arXiv:2301.05201v1 [math.FA] 12 Jan 2023

平均型算子的弱型 (1, 1)

SERGI BAENA-MIRET** 和 MAR´IA J. CARRO*

Abstract. 众所周知，由于 $L^{1,\infty}$ 不是巴拿赫空间，若 $(T_j)_j$ 是一个有界算子序列，使得

$$T_j : L^1 \longrightarrow L^{1,\infty}$$

其范数小于或等于 $||T_j||$ 且 $\sum_j ||T_j|| < \infty$，则无法对算子 $T = \sum_j T_j$作出任何断言。这正是许多困难且尚未解决的问题的由来。然而，若我们假设

$$T_j : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \forall u \in A_1,$$

其范数小于或等于 $\varphi(||u||_{A_1})||T_j||$，其中 φ 是一个非递减函数，且 A_1 是权的 Muckenhoupt 类，那么我们基本上证明了，

$$T : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \forall u \in A_1.$$

我们将看到，调和分析中的许多有趣问题都属于这种情况。

1. Introduction

设 $\{T_\theta\}_\theta$ 是由概率测度空间中的指标索引的一族算子，使得

$$T_\theta : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

其范数不超过某个统一常数 C。关于平均算子的有界性，我们能得出什么结论?

$$T_A f(x) = \int T_\theta f(x) dP(\theta), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

只要该算子有定义即可？下面这个平凡例子表明，乍看之下，我们无法得出任何有意义的结论：对于 $0 < \theta < 1$，令

$$T_\theta f(x) = \frac{\int_0^1 f(y)dy}{|x-\theta|}, \qquad x \in (0,1),$$

因此显然 T_θ 满足（1.1），但是

$$T_A f(x) = \int_0^1 T_\theta f(x) d\theta \equiv \infty, \qquad \forall x \in (0,1).$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 42A99，46E30，47B34，42A38。

Key words and phrases. Muckenhoupt 权、限制弱型外推、平均算子、傅里叶乘子算子、Bochner-Riesz 算子。作者部分得到由 MCIN/AEI 资助的项目 PID2020-113048GB-I00 的支持，资助机构代码为 10.13039/501100011033。*E-mail addresses:* *mjcarro@ucm.es, ** sergibaena@ub.edu。

然而，如果我们假设

$$T_\theta : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \forall u \in A_1,$$

其中， A_1 是如下定义的 Muckenhoupt 权类：若 u 是非负的局部可积函数（称为权），且存在正常数 C 使得

$$Mu(x) \le Cu(x), \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

其中， M 是 Hardy–Littlewood 极大算子，定义为

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy, \qquad f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

其中，上确界取遍所有包含 $x \in \mathbf{R}^n$的立方体 $Q \subseteq \mathbf{R}^n$ 。我们将满足该不等式的最小常数 C 记为 $\|u\|_{A_1}$ 。此外，众所周知（[5, 29]），

$$M : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in A_1,$$

其中$||M||_{L^1\ (u)\ \to L^{1,\ \infty}\ (u)\ } \le C||u||_{A_1}$。

我们先来看一个非常简单且具有启发性的例子。设 m 是 R 上的有界变差函数，右连续，并满足条件$m\ (-\infty)\ = 0$而归一化。于是，

$$m(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} dm(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,\xi)}(t)\, dm(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(t,\infty)}(\xi)\, dm(t), \qquad \forall \xi \in \mathbf{R},$$

其中， dm 是与 m 相关联的 Lebesgue–Stieltjes 测度，并且它是有限测度。因此，如果我们考虑傅里叶乘子算子

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}} m(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R},$$

对于每个 Schwartz 函数 f，其中

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

是函数 f的傅里叶变换，形式计算表明

$$T_m f(x) = \int_{\mathbb{R}} H_t f(x) dm(t), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

其中

$$H_t f(x) = T_{\chi_{(t,\infty)}} f(x) = \int_t^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

现在， H_t 本质上是一个希尔伯特变换算子（回忆一下， $Hf = T_m f$ 与$m(\xi) = -i$ sgn ξ），因为

$$\chi_{(t,\infty)}(\xi) = \frac{\operatorname{sgn}(\xi - t) + 1}{2}, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

因此，由于

$$H_t : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}), \qquad \forall p > 1,$$

