arXiv:2301.05171v1 [math.CO] 12 Jan 2023

笛沙格射影平面中卵形的塞格雷定理

Patrick J. Browne* Steven T. Dougherty† Padraig ´O Cath´ain‡2023年1月13日

摘要

塞格雷关于射影空间中卵形的定理，是二十世纪中叶的一项巧妙成果，证明所需的背景知识出乎意料地少。本文适合有线性代数和抽象代数基础的本科生，给出了完整且自成一体的证明。所有必要的预备知识，主要包括在射影点处求齐次多项式的值以及笛沙格定理，均作了完整阐述。本文遵循塞格雷证明的大致思路，同时对若干切线进行细致的参数化，从而比原始证明的计算更简短、更简单。

数学史上最重要的进展之一，是十七世纪主要由笛卡尔推动的发现：几何可以用代数的方式来理解。例如，几何上，圆被定义为与给定点距离相等的点的集合。代数上，这可以理解为满足 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. 的 x 和 y 的集合。在这一框架下，直线和圆锥曲线也可以用代数方式描述。这一联系的力量在于，人们既能保留几何直觉，又能借助代数构建严谨的证明。毫不夸张地说，这一发现促成了微积分、微分方程、线性代数以及现代数学大部分分支的发展。本文将探讨一个几何对象与其代数描述之间引人入胜的联系，不过这一次是在有限射影空间中。

射影几何的研究源于文艺复兴时期的艺术家试图在二维画布上准确描绘三维场景。到了十八世纪，人们认识到，与欧几里得空间相比，在射影空间中研究几何要容易得多，而射影几何至今仍是现代数学的核心研究对象。本文只讨论维数最低的射影空间，即射影平面。我们的目的是证明 Segre 的一条定理，该定理将某些组合构型与适当多项式取值为 0 的点集对应起来。

射影平面可通过以下公理来定义。

*Technological University of the Shannon: Midlands Midwest，爱尔兰
†University of Scranton
‡都柏林城市大学

定义 1. 射影平面由点、直线以及关联关系构成，该关系将点与直线联系起来，并满足以下公理：

1. 任意两个不同的点都唯一确定一条与它们关联的直线。

2. 任意两条不同的直线都与唯一一个点关联。

3. 存在四个点，其中任意三点都不在同一条直线上。

第三条公理是必要的，它保证某些退化几何对象不会成为平面（例如，所有点都位于同一条直线上的情形）。可以从二维向量空间构造射影平面，方法是通过添加若干个无穷远点[1]来“完备化”该空间。从数学上说，从三维向量空间开始更为方便。将一维子空间定义为射影点，将二维子空间定义为射影直线，并以包含关系[2]定义关联。验证射影平面的公理只需用到初等线性代数：

1. 两个不同的一维子空间张成唯一一个二维空间。

2. 两个不同的二维子空间必定相交于一个一维空间（因为这两个空间都位于一个三维空间中——如果我们从维数为 ≥ 4 的向量空间开始，这一结论就不成立）。

3. 存在四条直线，其中任意三条都张成整个空间，例如考虑由以下向量张成的直线

$$(1,0,0),\quad (0,1,0),\quad (0,0,1),\quad (1,1,1)\,,$$

相对于任意一组基。

射影平面由三维向量空间构造而成，但它实际上是一个二维对象：形如 $[1:y:z]$ 的点显然构成一个二维平面，而其余的点 $[0:1:z]$ 通常称为无穷远点。每一类平行线都交于一个无穷远点，且所有无穷远点共线。由于同一空间有这两种不同的描述，我们便能选用更便于证明给定结论的那一种。透视绘图中的消失点可以视为无穷远点；而且（至少在闭上一只眼睛时）我们在视觉上感知到的是实射影平面，而非三维欧几里得空间。

虽然可以利用任意域上的三维向量空间构造射影平面，但有限域的情形尤为重要，由此得到有限射影平面。对于任意素数幂阶 q，都存在一个有限域，在同构意义下唯一，我们记作 $\mathbb{F}_q$，[7]。（对于经验较少的读者，素数阶 p 的域恰好是模 p 的整数。本文通篇考虑这一情形并不会损失任何一般性。）

[1]在有限平面中，这些点并没有任何无限之处。在由欧几里得平面构成的无限射影平面中，这些点似乎与其他所有点都相距无限远。[2]读者应注意，射影维数通常比标准的向量空间维数小一。本文余下部分所说的维数均指射影维数。

