arXiv:2301.05194v1 [math.CV] 12 Jan 2023

具有丰对数反典范除子的对数光滑 klt 紧致 K¨ ähler 流形的阿尔巴内塞态射

Xiaojun WU

2023年1月13日

摘 ′要 ′

设 (X,ω) 是一个 n 维紧致 K¨ähler 流形。设 $D=\sum(1-\beta_j)Y_j=\sum(1-\beta_j)[s_j=0]$ 为一个与 $\beta_j\in]0,1[$ 具有简单正规交叉的除子，且 $-(K_X+D)$ 数值有效。我们证明，其阿尔巴内塞映射在一个余维大于二的解析集之外是浸没，且纤维连通。

1 具有锥形奇点的 Monge-Amp`ère 方程的正则性

以下关于 Monge-Amp`ère 方程正则性的结果对专家而言是众所周知的。由于我们尚未找到某些结果的确切参考文献，因此在此给出部分证明。先固定一些记号。设 (X,D) 是一个对数光滑 KLT对，即 X 是一个紧K¨ähler流形，且$D=\sum(1-\beta_k)Y_k$ 是一个具有简单正规交叉支集的 R-除子，使得 $\beta_k\in]0,1[$ 对所有k均成立。系数 (β_k) 被称为标准轨道结构系数，即 $\beta_k=1/n_k$ 对某个 $n_k\in\mathbf{N}^*$ 对所有 k均成立。我们将 ω_β 记为与 $(\mathbf{C}^n,D)$ 关联的标准锥度量，即

$$\omega_\beta:=i\sum_{k=1}^{d}\frac{dz_k\wedge d\bar{z}_k}{|z_k|^{2(1-\beta_k)}}+i\sum_{k=d+1}^{n}dz_k\wedge d\bar{z}_k.$$

如果度量 ω 与具有锥形奇点的模型度量拟等距，则称其具有锥形奇点；更准确地说，在每个点 $p\in$ Supp(D) 附近，其中 Supp(D) 由方程 $\{z_1\cdots z_d=0\}$ 定义，对于某个全纯坐标系 (z_i)，我们要求 ω 满足

$$C^{-1}\omega_\beta\le\omega\le C\omega_\beta$$

对于某个s ome 常数 $C>0$ 和某个 β （在 p附近）。我们有以下由 [CGP1 给出的结果 3].

命题1. 设 X是一个紧致 K¨ähler 流形，且 $D=\sum(1-\beta_j)Y_j=\sum(1-\beta_j)[s_j=0]$ 是一个与 $\beta_j\in]0,1[$具有简单正规交叉的除子。设 $\mu_D=dV_\omega/\prod_j|s_j|^{2(1-\beta_j)}$ 是一个沿着 D, $\mu\in$ R 具有锥形奇点的体积形式，且 ω是 X上的一个 K¨ähler 形式。那么，任意（有界）解 φ满足

$$(\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi)^n=e^{\mu\varphi}\mu_D$$

是 H¨older 连续的，且度量 $\omega+$id$\overline{\partial}\varphi$ 沿着 D具有锥形奇点。

在下一节中，我们先考虑标准轨道结构情形以说明证明过程。在这种情况下，φ具有更精确的正则性，我们在此情形下沿用 [CGP13]的记号。如本节开头所述，以下命题3是专家们熟知的。

我们固定以原点为中心的单位多圆盘 $\mathbf{D}^n\subset\mathbf{C}^n$，以及除子 $D=\sum_{k=1}^{d}(1-1/n_k)D_k$，其中 $D_k=\{z_k=0\}$ 对所有 k 都成立，且 $d\le n$。

考虑分歧覆盖

$$\begin{array}{rccc}\pi: & \mathbb{D}^d\times\mathbb{D}^{n-d} & \longrightarrow & \mathbb{D}^d\times\mathbb{D}^{n-d}\\ & (z_1,\ldots,z_d,z_{d+1},\ldots,z_n) & \longmapsto & (z_1^{n_1},\ldots,z_d^{n_d},z_{d+1},\ldots,z_n).\end{array}$$

若用 w 表示上方的坐标,

$$\pi^*\omega_\beta = i\sum_{k=1}^{d}|n_k|^2 dw_k\wedge d\bar{w}_k + i\sum_{k=d+1}^{n} dw_k\wedge d\bar{w}_k.$$

特别地， $\pi^*\omega_\beta$ 在上方确实是一个度量。回顾一下，在标准轨道结构情形中，如果函数f 的拉回 $\pi^* f$ 经分歧覆盖 π 后在通常意义下属于 $C^{k,\ \alpha}$ ，则称其具有轨形 $C^{k,\alpha}$ 正则性（记作 $C^{k,\alpha,\beta}$）。更一般地，设 τ （分别为 σ）是D$^n\setminus D$上的有界(1, 0)-形式（分别为(1, 1)-形式）。那么，如果对所有 k， $\pi^*\tau(\frac{\partial}{\partial w_k})$在通常意义下属于 $\in C^\alpha$，我们就称 $\tau\in C^{\alpha,\beta}$；（分别地，如果对所有 k和 l， $\pi^*\sigma(\frac{\partial}{\partial w_k},\frac{\partial}{\partial\overline{w}_l})$在通常意义下属于 $\in C^\alpha$，则称 $\sigma\in C^{\alpha,\beta}$。）定义

$$C^{2,\alpha,\beta} := \{f\in L^\infty(\mathbb{D}^n); f,\partial f,\overline{\partial}\partial f\in C^{\alpha,\beta}\}$$

配备相应的自然范数。引理7.2 [CGP13] 中验证了，该定义与Donaldson [Don12]的定义一致。

取开集 X，使得每个开集都与带有 D 相关联的分歧覆盖 $\tilde{}$ $\tilde{}$ 的单位多圆盘双全纯。将 π_i 的分歧覆盖记为 U_i： $U_i\to U_i$。令 N_i 为分歧阶数。我们得到一个比命题1更精确的正则性结果，该结果也见于 [CGP13]。

命题 2. 设 (*X*, *D*) 如命题 1 中所述，具有标准轨形系数，并设 $\varphi\in L^\infty(X)$ 是下列方程的任意一个解

$$(\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^{\mu\varphi}\mu_D$$

那么 φ 属于类 $C^{2,\alpha,\beta}$。

更确切地说，在标准轨形情形下，利用椭圆正则性可以证明， $\pi^*\varphi$ 实际上是光滑的。

命题3. 设 (*X*, *D*) 如命题 1 中所述，具有标准轨形系数，并设 $\varphi\in L^\infty(X)$ 是下列方程的任意一个解

$$(\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi)^n = e^{\mu\varphi}\mu_D$$