利用闵可夫斯基积分不等式以及 Schwartz 函数在 L^p(R) 中的稠密性，我们有：每个右连续有界变差函数都是 L^p(R) 上的傅里叶乘子，对任意 $p > 1$ 均成立。然而，尽管我们还有

$$H_t : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}),$$

由于空间$L^{1,\infty}$(R)不满足闵可夫斯基积分不等式，我们无法推断（至少不能立即推断） T_m 也具有相同的有界性。

本文的主定理将表明，由于

$$H_t : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \varphi(||u||_{A_1}), \qquad \forall u \in A_1,$$

其中 φ 是定义在 $[1, \infty$ 上的非递减函数，且与 $t \in$ R 无关，因此对每个可测集 $E \subseteq$R^n,

$$||T_m \chi_E||_{L^{1,\infty}(u)} \leq C(m)\varphi(C_2||u||_{A_1})(1 + \log ||u||_{A_1})u(E), \quad \forall u \in A_1.$$

该结果将通过 Rubio de Francia 外推定理的一个扩展版本加以证明，该版本涉及 Muckenhoupt 权的理论（见定理 1.1）。第 4 节将给出其他有趣的应用。

现在回顾一下（见 [5, 29]），对于 $p > 1$,

$$M : L^p(v) \longrightarrow L^p(v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v \in A_p,$$

其中，这个权重类由以下条件定义

$$\|v\|_{A_p} = \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q v(x)^{\frac{1}{1-p}}\, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

并且，给定一个权 v, $L^p(v)$ 是由满足下述条件的可测函数 f 所构成的勒贝格空间：

$$||f||_{L^p(v)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

事实上（见 [18]），对每个 $p \geq 1$,

$$M : L^p(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v \in A_p,$$

其中 $L^{p,\infty}(v)$ 是由满足下述条件的可测函数 f 所构成的弱勒贝格空间：

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(v)} = \sup_{y>0} y \lambda_f^v(y)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

这里， λ_f^v 是 f 关于 v 的分布函数，定义为

$$\lambda_f^v(y) = v\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > y\}\big), \qquad y > 0.$$

（这里我们对每个可测集 $E \subseteq$R^n 使用标准记号 $v(E) = \int_E v(x)\, dx$ 。若 $v = 1$, 我们记作 λ_f 和 $|E|$。关于这一主题的更多细节，见 [3] 。）

对于我们的目的而言，一个关于 A_p 权的重要结果是 Rubio de Francia 的外推定理 [32, 33] （另见 [15, 17, 19, 20, 21]），如今可以表述如下：

定理 1.1（[17]）。设（f， g）是一对可测函数，使得对于某个 $1 \le p_0 < \infty$,

$$||g||_{L^{p_0}(v)} \le \varphi(\|v\|_{A_{p_0}})||f||_{L^{p_0}(v)}, \qquad \forall v \in A_{p_0},$$

其中 φ 是定义在 $[1, \infty$ 上的非递减函数）。那么，对于每个 $1 < p < \infty$,

$$||g||_{L^p(v)} \le C_1\varphi\Big(C_2\|v\|_{A_p}^{\max\left(1, \frac{p_0-1}{p-1}\right)}\Big)||f||_{L^p(v)}, \qquad \forall v \in A_p,$$

其中 C_1 和 C_2 是与所有相关参数无关的两个正常数。

这里我们必须强调，尽管 p_0 可以取 1，但一般而言，不可能外推到端点 $p = 1$ （只需取 $T = M \circ M$ ，或者参见例如 [30] ，其中给出了交换子情形下的一个反例）。然而，在近期论文 [9, 12], 中，针对满足加权限制弱型有界性的算子，发展出了一种 Rubio de Francia 外推理论，该理论适用于 $\widehat{}$ 权重类 A_p （略大于权重类 A_p）。这一新权重类的主要优点是能够在端点 $p = 1$ 获得有界性估计。

定义 1.2。我们定义

$$\widehat{A}_p = \Big\{v \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) : \exists\, h \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n) \text{ and } \exists\, u \in A_1 \text{ with } v = (Mh)^{1-p}u\Big\},$$

赋予范数

$$\|v\|_{\widehat{A}_p} = \inf\left\{\|u\|_{A_1}^{\frac{1}{p}} : v = (Mh)^{1-p}u\right\}.$$