不难证明， $\mathbb{F}_q$ 上三维向量空间中一维和二维子空间的数量均为 q^2+q+1，而二维空间中一维子空间的数量为 $q+1$。由此可知，由向量空间构造的有限射影平面必有 q^2+q+1 个点，且直线数量相同。此外，每条直线上有 $q+1$ 个点，每个点都关联 $q+1$ 条直线。顶尖数学家曾研究过射影平面：希尔伯特和阿廷都撰写过面向本科生、介绍几何学基础的著作，并特别着重讨论射影平面， [5, 1]。有限射影平面是一个更为专门的主题，不过仍有专著专门论述。休斯和派珀以及其中一位作者撰写了适合高年级本科生阅读的著作，而登博夫斯基的作品则更具挑战性， [6, 4, 3]。

我们通常用坐标 $[a:\ b:c]$表示直线 $\{(at,\ bt,\ ct):\ \ t\in\mathbb{F}_q\}$。有时，为了方便，会将射影坐标规范化，使第一个非零项为 1：若 a 非零，则射影点 $[a:\ \ b:\ \ c]$ 与$[1:\ a^{-1}c:\ \ a^{-1}b]$ 相等。

定义 2。如果一个射影平面由域（或更一般地，由除代数）上的三维向量空间构造而成，则称其为笛沙格平面。等价地说，如果它允许使用域（或除环）中的射影坐标，则称其为笛沙格平面。域 k 上的射影平面记作 $\mathrm{PG}_2(k)$。否则，它是非笛沙格平面。

本文只讨论有限域上的笛沙格射影平面。确实存在非笛沙格的有限射影平面。其中最小的一个有 $91=9^2+9+1$个点。这类平面有些可以由所谓的拟域构造而成，但另一些似乎没有可辨识的代数结构。有限射影平面的基础问题之一，是确定哪些阶存在非笛沙格平面。已知不存在含有 $43=6^2+6+1$ 个点或 $111=10^2+10+1$ 个点的此类平面，但含有 $157=12^2+12+1$ 个点的平面是否存在，以及无穷多个更大的取值对应的平面是否存在，仍是未解问题。

1 射影平面中的圆锥曲线与卵形

由于一个射影点对应于底层向量空间中的许多不同点，因此在射影点处对多项式求值并无意义；但**可以**判断齐次多项式在射影点处是否为零，正如

$$F(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^k F(x,y,z)$$

对于次数为 k 的齐次多项式。在笛沙格射影平面上，三元齐次多项式取值为零的点的轨迹称为该多项式的簇。我们不打算阐述代数簇理论；感兴趣的读者可参阅 Shafarevich，第 1 [10] 章。

1. 一次齐次多项式在射影平面上描述一条直线。例如，方程 $y=0$ 描述射影点 $[1\colon 0:\ z]$（其中 $z\in\mathbb{F}_q$），以及点 $[0:0:\ 1]$。令 $x+2y-z=0$，得到点 $[x:\ y:\ x+2y]$，其中 $x,\ y\in\mathbb{F}_q$。虽然这个集合看起来可能不是一维的，但在射影几何中令$z=\frac{y}{x}$，可得集合 $[1:_z:\ 1+2z]$，其中 $z\in\mathbb{F}_q$，以及点 $[0:1:\ 2]$。

2. 在实数域上，二次齐次多项式描述圆、椭圆和双曲线。可以说，古希腊几何最伟大的成就，是通过考察平面与三维空间中的圆锥的交点，统一处理这些不同的曲线，因而将二次齐次多项式称为圆锥曲线 。

类比实数情形，我们将**任意**域上的二次齐次多项式称为圆锥曲线。我们很快就会看到，有限域上的圆锥曲线理论与实数域上的情形大不相同。圆锥曲线 $x^2+y^2+z^2$ 上的点对应于射影点 $[x:y:\sqrt{-x^2-y^2}]$，而这在实数域上是空集。另一方面，可以验证 $4^2=-(1^2+2^2) \bmod 7$，因此该簇在 $\mathbb{F}_7$上非空。我们很快将通过纯几何论证看到，奇数阶有限域上的非退化圆锥曲线总是有 $q+1$ 个点。

把簇看作二维平面上某个函数的图像 通常会很有帮助。具体做法是：将分析分解为二维平面 $[1:y:z]$上的点，其中齐次方程 $F(x,\ y,\ z)=0$ 可改写为 $y=f(z)$，然后单独考虑无穷远点。（当然，将 $[x:y:1]$ 归一化会使另一条直线成为无穷远线，从而以不同的视角观察同一个簇。）

