

1 引言

计算效应以模块化的方式封装计算机程序与其环境之间的交互，是现代编程语言的基本组成部分 [17]。它们最初由强单子 [15], 刻画，随后扩展到 Arrows, 以处理输入和输出 [12], ；扩展到 Lawvere 理论，以便更好地以代数方式组合效应 [20], ；扩展到 PRO 和 PROP，以处理非笛卡尔情形 [13], ；还扩展到 Freyd 范畴，以处理非高阶效应 [14]。

Freyd 范畴允许人们按顺序以及在一定程度上并行地复合带效应计算，并对这类复合进行严谨推理。对于一个带效应计算 $f\colon\ a \to b$，我们可以通过扩展 $-\otimes c$，将它、定义域和陪域嵌入更大的上下文；其中，任取对象 c 和类幺半群运算 $\otimes$，我们将其记作 $f \otimes \mathrm{id}\colon a \otimes c \to b \otimes c$。直观而言，$f \otimes$id 不会与 c交互。带效应计算不一定可交换，因为它们可能会改变环境：一般而言，$(f \otimes \mathrm{id}).(\mathrm{id} \otimes g) \neq (\mathrm{id} \otimes g).(f \otimes \mathrm{id})$。

但是，如果我们想要追踪计算的更多信息，而不仅仅是类型和效应，该怎么办？例如，假设我们想为每个计算标注其资源需求：可能例如 有一个资源集合 R，而每个计算f 都需要一个特定的资源子集 $P \subseteq R$ 才能执行。顺序执行两个计算需要执行二者所需的全部资源，因此，如果 $f\colon a \to b$ 且 $g\colon b \to c$

* Jesse Sigal 的部分经费由华为资助。

分别需要资源 P 和 Q，那么 $g.f$ 需要 $P \cup Q$。并行复合也同样如此：如果 f_1: $a_1 \to b_1$ 和 f_2: $a_2 \to b_2$ 分别需要 P_1 和 P_2，那么 $f_1 \otimes f_2$: $a_1 \otimes a_2 \to b_1 \otimes b_2$ 需要 $P_1 \cup P_2$。然而，我们通常希望通过要求 $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ 来限制 P_1 和 P_2，从而使并行复合的态射使用不同的资源。如果对于所有 a，我们都有一个需要 $\emptyset \subseteq R$的恒等映射 id : $a \to a$，那么对于任意 f，我们总能构造 $f \otimes \mathrm{id}$，但一般情况又如何呢?

本文提出了一种实现这一目标的方案：在双幺半范畴中富集 Freyd 范畴。双幺半范畴具有两种相互作用的幺半结构，可分别描述带效应计算和我们希望跟踪的额外数据（例如上述资源）的顺序复合与并行复合。第 3.1 节给出了资源方面的具体示例。

第 2 节介绍双幺半富集的 Freyd 范畴。第 3 节通过探讨多个不同的示例，展示这类范畴的广泛适用性：上述资源的分离语义、指标化状态单子，以及 Lawvere 理论的 Kleisli 范畴。第 4 节说明，恰当地选择富集所用的双幺半范畴，可以将传统 Freyd 范畴恢复为一个全余反射子范畴；第 5 节则以纯代数术语给出双幺半富集的 Freyd 范畴的抽象刻画。第 6 节探讨如何更换富集所用的双幺半范畴，例如改变上述示例中的底层权限模型。第 7 节总结全文，并提出未来的研究方向。

相关工作 Morrison 和 Penneys 将 V-幺半范畴 [16] 定义为：对于带编织的幺半 V，一个具有并行复合且与编织良好相互作用的 V-范畴。在 V 具有编织结构（因而是双幺半）的情形下，我们对 V-Freyd 范畴的定义与之相似。不过，我们还要求 hom 对象具有双函子性，这对于我们的一些构造而言是一个重要区别。

第 5 节中的抽象刻画受到 Fujii 对 PRO 和 PROP 的刻画的启发：它们分别是 $\mathrm{MonCat}_{\mathbf{lax}}\left(\mathrm{N}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{N}, \mathrm{Set}\right)$ 和 $\mathrm{MonCat}_{\mathbf{lax}}\left(\mathrm{P}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{P}, \mathrm{Set}\right)$ 中的幺半群，其中 N 和 P 以自然数为对象，分别以等式和双射为态射。

Garner 和 López Franco 描述了一个利用富集于双幺半范畴的串行积中的范畴来处理交换性的一般框架 [8]。他们的框架要求该双幺半范畴是正规的，也就是说，两个单位同构。只有在这一要求及其他要求下，他们才在其富集范畴的范畴上定义幺半结构，而没有定义幺半富集范畴。我们不要求正规性。

最后，Forcey [6], 以及 Batanin 和 Markl [4] 在双幺半范畴上进行富集，但使用的是并行积。我们选择在串行积上进行富集，以便定义适合采用这种选择的例子。

2 双幺半富集的 Freyd 范畴

本节将介绍双幺半富集的 Freyd 范畴（见第 2.3 节），但首先讨论 Freyd 范畴（见第 2.1 节）和双幺半范畴（见第 2.2 节）。

2.1 Freyd 范畴

Freyd 范畴为带有效应的一阶值调用编程语言提供语义 [20]。我们将稍微推广 Freyd 范畴的定义，使无效应片段不必具有积，首先给出以下预备定义 [14,18]。

定义 *1.* 若范畴 $\mathbf{C}$ 配备了对每个对象 x 都有的自函子 $(-)\ltimes x$和 $x \rtimes (-)$，且对所有 y 都有 $x \ltimes y = x \rtimes y$，则称其为双对象范畴；将此对象记为 $x \otimes y$。若对任意态射 $g\colon x' \to y'$，类型为 $x \otimes x' \to y \otimes y'$ 的两个映射 $(y \rtimes g).(f \ltimes x')$ 和 $(f \ltimes y').(x \rtimes g)$ 相等，且类型为 $x' \otimes x \to y' \otimes y$的两个映射 $(y' \rtimes f).(g \ltimes x)$ 和 $(g \ltimes y).(x' \rtimes f)$ 也相等，则称态射 $f\colon x \to y$ 为中心的。中心态射构成一个宽子范畴 $Z(\mathbf{C})$，称为中心。

定义 2。双幺半范畴 $\mathbf{C}$ 若配备一个对象 e 以及中心同构族 $\alpha\colon (x \otimes y) \otimes z \to x \otimes (y \otimes z)$,$\lambda\colon e \otimes x \to x$ 和 $\rho\colon x \otimes e \to x$，且这些同构在各分量上自然，并满足三角形与五边形方程，则称其为预幺半范畴。

定义 3。预幺半范畴之间的函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 若配备中心态射 $\eta\colon e_{\mathbf{D}} \to F(e_{\mathbf{C}})$ 和 $\mu\colon F(x) \otimes_{\mathbf{D}} F(y) \to F(x \otimes_{\mathbf{C}} y)$，且 在各分量上自然，并使下列图表交换，则称其为预幺半函子：

$$\begin{array}{ccc}
(F(x) \otimes_{\mathbf{D}} F(y)) \otimes_{\mathbf{D}} F(z) & \xrightarrow{\alpha_{\mathbf{D}}} & F(x) \otimes_{\mathbf{D}} (F(y) \otimes_{\mathbf{D}} F(z)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\mu} \\
F(x \otimes_{\mathbf{C}} y) \otimes_{\mathbf{D}} F(z) & & F(x) \otimes_{\mathbf{D}} F(y \otimes_{\mathbf{C}} z) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
F((x \otimes_{\mathbf{C}} y) \otimes_{\mathbf{C}} z) & \xrightarrow[F\alpha_{\mathbf{C}}]{} & F(x \otimes_{\mathbf{C}} (y \otimes_{\mathbf{C}} z))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
e_{\mathbf{D}} \otimes_{\mathbf{D}} F(x) & \xrightarrow{\eta\otimes\mathrm{id}} & F(e_{\mathbf{C}}) \otimes_{\mathbf{D}} F(x) \\
\downarrow{\scriptstyle \lambda_{\mathbf{D}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
F(x) & \xleftarrow[F\lambda_{\mathbf{C}}]{} & F(e_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
F(x) \otimes_{\mathbf{D}} e_{\mathbf{D}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} & F(x) \otimes_{\mathbf{D}} F(e_{\mathbf{C}}) \\
\downarrow{\scriptstyle \rho_{\mathbf{D}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\
F(x) & \xleftarrow[F\rho_{\mathbf{C}}]{} & F(x \otimes_{\mathbf{C}} e_{\mathbf{C}})
\end{array}$$

当 η 和 μ 是同构（恒等态射）时，预幺半函子称为 强（严格）。

注意，严格预幺半函子 F 会原样保持结合约束和单位子。回想一下，幺半群范畴之间的函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 称为 松幺半，如果它配备一个态射 $\eta\colon I \to F(I)$ 和一个自然变换 $\mu\colon F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$，且满足相容条件。当 η 和 μ 可逆时，它称为 强幺半。松幺半函子和强幺半函子在复合下封闭。现在给出 Freyd 范畴的定义。

定义 4。 Freyd 范畴由一个幺半范畴 $\mathbf{M}$ 和一个预幺半范畴 $\mathbf{C}$ 组成，两者具有相同的对象；还包括一个对象上恒等的严格预幺半函子 $J\colon \mathbf{M} \to \mathbf{C}$，其像包含于 $Z(\mathbf{C})$中。*Freyd* 范畴之间的态射 $J \to J'$由一个强幺半群函子 $F_0\colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ 和一个强预单张量函子 $F_1\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ 组成，满足 $F_1 J = J' F_0$。*Freyd* 范畴及其态射构成一个范畴 $\mathbf{Freyd}$。