那么 $\pi^*\varphi$ 在每个分歧覆盖上都是光滑的。

证 明。注意， $\pi^*d\nu_D$ 是来自上方的光滑体积形式。不失一般性，假设局部存在某个光滑函数，使得 $\omega = i\partial\overline{\partial}\psi$。在局部，Monge-Amp`ère 方程在分歧覆盖上的拉回可写为

$$\det(\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\overline{w}_j}\pi^*(\psi+\varphi)) = ge^{\mu\pi^*\varphi}$$

其中 g 是某个处处不为零的光滑函数。根据命题 2， $\pi^*(\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi)$ 是一个真正的度量，其 $C^{0,\ \alpha}$ 系数。局部记为

$$\pi^*(\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi) = \sum_{i,j}h_{ij}\sqrt{-1}dw^i\wedge d\overline{w}^j.$$

由 Monge-Amp`ère 方程可知， h_{ij} 的行列式有先验正下界。特别地，若 $h_{ij}\in C^{k,\ \alpha}$ 对某个 $k\geq 0$ 成立，则 $\det(h_{ij})^{-1}\in C^{k,\ \alpha}$ （因此 $h^{ij}\in C^{k,\ \alpha}$）。对方程两边取 $\frac{\partial}{\partial w_l}\log(\forall l)$

$$h^{ij}\frac{\partial^2}{\partial w_i\partial\overline{w}_j}\frac{\partial}{\partial w_l}\pi^*(\omega+i\partial\overline{\partial}\varphi) = \frac{\partial}{\partial w_l}\log g+\mu\frac{\partial}{\partial w_l}\pi^*\varphi.$$

对 $k\geq 0$ 归纳应用具有 $C^{k,\ \alpha}$ 系数的线性椭圆方程的内部 Schauder 估计，可得 $\pi^*\varphi$ 的先验 $C^{k+3,\ \alpha}$ 范数估计，其估计取决于 $\pi^*\varphi$ 的 $C^{k+1,\ \alpha}$ 范数。因此，通过自举， $\pi^*\varphi$ 在任意分歧覆盖上都是光滑的。 □

We 现在回顾根据 [Paun16 对向量丛上的奇异度量的定义].

定义 1. 奇异厄米度量 h 在 E 上由一个局部可测且可能无界的映射给出，该映射的取值属于半正定厄米矩阵集合，并且满足 $0 < \det h < \infty$几乎处处。

根据此定义，具有锥形奇点的 Monge-Amp`ère 方程的解在 $T_X$ 上定义了一个奇异度量。特别地，该解还在 $T_X$ 的任意商丛上诱导出一个奇异度量。我们注意到，由 Monge-Amp`ère 方程可知，该奇异度量的里奇曲率作为一个流是良定义的。然而，可以注意到， T_X 的曲率张量作为取值于半正定且可能无界的 Hermitian 矩阵的流，不一定是良定义的。

现在我们回到一般系数情形下 Monge-Amp`ère 方程的存在性与正则性问题。

事实上， [Gue13] 和 [CGP13] 的工作给出了以下类型的 Monge-Amp`ère 方程的如下弱估计。该定理并非下一节所必需，但定理后的讨论同样适用于这一轻微的推广。因此，我们仍然明确陈述它。

定理 1. 设 X 是一个 n 维紧 K¨ahler 流形，且 $D = \sum_i a_i D_i$、 $E = \sum_j b_j E_j$ 是两个具有简单正规交叉支集的有效实除子，使得对所有 $1 \le i \le r$、$0 < a_i < 1$ 均成立。假设 D 和 E 没有公共不可约分支。设 ω 是 X 上的一个 K¨ahler 度量， dV 是一个光滑体积形式，并且 $\varepsilon > 0$。那么，Monge-Amp`ère 方程的弱解

$$\langle(\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi)^n\rangle = e^{\varepsilon\varphi}\frac{\prod|t_j|^{2b_j}dV}{\prod|s_i|^{2a_i}}$$

存在，它在 $X \setminus (D \cup E)$ 上光滑，且有一个上界，该上界由沿 D 具有锥形奇点的度量给出。这里，$\langle\bullet\rangle$ 是 [BEGZ10] 中定义的正交乘积。这里， s_i（分别为 t_j）是 $\mathcal{O}(D_i)$（分别为 $\mathcal{O}(E_j)$）的典范截面，而 $|s_i|^2$ （分别为 $|t_j|^2$）是相对于某个光滑度量而言的 s_i （分别为 t_j）的范数。

我们注意到，解的存在性已在 [BEGZ10] 中得到证明。作为定理 1 的推论，存在 $C > 0$，使得该解在 $X \setminus (D \cup E)$ 上有一个上界

$$\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \le \frac{C\omega}{\prod_i |s_i|^{2a_i}}.$$

由 Monge-Amp`ere 方程，我们在 $X \setminus (D \cup E)$ 上得到一个下界

$$\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \ge e^{\varepsilon\varphi}\frac{\prod|t_j|^{2b_j}\omega}{\prod|s_i|^{2a_i}}(\frac{C}{\prod_i|s_i|^{2a_i}})^{-(n-1)}.$$

注意，由于该解在 $X \setminus (D \cup E)$ 上光滑，上述不等式逐点成立。根据 [BEGZ10] 的结果， $|\varphi|$ 在 X 上一致有界。特别地，我们有

$$\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi \ge \frac{C\prod|t_j|^{2b_j}\omega}{\prod|s_i|^{2a_i}}(\frac{C}{\prod_i|s_i|^{2a_i}})^{-(n-1)}.$$

总之，在 $D \cup E$ 外，解 $\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ 相对于 ω 可视为 T_X 上的厄米形式，其正特征值的上界为 $\frac{C}{\prod_i|s_i|^{2a_i}}$，下界为 $\frac{C\prod|t_j|^{2b_j}}{\prod|s_i|^{2a_i}}(\frac{C}{\prod_i|s_i|^{2a_i}})^{-(n-1)}$.