回想一下，曲线的切线是一条在局部与曲线仅交于一点的直线。通常，通过将曲线线性化来求其切线（在 $\mathbb{R}$ 上，这可以通过利用偏导数计算法向量并取其正交补来实现）。令人惊讶的是，作为微积分基础的 $\mathbb{R}$ 上的几何直觉，在很大程度上仍适用于有限域，尽管此时不再有收敛性（因此 $\epsilon-\delta$ 的论证不再成立）。本文中，我们在有限域上取形式导数。通常的公式仍然成立，不过需要完全不同的论证；展开这些论证会让我们偏离本文主题太远。我们对此的解释是，这些方法仅用于说明，并非证明主定理所必需。无论如何，我们将有限域上的簇的切线 定义为与该簇仅交于一点的直线。

命题 3. 设 $F(x,y,z)$ 是一个齐次函数，其在射影空间中的簇为 $\mathcal{V}$。 F 在 $v\in\mathcal{V}$ 处的切空间，是法向量 $\nabla F=[\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}]$ 在 v 处取值后相对于标准内积的正交补。

举例或许是最好的说明方式。

例4. 考虑定义在至少含有3个元素的域上的圆锥曲线 $F(x,y,z)=x^2-yz$。对 z 坐标进行归一化可知，这就是标准二次函数 $y=x^2$，再加上无穷远处的点 $[0:1:0]$ 。

F的法向量为 $\nabla F=[\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}]=[2x:-y:-z]$，而该点处的切线是此向量的正交补。

例如，点 $p=[1:1:1]$ 显然属于 F 簇。该点处的法向量为 $[2:-1:-1]$ ，它与例如 $[0:1:-1]$正交。因此， p 处切线的参数化为 $T_p=p+t[0:1:1]=[1:1+t:1-t]$。它

很容易验证， T_p 与该簇相切：将直线上一个一般点代入$F(x,\ y,\ z)$，得到方程

$$1-(1+t)(1-t)=t^2=0$$

它有唯一解。因此， T_p 与该簇仅在 p处相交。

与 $\nabla F(x,y,z)$正交的向量有多种选择，远非唯一。尽管如此，所得切线是唯一的（前提是定义方程满足一些技术条件，而这些条件在本文中总是成立），但参数化未必唯一。将切线视为底层三维向量空间中的二维子空间，并思考此类空间的基并不唯一这一事实，或许能帮助读者理解。

定义5。 射影空间中的一条圆锥曲线 是二次齐次多项式的点轨迹。若圆锥曲线非空且不包含整条射影直线，则称其非退化。

我们注意到，这是对圆锥曲线的一种纯代数描述，不过其灵感来自实数域的几何。

命题6。 $PG_2(\mathbb{F}_q)$ 中的非退化圆锥曲线包含 $q+1$ 个点。非退化圆锥曲线与一条直线至多相交于两点。

证明。 $\mathrm{PG}_2(\mathbb{F}_q)$ 中圆锥曲线的一般方程为 $F(x,\ y,\ z)\ =\ \alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta xy+\epsilon xz+\zeta yz$。法向量为 $\nabla F(x,\ y,\ z)\ =[2\alpha+\delta y+\epsilon z\colon\ 2\beta+\delta x+\zeta z\colon\ 2\gamma+\epsilon x+\zeta y]$，它是关于 $x,\ y,\ z$ 的线性式。当且仅当对应簇中的所有 $[x\colon\ y\ :\ z]$ 都使 $\nabla F(x,\ y,\ z)$ 非零时，圆锥曲线才是非退化的。在这种情况下，法向量唯一确定底层三维向量空间中的一个一维子空间。它有唯一的二维正交补，而该正交补就是射影代数簇的切向量。

对于第二个断言，设 p 是圆锥曲线 F 上的一个点。由于曲线在 p 处有唯一的切线，且经过 p 的直线恰有 $q+1$ 条，因此经过 p 的其余 q 条直线都必须与圆锥曲线交于其他点。经过 p 的直线可用一个线性方程描述，而圆锥曲线可用一个二次方程描述：将前者代入后者，得到一个次数至多为 2 的单变量多项式。一个根对应于 p，因此至多还有一个交点。 □

再次强调，命题6最好通过一个例子来说明。在这个例子之前，我们先介绍一种将反复使用的技巧。

注7。以三个点的坐标为行构成的矩阵，其行列式为零，当且仅当这三个点共线。这类似于：在 $\mathbb{R}^3$ 中，三个点共面，当且仅当由它们的坐标构成的矩阵的行列式为零。

例8. 再次考虑域 $=x^2-yz$ 上的圆锥曲线 $F(x,y,z)$，其中至少有 3 个元素。此前，我们计算了 $[1$ 处的切线：$1:1]$。现在让我们在这条曲线上构造更多的点。