2.2 双幺半范畴

双幺半范畴带有两种相互作用的幺半结构，我们可以直观地将它们理解为顺序复合与并行复合；不过，在举例之前，先给出定义 [2, 定义 6。1]。

定义 *5.* 若范畴 V 带有两个单*oidal*结构 $(V, *, J)$ 和 $(V, \circ, I)$、一个自然变换 $\zeta_{A,B,C,D} : (A \circ B) * (C \circ D) \to (A * C) \circ (B * D)$，以及三个态射 $\Delta : J \to J \circ J$, $\nabla : I * I \to I$，和$\epsilon : J \to I$，使得 (I, ∇, ϵ) 是 $(V, *, J)$ 中的一个幺半群，且 (J, Δ, ϵ) 是 $(V, \circ, I)$ 中的一个余幺半群，并且以下图表交换，则称 V 为双幺半范畴：

$$\begin{array}{ccc}
((A\circ B)*(C\circ D))*(E\circ F) & \xrightarrow{\alpha} & (A\circ B)*((C\circ D)*(E\circ F)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta*\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}*\zeta} \\
((A*C)\circ(B*D))*(E\circ F) & & (A\circ B)*((C*E)\circ(D*F)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\
((A*C)*E)\circ((B*D)*F) & \xrightarrow[\alpha\circ\alpha]{} & (A*(C*E))\circ(B*(D*F))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
J*(A\circ B) & \overset{\Delta*\mathrm{id}}{\to} & (J\circ J)*(A\circ B) \\
{\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\
A\circ B & \underset{\lambda\circ\lambda}{\leftarrow} & (J*A)\circ(J*B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(A\circ B)*J & \overset{\mathrm{id}*\Delta}{\to} & (A\circ B)*(J\circ J) \\
{\scriptstyle \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\
A\circ B & \underset{\rho\circ\rho}{\leftarrow} & (A*J)\circ(B*J)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
((A\circ B)\circ C)*((D\circ E)\circ F) & \xrightarrow{\alpha*\alpha} & (A\circ(B\circ C))*(D\circ(E\circ F)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} \\
((A\circ B)*(D\circ E))\circ(C*F) & & (A*D)\circ((B\circ C)*(E\circ F)) \\
\downarrow{\scriptstyle \zeta\circ\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\zeta} \\
((A*D)\circ(B*E))\circ(C*F) & \xrightarrow[\alpha]{} & (A*D)\circ((B*E)\circ(C*F))
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I\circ(A*B) & \overset{\nabla\circ\mathrm{id}}{\leftarrow} & (I*I)\circ(A*B) \\
{\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} \\
A*B & \underset{\lambda*\lambda}{\leftarrow} & (I\circ A)*(I\circ B)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(A*B)\circ I & \overset{\mathrm{id}\circ\nabla}{\leftarrow} & (A*B)\circ(I*I) \\
{\scriptstyle \rho}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \zeta} \\
A*B & \underset{\rho*\rho}{\leftarrow} & (A\circ I)*(B\circ I)
\end{array}$$

我们可以写作$(\mathbf{V}\ *, J, \circ, I)$ 或$(\mathbf{V}\ *, \circ)$，以明确各个单*oidal*结构所起的作用。

例*1.* 任意辫子幺半范畴都可成为双幺半范畴：令两个幺半结构重合，并令 ζ 为中间四元互换 $x \otimes y \otimes z \otimes w \mapsto x \otimes z \otimes y \otimes w$（结合律除外）。特别地，任意对称或笛卡尔幺半范畴都是双幺半范畴 [2, 命题 6.10，例 6.19]。

例 *2.* 若 $(\mathbf{V}\ *, J, \circ, I)$ 是双幺半范畴，则 $(\mathbf{V}^{\mathrm{op}}, \circ, I, *, J)$ 也是双幺半范畴，其结构映射取反向形式 [2, 第 6.1 节.2]。

例*3.* 如果 $(\mathbf{V}\ \otimes, I)$ 是具有积的单oidal范畴，那么 $(\mathbf{V}\ \otimes, I, \times, 1)$ 是双幺半的，其 $\zeta = \langle \pi_1 \otimes \pi_1, \pi_2 \otimes \pi_2 \rangle$, $\Delta = \langle \mathrm{id}、\ \mathrm{id} \rangle$，以及 ∇ 和 ϵ 终对象映射。类似地，如果单oidal范畴 V 具有余积，那么 $(\mathbf{V}\ +, 0, \otimes, I)$ 是双幺半的，见 [2,例 6.19]。

例 *4.* 如果 $(\mathbf{V}\ *, J, \circ, I)$ 是小的双幺半范畴，简单计算可知，对每个幺半结构进行 Day 卷积后，预层范畴 $([\mathbf{V}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}], *_{\mathrm{Day}}, \mathbf{V}(-, J)\ \circ_{\mathrm{Day}}, \mathbf{V}(-, I))$ 仍是双幺半的，其中

$$(F *_{\mathrm{Day}} G)(A) = \int^{B,C} \mathbf{V}(A, B * C) \times F(B) \times G(C)$$

对于 $\circ_{\mathrm{Day}}$ 也同样如此。对于 $[\mathbf{V}$ 也有类似构造：从 $\mathbf{V}^{\mathrm{op}}$ 开始即可得到 $\mathbf{Set}]$ 。

例 *5.* Set 上的自函子若保持滤过余极限，则称为有限保持的，因此由其在有限集上的取值确定。有限保持自函子在函子复合 $\circ$ 下封闭，单位为 Id；在带积的 Day 卷积 $\times_{\mathrm{Day}}$ 下封闭，单位为 $\mathbf{Set}(1, -) \cong \mathrm{Id}$ ；从而使 $\big([\mathbf{Set}, \mathbf{Set}]_f, \times_{\mathrm{Day}}, \mathrm{Id}\ \circ, \mathrm{Id}\big)$ 成为双幺半范畴。 [8]

例 6. 对于小幺半群范畴 $(\mathbf{M}\ \oplus, e)$，Set 值端双函子范畴 $\mathbf{Prof}(\mathbf{M}) := [\mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M}, \mathbf{Set}]$ 是双幺半的 $(\mathbf{Prof}(\mathbf{M})\ \oplus_{\mathrm{Day}}, \diamond)$，其双函子复合为 $(P \diamond Q)(a, c) := \int^{b} P(a, b) \times Q(b, c)$（单位为 $\mathbf{M}(-, -)$），并在两侧对 $\oplus$ 进行 Day 卷积 $(P \oplus_{\mathrm{Day}} Q)(a, b) := \int^{a_1, a_2, b_2, b_2} \mathbf{M}(a, a_1 \oplus a_2) \times \mathbf{M}(b_1 \oplus b_2, b) \times P(a_1, b_1) \times Q(a_2, b_2)$（单位为 $\mathbf{M}(-, e) \times \mathbf{M}(e, -)$）。 [8]

例 *7.* 对我们而言，一个重要的例子是指定子集范畴 Subset。对象是满足 $X \subseteq A$ 的集合对 (X, A)，态射 $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ 是函数 $f\colon A \to B$，满足 $f(X) \subseteq Y$。我们称 X 为**指定子集**。复合和恒等态射与 Set 中的相同。若 $a \in X$，我们可以写作 $a \Subset A$ ，省略指定子集 X 。接下来，我们给出 Subset 上的两种幺半结构。

第一种是笛卡尔积：对象上的 $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, A \times B)$，态射上的 $f \times g$ 与 Set 中的相同，单位为 $(1, 1)$。结合约束和单位子与 Set 中的相同。这同时也是范畴积。

第二种是析取积：对象上的 $(X, A) \otimes (Y, B)$ 定义为$\big(X \times Y,\ (A \times Y) \cup (X \times B)\big)$，单位为 $(1, 1)$。态射上的 $f \times g$ 仍然定义良好。最后，相干映射是笛卡尔积对应映射的限制版本。

现在，$\big(\mathbf{Subset}\ \otimes, (1, 1)\ \times, (1, 1)\big)$ 根据例3是双幺半的：Δ 和 ∇ 是单位元，ϵ 是恒等映射，而 $\zeta\colon \big((X, A) \times (Y, B)\big) \otimes \big((Z, C) \times (W, D)\big) \to \big((X, A) \otimes (Z, C)\big) \times \big((Y, B) \otimes (W, D)\big)$ 是受限中四交换；所有公理都由例1通过$(\mathbf{Set}\ \times, 1)$继承而来。

$\big(\mathbf{Subset}\ \otimes, \times\big)$ 与$(\mathbf{Set}\ \times, \times)$之间的重要区别在于，$\zeta$在前者中不可逆（因为它不是一个满射 Set 映射）。这使得以 Subset 为丰化范畴的 Freyd 范畴具有类似预幺半结构。

2.3 具体定义

现在我们可以介绍本文标题所指的概念了。我们先给出一个具体定义，抽象刻画留待第 5 节。

定义 6. 设$(\mathbf{V}\ *, J, \circ, I)$是一个双幺半范畴，且$(\mathbf{M}\ \oplus, e)$是一个幺半范畴。一个 $\mathbf{V}$-Freyd 范畴，定义在 $\mathbf{M}$ 之上，由以下部分组成

– 一个双函子 $C : M^{\mathrm{op}} \times M \to V$ – 一个外自然族 $idt : I \to C(a, a)$，意为 $C(id\ f).idt = C(f, id).idt$ – 一个外自然族 $seq : C(a, b) \circ C(b, c) \to C(a, c)$，意为 seq 在 a 和 c 中是自然的，且 $seq.(id \circ C(f, id)) = seq.(C(id\ f) \circ id)$ – 一个态射 $zero : J \to C(e, e)$ – 一个自然族 $par : C(a_1, b_1) * C(a_2, b_2) \to C(a_1 \oplus a_2, b_1 \oplus b_2)$

满足以下公理：

(i) idt 是 seq 的恒等元，即 $seq.(idt \circ id) = \lambda$，反之亦然；*(ii)* seq 是结合的，即 $seq.(seq \circ id) = seq.(id \circ seq).\alpha$；*(iii)* $zero$ 是 par 的恒等元，即 $C(\lambda^{-1}, \lambda).par.(zero * id) = \lambda$，反之亦然；*(iv)* par 是结合的，即 $C(\alpha^{-1}, \alpha).par.(par * id) = par.(id * par).\alpha$；*(v)* idt 通过 $idt.\epsilon = zero$ 保持 $zero$；*(vi)* idt 通过 $idt.\nabla = par.(idt * idt)$ 保持 par；*(vii)* seq 通过 $seq.(zero \circ zero).\Delta = zero$ 保持 $zero$；*(viii)* seq 通过 $seq.(par \circ par).\zeta = par.(seq * seq)$ 保持 par。

公理对应的图表见附录 *A*。

定义 7. *A* $\mathbf{V}$-Freyd 范畴的态射 由一个强幺半群函子 $F_0 \colon \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$ 和一个自然变换 $F_1 \colon \mathbf{C}(a, b) \to \mathbf{C}'(F_0 a, F_0 b)$组成，并满足：

– $F_1.\mathrm{idt} = \mathrm{idt}'$; – $F_1.\mathrm{seq} = \mathrm{seq}'.(F_1 \circ F_1)$; – $\mathrm{C}'(\mathrm{id}\ \mu).\mathrm{par}'.(F_1 * F_1) = \mathrm{C}'(\mu, \mathrm{id}).F_1.\mathrm{par}$.