$\widehat{}$显然， $A_1 = A_1$，而对于 $1 < p < \infty$， $A_p \subsetneq A_{p\circ}$

$\widehat{}$对每个 $1 \le p < \infty$ 及每个 $v \in A_p$，均有（见 [9, 14, 24]）：

$$M : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad \|M\|_{L^{p,1}(v)\longrightarrow L^{p,\infty}(v)} \le C\|v\|_{\widehat{A}_p},$$

其中，洛伦兹空间 $L^{p,1}(v)$定义为满足下列条件的可测函数 f的集合:

$$\|f\|_{L^{p,1}(v)} = p\int_0^\infty \lambda_f^v(y)^{\frac{1}{p}}\, dy < \infty.$$

那么， [9] 中证明的受限弱型 Rubio de Francia 外推结果可表述如下:

定理 1.3（[9]）。设 $1 < p_0 < \infty$ ，且 T 是一个满足下述条件的算子:

$$T : L^{p_0,1}(v) \longrightarrow L^{p_0,\infty}(v), \qquad \varphi(\|v\|_{\widehat{A}_{p_0}}), \qquad \forall v \in \widehat{A}_{p_0},$$

其中， φ 是在 $[1, \infty$ 上的正的非递减函数）。那么，对于 A_1 中的每个权， T 都是加权限制弱型 (1, 1)；也就是说，对于任意可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^n$，存在一个与 E 无关的常数 $C > 0$ ，使得

$$\|T\chi_E\|_{L^{1,\infty}(u)} \le C\|u\|_{A_1}^{1-\frac{1}{p_0}}\varphi\left(\|u\|_{A_1}^{\frac{1}{p_0}}\right)u(E), \qquad \forall u \in A_1. \tag{1.2}$$

为简便起见，每当算子 T 满足对每个可测集 E,

$$\|T\chi_E\|_{L^{1,\infty}(u)} \leq C_u u(E),$$

我们将其记为

$$T : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad C_u.$$

注 1.4. 一般而言， T 具有加权弱型 (1, 1) 性质这一完整结论（即估计 (1.2) 对每个 $f \in L^1(u)$ 都成立）并不成立（见[9]）。然而，在算子 T 满足某些温和条件时（见第 2.2 节），可以证明其具有加权弱型 (1,1) 有界性。

注 1.5. 我们在此强调，我们的算子不必是次线性的。不过，如果 T 是次线性的，则已在 [34] 中证明:

$$T : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u)$$

等价于在空间上具有有界性

$$B^*(u) = \left\{ f : \int_0^\infty \lambda_f^u(t) \left(1 + \log \frac{||f||_1}{\lambda_f^u(t)}\right) dt < \infty \right\},$$

该空间可以赋予一个拟范数。

我们的主要目标将是证明定理 1.3 的逆命题也成立这一事实的推论，因此

$$T : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \forall u \in A_1 \iff T : L^{p_0,1}(v) \longrightarrow L^{p_0,\infty}(v), \forall v \in \widehat{A}_{p_0}.$$

事实上，若 p' 是 $p > 1$ 的共轭指数（即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$），我们的主定理可表述如下:

定理 1.6. 设 (f, g) 是一对可测函数，满足

$$||g||_{L^{1,\infty}(u)} \leq \varphi(\|u\|_{A_1})||f||_{L^1(u)}, \qquad \forall u \in A_1,$$

其中 φ 在 $[1, \infty$上是非递减函数）。那么，对任意 $1 < p < \infty$,

$$||g||_{L^{p,\infty}(v)} \leq \Phi(\|v\|_{\widehat{A}_p})||f||_{L^{p,1}(v)}, \qquad \forall v \in \widehat{A}_p,$$

其中

$$\Phi(r) = C_1\varphi(C_2 r^p) r^{p-1}(1 + \log r)^{\frac{2}{p'}}, \qquad r \geq 1,$$

其中 C_1 和 C_2 是两个正常数，且与所有相关参数无关。

由此可得以下推论:

推论 1.7. 设 $c = (c_j)_j \in \ell^1$，并设 $\{T_j\}_j$ 满足

$$T_j : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \varphi(||u||_{A_1}), \qquad \forall u \in A_1,$$