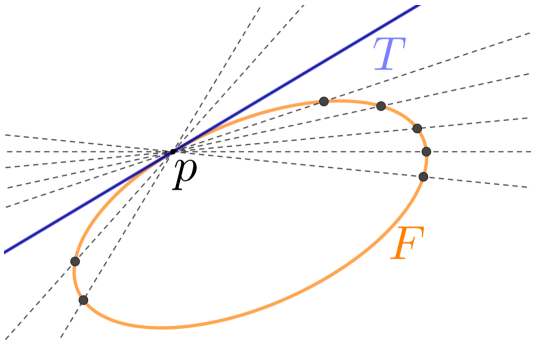

图1：圆锥曲线 F，在点 p 处的切线 T，以及过 p 的直线束及其交点。

经过 p 的任意直线都可以用参数形式写为 $[1+\alpha t:\ 1+\beta t:\ 1+\gamma t]$。对应于 (α,β,γ) 和 (α',β',γ') 的直线互不相同，当且仅当矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$$

可逆。我们来计算直线 $[1+t:\ 1+t:\ 1]$ 与曲线的第二个交点：

$$(1+t)^2-(1+t)=0 \Rightarrow t^2+t=0\,.$$

解 $t=0$ 对应于 p，而解 $t=-1$ 对应于 F 上的点 $[0:0:\ 1]$。这样，F 上的每个点都可以通过求解简单的方程组来构造。

此处建议读者验证：例8中的圆锥曲线在 $q=[0:0:\ 1]$ 处的切线是直线 $\{[1:0:\ t]:\ t\in k\}\cup\{[0:0:\ 1]\}$。此外，对于任意非零的 α，直线 $x=\alpha y$ 都包含 q，而 $[t:\ \alpha t:\ 1]$ 与簇的第二个交点为

$$t^2-\alpha t=0$$

当 $t=\alpha$ 时即会出现这种情况。因此，曲线上的点可用参数化 $[\alpha:\ \alpha^2:\ 1]$ 表示；此外还有一个相对于该参数化的“无穷远”点，即 $[0:1:\ 0]$。

与圆锥曲线的定义不同，下一个定义纯粹是组合性的。

定义9. 射影平面中的一个卵形曲线是该平面点集的一个子集，它与每条直线至多相交于2个点。

命题10. 阶为 q 的射影平面中的卵形曲线至多包含 $q+2$ 个点，其中 q 为偶数；若 q 为奇数，则至多包含 $q+1$ 个点。

证明。用 $\mathcal{O}$ 表示该卵形曲线，令 $p\in\mathcal{O}$ 和 $r\notin\mathcal{O}$。经过 p 的每条直线与卵形曲线至多还能相交于一个点，因此卵形曲线上至多有 $q+2$ 个点。如果有

在 $\mathcal{O}$ 中有 $q+2$ 个点，那么每条与卵形曲线相交的直线都必须与其交于两个点，因此不存在 $\mathcal{O}$ 的切线。

现在假设 $\mathcal{O}$ 含有 $q+2$ 个点，并考虑经过 r 且与$\mathcal{O}$相交的直线。由于每条直线恰好包含两个点，数量 $q+2$，因而 q必为偶数。因此，当 q 为奇数时，卵形曲线至多包含 $q+1$ 个点。□

由命题6和命题10可直接得到许多奇数阶射影平面中的极大卵形实例。

推论11. 奇数阶射影平面中的圆锥曲线是极大卵形曲线。

本文的目标是证明塞格雷定理，即推论的逆命题：有限奇数阶射影平面中的每个极大卵形实际上都是圆锥曲线。读者可能会觉得这个逆命题理所当然，然而，该领域许多杰出的研究者并不认为它成立。J¨arnefelt 和 Kustaanheimo 最先提出了这一猜想，但 Marshall Hall 在评论中表示，他认为这一猜想难以置信， [8]。后来，Hall 在评论 Segre 的论文时称，其证明方法巧妙。

从某种意义上说，Segre 的结果已是最优的：在偶数阶有限平面中，存在含有 $q+2$ 个点的极大卵形，但并非所有这些卵形都能由圆锥曲线构造得到。对偶数阶平面中此类极大卵形的研究，是证明不存在阶为 10, [9] 的射影平面的关键一步。对于无限域上的情形，似乎难以进行分类。

2 Desargues 配置

从历史上看，Desargues 构造并研究了由三维向量空间构造的射影平面。笛沙格定理描述了某一特定配置中各点共线的性质。很久以后，人们才认识到，满足射影平面公理的组合对象确实存在。事实证明，在这些奇异平面中，笛沙格定理的结论通常**不** 成立；事实上，笛沙格定理成立是一个平面能够由一个域坐标化的充要条件。因此，不同作者写笛沙格定理时，所指的命题可能截然不同。我们请读者参阅 Blumenthal [2] 对这一主题所作的通俗且具有历史视角的论述。本节将按照 Desargues 当时的理解来介绍这一结果：也就是说，讨论由一个域坐标化的平面。我们的证明运用线性代数，并将花些篇幅说明其应用，因为塞格雷定理将用到这一结果。