$\mathbf{V}$-*Freyd* 范畴及其间的态射构成一个$\mathbf{V}$-**Freyd**范畴。

我们的定义与 Batanin 和 Markl 的双幺半富集范畴 [4] 有几处重要差异。他们用 $*$ 表示顺序复合，用 $\circ$ 表示并行复合。他们对公理 v 至 viii 的对应版本分别是 $\mathrm{idt} = 零.\epsilon$、$\mathrm{idt} = \mathrm{par}.(\mathrm{idt} \circ \mathrm{idt}).\Delta$、$\mathrm{seq}.(\mathrm{zero} * \mathrm{zero}) = \mathrm{zero}.\nabla$，以及 $\mathrm{seq}.(\mathrm{par} * \mathrm{par}) = \mathrm{par}.(\mathrm{seq} \circ \mathrm{seq}).\zeta$。此外，他们的幺半结构具有更丰富的富集结构，而我们的幺半结构则继承自一个 Set-范畴，即 M。因此，我们认为这两种概念无法相互表达。

3 个例子

本节将探讨二元幺半群富集的 Freyd 范畴的三个应用：资源管理（见第 3.1 节）、索引状态（见第 3.2 节）以及 Lawvere 理论的 Kleisli 范畴（见第 3.3 节）。

3.1 有状态函数与分离幺半群

为了抽象地处理资源，我们首先引入分离幺半群这一新颖概念。

定义 8. 若一个幺半群$(M, \bullet, e)$附带一个二元关系 $\|$，并满足：$e\|m$ 且 $m\|e$；并且当且仅当 $m\|n$ 且 $m'\|n$时，$mm'\|n$；并且当且仅当 $m\|n$且 $m\|n'$时，$m\|nn'$，则称其为分离的。

例如，$(\mathbb{N}, +, 0)$ 满足 $x\|y$ 当且仅当 $x = 0$ 或 $y = 0$；固定集合 R 的有限子集 $(\mathcal{P}_f(R), \cup, \emptyset)$，满足 $P\|Q$ 当且仅当 $P \cap Q = \emptyset$；以及在逐点分离关系下的分离幺半群的乘积。分离幺半群如下所示地参数化资源的双幺半范畴。

定义 *9.* 设 $(M, \|)$ 是一个分离幺半群。 M 标记集合范畴 $\mathbf{Label}_M$ 的对象是函数 $\ell\colon A \to M$，态射是满足 $\ell' f = \ell$ 的函数$f\colon A \to A'$。此范畴具有如下单*oidal*结构 $\bullet$：在对象上，$\ell \bullet \ell'\colon A \times A' \to M$ 将 (a, a') 映为 $\ell(a) \bullet \ell'(a')$；在态射上，$f \bullet f' = f \times f'$；单位 $\mathbf{cst}_e\colon 1 \to M$ 选取 $e \in M$。此范畴还有如下第二个单*oidal*结构 $\|$：在对象上，$\ell\|\ell'$ 是 $\ell \bullet \ell'$ 在 $\{(a, a') \mid \ell(a)\|\ell'(a')\}$ 上的限制；在态射上，$f\|f' = f \times f'$。范畴 $(\mathbf{Label}_M, \|, \mathbf{cst}_e, \bullet, \mathbf{cst}_e)$ 是双幺半的，其中 $\zeta\colon (\ell_1 \bullet \ell_1') \,\|\, (\ell_2 \bullet \ell_2') \to (\ell_1 \| \ell_2) \bullet (\ell_1' \| \ell_2')$ 是 $(\mathbf{Set}, \times, 1, \times, 1)$ 的 ζ 的限制版本。

将 Label_M 中的对象看作由元素组成的集合，每个元素都标注了其资源需求。M 的乘法组合资源，而分离关系 $\|$ 则关联不冲突的资源。现在我们将描述一个富集 Freyd 范畴，其中态射像引言中那样由资源标记。

固定一个可数族 $R = \{x, y, z, \ldots\}$ 的集合，我们将其视为资源。$\mathcal{P}_f(R)$的有限子集在并集运算下构成一个幺半群，并在不相交性下成为一个分离幺半群。对于资源集合 $Q \in \mathcal{P}_f(R)$，固定一个集合的乘积 $\Pi_{x \in Q} x =: \Pi_Q$，它由此组合 Q中的资源。若 $Q' \subseteq Q$，记$\pi_{Q'}\colon \Pi_Q \to \Pi_{Q'}$为投影；给定集合 a 和 b之间的映射 $f\colon a \times \Pi_{Q'} \to b \times \Pi_{Q'}$，当 $Q' \subseteq Q$ 时，记$f^Q_{Q'}$为由 f诱导的映射 $a \times \Pi_Q \to b \times \Pi_Q$，它保持额外资源 $Q \setminus Q'$ 不变。

我们将定义一个以状态变换函数为对象、基于 Set 的 $\mathsf{Label}_{\mathcal{P}_f(R)}$-Freyd 范畴。令 $\mathsf{C}(a, b)$ 表示从 $Q \in \mathcal{P}_f(R)$ 上的 $\mathsf{Set}(a \times \Pi_Q, b \times \Pi_Q)$ 的不交并到 $\mathcal{P}_f(R)$ 的函数，它将 $f\colon a \times \Pi_Q \to b \times \Pi_Q$ 映射为 Q。因此，带有标签 Q 的映射$f \in \mathsf{C}(a, b)$ 是一个从 a 到 b 的效应计算，且只能作用于 Q 中的资源。在前复合和后复合下，这构成一个双函子。为具体起见，记 $\cup$ 为 $\bullet$，并记 $\cap$ 为 $\|$，其结构映射如下：

$$\begin{aligned}
\mathsf{idt}\colon \mathsf{cst}_\emptyset \to \mathbf{C}(a, a) \qquad & \qquad \mathsf{zero}\colon \mathsf{cst}_\emptyset \to \mathbf{C}(1, 1) \\
\star \mapsto (\emptyset, \mathrm{id}_{a \times 1}) \qquad & \qquad \star \mapsto (\emptyset, \mathrm{id}) \\
\mathsf{seq}\colon \mathbf{C}(a, b) \cup \mathbf{C}(b, c) &\to \mathbf{C}(a, c) \\
((P, f), (Q, g)) &\mapsto \left(P \cup Q, g^{P \cup Q}_Q . f^{P \cup Q}_P\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{par}\colon \mathbf{C}(a,b)\cap\mathbf{C}(a',b') &\to \mathbf{C}(a\times a', b\times b')\\ ((Q,f),(Q',f')) &\mapsto \\ &\left(Q\cup Q', \left(\mathrm{id}\times\langle\pi_Q,\pi_{Q'}\rangle^{-1}\right) m^{-1}.(f\times f').m.\left(\mathrm{id}\times\langle\pi_Q,\pi_{Q'}\rangle\right)\right)\end{aligned}$$

其中 $\langle\pi_Q,\pi_{Q'}\rangle\colon \Pi_{Q\cup Q'}\to\Pi_Q\times\Pi_{Q'}$ 可逆，因为 $Q\cap Q'=\emptyset$，而 m 是中间四元互换。因此，par 通过重新排列状态，使映射并行作用。

3.2 索引状态

一种重要的计算效应是全局状态。然而，由于存储的类型始终不变，它往往缺乏灵活性。在这个例子中，类型可以变化。我们使用例 5 中 Set 上有限型自函子的双幺半范畴，构造一个基于状态单子（$s\times(-))^s$、以 Set 为底的 $[\mathbf{Set},\mathbf{Set}]_f$-Freyd 范畴，扩展了 Atkey 的例子 [3]。定义 $\mathbf{C}(a,b)=(b\times(-))^a$，它通过前复合和后复合成为一个双函子。自然的结构映射如下：

$$\begin{aligned}\mathsf{idt}_X\colon X &\to (a\times X)^a & \mathsf{zero}_X\colon X &\to (1\times X)^1\\ x &\mapsto \lambda a.(x,a) & x &\mapsto \lambda\star.(x,\star)\end{aligned}$$

$$\mathsf{seq}_X\colon \left(b\times\left((c\times X)^b\right)\right)^a\to(c\times X)^a$$
$$f\mapsto \mathrm{eval}.f$$

$$\mathsf{par}_X\colon \textstyle\int^{Y,Z} X^{Y\times Z}\times(b\times Y)^a\times(c\times Z)^{a'}\to((b\times c)\times X)^{a\times a'}$$
$$(k,f,g)\mapsto(\mathrm{id}\times k).m.(f\times g)$$

其中 $\mathrm{eval}\colon b\times(c\times X)^b\to c\times X$ 是求值映射，m 是中间四元互换。idt 和 seq 是状态单子的单位和乘法，只是状态类型会变化。

3.3 Lawvere 理论的 Kleisli 范畴

Lawvere 理论为带效应计算建模。函数式程序员可能更熟悉单子的 Kleisli 范畴；两者密切相关。这里我们描述一个索引版本，用于并行建模独立效应。令 Law 为 Lawvere 理论构成的范畴。它的始对象是集合的理论 $\mathcal{S}$，也是 Lawvere 理论的 张量积 $\otimes$ 的单位 [10]。这使 Law 成为一个对称幺半范畴，并具有一个特殊性质：存在包含映射 $\phi_i\colon \mathcal{L}_i\to\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2$。因此，函子范畴 $[\mathbf{Law},\mathbf{Set}]$ 在 Day 卷积下构成幺半范畴，其单位是常值函子 $\mathbf{Law}(\mathcal{S},-)\simeq\mathbb{1}$。由于这个范畴也有积，例3表明它是双幺半范畴。

现在，Law 等价于有限型单子的范畴 [1, 第 3] 章：每个 Lawvere 理论 $\mathcal{L}$ 都会导出一个单子 $T(\mathcal{L})$，而 Lawvere 理论的每个映射 θ 都会导出一个单子态射 $T(\theta)$。Set 上的每个单子 T 都具有典范的双强结构：存在映射 $\mathrm{st}_T\colon a\times Tb\to T(a\times b)$ 和 $\mathrm{st}'_T\colon Ta\times b\to T(a\times b)$，使得

两个导出的映射 $(a \times Tb) \times c \to T((a \times b) \times c)$ 相等。每个单子态射$T(\theta)$ 都保持强度：$T(\theta)_{a\times b}.\mathrm{st}^{T(\mathcal{L})} = \mathrm{st}^{T(\mathcal{L}')}.(\mathrm{id} \times T(\theta)_b)$。