其中， φ 是定义在 $[1, \infty$上的正的非递减函数。于是，对每个 $u \in A_1$,

$$\sum_j c_j T_j : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad C_1||c||_{\ell^1}\varphi(C_2||u||_{A_1})(1 + \log||u||_{A_1}).$$

按照惯例，我们用符号 $A \lesssim B$ 表示存在一个普适正常数 C，它与所有重要参数无关，且满足 $A \leq CB$。当 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$时，我们将写作 $A \approx B$。

本文结构安排如下。第 2 节将介绍一些已有概念、必要的定义以及后文将用到的一些技术性结果。事实上，我们将在那里证明引理 2.5，该引理对于第 3 节给出的主要结果的证明至关重要。此外，第 4 节包含我们的主要例子和应用。最后，我们还加入了最后一节，讨论有限外推背景下的类似结果。

2. Preliminary notions and some technical results

2.1. A_1 权。首先回顾该类A_1的一些众所周知的事实:

i) ([16, 定理 7.7]) 一个权 u属于 A_1，当且仅当存在$h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 和 K，使得 $K, K^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，并满足：对于某个$0 < \mu < 1$,

$$u(x) = K(x)(Mh(x))^\mu, \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$由所有满足以下条件的可测函数 f 组成

$$||f||_\infty := ||f||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{ess\,sup} f < \infty.$$

ii) ([12, 引理 2.12]) 对每个 $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$、每个 $u \in A_1$ 和 $0 < \mu < 1$，都有 $(Mh)^\mu u^{1-\mu} \in A_1$，其中

$$\left\| (Mh)^\mu u^{1-\mu} \right\|_{A_1} \lesssim \frac{\|u\|_{A_1}}{1-\mu}. \tag{2.1}$$

iii) ([31, 引理 5.1]) 若 $t = 1 + \frac{1}{2^{n+1}\|u\|_{A_1}}$，则

$$u^t \in A_1 \quad \text{and} \quad ||u^t||_{A_1} \lesssim ||u||_{A_1}. \tag{2.2}$$

2.2. (ε, δ)-原子算子。如上所述，一般而言，对每个 $u \in A_1$，以下蕴含关系并不成立:

$$T : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u) \qquad \Longrightarrow \qquad T : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u),$$

即使 T 是次线性算子也是如此。然而，[9, 定理 3.5]证明，对于一大类算子，上述蕴含关系成立。

定义 2.1. 给定 $\delta > 0$，若函数 $a \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 满足以下性质，则称其为 δ-原子:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\,dx = 0$，且 (ii) 存在立方体 $Q \subseteq \mathbb{R}^n$，使得 $|Q| \leq \delta$ 且 $\operatorname{supp} a \subseteq Q$。

定义 2.2. (a) 次线性算子 T 称为（ε, δ）-原子的，如果对于每个$\varepsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 满足

$$\|Ta\|_{L^1(\mathbb{R}^n)+L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|a\|_1,$$

对每个 δ-原子 a。

(b) 若存在一个 (ε,δ)-原子算子序列 $\{T_j\}_j$，使得对每个可测集$E\subseteq\mathbb{R}^n$，均有 $|T_j\chi_E|\le|T\chi_E|$，并且对每个满足 $\|f\|_\infty\le 1$ 的 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则称次线性算子 T为 (ε,δ)-原子可逼近的。

$$|Tf(x)|\le\liminf_j|T_jf(x)|,\qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

例子：在 [6], 中，作者证明，对于次线性算子，具有（ε,δ）-原子性质并非一种强性质。例如，若

$$Tf(x)=K*f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(y-x)f(y)\,dy,\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

在 $K\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 中，其中某个 $1\le p<\infty$，则 T是（ε,δ）-原子的。此外，若

$$T^*f(x)=\sup_{j\in\mathbb{N}}\left|\int_{\mathbb{R}^n}K_j(x,y)f(y)\,dy\right|,\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

with

$$\lim_{y\to x}\|K_j(\,\cdot\,,y)-K_j(\,\cdot\,,x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)+L^\infty(\mathbb{R}^n)}=0,$$