定义 12。 A 三角形 是射影平面上三个不共线点的集合。设 $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ 和 $Q=\{q_1,q_2,q_3\}$ 是射影平面上的两个三角形。如果直线$|p_1q_1|$ 、 $|p_2q_2|$ 和 $|p_3q_3|$ 交于一点，那么 P 和 Q 是从一点透视。这个点称为透视中心。

笛沙格定理指出，在笛沙格射影平面中，从一点透视的两个三角形**必须** 满足一个附加条件。从几何上看，三角形全等边的交点必须共线。从代数上看，这可表示为

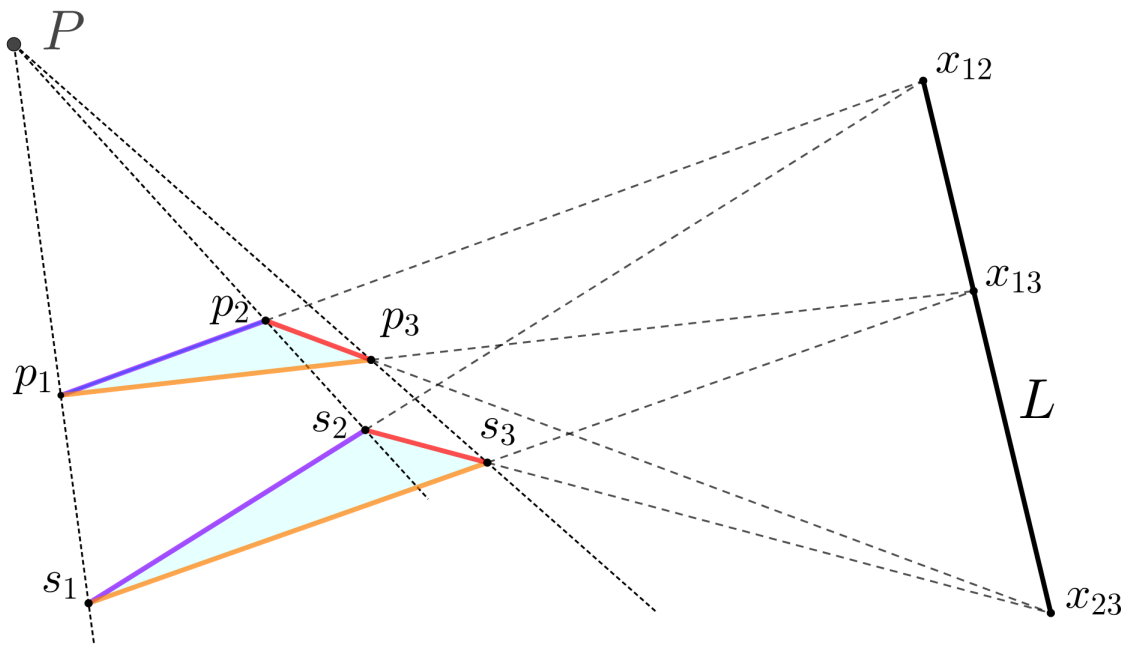

图 2：三角形 $p_1p_2p_3$ 和 $s_1s_2s_3$ 处于透视关系。点 P 是透视中心， L 是透视轴。点 x_{ij} 展示了直线L.的作图

某个行列式为零。以下证明是 Tan 在一篇综述该结果证明技巧的文章中给出的第九种证明， [11]。

定理 13 (笛沙格定理)。 设 $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ 和 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 是射影平面中处于透视关系的三角形。记 x_{ij} 为两个三角形的全等边 $|p_ip_j|$和 $|s_is_j|$ 的交点。

那么， 点 x_{12}、 x_{13} 和 x_{23} 共线。

证明。 根据假设，三角形 P 和 Q 从一点透视；不失一般性，我们可取该点为 $c = [1 : 1 : 1]$。同样不失一般性，我们可以将其中一个三角形的点标记为 $p_1 = [1 : 0 : 0]$, 和 $p_2 = [0 : 1 : 0]$ 和 $p_3 = [0 : 0 : 1]$。

根据假设，点 s_i 位于经过 p_i 和 c的直线上，因此 $s_1 = [1 + t_1 : 1 : 1]$ 和$s_2 = [1 : 1 + t_2 : 1]$, 以及 $s_3 = [1 : 1 : 1 + t_3]$。 两条直线的交点最方便的求法是联立它们的线性方程。要找出经过 s_1 和s_2的直线，只需计算未知数 x_1， x_2， x_3 使下列矩阵的秩亏损所需满足的条件:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1+t_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+t_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