现在，我们展示一个由 Lawvere 理论上的 Kleisli 构造给出的、以 Set 为底的 [Law, Set]-Freyd 范畴。在对象上定义 $\mathsf{C}(a,b) = T(-)(b)^a$，在态射上定义 $\mathsf{C}(f,g)\colon \mathsf{C}(a,b) \Rightarrow \mathsf{C}(a',b')$，其中 $\mathsf{C}(f,g)_{\mathcal{L}}(k) = T(\mathcal{L})(g).k.f$，最后：

$$\mathsf{idt}_{\mathcal{L}}\colon 1 \to T(\mathcal{L})(a)^a \qquad \mathsf{zero}_{\mathcal{L}}\colon 1 \to T(\mathcal{L})(1)^1$$
$$\star \mapsto \eta \qquad \star \mapsto \eta$$

$$\mathsf{seq}_{\mathcal{L}}\colon T(\mathcal{L})(b)^a \times T(\mathcal{L})(c)^b \to T(\mathcal{L})(c)^a$$
$$(f,g) \mapsto \mu.T(\mathcal{L})g.f$$

$$\mathsf{par}_{\mathcal{L}}\colon \int^{\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2} \mathsf{Law}(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2,\mathcal{L}) \times T(\mathcal{L}_1)(b_1)^{a_1} \times T(\mathcal{L}_2)(b_2)^{a_2} \to T(\mathcal{L})(b_1\times b_2)^{a_1\times a_2}$$
$$(\theta, f_1, f_2) \mapsto T(\theta).\mu.T(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2)(\mathrm{st}').\mathrm{st}.\,(T(\phi_1)\times T(\phi_2))\,.\,(f_1\times f_2)$$

直观地说，只要通过 $\otimes$ 强制效应彼此可交换，par 就允许我们并行放置 Kleisli 映射。因此，$\mathsf{idt}_{\mathcal{L}}$ 和 $\mathsf{seq}_{\mathcal{L}}$ 分别是 $T(\mathcal{L})$ 的 Kleisli 范畴中的恒等和复合。由于使用了 $T(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2)(\mathrm{st}').\mathrm{st}$，$\mathsf{par}_{\mathcal{L}}$ 的定义看起来似乎并非规范，但事实并非如此：$\mu.T(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2)(\mathrm{st}').\mathrm{st}.\,(T(\phi_1)\times T(\phi_2))$ 和 $\mu.T(\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2)(\mathrm{st}).\mathrm{st}'.\,(T(\phi_1)\times T(\phi_2))$ 根据 $\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2$ 的定义相等。

4 Subset-Freyd 与 Freyd 之间的伴随

现在我们来说明 V-Freyd 范畴如何推广 Freyd 范畴。我们采用的方法与 Power 的方法类似 [19]，即研究以 Subset 丰富的范畴。取 $\mathsf{V} = \mathbf{Subset}$，并考虑一个 Subset-Freyd 范畴 $\mathsf{C}\colon \mathsf{M}^{\mathrm{op}}\times\mathsf{M} \to \mathbf{Subset}$；它通过 par 和 idt 配备了一种类似预幺半结构。我们将一个属于指定子集的态射 $f \in \mathsf{C}(a,b)$ 称为特选态射。我们将证明，这些态射在预幺半意义下是中心的。

首先注意，$\mathsf{idt}\colon (1,1) \to \mathsf{C}(a,a)$ 是一个 Subset 态射，因此 $\mathsf{idt}(\star) \in \mathsf{C}(a,a)$ 是特选的。于是，对于 $g \in \mathsf{C}(a',b')$，根据 $\otimes$ 的定义，我们有 $(\mathsf{idt}(\star)\ g) \in \mathsf{C}(a,a)\otimes\mathsf{C}(a',b')$。因此，这一对属于 par 的定义域，从而 $\mathsf{par}(\mathsf{idt}(\star)\ g) \in \mathsf{C}(a\oplus a', a\oplus b')$，我们将其记作 $a \rtimes_{\mathsf{par}} g$。类似地，对于任意 $f \in \mathsf{C}(a,b)$，我们有 $f \ltimes_{\mathsf{par}} b' \in \mathsf{C}(a\oplus b', b\oplus b')$。我们还可以构造 $f \ltimes_{\mathsf{par}} a'$ 和 $b \rtimes_{\mathsf{par}} g$。因此，询问 $\mathsf{seq}(a\rtimes_{\mathsf{par}} g, f\ltimes_{\mathsf{par}} b') = \mathsf{seq}(f\ltimes_{\mathsf{par}} a', b\rtimes_{\mathsf{par}} g)$ 是否成立是有意义的；如果这个等式（以及将 g 置于左侧得到的镜像版本）对所有 f 均成立，我们就仿照定义 1 中的双元情形，称 g 为中心的。

接下来我们断言，特选态射 $g \in \mathsf{C}(a',b')$ 是中心的。注意，$(\mathsf{idt}(\star)\ g) \in \mathsf{C}(a',a')\times\mathsf{C}(a',b')$ 和 $(g, \mathsf{idt}(\star)) \in \mathsf{C}(a',b')\times\mathsf{C}(b',b')$ 都是特选的，且属于 seq 的定义域。对于任意 $f \in \mathsf{C}(a,b)$，有$((\mathsf{idt}(\star)\ f), (g, \mathsf{idt}(\star))) \in (\mathsf{C}(a,a)\times\mathsf{C}(a,b))\otimes(\mathsf{C}(a',b')\times\mathsf{C}(b',b'))$ 类似地，$((f, \mathsf{idt}(\star)), (\mathsf{idt}(\star))\ g) \in (\mathsf{C}(a,b)\times\mathsf{C}(b,b))\otimes(\mathsf{C}(a',a')\times\mathsf{C}(a',b'))$ 根据 $\otimes$ 的定义，这些也属于 seq$\otimes$seq 的定义域。现在，我们对每一对应用 par.(seq$\otimes$seq)，发现它们都等于 par (f,g)。公理八指出，$\mathsf{par}.(\mathsf{seq}\otimes\mathsf{seq}) = \mathsf{seq}.(\mathsf{par}\times\mathsf{par}).\zeta$ 因此，$\mathsf{seq}(a\rtimes_{\mathsf{par}} g, f\ltimes_{\mathsf{par}} b') = \mathsf{par}(f,g) = \mathsf{seq}(f\ltimes_{\mathsf{par}} a', b\rtimes_{\mathsf{par}} g)$（镜像等式亦然），所以 g 是中心的。

特选态射在经过 Subset-Freyd 映射后仍保持其中心性，因为它们会被映射为特选态射；但中心态射未必是特选的。因此，定义 7 确保指定子集中的元素经 Subset-Freyd 映射后仍属于该子集，所以 C 中特选态射的中心性经任意映射后都会保持。此外，C 的双函子性确保，对于所有 $f \in \mathrm{M}(a,b)$，$\mathrm{C}(\mathrm{id}\ f)(\mathrm{idt}(\star)) \in \mathrm{C}(a,b)$，因此 M 的像是中心的，且其中心性得以保持。Freyd 范畴 J 也有同样的性质：$\mathrm{M} \to \mathrm{C}$，M 在 J 下的像是中心的，且其中心性在 Freyd 范畴的所有态射下都得以保持。这一保持要求正是 Freyd 范畴与 Subset-Freyd 范畴的区别：后者可以要求比 M 的像更多的中心态射保持中心性。本小节余下部分将证明 Freyd 与 Subset-Freyd 之间存在一个伴随。左伴随 $\mathfrak{F}$: Freyd $\to$ Subset-Freyd 是一个自由函子，它只要求 M 的像保持不变。右伴随$\mathfrak{U}$: Subset-Freyd $\to$ Freyd 则遗忘额外的特选中心态射。

命题 *1.* 存在一个函子 $\mathfrak{F}$*: Freyd* $\to$ *Subset-Freyd*，其在对象上的定义为 $\mathfrak{F}$*(C)*$(a,b) = \big(J(M(a,b)), C(a,b)\big)$ *and* $\mathfrak{F}(C)(f,g) = C(Jf, Jg)$.

证明（证明概要）。 $\mathfrak{F}$(C) 在态射上定义良好，因为 J 是对象上的恒等映射；并且由 hom 的双函子性和 J 的函子性可知，它具有双函子性。结构映射如下：

– idt: (1, 1) $\to \mathfrak{F}(\mathrm{C})(a,a)$ 是 $* \mapsto \mathrm{id}$; – seq : $\mathfrak{F}(\mathrm{C})(a,b) \times \mathfrak{F}(\mathrm{C})(b,c) \to \mathfrak{F}(\mathrm{C})(a,c)$ 是 $(f,g) \mapsto g.f$; – zero : (1, 1) $\to \mathfrak{F}(\mathrm{C})(e,e)$ 是 $* \mapsto \mathrm{id}$; – par : $\mathfrak{F}(\mathrm{C})(a_1,b_1) \otimes \mathfrak{F}(\mathrm{C})(a_2,b_2) \to \mathfrak{F}(\mathrm{C})(a_1 \oplus a_2, b_1 \oplus b_2)$ 是 $(f_1,f_2) \mapsto f_1 \otimes f_2$; 无论 (f_1,f_2) 属于 $J(\mathrm{M}(a_1,b_1)) \times \mathrm{C}(a_2,b_2)$ 还是属于 $\mathrm{C}(a_1,b_1) \times J(\mathrm{M}(a_2,b_2))$，这一定义都良好，因为 J 保持 $\mathrm{M} = Z(\mathrm{M})$ 的中心性。

结构映射的（外）自然性源于复合的外自然性、M 的幺半积的函子性，以及 J 是保持中心性的严格预幺半函子。公理 i 和 ii 由 C 的复合成立；公理 iii 和 iv 源于 J 的严格预幺半性以及单位子和结合约束的自然性；公理 v 和 vii 则显然成立。最后，公理 vi 和 viii 源于 C 的预幺半结构。

最后，容易验证 $\mathfrak{F}(F) = F$ 是良定义的函子。

命题 2. 存在一个函子 $\mathfrak{U}\colon$ $\mathbf{Subset\text{-}Freyd} \to \mathbf{Freyd}$，它将对象 $\mathbf{C}\colon$ $\mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{Subset}$ 映射为函子 $J\colon$ $\mathbf{M} \to \mathfrak{U}(\mathbf{C})$，定义如下：