注意 商向量丛的行列式线丛上的奇异度量

向量丛 Q

由向量丛的短正合序列给出

$$0 \to S \to T_X \to Q \to 0,$$

曲率形式作为流是良定义的。下面详细说明论证。设我们处于定理 1 的情形，并沿用上述记号。由于度量在 $D \cup E$之外光滑，我们只需研究 $D \cup E$的邻域。通过正合序列的一个 C^∞ 分裂，我们可以将 Q 视为 T_X的一个子丛。$\omega + \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ 因此在

Q 上诱导出一个厄米形式，记为 $\omega+\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi|_Q$。根据极小极大原理，诱导在 Q上的厄米形式的特征值有上界 $\frac{C}{\prod_i|s_i|^{2a_i}}$，下界为$\frac{C\prod|t_j|^{2b_j}}{\prod|s_i|^{2a_i}}(\frac{C}{\prod_i|s_i|^{2a_i}})^{-(n-1)}$.。为证明 det($Q$)的曲率作为流是良定义的（但不一定为正），只需证明 log(det($\omega+\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi|_Q$)) $\in L^1_{\mathrm{loc}}$。 det($\omega+\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi|_Q$)是厄米形式$\omega+\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi|_Q$的所有特征值的乘积。因此，我们得到势的估计

$$|\log(\det(\omega+\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi|_Q))|\leq\sum_i C_i\log|s_i|^2+\sum_j C_j\log|t_j|^2+C$$

对于某些 $C_i>0$、 $C_j>0$ 和 $C>0$。下文中，我们将这种控制称为沿着 $D\cup E$至多具有对数极点的势。还需注意，对于任意 i，log$|z_i|$ 相对于欧几里得度量局部可积。特别地，det(Q)上诱导度量的曲率作为流是良定义的，因为它局部是某个 L^1_{loc} 函数的 $i\partial\overline{\partial}$。

对于任意沿着 $D\cup E$至多具有对数极点的全局势函数 ψ （定义在 X上）。类比于Bedford-Taylor意义下的Monge-Amp`ere算子 [BT82], ，我们希望定义$i\partial\overline{\partial}\psi\wedge\omega_\varphi^{n-1}$。固定 $a\in[0,1[$, 积分

$$\int\log(r)r^{1-2a}=\frac{1}{2-2a}(\log(r)-\frac{1}{2-2a})r^{2-2a}$$

在 $[0,1]$上有限。特别地，作为函数 $z\in$ C的log$|z||z|^{-2a}$ 在0附近相对于勒贝格测度局部可积。因此， $\psi\wedge\omega_\varphi^{n-1}$的系数相对于勒贝格测度局部可积。定义

$$i\partial\overline{\partial}\psi\wedge\omega_\varphi^{n-1}:=i\partial\overline{\partial}(\psi\wedge\omega_\varphi^{n-1}).$$

由斯托克斯定理可得

$$\int_X i\partial\overline{\partial}\psi\wedge\omega_\varphi^{n-1}=0.$$

2 阿尔巴内塞态射

本节首先将 [Cao13] 的结果推广到具有标准轨形系数的对数光滑情形。首先，我们需要以下结果。

定理 2. 设 (X,ω) 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形。设 $D=\sum(1-1/n_j)Y_j=\sum(1-1/n_j)[s_j=0]$ 是一个具有简单正规交叉的除子，满足 $n_j\in\mathbf{N}^*$，且 $-(K_X+D)$ 数值有效。设

$$0=\mathcal{E}_0\subset\mathcal{E}_1\subset\cdots\subset\mathcal{E}_s=T_X$$

是一个无挠子层的滤子，使得 $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 是 ω-稳定的无挠子层，且是 $T_X/\mathcal{E}_i$ 中斜率最大的子层。那么对于任意 i， $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 关于 ω^{n-1} 的斜率，即

$$\mu(\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i):=\int_X c_1(\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i)\wedge\omega^{n-1},$$

是正的。

证 ´明。根据稳定性条件，要证明该定理，只需证明对于任意 i

$$\int_X c_1(T_X/\mathcal{E}_i)\wedge\omega^{n-1}\geq 0.$$

令 r 为某个固定的 i所对应的 $T_X/\mathcal{E}_i$ 的一般秩。自然诱导的态射 $\wedge^r T_X\to$det($T_X/\mathcal{E}_i$) 对应于一个截面 $\tau\in H^0(X,$ det($T_X/\mathcal{E}_i$) $\otimes\Omega_X^r$)。 τ在一个余维至少为二的闭解析集之外处处不为零，且在该闭解析集上 $T_X/\mathcal{E}_i$ 局部自由。固定 det($T_X/\mathcal{E}_i$) 上任意一个光滑度量 h。

关键步骤是利用 [GP16] and [CGP13] 中的定理，证明存在一个 K¨ahler 类中的正闭(1,1)流，该流在 SNC除子之外光滑，并且其里奇曲率在除子之外可以取为“任意小”。

令 T_ε 为 $c_1(-(K_X+D))$ 中的一列光滑形式，其存在性由半正条件保证。为获得下界，我们希望求解以下 K¨ahler–Einstein 型方程

$$\mathrm{Ric}(\omega_{\varphi_\varepsilon}) = -\varepsilon\omega_{\varphi_\varepsilon} + \varepsilon\omega + T_\varepsilon + [D]$$

其中 $\omega_{\varphi_\varepsilon} := \omega + i\partial\overline{\partial}\varphi_\varepsilon$ 是未知量。注意，两边都属于类 $c_1(-K_X)$。因此，为了解 K¨ahler-Einstein 型方程，我们根据定理 1 求解以下 Monge-Amp`ere 方程。设 $\gamma$ 是类 $\{[D]\}$ 的一个光滑代表元，它由某些光滑度量 $(\mathcal{O}(Y_i)\ h_i)$ 的曲率形式诱导。根据 $\partial\overline{\partial}$-引理，存在 $f_\varepsilon \in C^\infty(X)$，使得 $T_\varepsilon+\gamma = \mathrm{Ric}(\omega)+\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}f_\varepsilon$。与 K¨ahler-Einstein 型方程等价的 Monge-Amp`ere 方程可写为

$$\omega_{\varphi_\varepsilon}^n = \frac{\omega^n e^{\varepsilon\varphi_\epsilon - f_\varepsilon}}{\prod_i |s_i|_{h_i}^{2(1-1/n_i)}}.$$

采用命题1之后的相同记号。注意，根据命题3，将 $\pi^*\omega_{\varphi_\varepsilon}$ 拉回到分歧覆盖上后，它是一个光滑度量。在分歧覆盖上计算

$$i\partial\overline{\partial}\pi^*\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h} = \frac{i\{D'\pi^*\tau, D'\pi^*\tau\}}{\pi^*|\tau|^2} - \frac{i\{D'\pi^*\tau,\pi^*\tau\}\wedge\{\pi^*\tau, D'\pi^*\tau\}}{\pi^*|\tau|^4}$$

$$-\pi^* i\Theta(\det(T_X/\mathcal{E}_i),h) - \frac{\{\pi^*\tau, i\Theta(\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon})\pi^*\tau\}}{\pi^*|\tau|^2}$$