由行列式为零给出的充要条件是 $t_2x_1 + t_1x_2 - (t_1t_2 + t_1 + t_2)x_3 = 0$。 经过 p_1 和 p_2 的直线由方程 $x_3 = 0$给出，这些直线的交点是射影点 $x_{12} = [t_1 : -t_2 : 0]$。 类似的计算

得出 $x_{13} = [-t_1 : 0 : t_3]$ 和 $x_{23} = [0: t_2 : -t_3]$。当且仅当以点为列写出的相应矩阵,

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & -t_1 \\ -t_2 & t_2 & 0 \\ 0 & -t_3 & t_3 \end{pmatrix}$$

秩亏。但很容易看出，列向量 (1，1，1) 属于零空间，由此证明得证。

□

我们用一个例子来说明这个定理，该例将在证明塞格雷定理时用到。

例14。设 $p_1 = [1 : 0 : 0]$、$p_2 = [0 : 1 : 0]$ 和 $p_3 = [0 : 0 : 1]$。那么三角形的直线为 $\ell_{12} = [1: t : 0]$，其方程为 $x_3 = 0$ ；此外还有 ℓ_{13} 和 ℓ_{23}，它们的方程分别为 $x_2 = 0$ 和 $x_1 = 0$。

取 $P_1 = [-1 : 1 : 1]$、$P_2 = [1 : -1: 1]$ 和 $P_3 = [1 : 1 : -1]$，它与第一个三角形透视，透视中心为 $[1 : 1 : 1]$。其直线为 $L_{12} = [-1+t :1-t : 1+t] = [1 : -1 : t]$，方程为 $x_1 + x_2 = 0$。类似地， L_{13} 的方程为 $x_1 + x_3 = 0$，而 L_{23} 的方程为 $x_2 + x_3 = 0$。

ℓ_1 与 L_1 的交点是点 $[1 : -1 : 0]$, ； ℓ_2 与 L_2 的交点是$[0 : 1 : -1]$，而 ℓ_3 与 L_3 的交点是 $[-1 : 0 : 1]$。将这些向量作为列向量写出，我们可以看出矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

的秩不足，这意味着这三个点都位于同一条射影直线上，其方程为 $x + y + z = 0$。

3 主定理

有了必要的背景知识，我们接下来证明塞格雷定理。关键步骤是著名的切线引理，它证明了由一条圆锥曲线构造的一对特定三角形处于透视关系。随后，主要结果运用笛沙格定理，根据这一构形推导出卵形曲线上的点之间的代数关系。引理 15 的证明基本沿用 Segre 的证明，而定理 16 的证明在保留核心论证的同时，在某些细节上有所不同。（Segre 的证明没有提及笛沙格定理，但例如需要用到 Qvist 关于相交切线的一个结果。）

引理 15. 设 p_1、p_2、p_3 是 $PG_2(\mathbb{F}_q)$ 中的卵形曲线上的三个不同点，其中 q 是奇素数幂。定义 s_i 为卵形曲线上 p_{i+1} 和 p_{i+2}处的切线的交点，下标按模3解释。三角形 $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ 和 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 透视。

证明。 不失一般性，我们可以为射影平面选取一个坐标系，使得

$$p_1 = [1:0:0],\ \ p_2 = [0:1:0],\ \ p_3 = [0:0:1]\,.$$

注意，经过 p_1 的 $q+1$ 直线由 q 直线 $L_1(\alpha)$和直线 $L_1(\infty)$组成，其中前者可用形式为 $x_2 = \alpha x_3$ 的方程描述， $\alpha \in \mathbb{F}_q$，而后者的方程为 $x_3 = 0$。直线 $L_1(\infty)$经过 p_2，直线 $L_1(0)$经过 p_3。在其余的 $q-1$中，恰有一条与卵形曲线相切，记作 $L_1(k_1)$。

类似地，定义直线 $L_2(\alpha)$和 $L_3(\alpha)$为分别经过点 p_2 和p_3，且满足形式为 $x_3 = \alpha x_1$ 和 $x_1 = \alpha x_2$ 的方程的直线。同样，用 $L_2(k_2)$和 $L_3(k_3)$表示分别在 p_2 和 p_3处的切线。切线 $L_1(k_1)$和 $L_2(k_2)$的方程分别为 $x_2 = k_1 x_3$ 和 $x_3 = k_2 x_1$，因此它们相交于点 $s_3 = [1 : k_1 k_2 : k_2]$。同理，$s_1 = [k_3 : 1 :\ k_3 k_2]$ 和 $s_2 = [k_1 k_3 :\ k_1 :\ 1]$。