– 范畴 $\mathfrak{U}$*(C)* 与 *M* 具有相同的对象，其同态集为 $\mathfrak{U}(C)(a,b) = A$，其中 $(X,A) := C(a,b)$，复合为 $g.f = seq(f,g)$，恒等态射为 $id_a = idt(\star)$；– 函子 J 在对象上是恒等函子，在态射上则为 $J(f) = C(id_a, f)(idt(\star))$；– $\mathfrak{U}(C)$ 上的双运算结构在对象上为 $a \rtimes b = a \ltimes b = a \oplus_{\mathrm{M}} b$，在态射上为 $a \rtimes f = par(idt(\star) f)$ 和 $f \ltimes b = par(f, idt(\star))$。

证明（证明概要）。机械地验证可知， $\mathfrak{U}$(C) 是一个定义良好的 Freyd 范畴。给定一个态射 $F = (F_0, F_1)$，它从 $\mathsf{C} : \mathsf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{M} \to \mathsf{Subset}$ 到 $\mathsf{C}' : \mathsf{M}'^{\mathrm{op}} \times \mathsf{M}' \to \mathsf{Subset}$，我们必须定义一个态射 $\mathfrak{U}(F) : J_{\mathfrak{U}(\mathbf{C})} \to J_{\mathfrak{U}(\mathbf{C}')}$。我们将 $\mathfrak{U}(F)_0$ 定义为强幺半群函子 F_0，并将 $\mathfrak{U}(F)_1$ 定义为在对象上 F_0 ，在同态集上为 F_1 。这是一个定义良好的 Freyd 范畴态射。容易验证 $\mathfrak{U}$ 具有函子性。

定理 1. 命题 *1* 和 *2* 中的函子构成一个伴随 $\mathfrak{F} \dashv \mathfrak{U}$。

证明（证明概要）。对于伴随的单位 $\boldsymbol{\eta}$，我们可以取恒等映射；通过简短计算可知 $\mathfrak{U}\mathfrak{F} = \mathrm{Id}_{\mathbf{Freyd}}$。通过第二次计算可知，对于一个 Subset-Freyd 范畴 $\mathsf{C} : \mathsf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{M} \to \mathsf{Subset}$，我们有 $\mathfrak{F}\mathfrak{U}(\mathsf{C})\,(a,b) = \big(\mathsf{C}(\mathrm{id}, \mathsf{M}(a,b))(\mathrm{idt}(\star)),\ \mathsf{C}(a,b)\big)$，因此余单位的每个分量 $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{C}} \colon \mathfrak{F}\mathfrak{U}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ 都可以定义为 $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{C}0} = \mathrm{Id}_{\mathbf{M}}$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{C}1} = \mathrm{id}^{\mathbf{C}(a,b)} \colon \mathfrak{F}\mathfrak{U}(\mathsf{C})\,(a,b) \to \mathsf{C}\,(a,b)$。注意， $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{C}1}$ 的底层 Set 映射是恒等映射，但它在 Subset 中并非恒等映射。这个余单位是自然的，并且这个单位和余单位满足伴随的之字形恒等式。

回顾一下，伴随 $F \dashv G$（其单位为 $\eta \colon \mathrm{Id} \to GF$，余单位为 $\epsilon \colon FG \to \mathrm{Id}$）若 $F\eta$、 ϵF、 ηG 或 $G\epsilon$ 中任意一个可逆 [9, 第 3 节.8]，则称其为 幂等。在上一定理的情形中，显然 $\mathfrak{F}\boldsymbol{\eta}$ 可逆，因为 $\boldsymbol{\eta}$ 是恒等，因此这个伴随是幂等的。由此得到以下定理，具体说明 Subset-Freyd 如何推广 Freyd。

定理 2. **Subset-Freyd** 的全余反射子范畴，由满足以下条件的对象 $\mathbf{C} \colon \mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{Subset}$ 构成： $\mathbf{C}\,(a,b)$ 具有指定子集 $\mathbf{C}\,(\mathrm{id}, \mathbf{M}\,(a,b))(\mathsf{idt}\,(\star))$，与 **Freyd** 等价。

证明（证明概要）。以下是关于幂等伴随的一条一般事实 [9, 第 3 节.8]：若 $F \dashv G$ 是一个幂等伴随，其关联的单子为 $T = GF$，余单子为 $S = FG$: A $\to$A，则 T 的代数范畴与 S 的余代数范畴等价；而 S 的余代数范畴是 A 的一个全余反射子范畴，由满足 $\epsilon \colon SA \to A$ 可逆的 A 中对象构成。

单子 $\mathfrak{U}\mathfrak{F} = \mathrm{Id}$ 的代数范畴与 Freyd 等价，因此 Freyd 是 Subset-Freyd 的全余反射子范畴。此外，我们可以将该子范畴的对象刻画为满足以下条件的 Subset-Freyd 范畴 C：对 $\boldsymbol{\epsilon}$ 而言， $\mathfrak{F}\mathfrak{U}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ 是可逆的。具体而言，这意味着 $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{C}1}$ 在 Subset 中必须是可逆的。但其底层的 Set 映射是恒等映射，从而证明了该结论。

5 抽象刻画

定义 6 以非常具体的方式规定了一个 V-Freyd 范畴，其中涉及相当多的数据和公理。不过，这些内容彼此协调，正如我们将在本小节中通过给出一种 [12] 风格的刻画所展示的那样。回顾一下，松幺半群函子之间的自然变换在尊重相干映射 [12] 时称为幺半的

η。将从 C 到 D 的松幺半群函子及其间的幺半自然变换所构成的范畴记为 $\mathbf{MonCat_{lax}}(\mathrm{C}, \mathrm{D})$。若 A 和 B 是幺半范畴，则 A^{op} 和 $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ 也是幺半范畴，其结构由分量逐一给出。因此，我们可以考虑 $\mathbf{MonCat_{lax}}(\mathrm{M}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{M}, \mathrm{V})$，它是幺半范畴 $(\mathrm{V}, *, J)$。我们将把另一种幺半结构 $(\mathrm{V}, \circ, I)$ 提升到 $\mathbf{MonCat_{lax}}(\mathrm{M}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{M}, \mathrm{V})$，并证明在对 V 作出额外假设的条件下，V-Freyd 范畴恰好是相对于该幺半结构的一个幺半体。大多数证明见附录 B。

定义 10. 若一个双幺半范畴 $\mathbf{V}$ 是余完备的，且 $*$ 和 $\circ$ 在每个变量上都是余连续的，则称其为 余完备二元幺半群范畴 。在余完备双幺半范畴中，下列图表及其对称版本可交换：

$$\begin{array}{ccc} J * colim(D) & \xleftarrow{\simeq} & colim\,(J * D) \\ & \nwarrow^{\simeq} \quad \nearrow_{\simeq} & \\ & colim(D) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I \circ colim(D) & \xleftarrow{\simeq} & colim\,(I \circ D) \\ & \nwarrow^{\simeq} \quad \nearrow_{\simeq} & \\ & colim(D) & \end{array}$$

其中，顶部的同构来自余极限保持，其余同构由单位子诱导。

本小节余下内容假设 V 是余完备双幺半范畴；值得注意的是，预层范畴满足这一条件。对于小范畴 V，我们将在第 6.2 节放宽这一限制。我们还假设 M 是小的。所有松弛性均相对于 $(\mathrm{V}, *, J)$ 而言。现在我们提升 $(\mathrm{V}, \circ, I)$；先提升单位，再提升复合。

命题 3. 存在一个松幺半群函子 $\hom_{\mathbf{M}} : \mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{V}$，其在对象上的定义为 $\hom_{\mathbf{M}}(a, b) = \coprod_{\sigma \in \hom_{\mathbf{M}}(a,b)} I$。

命题 4。 如果 $S, T : \mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{V}$ 是松幺半群函子，那么使用余端定义的函子 $S \hat{\circ} T : \mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M} \to \mathbf{V}$，即 $(S \hat{\circ} T)(a, c) = \int^b T(a, b) \circ S(b, c)$，也是松幺半群函子。

命题 5。 $\left(\mathbf{MonCat_{lax}}(\mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M}, \mathbf{V}), \hat{\circ}, \hom_{\mathbf{M}}\right)$ 是一个幺半群范畴。

证明。 附录 B 中的引理 5 至 7 表明，$\hat{\circ}$-复合具有函子性、结合性，且 $\hom_{\mathbf{M}}$ 是其左右单位。剩下的只有三角恒等式和五边形恒等式，它们由余连续性以及 $\circ$ 满足的等价恒等式推出。

经过这些准备，我们可以对 V-Freyd 范畴作抽象刻画。

定理 3。 设 $\mathbf{V}$ 是一个余完备双幺半范畴。那么，一个 $\mathbf{V}$-*Freyd* 范畴 $\mathbf{C} : \mathbf{M} \times \mathbf{M}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{V}$ 恰好是 $\mathbf{MonCat_{lax}}(\mathbf{M}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{M}, \mathbf{V})$ 中的一个幺半群。

证明（证明概要）。$\mathbf{MonCat_{lax}}(\mathrm{M}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{M}, \mathrm{V})$ 中的幺半群 C 由两个映射 $e : \hom_{\mathrm{M}} \to \mathrm{C}$ 和 $m : \mathrm{C} \hat{\circ} \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ 组成，它们诱导出 idt 和 seq，并满足单位与结合律条件。C 的松弛幺半群结构分别给出零和 par，因此恒等与结合律条件随之成立。最后，e 和 m 的分量是幺半群自然变换，从而确保 idt 和 seq 与零和 par 相容。

我们注意到，根据 Fujii 的观察， [7], PRO 和 PROP 分别等价于 N 和 P 上的 Set-Freyd 范畴，因为 (Set $\times, \times$) 是一个余完备双幺半范畴。

6 富化变换

定义富集范畴之后，自然的下一步是考虑富化变换。任意单oidal 函子 V $\to$ W 都会诱导一个函子 V-Cat $\to$ W-Cat。我们将证明，对于双幺半范畴与富集 Freyd 范畴之间适当类型的函子，同样的结论也成立（见第 6.1 节）。随后，我们将利用这一点，放宽第 5 节抽象刻画中对二元幺半群余完备性的限制（见第 6.2 节），代价是失去对应关系的一个方向。最后，沿遗忘函子改变富化会得到一个底层（未富集的）Freyd 范畴 J: M $\to$ C，其中 C 是单oidal 的；我们将证明，它能恢复第 3 节示例中的纯计算（见第 6.3 节）。