其中，$\{\}$ 是一个典范半双线性配对

$$C^\infty(\wedge^p T_X^*\otimes\Omega_X^r\otimes\det(T_X/\mathcal{E}_i))\times C^\infty(\wedge^q T_X^*\otimes\Omega_X^r\otimes\det(T_X/\mathcal{E}_i))\to C^\infty(\wedge^{p+q}T_X^*).$$

注意，根据施瓦茨不等式，第一行右端的项在流的意义下为正。注意，右端的项是局部可积的（因此，在分歧覆盖上，它与 $\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$的乘积在流的意义下有定义）。由于 $\pi^*\omega_{\varphi_\varepsilon}$ 是光滑的，$^{\{\pi^*\tau,i\Theta}{}_{(\ \pi^*\omega_{\varphi_\epsilon}\ \pi^*\tau\}\ )}$的系数是局部有界的。另一方面，$|D'\pi^*\tau|^2/|\pi^*\tau|^2$ 关于勒贝格测度是局部可积的。为说明这一点，令 $\overline{\mathcal{I}}$ 为由 $\pi^*\tau$的系数定义的（局部）理想。不失一般性，只需考虑 $\mathcal{I}$ 非平凡的情形。根据Hironaka的奇点消解，[Hir64], 存在一个修改$p\colon U'\to U$，使得 $\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{U'} = \mathcal{O}(-\sum_i\lambda_i E_i)$，其中 $\sum_i\lambda_i E_i$是一个有效简单正规交叉除子。注意，由于 τ 在余维2集合之外不消失，p 不是恒等映射。记 $D\mathcal{I}$ 为由 $\pi^*\tau$的系数的微分定义的（局部）理想。于是，$D\mathcal{I}\cdot\mathcal{O}_{U'}$ 包含于$\mathcal{O}(-\sum_i(\lambda_i-1)E_i)$中。$K_{U'/\tilde{U}} = \sum_i\nu_i E_i$，其中 $\nu_i\geq 1$。特别地，勒贝格测度的拉回可以写成 $\prod_i|s_{E_i}|^{2\nu_i}$ 乘以一个光滑且处处不消失的形式。因此，$p^*(|D'\pi^*\tau|^2/|\pi^*\tau|^2)$与勒贝格测度拉回的乘积的系数在 U'上局部有界。特别地，$|D'\pi^*\tau|^2/|\pi^*\tau|^2$是局部可积的。

在　分歧覆盖上，陈曲率（同时也是列维-奇维塔曲率）满足

$$\mathrm{Ric}(\pi^*\omega_{\varphi_\varepsilon}) = -\varepsilon\pi^*\omega_{\varphi_\varepsilon} + \pi^*(T_\epsilon+\epsilon\omega) \geq -\varepsilon\pi^*\omega_{\varphi_\varepsilon}.$$

考虑

$$i\partial\overline{\partial}\pi^*\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1} \geq (-\pi^* i\Theta(\det(T_X/\mathcal{E}_i),h) - \frac{\{\pi^*\tau, i\Theta(\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon})\pi^*\tau\}}{\pi^*|\tau|^2})\wedge\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}.$$

On 另一方面，根据命题 2。7 [Cao13], 通过局部曲率计算，我们有

$$\frac{\{\pi^*\tau, i\Theta(\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon})\pi^*\tau\}}{\pi^*|\tau|^2}\wedge\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1} \leq \epsilon\pi^*\omega_{\varphi_\epsilon}^n.$$

注意，$\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},\ h}$沿 D至多有对数极点。事实上，只有当 T_X 上的初始度量具有锥形奇点时，T_X^* 上的对偶度量才可能沿 D 消失。特别地，正如定理 1 后所述，$i\partial\overline{\partial}\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},\ h}\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$是良定义的。

令 θ_i 为与所选开覆盖相对应的单位分解。

$$0=\sum_i\int_X\theta_i i\partial\overline{\partial}\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}=\sum_i\int_X i\partial\overline{\partial}\theta_i\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}$$

$$=\sum_i\int_{\tilde{U}_i}\frac{1}{N_i}\pi_i^*(i\partial\overline{\partial}\theta_i\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon})=\sum_i\int_{\tilde{U}_i}\frac{1}{N_i}\pi_i^*(\theta_i i\partial\overline{\partial}\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}).$$

因此我们有

$$\int_X c_1(T_X/\mathcal{E}_i)\wedge\omega^{n-1}=\sum_i\int_{\tilde{U}_i}\frac{1}{N_i}\pi_i^*(\theta_i i\partial\overline{\partial}\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon})+\int_X i\Theta(\det(T_X/\mathcal{E}_i),h)\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}$$

$$\geq-\epsilon\sum_i\int_{\tilde{U}_i}\frac{1}{N_i}\pi_i^*(\theta_i\omega^n_{\varphi_\epsilon})=-\epsilon\int_X\omega^n_{\varphi_\epsilon}=-\epsilon\int_X\omega^n.$$

取 $\epsilon\to 0+$ 即可得出结论 □

现在，我们按照 Mihai P˘aun 的建议考虑一般系数的情形。

定理 3. 设 (X,ω) 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形。设 $D=\sum(1-b_j)D_j=\sum(1-b_j)[s_j=0]$ 是一个具有简单正规交叉的除子，且满足 $b_j\in]0,1[$，使得 $-(K_X+D)$ 数值有效。设

$$0=\mathcal{E}_0\subset\mathcal{E}_1\subset\cdots\subset\mathcal{E}_s=T_X$$

是由无挠子层构成的一个滤子，且 $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 是 ω-稳定的无挠子层，包含于 $T_X/\mathcal{E}_i$ 中并具有最大斜率。那么对于任意 i， $\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i$ 关于 ω^{n-1} 的斜率，即

$$\mu(\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i):=\int_X c_1(\mathcal{E}_{i+1}/\mathcal{E}_i)\wedge\omega^{n-1},$$