则 T^*是（ε,δ）-原子可逼近的（例如，标准的极大 Calder´on-Zygmund 算子便属于此类）。一般而言，

$$T^*f(x)=\sup_j|T_jf(x)|,\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\{T_j\}_j$是一个（ε,δ）-原子算子序列，是（ε,δ）-原子可逼近的，而同样的结论也适用于

$$Tf(x)=\left(\sum_j|T_jf(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}},\qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $q\in[1,\infty)$，并且

$$Tf(x)=\sum_jT_jf(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

（更多例子请参见 [6, 9]。）

定理 2.3（[9]）。设 T 是一个次线性算子，(ε,δ)-原子可逼近。那么，给定 $u\in A_1$,

$$T:L^1_{\mathcal{R}}(u)\longrightarrow L^{1,\infty}(u),\quad C_u\quad\Longrightarrow\quad T:L^1(u)\longrightarrow L^{1,\infty}(u),\quad 2^nC_u\|u\|_{A_1}.$$

2.3. Sawyer 型不等式。这里我们将研究一个常被称为 Sawyer 型不等式的结果，适用于属于受限权重类 $\hat{}A_p$ 的权。首先，为此我们需要以下结果。

引理 2.4。设 $1<p<\infty$ 和 $v\in\widehat{A}_p$。取 $\frac{1}{p'}<\theta\le 1$ 并令 $u_0=(Mh)^{\frac{(p-1)(1-\theta)}{\theta}}$。那么，

$$M_{u_0}:L^{\frac{\theta p'}{\theta p'-1},1}(v)\longrightarrow L^{\frac{\theta p'}{\theta p'-1},\infty}(v),\tag{2.3}$$

常数小于或等于

$$\frac{\theta^2 p' C_{n,p}}{1-p(1-\theta)} \|v\|_{\hat{A}_p}^{\frac{2(\theta p'-1)}{\theta(p'-1)}},$$

并且

$$M_{u_0} f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{u_0(Q)} \int_Q |f(y)| u_0(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

ˆ 证明。注意，由于 $v \in A_p$，因此 v 是一个倍增权，其常数为 $\Delta_v \le C_1 \|v\|^p{}_{\hat{A}_p}$。因此，根据 [12, 引理 2.2 (i)], , (2.3) 的有界常数小于或等于

$$C_1 \|v\|_{\hat{A}_p}^{\frac{\theta p'-1}{\theta(p'-1)}} \theta p' \left[\sup_{E \subseteq Q} \frac{u_0(E)}{u_0(Q)} \left(\frac{v(Q)}{v(E)} \right)^{\frac{\theta p'-1}{\theta p'}} \right],$$

其中，上确界取遍所有立方体 Q 和所有可测集 $E \subseteq Q$。现在，给定一个立方体 Q 和一个可测集 $E \subseteq Q$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{v(Q)}{v(E)} \right)^{\frac{\theta p'-1}{\theta p'}} &= \left(\frac{|Q|}{|E|} \right)^{\frac{\theta p'-1}{\theta(p'-1)}} \left[\left(\frac{|E|}{|Q|} \right)^p \frac{v(Q)}{v(E)} \right]^{\frac{\theta p'-1}{\theta p'}} \\ &\le C_2 \|v\|_{\hat{A}_p}^{\frac{\theta p'-1}{\theta(p'-1)}} \left(\frac{|Q|}{|E|} \right)^{\frac{\theta p'-1}{\theta(p'-1)}} \end{aligned}$$

并且，根据 [12, 引理 2.5],

$$\sup_{E \subseteq Q} \frac{u_0(E)}{u_0(Q)} \left(\frac{|Q|}{|E|} \right)^{\frac{\theta p'-1}{\theta(p'-1)}} \le \frac{\theta C_3}{1-p(1-\theta)},$$

由此得到所需结果。 □

下面的引理是在 $\mu = 1$ in [12, 引理 2.6], 的情形下证明的，而将其推广到其他 μ 对我们的研究至关重要。

引理 2.5. 设 $1 < p < \infty$，并且 $v = (Mh)^{1-p} u \in \widehat{A}_{p\circ}$ 取 θ 和 μ，使得 $\frac{1}{p'} < \theta < \mu \le 1$，并令 $v_\theta = (Mh)^{1-p} u^\theta$。那么,

$$\left\| \frac{M_\mu(\chi_E v_\theta)}{v_\theta} \right\|_{L^{p',\infty}(v)} \lesssim C_{p,\theta,\mu}(u) v(E)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}^n,$$