6.1 提升双幺半函子

要讨论富化变换，我们首先需要定义富集范畴之间适当类型的函子，以便沿着它们进行变换。

定义 *11.* *[2,* 定义 *6.54]*取双幺半范畴 $(V, *_{\mathbf{V}}, J_{\mathbf{V}}, \circ_{\mathbf{V}}, I_{\mathbf{V}})$ 和 $(W, *_{\mathbf{W}}, J_{\mathbf{W}}, \circ_{\mathbf{W}}, I_{\mathbf{W}})$。函子 $F: V \to W$ 若配备 $\eta_*, \mu_*, \eta_\circ$ 和 $\mu_\circ$，且 (F, η_*, μ_*) 关于 $*_{\mathbf{V}}$ 和 $*_{\mathbf{W}}$ 是松幺半的，$(F, \eta_\circ, \mu_\circ)$ 关于 $\circ_{\mathbf{V}}$ 和 $\circ_{\mathbf{W}}$ 是松幺半的，并且下列图表可交换，则称其为双重松幺半函子：

$$
\begin{array}{ccc}
(F(A) \circ_{\mathbf{W}} F(B)) *_{\mathbf{W}} (F(C) \circ_{\mathbf{W}} F(D)) & \xrightarrow{\zeta} & (F(A) *_{\mathbf{W}} F(C)) \circ_{\mathbf{W}} (F(B) *_{\mathbf{W}} F(D)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_\circ * \mu_\circ} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_* \circ \mu_*} \\
F(A \circ_{\mathbf{V}} B) *_{\mathbf{W}} F(C \circ_{\mathbf{V}} D) & & F(A *_{\mathbf{V}} C) \circ_{\mathbf{W}} F(B *_{\mathbf{V}} D) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_*} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_\circ} \\
F((A \circ_{\mathbf{V}} B) *_{\mathbf{V}} (C \circ_{\mathbf{V}} D)) & \xrightarrow[F\zeta]{} & F((A *_{\mathbf{V}} C) \circ_{\mathbf{V}} (B *_{\mathbf{V}} D))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
F(J_{\mathbf{V}}) & \xrightarrow{F\epsilon} & F(I_{\mathbf{V}}) \\
{\scriptstyle \eta_*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \eta_\circ} \\
J_{\mathbf{W}} & \xrightarrow[\epsilon]{} & I_{\mathbf{W}}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
J_{\mathbf{W}} & \xrightarrow{\eta_*} & F(J_{\mathbf{V}}) & \xrightarrow{F\Delta} & F(J_{\mathbf{V}} \circ_{\mathbf{V}} J_{\mathbf{V}}) \\
{\scriptstyle \Delta}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \mu_\circ} \\
J_{\mathbf{W}} \circ_{\mathbf{W}} J_{\mathbf{W}} & & \xrightarrow[\eta_* \circ \eta_*]{} & & F(J_{\mathbf{V}}) \circ_{\mathbf{W}} F(J_{\mathbf{V}})
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
I_{\mathbf{W}} & \xrightarrow{\eta_\circ} & F(I_{\mathbf{V}}) & \xleftarrow{F\nabla} & F(I_{\mathbf{V}} *_{\mathbf{V}} I_{\mathbf{V}}) \\
{\scriptstyle \nabla}\uparrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \mu_*} \\
I_{\mathbf{W}} *_{\mathbf{W}} I_{\mathbf{W}} & & \xrightarrow[\eta_\circ * \eta_\circ]{} & & F(I_{\mathbf{V}}) *_{\mathbf{W}} F(I_{\mathbf{V}})
\end{array}
$$

现在给出二元幺半群富集的 Freyd 范畴的富集变换定理。

定理 *4.* 设 $F: V \to W$ 是一个双重松幺半函子。对于一个 *V-Freyd* 范畴 $C : M^{\mathrm{op}} \times M \to V$，定义 $\overline{F}(C)(a, b) := F(C(a, b))$，其结构映射为 $idt_{\overline{F}} := F idt.\eta_\circ$、$seq_{\overline{F}} := F seq.\mu_\circ$、$zero_{\overline{F}} := F zero.\eta_*$ 和 $par_{\overline{F}} := F par.\mu_*$。对于一个映射 $G = (G_0, G_1) : C \to C'$，定义 $\overline{F}(G) := (G_0, FG_1)$。这 $\overline{F}$是一个从 *V-Freyd* 到 *W-Freyd* 的函子。

证明。见附录 C。

例 8. 设 M 和 N 是分离幺半群，且 ϕ: $M \to N$ 是一个同态，满足若 $\phi(m) \parallel \phi(m')$，则 $m \parallel m'$。那么 ϕ 诱导出一个双重松幺半函子 ϕ_*: $\mathrm{Label}_M \to \mathrm{Label}_N$，其在对象上的作用为 $\ell \mapsto \phi.\ell$，在态射上的作用为 $f \mapsto f$。映射 η_*、μ_*和 $\eta_\circ$ 都是恒等映射，而$\mu_\circ$: $\{(a, a') \mid \phi.\ell(a) \| \phi.\ell'(a')\} \to \{(a, a') \mid \ell(a) \| \ell'(a')\}$ 是包含映射，因此ϕ_* 显然是双重松幺半的。沿着映射 $\mathcal{P}_f(!)$: $\mathcal{P}_f(R) \to \mathcal{P}_f(1)$ 将定理 4 应用于第 3.1 节中的例子。该映射是一个同态，满足若 $\mathcal{P}_f(!)(P) \cap \mathcal{P}_f(!)(Q) = \emptyset$，则 $P \cap Q = \emptyset$。我们得到 $\mathcal{P}_f(!)_*(\mathrm{C})(a, b) = \sum_{Q \in \mathcal{P}_f(R)} (\mathrm{Set}(a \times \Pi_Q, b \times \Pi_Q)) \to \mathcal{P}_f(1)$，$(Q, f) \mapsto \emptyset$若 $Q = \emptyset$，否则为 1。这种富集变换使该例子变为：只有当至少一个映射不需要资源时，才允许将映射并行组合。

例 *9*。我们可以对第 3.2 节的带指标状态示例使用富集变换。考虑 (Set $\times$, 1) 的例 6（本例中使用宇宙以避免大小问题）。在那里，Day 卷积 $\times_{\mathrm{Day}}$ 简化为 $(P \times_{\mathrm{Day}} Q)(a, b) = \int^{b_2,\ b_2} \mathrm{Set}(b_1 \times b_2, b) \times P(a, b_1) \times Q(a, b_2)$，其单位变为$k(a, b) = b$。Kleisli 构造将 Set 上的有限保持自函子转化为预函子，具体如下。定义 Kl: $[\mathrm{Set}, \mathrm{Set}]_f \to \mathrm{Prof}\,(\mathrm{Set})$，使 $\mathrm{Kl}(F)(a, b) = \mathrm{Set}(a, Fb)$，并定义相干映射：

$$\begin{aligned} \eta_* \colon k &\to \mathrm{Kl}(\mathrm{Id}) \\ b &\mapsto \mathsf{cst}_b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_* \colon \mathrm{Kl}(F_1) \times_{\mathrm{Day}} \mathrm{Kl}(F_2) &\to \mathrm{Kl}(F_1 \times_{\mathrm{Day}} F_2) \\ (k, f_1, f_2) &\mapsto \lambda a.(k, f_1(a), f_2(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_\circ \colon \hom &\to \mathrm{Kl}(\mathrm{Id}) \\ f &\mapsto f \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_\circ \colon \mathrm{Kl}(F) \diamond \mathrm{Kl}(G) &\to \mathrm{Kl}(F \circ G) \\ (f, g) &\mapsto Fg.f \end{aligned}$$

这使 Kl 成为双重松单oidal函子。于是，定理 4 给出了一个由 $\mathrm{Kl}(\mathrm{C})(a, b)(x, y) := \mathrm{Set}(x, (b \times y)^a)$ 定义的 Prof (Set)-Freyd 范畴。

6.2 Yoneda 嵌入

小幺半群范畴的 Yoneda 嵌入相对于 Day 卷积是一个强幺半群函子。这一结论可推广到小双幺半范畴。

命题 *6. Yoneda* 嵌入 $V \to [V^{\mathrm{op}}, \mathit{Set}]$ 是从小（V $*, J, \circ, I$）到 $([V^{\mathrm{op}}, \mathit{Set}], *_{\mathrm{Day}}, V(-, J)\ \circ_{\mathrm{Day}}, V(-, I))$的双重松单*oidal*函子。

证明。 关于它对每种幺半结构分别是松幺半函子这一事实，参见 [11] 。定义 11 的图表可直接验证。

由定理 4 可知，对于小 V，每个 V-Freyd 范畴都会导出一个$[V^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$-Freyd 范畴。但 $[V^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ 是双幺半余完备的，因此满足定理 3 的抽象刻画所适用的条件。由此可见，这种刻画的适用范围并不限于双幺半余完备的情形：对于小 V，每个 V-Freyd 范畴都会导出 $\mathrm{MonCat}_{\mathbf{lax}}(M^{\mathrm{op}} \times M, [V^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}])$ 中的一个幺半群。

6.3 遗忘函子

任何富化于幺半群范畴 V 的范畴，都有一个底层（未富化）范畴；这是通过沿着“遗忘”幺半群函子 $\mathrm{V}(I, -)\colon \mathrm{V} \to \mathrm{Set}$ 改变富化得到的。双幺半范畴中也有类似的过程。

命题 7。 设 $(\mathbf{V}, *, J, \circ, I)$ 是一个双幺半范畴，并将 $\phi\colon\ J \to J * J$ 记作单位子的逆。则 $\mathbf{V}(J, -)\colon\ \mathbf{V} \to \mathbf{Set}$ 是一个带相干映射的双重松单*oidal*函子：

$$\begin{aligned} \eta_*\colon 1 &\to \mathbf{V}(J,J) & \mu_*\colon \mathbf{V}(J,A_1)\times\mathbf{V}(J,A_2) &\to \mathbf{V}(J, A_1 * A_2)\\ \star &\mapsto \mathrm{id} & (f_1, f_2) &\mapsto (f_1 * f_2).\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_\circ\colon 1 &\to \mathbf{V}(J,I) & \mu_\circ\colon \mathbf{V}(J,A_1)\times\mathbf{V}(J,A_2) &\to \mathbf{V}(J, A_1 \circ A_2)\\ \star &\mapsto \epsilon & (f_1, f_2) &\mapsto (f_1 \circ f_2).\Delta \end{aligned}$$