为了证明三角形 $P = \{p_1, p_2, p_3\}$和 $S = \{s_1, s_2, s_3\}$处于透视关系，我们必须证明三条直线 $|p_1 s_1| = L_1(k_2 k_3)$、 $|p_2 s_2| = L_2(k_1 k_3)$ 和 $|p_3 s_3| = L_3(k_1 k_2)$交于同一点。这些直线的方程分别为

$$x_2 = k_2 k_3 x_3,\ \ x_3 = k_1 k_3 x_1,\ \ x_1 = k_1 k_2 x_2\,. \tag{1}$$

我们需要 k_i 之间满足某种关系，以证明这些方程有公共解。设 $c = [c_1 :\ c_2 :\ c_3]$ 是卵形曲线上异于 p_1，p_2，p_3的一点。元素 c_i 必须非零，否则直线 $L_j(0)$（其中 $j \neq i$）将与卵形曲线交于三点。记$L_i(\lambda_i)$为经过 c 的直线，其中 $i = 1$，2，3。由于 $c_2 = \lambda_1 c_3$，可得 $\lambda_1 = c_2 c_3^{-1}$。类似地，$\lambda_2 = c_3 c_1^{-1}$且 $\lambda_3 = c_1 c_2^{-1}$。由此得出

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = c_2 c_3^{-1} c_3 c_1^{-1} c_1 c_2^{-1} = 1\,.$$

将卵形曲线上除 p_1, p_2, p_3之外的其余 $q-2$ 个点记为 $c_1, \ldots, c_{q-2}$。每条直线与卵形曲线至多相交于两点，因此当 $j \neq k$ 时，过 p_i 和 c_j 的直线不同于过 p_i 和 c_k 的直线。将唯一满足 $L_i(\alpha)$ 与 q_k 相交的 $\alpha \in \mathbb{F}_q$ 记为 $\lambda_{i,k}$。由上述论证，对每个 $i \in \{1, \ldots, q-2\}$，恒等式 $\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}\lambda_{3,i} = 1$ 均成立。

域中所有非零元素的乘积为 -1，因为乘法群是循环群，因此含有唯一一个 2 阶元素，且该元素与其逆元相乘不为零。结合这些观察，并利用乘法交换性，

$$\prod_{i=1}^{q-2} \lambda_{1,i}\lambda_{2,i}\lambda_{3,i} = \left(\prod_{x \neq k_1} x\right)\left(\prod_{x \neq k_2} x\right)\left(\prod_{x \neq k_3} x\right) = \left(\prod_{x \in \mathbb{F}_q^*} x\right)^3 (k_1 k_2 k_3)^{-1} = 1\,.$$

由于 $\left(\prod_{x \in \mathbb{F}_q^*} x\right)^3 = -1$，我们得出结论：三个切线之间存在非平凡关系：

$$k_1 k_2 k_3 = -1\,. \tag{2}$$

最后回到要证明的命题：由于 Segre 恒等式（方程 (2)），点 $[1:\ -k_3 :\ k_1 k_3]$ 满足方程 (1) 的条件。 □

最后，我们证明本文的目标结果，即塞格雷定理：奇数阶射影平面中的极大卵形曲线实际上是圆锥曲线。

定理 16. 奇特征有限射影平面中极大卵形上的点满足一个次数为2的多项式方程。

证明。 如引理 15 中一样，我们选择卵形曲线上的一个三角形 $P = \{p_1, p_2, p_3\}$，并且在射影等价意义下，可以选择 $k_1 = k_2 = k_3 = -1$。参照引理 15 中的记号，我们有这些点 p_i 和切线 $L_i(k_i)$:

$$\begin{aligned} &p_1 = [1:0:0], && p_2 = [0:1:0], && p_3 = [0:0:1] \\ &x_2 = -x_3, && x_3 = -x_1, && x_1 = -x_2, \end{aligned}$$

设 $c = [c_1 : c_2 : c_3]$ 是卵形曲线上的一个点，且不同于 p_i。设 $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ 是卵形曲线在 c处唯一的切线。如引理 15 中一样，坐标 c_i 均非零；若 b_i 为零，则 p_i 将满足切线方程，这就产生矛盾。

现在，考虑三角形 $\{c, p_2, p_3\}$。根据引理 15，它与由三条切线给出的三角形透视

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0, \;\; x_3 = -x_1, \;\; x_1 = -x_2\,.$$