是正的。

证 ´明。按照定理 2 的证明，构造一个截面 $\tau\in H^0(X,\det(T_X/\mathcal{E}_i)\otimes\Omega^r_X)$。与上述定理 2 中一样，通过求解 Monge-Amp`ère 方程构造一列具有锥形奇点的度量 $\omega_{\varphi_\epsilon}$。考虑局部坐标 $(z^1,\cdots,z^n)$，使得 D 的支集由 $\{z^1\cdots z^d=0\}$给出。一般情况下，我们在半径为 δ 的 D 管状邻域内进行截断，并研究当 $\delta\to 0+$ 时的渐近行为，以通过对 $i\partial\overline{\partial}\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}$ 在 $X\setminus D$ 上的积分得到斜率估计。在局部

$$\tau=\sum_{I,|I|=r}\tau_I dz^I$$

对于长度为 r 的多重指标 $I=\{i_1,\cdots,i_r\}$，并且由锥形奇点引起的 $|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon}}$ 在局部等价于 $\sum_{I,\ |I|=r}\prod_{j,\ 1\leq i_j\leq d}|z_{i_j}|^{2-2b_{i_j}}|\tau_I|^2$。在原点附近，

$$O(1)\leq-\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon}}\leq-\log(\sum_{I,|I|=r}\prod_{j,1\leq i_j\leq d}|z_{i_j}|^2|\tau_I|^2)+O(1)$$

其中 $O(1)$ 表示一个有界项。因此，要研究 $-\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon}}$ 相对于某个正局部有限测度的局部可积性，只需研究 $-\log(\sum_{I,\ |I|=r}\prod_{j,\ 1\leq i_j\leq d}|z_{i_j}|^2|\tau_I|^2)$ 相对于该测度的局部可积性即可，该测度与某些局部理想具有相同的奇异性。注意，在 D 的支集之外（此处度量是光滑的），逐点地，我们有

$$i\partial\overline{\partial}\log|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}\geq(-i\Theta(\det(T_X/\mathcal{E}_i),h)-\epsilon\omega_{\varphi_\epsilon})\wedge\omega^{n-1}_{\varphi_\epsilon}.$$

然而， $-\log(\sum_{I,\ |I|=r}\prod_{j,\ 1\leq i_j\leq d}|z_{i_j}|^2|\tau_I|^2)$ 沿着 D 的支集可能具有严格正的一般 Lelong 数，因此相对于沿 D 具有 Poincar´e 型奇异性的度量可能不可积。（例如，在 Poincar´e 型奇异性的情形下，局部可积性等价于以下事实： $1/(r|\log(r)|^\alpha)$ 在 0 附近局部可积，当且仅当 $\alpha>1$。）

因此，我们需要将 $-\log(\sum_{I,\ |I|=r}\prod_{j,\ 1\le i_j\le d}|z_{i_j}|^2|\tau_I|^2)$ 改写为全局形式，并减去沿 D 的支集的除子部分。

设 $\omega_{\lceil D\rceil}$ 是 $X\setminus D$ 上的光滑度量，在 $\lceil D\rceil=\{z_1\cdots z_d=0\}$ 中每一点的邻域内都与

$$\omega_{\lceil D\rceil}:=i\sum_{k=1}^{d}\frac{dz_k\wedge d\bar{z}_k}{|z_k|^2}+i\sum_{k=d+1}^{n}dz_k\wedge d\bar{z}_k.$$

（例如，可以按如下方式构造这类度量。用开坐标图覆盖 X，使得 $\lceil D\rceil$ 可以表示为局部坐标的零点。此外，假设在 $\lceil D\rceil$ 不可约的坐标图彼此不相交；必要时可进一步细化开覆盖。通过单位分解将局部度量粘合起来，构造 $\omega_{\lceil D\rceil}$。下面检查粘合后的度量具有所需性质。

假设 U_z 是一个坐标图，使得 $\lceil D\rceil\cap U_z=\{z_1\cdots z_d=0\}$，而 U_w 是一个坐标图，使得 $\lceil D\rceil\cap U_w=\{w_1=0\}$，且二者交集非空。在 $U_z\cap U_w$ 上，$z_1/w_1\in\mathcal{O}^*(U_z\cap U_w)$，因为它们在交集上定义了同一个不可约除子。因此，对某个充分大的 $C>0$，在 $U_z\cap U_w$ 的任意选定相对紧子集上，$idz_1\wedge d\overline{z}_1/|z_1|^2+Ci\sum_{k=1}^{n}dz_k\wedge d\bar{z}_k$ 与 $idw_1\wedge d\overline{w}_1/|w_1|^2+i\sum_{k=2}^{n}dw_k\wedge d\bar{w}_k$ 等价。于是，经过单位分解后，粘合度量具有所需性质。当然，粘合度量在 X 上并非 K¨ahler。）

令 $\mathcal{I}$ 为由 $\prod_{j,1\le i_j\le d}z_{i_j}\tau_I$ 的系数（局部）定义的理想层，它与 $\log|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil}}$ 等价。注意，$\mathcal{I}$ 是局部定义的，但其整闭包是全局定义的。事实上，整闭包的芽是满足以下条件的全纯函数芽 f：局部地

$$\log|f|^2\le\log|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil}}+O(1).$$

我们将这个全局定义的整闭包记为 $\overline{\mathcal{I}}$。考虑与 D_i 相关联的除子赋值

$$\mu(\overline{\mathcal{I}},D_i):=\max\{m\in\mathbb{N},\overline{\mathcal{I}}\subset\mathcal{I}_{D_i}^m\}$$

其中，$\mathcal{I}_{D_i}$ 是将 $\mathcal{O}(-D_i)$ 识别为理想层。考虑

$$\sigma:=\prod_i s_{D_i}^{\mu(\overline{\mathcal{I}},D_i)}$$

这是 X 上的全局全纯截面，其中 s_{D_i} 是 $\mathcal{O}(D_i)$ 的典范截面。考虑 $\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)$，使得其极点集没有任何 D_i 作为不可约分量。

现在，在 D 的支集之外（度量在此处光滑），逐点地，我们有

$$i\partial\overline{\partial}\log(|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}/|\sigma|^2)\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}\ge(-i\Theta(\det(T_X/\mathcal{E}_i),h)-\epsilon\omega_{\varphi_\epsilon}+\sum_j i\mu(\overline{\mathcal{I}},D_j)\Theta(\mathcal{O}_X(D_j)))\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}.$$

注意，由于 σ 的选取，$\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)$ 的极点不包含 D 的任何不可约分量。在局部坐标中，$\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)$ 与理想商 $\mathcal{J}:=(\mathcal{I}:\prod_i\mathcal{I}_{D_i}^{\mu(\overline{\mathcal{I}},D_i)})$ 具有相同的奇异性。接下来，我们研究 $\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)$ 关于某种混合型体积形式的局部可积性，该体积形式兼具 Poincaré 型和锥型。