其中 $M_\mu f := M(|f|^{1/\mu})^\mu$，并且

$$C_{p,\theta,\mu}(u) = \left(\frac{p^2}{(p-1)^2(\mu-\theta)(\theta-\frac{1}{p'})^2} \right)^\theta \|u\|_{A_1}^{2\theta-\frac{2}{p'}}. \tag{2.4}$$

证明。注意到根据 Kolmogorov 不等式 [22]，其中 $1 < r' = \frac{1}{\theta} < p'$，只需证明

$$\begin{aligned} &\sup_{F \subseteq \mathbb{R}^n} \frac{1}{v(F)^{\frac{1}{r'}-\frac{1}{p'}}} \left(\int_F (Mh(x))^{(p-1)(r'-1)} \big(M_\mu(\chi_E (Mh)^{1-p} u^\theta)(x) \big)^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &\lesssim C_{p,\theta,\mu}(u) v(E)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

然后，由于 $\mu r' > 1$，应用 Fefferman-Stein 不等式 [18], ，可得

$$\begin{aligned}&\int_F (Mh(x))^{(p-1)(r'-1)}\big(M_\mu(\chi_E(Mh)^{1-p}u^\theta)(x)\big)^{r'}dx\\ \lesssim&\frac{\mu r'}{\mu r'-1}\int_E (Mh(x))^{(1-p)r'}M(\chi_F(Mh)^{(p-1)(r'-1)})(x)u(x)dx.\end{aligned}$$

现在，由于 $u_0 = (Mh)^{(p-1)(r'-1)} \in A_1$，我们有，对于每个 $x \in E$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的每个立方体 $Q \ni x$ ，

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q \chi_F u_0(y)\,dy &\le \frac{u_0(Q)}{|Q|}M_{u_0}(\chi_F)(x) \le ||u_0||_{A_1}u_0(x)M_{u_0}(\chi_F)(x)\\ &\lesssim \frac{1}{1-(p-1)(r'-1)}u_0(x)M_{u_0}(\chi_F)(x),\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中，在最后一个估计中我们使用了 (2.1)。因此，对所有满足 $Q \ni x$ 的立方体 $Q \in\mathbb{R}^n$ 取上确界，并令 $x \in E$，我们推得

$$\begin{aligned}&\int_E (Mh(x))^{(1-p)r'}M(\chi_F(Mh)^{(p-1)(r'-1)})(x)u(x)dx\\ \lesssim&\frac{1}{1-(p-1)(r'-1)}\int_E M_{u_0}(\chi_F)(x)v(x)\,dx.\end{aligned}$$

因此，由于 $r' = \frac{1}{\theta}$ ，若要使我们想证明的不等式成立，只需证明

$$\begin{aligned}&\sup_{E\subseteq\mathbb{R}^n}\frac{1}{v(E)^{\frac{1}{p'}}}\left(\int_E M_{u_0}(\chi_F)(x)v(x)\,dx\right)^\theta\\ &\lesssim\left(\frac{(\mu-\theta)(1-p(1-\theta))}{\mu\theta}\right)^\theta C_{p,\theta,\mu}(u)v(F)^{\theta-\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

或者等价地,

$$\begin{aligned}&\sup_{E\subseteq\mathbb{R}^n}\frac{1}{v(E)^{1-\left(1-\frac{1}{\theta p'}\right)}}\int_E M_{u_0}(\chi_F)(x)v(x)\,dx\\ &\lesssim\left(\frac{(\mu-\theta)(1-p(1-\theta))}{\mu\theta}\right)C_{p,\theta,\mu}(u)^{\frac{1}{\theta}}v(F)^{1-\frac{1}{\theta p'}}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

最后，再次利用 (2.6) 中的 Kolmogorov 不等式，只需证明

$$M_{u_0} : L^{\frac{\theta p'}{\theta p'-1},1}(v) \longrightarrow L^{\frac{\theta p'}{\theta p'-1},\infty}(v)$$

其常数小于或等于

$$\frac{c_{n,p}}{\theta p'}\left(\frac{(\mu-\theta)(1-p(1-\theta))}{\mu\theta}\right)C_{p,\theta,\mu}(u)^{\frac{1}{\theta}}.$$