在前一个命题的遗忘函子下应用定理4，并考虑第 3 节中的例子，将表明这恢复了底层的纯计算。注意，Set-弗雷德范畴 C 具有交换公理（公理八）的平凡实例，因此 C 是一个幺半群范畴，并且具有恒等于对象的幺半群函子 $J\colon \mathrm{M} \to \mathrm{C}$。

例 *10*。 将遗忘函子应用于第 3.1 节的有状态函数示例，会得到一个（未富集的）范畴，其同态集为 $\mathrm{Label}_{\mathcal{P}_f(R)}(\mathrm{cst}_\emptyset, \mathrm{C}(a,b))$。由于标签得到保留，该（未富集）范畴中的态射恰好是 $\mathrm{C}(a,b)$ 中具有标签 $\emptyset$ 的元素，即 映射 $a\times 1 \to b\times 1$，它们是纯函数。

例 *11.* 将第 3.2 节中带指标状态示例的富化沿遗忘函子改变，可得到一个（未富化的）范畴，其同态集为 $[\mathrm{Set}, \mathrm{Set}]_f(\mathrm{Id}, \mathrm{C}(a,b))$。若 $\phi\colon \mathrm{Id} \to (b\times(-))^a$ 是这样一个自然变换，则函数 $\phi_1\colon\ 1 \to (b\times 1)^a$（这等价于选取一个函数 $f\colon\ a \to b$）完全确定了 ϕ，因为对于任意集合 X 以及 $x \in X$，由自然性可得 $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{\phi_X} (b\times X)^a = 1 \xrightarrow{\phi_1} (b\times 1)^a \xrightarrow{(\mathrm{id}\ \times x\ .-\ )} (b\times X)^a$，因此 $\phi_X(x)(a) = (f(a)\ x)$。所以，这个（未富化的）范畴中的态射都是函数 $a \to b$。

例 *12.* 沿遗忘函子改变第 3.3 节中 Lawvere 理论的 Kleisli 范畴示例的富化，得到同态集为 $[\mathrm{Law}, \mathrm{Set}](1, \mathrm{C}(a,b))$ 的（未富化）范畴。考虑这样的自然变换 $\phi\colon\ \mathbb{1} \to T(-)(b)^a$。它完全由其在 $\mathcal{S}$ 处的分量确定。对于任意 $\mathcal{L}$，令 $\iota\colon\ \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ 为唯一映射，则自然性蕴含 $\phi_{\mathcal{L}} = T(\iota)\phi_{\mathcal{S}}$。此外，$\phi_{\mathcal{S}}(\star) \in T(\mathcal{S})(b)^a = b^a$。因此，这个（未富化）范畴中的态射仍然是所有函数 $a \to b$。

7 结论

我们定义了一个富化于任意双幺半范畴 V 上的 Freyd 范畴版本，以及它们之间的态射。我们利用各种双幺半范畴，给出了基于资源分离、参数化单子以及 Lawvere 理论的 Kleisli 构造的示例。通过使用 Subset 进行富化，我们证明了 Freyd 范畴范畴 Freyd 是 Subset-Freyd 的全余反射子范畴，从而确立了 V-Freyd 范畴确实是 Freyd 范畴的推广。此外，我们证明了双幺半余完备 V 上小 M 的 V-Freyd 范畴的抽象刻画：它们是 $\mathrm{MonCat}_{\mathbf{lax}}\big(\mathrm{M}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{M}, \mathrm{V}\big)$ 中的幺半群。最后，我们介绍了富化变换及其相关示例。

未来工作 还有几个值得进一步研究的方向：

– 第 5 节的抽象刻画可能属于一种更大的结构，即带有 proarrow 配备的双范畴，其对象是幺半群范畴，箭头是强幺半群函子，proarrow 是松幺半预函子，而单元是松幺半自然变换。在这种框架下，V-Freyd 范畴将是一个单子，而垂直单子态射将是一个 V-Freyd 态射。这将使我们能够应用双范畴中单子的一般构造。– 相关地，$\mathrm{MonCat}_{\mathbf{lax}}(\mathrm{M}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{M}, \mathrm{V})$ 上的*fc*-多范畴 结构或许可以绕过余完备性，从而将 V-Freyd 范畴刻画为幺半群。– 第 5 节的抽象刻画还使用了 M 上的自由 V-范畴。或许可以改变 V-Freyd 范畴的定义，将其定义为一个 V-函子 $J\colon \mathrm{M} \to \mathrm{C}$，并以类似 Morrison 和 Penneys [16] 的方式扩展 V-范畴。– Freyd 范畴可以具有闭性质。在这种情况下，它们会导出一个强单子。V-Freyd 范畴或许也可以采用类似的定义。这可能为基于双幺半范畴的有效程序确定一种高阶语义。非平凡的闭结构定义可能需要一个并非自由的 V-范畴 M。– 我们最初的动机源于对一种语义的需求：将可微编程与概率编程结合起来，尤其是希望概率片段具有线性结构，而可微项具有笛卡尔结构。Prof-Freyd 范畴或许能提供有用的区分，以帮助实现线性性质与笛卡尔性质之间所需的区分。

致谢 我们感谢 Robin Kaarsgaard、Ohad Kammar 和 Matthew Di Meglio 提供的意见与鼓励，也感谢本作品所有版本的审稿人。

参考文献

1. Adamek, J., Rosicky, J.：局部可呈示且可及范畴。剑桥大学出版社（1994）。https://doi.org/10.1017/CBO9780511600579

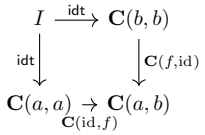
2. Aguiar, M., Mahajan, S.：幺半群函子、物种与 Hopf 代数。美国数学学会（2010 029 3 10 1090）。https://doi.org/。/crmm/。Atkey, R.：参数化单子的代数。载于：Kurz, A., Lenisa, M., Tarlecki, A.（编）《计算机科学中的代数与余代数》，《计算机科学讲义》，第5728卷，第3–17页。Springer（2009）。https://doi.org/10 1007 978 3 642 03741 2_2。/----。Batanin, M., Markl, M.：丰4富幺半群范畴中的中心与同伦中心。《数学进展》230，1811–1858（2012）。https://doi.org/10 011 5 1016 2012 04。/j.aim.。。。Day, B.：论函子的闭范畴。载于：《中西部范畴研讨会》。《数学讲义》，第137卷，第1–38页（1970）6. Forcey, S.：关于迭代幺半群范畴的富化。《代数与几何拓扑》4，95 95 7 119 2004 10 2140 2004 4 –（）。https://doi.org/。/agt.。。。Fujii, S.：代数理论概念的统一框架。《范畴理论及其应用》34(40)，1246–1316（2019）8. Garner, R., López Franco, I.：交换性。《纯粹与应用代数杂志》220 003 9 5 1707 1751 2016 10 1016 2015 09（），–（）。https://doi.org/。/j.jpaa.。。。Grandis, M.：《范畴论及其应用：初学者教材》。World Scientific，第2版（Apr 2 12253 10 2021）（）。https://doi.org/。/。Hyland, M., Plotkin, G., Power, J.：组合效应：和与张量。《理论计算机科学》357 013 11 1 3 70 99 2006 10 1016 2006 03（–），–（）。https://doi.org/。/j.tcs.。。。Im, G.B., Kelly, G.M.：卷积幺半群结构的一个泛性质。《纯粹与应用代数杂志》43，75–88（1986）。https://doi.org/10 8 12 1016 0022 4049 86 90005。/-（）-。Jacobs, B., Heunen, C., Hasuo, I.：箭范畴语义。《函数式编程杂志》19(3–4)，403–438（2009）。https://doi.org/10 0956796809007308 13 1017。/S。Lack, S.：复合 PROP。《范畴理论及其应用》13(9)，147–163（2004）14. Levy, P.B., Power, J., Thielecke, H.：按值调用编程语言中的环境建模。《信息与计算》185(2)，182–210（2003）。https://doi.org/10 9 15 1016 0890 5401 03 00088。/S -（）-。Moggi, E.：计算概念与单子。《信息与计算》93，55 92 1991 10 1016 0890 5401 91 90052 –（）。https://doi.org/。/-（）-4 16. Morrison, S., Penneys, D.：在辫幺半群范畴中富化的幺半群范畴。《国际数学研究通报》11，3527–3579（2019）。https://doi.org/10 217 17 1093。/imrn/rnx。Plotkin, G., Power, J.：计算效应与操作：概述。载于：《域》。《理论计算机科学电子笔记》，第73卷，第149–163页（2004 008 18 10 1016 2004 08）。https://doi.org/。/j.entcs.。。。Power, J., Robinson, E.：前幺半群范畴与计算概念。《计算机科学中的数学结构》7(5)，453–468（1997）。https://doi.org/10 0960129597002375 19 1017。/S。Power, J.：作为具有代数结构的范畴的前幺半群范畴。《理论计算机科学》278(1-2)，303–321（2002年5月）。https://doi.org/10.1016/S0304-3975(00)00340-6，https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397500003406，出版商：Elsevier 20. Staton, S.：Freyd 范畴是富化的 Lawvere 理论。载于：《代数、余代数与拓扑研讨会论文集》。《电子

《理论计算机科学电子笔记》，第 303 卷，第 197–206 页（2014 年）。
https://doi.org/10.1016/j.entcs.2014.02.010