令 χ 为截断函数 $[0,\infty[\to[0,1]$。按照 [CGP13], 第9节的定义

$$\rho(x):=\log(\log\frac{1}{\prod_i|s_{D_i}|^2}).$$

注意，$-i\partial\overline{\partial}\rho$ 在 D的支集上被 Poincaré 型奇异性从上方控制；在局部坐标中可写为

$$i\sum_{k=1}^{d}\frac{dz_k\wedge d\bar{z}_k}{|z_k|^2\log^2(|z_k|)}+i\sum_{k=d+1}^{n}dz_k\wedge d\bar{z}_k.$$

我们断言

$$-\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)i\partial\overline{\partial}\rho\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$$

是局部可积的。只需证明在局部坐标中，靠近 D 的支集处，对于任意 $i_0 \in [1,d]$,

$$-\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)\frac{id(z_{i_0})\wedge d(\overline{z_{i_0}})}{|z_{i_0}|^2\log^2(|z_{i_0}|)}\wedge\prod_{i\neq i_0,i\leq d}\frac{id(z_i)\wedge d(\overline{z_i})}{|z_i|^{2(1-\beta_i)}}\wedge\prod_{i\geq d+1}idz_i\wedge d\overline{z_i}$$

局部可积。为简化记号，下文假设 $i_0=1$。考虑分歧覆盖

$$\begin{array}{rccc}\pi: & \mathbb{D}^d\times\mathbb{D}^{n-d} & \longrightarrow & \mathbb{D}^d\times\mathbb{D}^{n-d}\\ & (z_1,z_2,\ldots,z_d,z_{d+1},\ldots,z_n) & \longmapsto & (z_1,z_2^{n_2},\ldots,z_d^{n_d},z_{d+1},\ldots,z_n).\end{array}$$

其中 $n_i(\forall i\geq 2)$ 足够大，使得 $\beta_i n_i\geq 1$。局部可积性等价于

$$\pi^*\big(-\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)\frac{id(z_1)\wedge d(\overline{z_1})}{|z_1|^2\log^2(|z_1|)}\wedge\prod_{d\geq i\geq 2}\frac{id(z_i)\wedge d(\overline{z_i})}{|z_i|^{2(1-\beta_i)}}\wedge\prod_{i\geq d+1}idz_i\wedge d\overline{z_i}\big)$$

局部可积。

设 $f_j(1\leq j\leq r)$ 为 $\pi^*\mathcal{J}$ 的局部生成元。一个充分条件是

$$-\log(\sum_j|f_j|^2)\frac{id(z_1)\wedge d(\overline{z_1})}{|z_1|^2\log^2(|z_1|)}\wedge\prod_{i\geq 2}id(z_i)\wedge d(\overline{z_i})$$

对于所选的分歧覆盖，局部可积。

由 $\mathcal{J}$ 的构造可知， f_j 在 $\{z_1=0\}$ 上的限制并非全都恒为零。由连续性可知，对于足够小的半径 r_0，在 $\mathrm{D}_{r_0}\times\mathrm{D}^{n-1}$ 上， f_j 在 $\{z_1=s\}(\forall|s|<r_0)$ 上的限制并非全都恒为零。

将 $-\log(-\log(\sum_j|f_j|^2))$ 视为 D^{n-1} 上由 $z_1\in\mathrm{D}_{r_0}$ 参数化的拟次调和函数连续族。注意，该族中任意拟次调和函数在 D^{n-1} 中任意点处的 Lelong 数均为 0。

根据一致 Skoda 可积性定理（例如参见定理 2.50 [GZ17]），对于任意满足$|s|<r_0$的 $s\in\mathrm{D}$,

$$\int_{\{s\}\times\mathbb{D}^{n-1}}-\log(\sum_j|f_j|^2)\prod_{i\geq 2}id(z_i)\wedge d(\overline{z_i})\leq C$$

由于 Lelong 数消失，存在某个与 s 无关的 $C>0$。由于单变量中的 Poincar´e 度量是局部可积的，根据 Fubini 定理，我们完成了关于局部可积性这一断言的证明。

类似地，根据施瓦茨不等式，我们可以证明

$$-\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)i\partial\rho\wedge\overline{\partial}\rho\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$$

是局部可积的。

对于每个 $\delta>0$，令 $\theta_\delta:\ [0,\infty[\to[0,1]$ 为一个光滑函数，该函数在区间 $[0,1/\delta]$ 上等于 0，在区间 $[1+1/\delta,\infty]$ 上等于 1。例如，可以定义$\theta_\delta(x)=\chi(x-1/\delta)$。考虑由下式定义的 $\chi_\delta:\ X\to[0,1]$

$$\chi_\delta(x):=1-\theta_\delta(\rho(x)).$$

考虑斯托克斯公式

$$\int_X\chi_\delta i\partial\overline{\partial}(\log(|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}/|\sigma|^2))\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}=\int_X\partial\chi_\delta\wedge i\overline{\partial}\log(|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}/|\sigma|^2)\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$$

$$=-\int_X\overline{\partial}\chi_\delta\wedge i\partial\log(|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}/|\sigma|^2)\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}=\int_X i\partial\overline{\partial}\chi_\delta\log(|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}/|\sigma|^2)\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}.$$

请注意，左侧项逐点大于 $\chi_\delta(-i\Theta(\det(T_X/\mathcal{E}_i)\ h)\ -\epsilon\omega_{\varphi_\epsilon}+\sum_j i\mu(\overline{\mathcal{I}},D_j)\Theta(\mathcal{O}_X(D_j)))\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$。此外，下界在 X 上的积分趋于

$$\int_X(-c_1(T_X/\mathcal{E}_i)-\epsilon\omega+\sum_j\mu(\overline{\mathcal{I}},D_j)c_1(\mathcal{O}(D_j)))\wedge\omega^{n-1}$$

当 $\delta \to 0+$ 时。

另一方面，$i\partial\overline{\partial}\chi_\delta = -\theta_\delta'(\rho)i\partial\overline{\partial}\rho - \theta_\delta''(\rho)i\partial\rho\wedge\overline{\partial}\rho$. 注意到 $|\theta_\delta''|, |\theta_\delta'|$ 与 δ无关，且一致有界。因此，根据前面的论断，$\log(|\tau|^2_{\omega_{\varphi_\epsilon},h}/|\sigma|^2)i\partial\overline{\partial}\chi_\delta\wedge\omega_{\varphi_\epsilon}^{n-1}$被某个可积函数一致控制。