根据引理 2.4，如果

$$C_{p,\theta,\mu}(u) \gtrsim \left(\frac{p^2}{(p-1)^2(\mu-\theta)(1-p(1-\theta))^2}\right)^\theta \|u\|_{A_1}^{\frac{2(\theta p'-1)}{p'}},$$

由此，按照 (2.4) 取 $C_{p,\theta,\mu}(u)$，即可得到所需的结果。

□

3. Proof of the main result

现在我们可以证明主要结果:

定理 1.6 的证明。令 $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 和 $u \in A_1$，使得 $v = (Mh)^{1-p}u \in \curvearrowright A_p$。此外，取

$$\frac{1}{p'} < \theta < 1, \qquad \mu := 1 - \frac{1-\theta}{t} \qquad \text{and} \qquad v_\theta := (Mh)^{1-p}u^\theta,$$

其中 $t = 1 + \frac{1}{2^{n+1}\|u\|_{A_1}}$ 满足 $u^t \in A_1$，且 $||u^t||_{A_1} \lesssim ||u||_{A_1}$（见 (2.2)）。于是，$\theta < \mu < 1$，并且由 (2.1)，对每个可测集 $F \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$u_0 = M_\mu(\chi_F v_\theta)u^{1-\theta} = M(\chi_F v_\theta^{1/\mu})^\mu (u^t)^{1-\mu} \in A_1, \qquad ||u_0||_{A_1} \le \frac{C||u||_{A_1}}{1-\mu}.$$

令 $y > 0$ 并设 $F = \{x : |g(x)| > y\}$，使得 $v(F) = \lambda_g^v(y)$。不失一般性，我们可以假设 $v(F) < \infty$，因为否则可以取 $g_N = g\chi_{B(0,N)}$，并在估计的最后令 N 趋于无穷。

根据假设，我们得到

$$\begin{aligned} y\lambda_g^v(y) &= y\int_{\{x\,:\,|g(x)|>y\}} v(x)\,dx \le y\int_F M_\mu(\chi_F v_\theta)(x)u(x)^{1-\theta}dx \\ &\le \varphi\left(\frac{C||u||_{A_1}}{1-\mu}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|M_\mu(\chi_F v_\theta)(x)u(x)^{1-\theta}dx \\ &= \varphi\left(\frac{Ct||u||_{A_1}}{1-\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\frac{M_\mu(\chi_F v_\theta)(x)}{v_\theta(x)}\,v(x)\,dx \\ &\le \varphi\left(\frac{Ct||u||_{A_1}}{1-\theta}\right)\left\|\frac{M_\mu(\chi_F v_\theta)}{v_\theta}\right\|_{L^{p',\infty}(v)} ||f||_{L^{p,1}(v)}, \end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中，我们使用了关于测度 $v(x)\,dx$ 的洛伦兹空间 Hölder 不等式。

现在，根据引理 2.5,

$$\left\|\frac{M_\mu(\chi_F v_\theta)}{v_\theta}\right\|_{L^{p',\infty}(v)} \lesssim C_{p,\theta,\mu}(u)v(F)^{\frac{1}{p'}} = C_{p,\theta,\mu}(u)\lambda_g^v(y)^{\frac{1}{p'}},$$

因此，对所有 $y > 0$ 取上确界，特别地，我们得到

$$\|g\|_{L^{p,\infty}(v)} \lesssim C_{p,\theta,\mu}(u)\varphi\left(\frac{Ct||u||_{A_1}}{1-\theta}\right)||f||_{L^{p,1}(v)}.$$

最后，关于常数 $C_{p,\theta,\mu}(u)$，我们观察到

$$\begin{aligned} C_{p,\theta,\mu}(u) &= \left(\frac{p^2}{(p-1)^2(\mu-\theta)(\theta-\frac{1}{p'})^2}\right)^\theta \|u\|_{A_1}^{2\theta-\frac{2}{p'}} \\ &\approx \left(\frac{p^2}{(p-1)^2(1-\theta)(\theta-\frac{1}{p'})^2}\right)^\theta \|u\|_{A_1}^{3\theta-\frac{2}{p'}}. \end{aligned}$$