根据笛沙格定理，这些三角形关于一条直线透视：我们将计算 $\{c, p_2, p_3\}$ 的边，并将它们与相应的切线相交，从而推导出 b_i 与 c_i之间的关系。首先，我们将直线 $|cp_2|$ 与卵形曲线在 p_3处的切线相交。直线 $|cp_2|$ 上的点的形式为 $c + tp_2 = [c_1 : c_2 + t : c_3]$，而在$p_3$ 处的切线方程为 $x_1 = -x_2$。因此，唯一解为 $[c_1 : -c_1 : c_3]$。类似地， $|cp_3|$ 与 p_2 处的切线相交于点 $[c_1 : c_2 : -c_1]$，而经过 c 的切线与 $|p_2p_3|$ 相交于点 $[0 : b_3 : -b_2]$。

这三点共线，因此矩阵的行列式

$$\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ c_1 & -c_1 & c_3 \\ c_1 & c_2 & -c_1 \end{pmatrix}$$

必须为零。利用 c_1 非零这一条件，这等价于恒等式

$$b_3(c_1 + c_3) = b_2(c_1 + c_2)\,.$$

对三角形 $\{c, p_1, p_2\}$ 和 $\{c, p_1, p_3\}$ 以及由它们的切线构成的三角形进行类似计算，可得另外两个恒等式:

$$b_3(c_2 + c_3) = b_1(c_1 + c_2), \;\; b_1(c_1 + c_3) = b_2(c_2 + c_3)\,.$$

由于 $[c_1 : c_2 : c_3]$ 位于直线 $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ 上，因此有以下恒等式:

$$(c_1 + c_2)\,(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = 0\,.$$

展开并代入由 Desargues 得出的恒等式：

$$\begin{aligned} b_1(c_1+c_2)c_1+b_2(c_1+c_2)c_2+b_3(c_1+c_2)c_3 &= b_3(c_2+c_3)c_1+b_3(c_1+c_3)c_2+b_3(c_1+c_2)c_3 \\ &= b_3\left((c_2+c_3)c_1+(c_1+c_3)c_2+(c_1+c_2)c_3\right) \\ &= 2b_3\left(c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1\right). \end{aligned}$$

由于 $b_3 \neq 0$ 且特征为奇数， $c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1=0$ 对卵形曲线上的点 $[c_1:c_2:c_3]$成立。但点 c 是卵形曲线上的任意一点，且不同于 p_i ，因此该方程对点 p_i成立。我们已经证明，卵形曲线上的 $q+1$ 个点都位于圆锥曲线 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$上。证明至此完成。 □

注 17。 读者可能会对定理 16 中构造的显式圆锥曲线感到惊讶。事实上， $PG_2(\mathbb{F}_q)$ 中的所有圆锥曲线在射影意义下都等价（这与向量空间的所有基在选取基的意义下都等价基本相同），而这条圆锥曲线是由我们在证明开始时选择的基所决定的。

Patrick J. Browne
Technological University of the Shannon: Midlands Midwest，爱尔兰 patrick.browne@tus.ie
Steven T. DoughertyUniversity of Scranton,
斯克兰顿，宾夕法尼亚州 18510，美国
Prof.Steven.Dougherty@gmail.com
Padraig Ó Catháin都柏林
城市大学
padraig.ocathain@dcu.ie

参考文献

[1] E. Artin。《几何代数》。Interscience Publishers, Inc.，纽约—伦敦，1957年。

[2] L. M. Blumenthal。《几何学的现代观点》。Dover Publications, Inc.，纽约，1980年。1961年原版的勘误重印本。[3] P. Dembowski。《有限几何》。数学经典。施普林格出版社，柏林，1997年。1968年原版的重印本。[4] S. T. Dougherty。《组合学与有限几何》。施普林格，第一版，2020年。[5] D. Hilbert。《几何学基础》。Open Court，伊利诺伊州拉萨尔，第二版，1971年。由 Leo Unger 根据第十版德文版翻译。[6] D. R. Hughes 和 F. C. Piper。《射影平面》。数学研究生教材，第6卷。施普林格出版社，纽约—柏林，1973年。

[7] I. M. Isaacs. 《代数：研究生课程》，第100卷，属于《数学研究生研究》 .
美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2009年。1994年原版的重印本。[8] G. J¨ arnefelt 和 P. Kustaanheimo。关于有限几何的一点观察。载于第*11*届斯堪的纳维亚数学家大会，特隆赫姆，*1949*年，第166–182页。Johan Grundt Tanums Forlag，奥斯陆，1952年。[9] C. W. H. Lam、L. Thiel 和 S. Swiercz。不存在阶为10的有限射影平面。《加拿大数学杂志》，41(6):1117–1123，1989年。[10] I. R. Shafarevich。《基础代数几何》. *1*。施普林格，海德堡，第三版，2013 年。《射影空间中的簇》。[11] K. Tan。笛沙格定理的不同证明。《数学杂志》，40(1):14–25，1967年。