由勒贝格控制收敛定理，第二行右侧项的极限在 $\delta\to 0+$时为 0。

取 $\delta\to 0+$，得到

$$0\geq\int_X(-c_1(T_X/\mathcal{E}_i)-\epsilon\omega+\sum_j\mu(\overline{\mathcal{I}},D_j)c_1(\mathcal{O}(D_j)))\wedge\omega^{n-1}$$

取 $\epsilon\to 0+$即可完成证明。 □

注意到，在 [Ou17] 的定理 0.4 中，在假设 $-K_X$数值有效且 X 是具有轻微奇点的射影簇的条件下，也证明了类似的结果。

为了说明定理 3 证明中的局部可积性，我们给出下面这个初等例子。

例 1. 采用定理 3 证明中的相同记号。假设 X 的复维数为二，且 D 的支集有两个不可约分支，它们在 $x\in X$ 处横截相交。假设 $\mathcal{J}$ 是 x 处的极大理想。记 (z_1,z_2) 为 x 附近的局部坐标，使得 D 的支集由 $\{z_1z_2=0\}$ 定义，其中 x 对应于原点。

x 附近的局部可积性等价于证明：在局部坐标中，对任意 $i_0\in[1,2]$,

$$-\log(|\tau|^2_{\omega_{\lceil D\rceil},h}/|\sigma|^2)\frac{id(z_{i_0})\wedge d(\overline{z_{i_0}})}{|z_{i_0}|^2\log^2(|z_{i_0}|)}\wedge\prod_{i\neq i_0,i\leq 2}\frac{id(z_i)\wedge d(\overline{z_i})}{|z_i|^{2(1-\beta_i)}}$$

局部可积。

设 π 是 X 在 x 处的爆破。这等价于证明

$$\pi^*\big(-\log(|z_1|^2+|z_2|^2)\frac{id(z_{i_0})\wedge d(\overline{z_{i_0}})}{|z_{i_0}|^2\log^2(|z_{i_0}|)}\wedge\prod_{i\neq i_0,i\leq 2}\frac{id(z_i)\wedge d(\overline{z_i})}{|z_i|^{2(1-\beta_i)}}\big)$$

在例外除子附近局部可积。不失一般性，假设 $i_0=1$。在 x 附近的局部坐标中，π 表示为

$$\pi(w_1,w_2)=(w_1w_s,\cdots,w_{s-1}w_s,w_s,w_{s+1}w_s,\cdots,w_2w_s).$$

在局部坐标中，只需证明

$$-\log|w_s|^2\pi^*(\frac{id(z_1)\wedge d(\overline{z_1})}{|z_1|^2\log^2(|z_1|)}\wedge\frac{id(z_2)\wedge d(\overline{z_2})}{|z_2|^{2(1-\beta_2)}})$$

在 $\{w_s=0\}$ 附近局部可积。

若 $s=2$，则我们对其有一个上界

$$-\log|w_2|^2\frac{id(w_1w_2)\wedge d(\overline{w_1w_2})}{|w_1w_2|^2\log^2(|w_1w_2|)}\wedge\frac{id(w_2)\wedge d(\overline{w_2})}{|w_2|^{2(1-\beta_2)}}$$

其相对于勒贝格测度的势由以下函数控制

$$-\log|w_2|^2\times 1/(|w_1|^2\log^2(w_1))\times 1/(|w_2|^{2(1-\beta_2)})$$

它是局部可积的。

若 $s=1$，则我们对其有一个上界

$$-\log|w_1|^2\frac{id(w_1)\wedge d(\overline{w_1})}{|w_1|^2\log^2(|w_1|)}\wedge\frac{id(w_1w_2)\wedge d(\overline{w_1w_2})}{|w_1w_2|^{2(1-\beta_2)}}$$

其相对于勒贝格测度的势由以下函数控制

$$-\log|w_1|^2\times 1/(|w_1|^2\log^2(w_1))\times|w_1|^{2\beta_2}/(|w_2|^{2(1-\beta_2)})$$

它是局部可积的。

现在， [Cao13] 命题 5.1 中的论证给出了以下推论。

推论 1. 设 (X,ω) 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形。设 $D=\sum(1-\beta_j)Y_j=\sum(1-\beta_j)[s_j=0]$ 是一个与 $\beta_j\in]0,1[$ 具有简单正规交叉的除子，且 $-(K_X+D)$ 数值有效。那么，阿尔巴内塞态射 α_X 是满射且具有连通纤维。事实上，除余维大于 2 的解析集外，阿尔巴内塞映射是浸没。

证 ´明。 [Cao13] 的证明只用到了这样一个事实：Harder-Narasimhan 滤过的分次块所对应的层的斜率关于 ω^{n-1} 均为正。因此，利用定理 3，结论可直接由他的论证推出。为方便读者，我们在此仅证明阿尔巴内塞映射的纤维是连通的这一事实。我们沿用 [DPS94]命题 3.9 中的论证。

设 $X\to Y\to \mathrm{Alb}(X)$ 是阿尔巴内塞映射的 Stein 分解，其中 $Y=\mathrm{Spec}\ \alpha_{X*}\mathcal{O}_X$。由于 X 光滑， Y 正规。我们断言映射 $f\colon Y\to \mathrm{Alb}(X)$ 是 ´étale。理由如下。根据 [Cao13], 中的论证，存在 Z $\mathrm{Alb}(X)$ 中一个余维至少为 2 的解析子集，使得 $X\smallsetminus\alpha_X^{-1}(Z)\to \mathrm{Alb}(X)\smallsetminus Z$是浸没（因而是纤维化）。因此，$Y\smallsetminus f^{-1}(Z)\to \mathrm{Alb}(X)\smallsetminus Z$是 ´étale。记 F为纤维化 $f|_{Y\smallsetminus f^{-1}(Z)}$的纤维，它是有限的。由纤维化所关联的长正合列，我们得到

$$\pi_1(F)\to\pi_1(Y\smallsetminus f^{-1}(Z))\to\pi_1(\mathrm{Alb}(X)\smallsetminus Z)\to\pi_0(F)$$