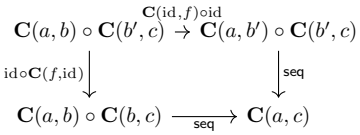
V-Freyd 范畴的定义

本附录详细列出了 V-Freyd 范畴定义 6 中的类型图。

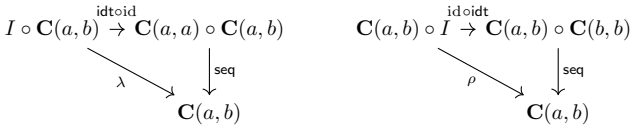
idt 的外自然性：



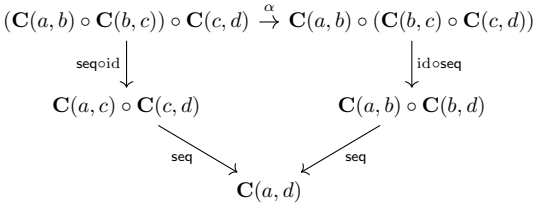
seq 的外自然性：



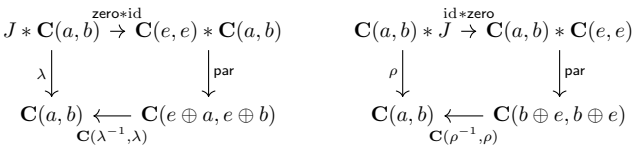
idt **是**seq**的恒等元：**



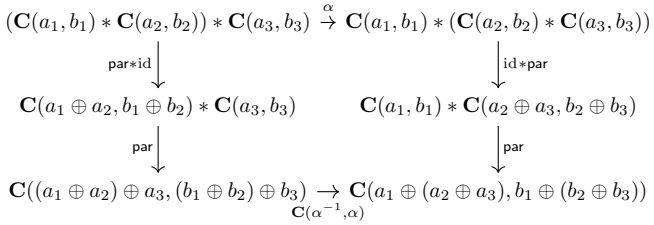
seq**满足结合律：**



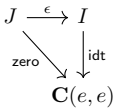
零 是par**的恒等元：**



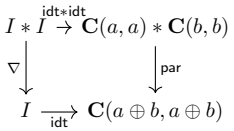
par **具有结合性：**



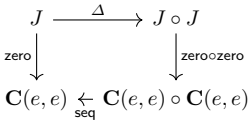
idt **保零：**



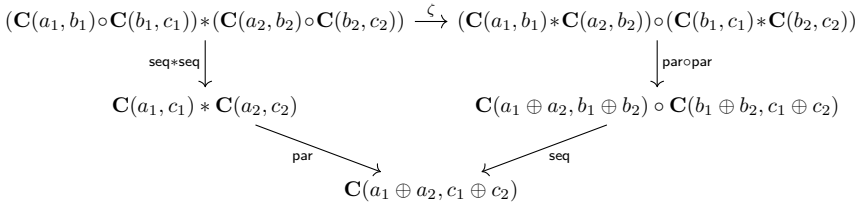
idt **保 par：**



seq**保** 零**：**



seq**保** par**：**



B 抽象刻画的证明

本附录包含第 5 节中 V-Freyd 范畴抽象刻画的证明。这些证明依赖于以下四个引理中列出的 V-Freyd 范畴性质，这些性质可以通过机械方式验证。

引理 1. ∘ 的单位子与零和par相容：

$$\rho.\mathsf{zero} = (\mathsf{zero} \circ \epsilon).\Delta \qquad \mathsf{zero}.\lambda = (\epsilon \circ \mathsf{zero}).\Delta$$
$$\rho.\mathsf{par} = (\mathsf{par} \circ \nabla).\zeta.(\rho * \rho) \qquad \mathsf{par}.\lambda = (\mathsf{par} \circ \nabla).\zeta.(\lambda * \lambda)$$

引理 2. $\circ$ 的结合子与零和par相容：

$$\alpha.(\mathsf{zero} \circ (\mathsf{zero} \circ \mathsf{zero})).(\mathrm{id} \circ \Delta).\Delta = ((\mathsf{zero} \circ \mathsf{zero}) \circ \mathsf{zero}).(\Delta \circ \mathrm{id}).\Delta$$
$$\alpha.(\mathsf{par} \circ (\mathsf{par} \circ \mathsf{par})).(\mathrm{id} \circ \zeta).\zeta = ((\mathsf{par} \circ \mathsf{par}) \circ \mathsf{par})).(\zeta \circ \mathrm{id}).\zeta.(\alpha * \alpha)$$

引理 3. $*$ 的单位子与零和par相容：

$$\mathrm{id} = (\mathsf{par} \circ \mathsf{par}).\zeta.(\mathrm{id} * ((\mathsf{zero} \circ \mathsf{zero}).\Delta)).\rho$$
$$\mathrm{id} = (\mathsf{par} \circ \mathsf{par}).\zeta.(((\mathsf{zero} \circ \mathsf{zero}).\Delta) * \mathrm{id}).\lambda$$

引理 4. $*$ 的结合子与par相容：

$$((\mathsf{par}.(\mathsf{par} * \mathrm{id})) \circ (\mathsf{par}.(\mathsf{par} * \mathrm{id})).\zeta.(\zeta * \mathrm{id}) =$$
$$((\mathsf{par}.(\mathrm{id} * \mathsf{par})) \circ (\mathsf{par}.(\mathrm{id} * \mathsf{par})).\zeta.(\mathrm{id} * \zeta).\alpha$$

前述引理合起来要求了双幺半范畴的所有公理，唯独不包括 $\circ$ 是 $(\mathrm{V}\ *, I)$ 中的幺半群这一条件。抽象刻画中用到了这一性质。

证明（命题 *3* 的证明）。双函子性继承自 $\hom_{\mathrm{M}}$。使其成为松幺半函子的相干态射为 $\eta\colon I \xrightarrow{\epsilon} I \xrightarrow{\iota_{\mathrm{id}_0}} \coprod_\sigma I \cong \hom_{\mathrm{M}}(e,e)$ 和

$$\mu\colon \left(\coprod_{\sigma_1} I\right) * \left(\coprod_{\sigma_2} I\right) \cong \coprod_{\sigma_1,\sigma_2} I * I \xrightarrow{\coprod \nabla} \coprod_{\sigma_1,\sigma_2} I \xrightarrow{[\iota_{\sigma_1 \oplus \sigma_2}]_{\sigma_1,\sigma_2}} \coprod_\sigma .$$

相干图表由余连续性和单oidal 结构 (I, ∇, ϵ) 保证可交换。

证明（命题 *4* 的证明）。相干态射如下：

$$\begin{aligned}
&\eta_{S \hat{\circ} T}\colon J \xrightarrow{\Delta} J \circ J \xrightarrow{\eta_S \circ \eta_T} T(e,e) \circ S(e,e) \to \textstyle\int^b T(e,b) \circ S(b,e) \cong (S \hat{\circ} T)(e,e)\\
&\mu_{S \hat{\circ} T}\colon (S \hat{\circ} T)(a,c) * (S \hat{\circ} T)(a',c')\\
&\quad \simeq \textstyle\int^{b,b'} (T(a,b) \circ S(b,c)) * (T(a',b') \circ S(b',c'))\\
&\quad \xrightarrow{\int \zeta} \textstyle\int^{b,b'} (T(a,b) * T(a',b')) \circ (S(b,c) * S(b',c'))\\
&\xrightarrow{\int \mu_T \circ \mu_S} \textstyle\int^{b,b'} T(a \oplus a', b \oplus b') \circ S(b \oplus b', c \oplus c')\\
&\quad \to \textstyle\int^b T(a \oplus a', b) \circ S(b, c' \oplus c') \simeq (S \hat{\circ} T)(a \oplus a', c \oplus c')
\end{aligned}$$

余连续性以及引理 3 和引理 4 完成了证明。

引理 5. 命题 *4* 的 $\circ$-复合具有函子性。

证明。 容易看出，$\hat{\circ}$ 在对象上定义良好。态射上的双函子性则由 $\circ$ 的双函子性和余端的函子性得出。

引理 6。 命题 *3* 的函子同态$_{\mathbf{M}}$ 是命题 *4* 中 $\circ$-复合的左单位元和右单位元。

证明。 对象上的同构涉及余连续性、 $\circ$的单位子，以及沿恒等映射的左 Kan 延拓。自然性继承自相关构造的自然性。单位子还必须是单oidal自然变换，这可由余连续性和引理 1 得出。

引理 7。 命题 *4* 中的 $\circ$-复合是结合的。

证明。 该同构利用了余连续性和 $\circ$的结合子。自然性继承自相关构造的自然性。结合子由余连续性和引理 2 可知是单oidal自然变换。

C 富化变换的证明

证明（定理 *4* 的证明）。根据松幺半群函子的公理，公理 i 至 iv 成立，理由与松幺半群函子保持幺半群相同。公理 v 至 viii 各自都需要用到双重松单oidal函子的一条公理，如下所示。

$$\begin{aligned}
\mathsf{idt}_F.\epsilon &= F\mathsf{idt}.\eta_\circ.\epsilon \\
&= F\mathsf{idt}.F\epsilon.\eta_* \\
&= F\mathsf{zero}.\eta_* \\
&= \mathsf{zero}_F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{idt}_F.\nabla &= F\mathsf{idt}.\eta_\circ.\nabla \\
&= F\mathsf{idt}.F\nabla.\mu_*.(\eta_\circ * \eta_\circ) \\
&= F\mathsf{par}.F(\mathsf{idt} * \mathsf{idt}).\mu_*.(\eta_\circ * \eta_\circ) \\
&= F\mathsf{par}.\mu_*.(F\mathsf{idt} * F\mathsf{idt}).(\eta_\circ * \eta_\circ) \\
&= \mathsf{par}_F.(\mathsf{idt}_F * \mathsf{idt}_F)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{seq}_F.(\mathsf{zero}_F \circ \mathsf{zero}_F).\Delta &= F\mathsf{seq}.\mu_\circ.(F\mathsf{zero} \circ F\mathsf{zero}).(\eta_* \circ \eta_*).\Delta \\
&= F\mathsf{seq}.F(\mathsf{zero} \circ \mathsf{zero}).\mu_\circ.(\eta_* \circ \eta_*).\Delta \\
&= F\mathsf{seq}.F(\mathsf{zero} \circ \mathsf{zero}).F\Delta.\eta_* \\
&= F\mathsf{zero}.\eta_* \\
&= \mathsf{zero}_F
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{seq}_F.(\mathsf{par}_F \circ \mathsf{par}_F).\zeta &= F\mathsf{seq}.\mu_\circ.(F\mathsf{par} \circ F\mathsf{par}).(\mu_* \circ \mu_*).\zeta \\
&= F\mathsf{seq}.F(\mathsf{par} \circ \mathsf{par}).\mu_\circ.(\mu_* \circ \mu_*).\zeta \\
&= F\mathsf{seq}.F(\mathsf{par} \circ \mathsf{par}).F\zeta.\mu_\circ.(\mu_* \circ \mu_*) \\
&= F\mathsf{par}.F(\mathsf{seq} * \mathsf{seq}).\mu_\circ.(\mu_* \circ \mu_*) \\
&= F\mathsf{par}.\mu_\circ.(F\mathsf{seq} * F\mathsf{seq}).(\mu_* \circ \mu_*) \\
&= \mathsf{par}_F.(\mathsf{seq}_F * \mathsf{seq}_F)
\end{aligned}$$

类似的检验表明， $\overline{F}(G)$ 是一个 W-Freyd 映射。由于 F 的函子性， $\overline{F}$ 具有函子性。