其中 $\pi_1(F)=0$和 $\pi_0(F)$ 是有限的。特别地， $\pi_1(Y\smallsetminus f^{-1}(Z))$ 是秩为 $2q$ 的自由阿贝尔群：$=2\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Alb}(X)$。注意，由余维条件可知， $\pi_1(\mathrm{Alb}(X)\smallsetminus Z)\cong\pi_1(\mathrm{Alb}(X))$。$\mathrm{Alb}(X)$ 同构于 $\mathrm{Alb}(X)$ 的万有覆盖 $\mathbb{C}^q$ 在群作用 $\pi_1(\mathrm{Alb}(X))$ 下的商。定义 T 为 $\mathbb{C}^q$ 在群作用 $\pi_1(Y\smallsetminus f^{-1}(Z))$ 下的商，并配备自然覆盖映射 $p\colon T\to\mathrm{Alb}(X)$。由同伦提升性质，存在映射$g\colon Y\smallsetminus f^{-1}(Z)\to T$，使得 $p\circ g=f|_{Y\smallsetminus f^{-1}(Z)}$。注意， g 是全纯的，因为它是由 f 与 p 的全纯局部逆映射复合而成。由于 $Y\smallsetminus f^{-1}(Z)\to\mathrm{Alb}(X)\smallsetminus Z$ 是有限的， $f^{-1}(Z)$ 的余维至少为 2。由于 Y 正规， g 可延拓为态射 $g\colon Y\to T$。现在， g 是 Y 与 T 之间的一般单射态射。由于 T 光滑，$T\smallsetminus p^{-1}(Z)\to Y$ 的逆映射也可延拓至 $p^{-1}(Z)$ 上，从而得到 g 的逆态射。总之，g 是 T 与 Y 之间的双全纯映射，这证明了 f 是 ´非分歧的。证明f 是 ´非分歧的另一种方法是使用分歧轨迹纯性定理。事实上， $f\colon Y\to\mathrm{Alb}(X)$ 是一个有限分歧覆盖，其中 Y 正规且 $\mathrm{Alb}(X)$ 光滑。于是，根据分歧轨迹纯性定理，分歧轨迹的余维要么为 1，要么为空。由于 f 在 $\mathrm{Alb}(X)$ 的一个余维至少为 2 的解析集之外是浸没，分歧轨迹必为空。

特别地， Y 是复环面 $\mathrm{Alb}(X)$ 的有限 ´étale 覆盖，因此 Y 本身是一个复环面。根据阿尔巴内塞态射的泛性质，存在一个态射 $h:\mathrm{Alb}(X)\to Y$，使得态射 $X\to Y$ 可经由 h分解。由于态射 $X\to Y$ 和 α_X 是满射，我们有 $h\circ f=id_Y$和 $f\circ h=id_{\mathrm{Alb}(X)}$。因此， f是一个双全纯映射，且阿尔巴内塞态射具有连通纤维。 □

[Cao13] 的论证结合定理 3，也证明了 Mumford 猜想的一个结论。Mumford 的一般猜想指出，对于任意 $m\geq 1$，若 $H^0(X,(T_X^*)^{\otimes m})=0$，则射影流形或紧致 K¨ahler 流形 X 是有理连通的，反之亦然。

推论 2. 设 (X,ω) 是一个 n 维紧致 K¨ahler 流形。设 $D=\sum(1-\beta_j)Y_j=\sum(1-\beta_j)[s_j=0]$ 是一个与 $\beta_j\in]0,1[$ 具有简单正规交叉的除子，且 $-(K_X+D)$ 数值有效。则以下性质等价：

（1） X 是射影的且有理连通。（2）对于任意 $m\geq 1$，$H^0(X,(T_X^*)^{\otimes m})=0$。（3）对于每个 $m\geq 1$ 以及 X 的任意有限 ´étale 覆盖 $\tilde{X}$，都有 $H^0(\tilde{X},\Omega_{\tilde{X}}^m)=0$。

致谢 感谢我的博士导师 Jean-Pierre Demailly 的指导、耐心与慷慨。我还要感谢我的博士后导师 Mihai P˘aun 在这项研究中给予的大力支持和非常有益的建议。感谢 Junyan Cao 和 Henri Guenancia 就这项研究展开的许多精彩讨论。本研究得到德国研究联合会项目 Singul¨are hermitianische Metriken f¨ur Vektorb¨undel und Erweiterungkanonischer Abschnitte 的资助，该项目由 Mihai P˘aun 负责。

参考文献

[BEGZ10]S´ébastien Boucksom、Philippe Eyssidieux、Vincent Guedj、Ahmed Zeriahi，《大上同调类中的 Monge-Amp`ère 方程》，Acta Math. 205 (2010)，第 2 期，199–262。[BT82]E. Bedford 和 B.A. Taylor，《多重次调和函数的一种新容量》，Acta Math.，149 (1982)，1–41。[Cao13] Junyan Cao，《关于具有数值有效反典范丛的紧致 K¨ahler 流形及其应用的一个注记》，arXiv:1305.4397。[CGP13] Fr´éd´eric Campana、Henri Guenancia、Mihai P˘aun，《沿正规交叉除子的锥奇点度量与全纯张量场》，Annales scientifiques de l'Ecole Normale Sup´érieure，S´érie 4，第 46 卷（2013），第 6 期，第 879–916 页。[Don12] S. K. Donaldson，《沿除子具有锥奇点的 K¨ahler 度量》，载于《数学及其应用论文集》，Springer，海德堡，2012，第 49–79 页。[DPS94] J.-P. Demailly、T. Peternell、M. Schneider：《具有数值有效切丛的紧致复流形》。J. Algebraic Geom. 第 3 卷（1994），第 2 期，第 295–345 页。[GP16] Henri Guenancia、Mihai P˘aun，《具有指定里奇曲率的锥奇点度量：沿正规交叉除子的一般锥角》，J. Differential Geom. 第 103 卷，第 1 期（2016），15–57。[Gue13] Henri Guenancia，《klt 对上的锥奇点 K¨ähler–Einstein 度量》。Int. J. Math. 24 1350035（2013）。[GZ17] Vincent Guedj 和 Ahmed Zeriahi，《退化复 Monge–Amp`ère 方程》。EMS 数学专著丛书，第 26 卷；496 页；2017。[Hir64] Heisuke Hironaka，《特征为零的域上代数簇的奇点消解》。I、II。Ann. of Math. (2) 79 (1964)，109–203；同刊 (2)，79：205–326，1964。[Ou17] Wenhao Ou，《切层的一般 nef 性》，arXiv:1703.03175[Paun16] Mahai P˘aun，《奇异 Hermitian 度量与多重典范丛直像的正性》。代数几何：盐湖城 2015，第 519–553 页。arXiv:1606.00174。[Zha96] Qi Zhang，《关于具有数值有效反典范丛的射影流形》。J. Reine Angew.Math.，478：57–60，（1996）。