因此，令

$$\theta = \frac{1}{p'}\left(1 + \frac{1}{(p+1)R}\right), \qquad 1 \le R < \infty,$$

then

$$C_{p,\theta,\mu}(u) \lesssim \left(\frac{p^5(p+1)^3R^2}{(p-1)^4}\right)^{\frac{1}{p'}\left(1+\frac{1}{(p+1)R}\right)} \|u\|_{A_1}^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{A_1}^{\frac{3}{Rp'(p+1)}} \lesssim R^{\frac{2}{p'}} \|u\|_{A_1}^{\frac{1}{p'}} \|u\|_{A_1}^{\frac{3}{R}}.$$

此外，采用相同的 θ,

$$\varphi\left(\frac{Ct||u||_{A_1}}{1-\theta}\right) \le \varphi\left(\tilde{C}||u||_{A_1}\right).$$

因此，令 $R = 1 + \log\|u\|_{A_1}$，再对 $v \in A_p$ 的所有可能表示取 $\|u\|_{A_1}$ 上的 $\widehat{}$下确界，即得所需结果。□

4. Examples and applications to average operators, multipliers and integral operators

4.1. 例子。调和分析中有许多算子，对于每个 A_1 中的权，其弱型 **(1, 1)** 有界性都已得到证明 [9, 23,26, 27, 28, 35]。

根据经典的 Rubio de Francia 外推理论（见定理 **1.1**），已知这些算子对每个 $v \in A_p$ 也在 $L^p(v)$ 上有界；但是，一般而言，受限弱型

$$T : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad \forall v \in \widehat{A}_p,$$

迄今为止，许多例子中的受限弱型性质仍未得到证明。例如，临界指标为 $B_{\frac{n-1}{2}}$ 的 Bochner-Riesz 算子便是如此。该算子由 S. Bochner 于 [4] 引入，定义如下（关于这一问题的一些部分结果，见 [7] ）：令 $a_+ = \max\{a, 0\}$ 表示 $a \in \mathbb{R}$ 的正部。给定 $\lambda > 0$，定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Bochner-Riesz 算子 B_λ 为

$$\widehat{B_\lambda f}(\xi) = \left(1 - |\xi|^2\right)_+^\lambda \hat{f}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

命题 **4.1**（[28, 35]）。对于每个 $n > 1$,

$$B_{\frac{n-1}{2}} : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad C||u||_{A_1}^2 \log(||u||_{A_1} + 1), \qquad \forall u \in A_1.$$

因此，借助定理 **1.6**，我们彻底解答了 [7] 中关于 $B_{\frac{n-1}{2}}$ 的限制弱型有界性的未解决问题。

推论 **4.2**。对于每个 $n > 1$ 以及每个 $p > 1$,

$$B_{\frac{n-1}{2}} : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad C||v||_{\hat{A}_p}^{3p-1}(1 + \log||v||_{\hat{A}_p})^{1+\frac{2}{p'}}, \qquad \forall v \in \widehat{A}_p.$$

对于大量算子，也可以得到相同的估计，例如 [2, 7, 9] 中出现的粗糙算子、H¨ormander 乘子、径向傅里叶乘子、平方函数等。

4.2. 平均算子。

推论 4.3. 假设 $\{T_\theta\}_\theta$ 是一族由概率测度空间中的指标标记的算子，使得平均算子

$$T_A f(x) = \int T_\theta f(x) dP(\theta), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

定义良好，并且

$$T_\theta : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \varphi(||u||_{A_1}), \qquad \forall u \in A_1, \tag{4.1}$$

其中 φ 是 $[1, \infty$ 上的正的非递减函数。于是,

$$T_A : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \quad C_1\varphi(C_2||u||_{A_1})(1 + \log ||u||_{A_1}), \quad \forall u \in A_1. \tag{4.2}$$

此外，若 T_A 是一个次线性（ε, δ）-原子可逼近算子，则

$$T_A : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \tilde{C}_1\varphi(C_2||u||_{A_1})||u||_{A_1}(1 + \log ||u||_{A_1}). \tag{4.3}$$

证明。令 $1 < p < \infty$。利用定理 1.6，我们有 (4.1) 推出

$$T_\theta : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad \Phi(||v||_{\widehat{A}_p}), \qquad \forall v \in \widehat{A}_p.$$

现在， $L^{p,\infty}(v)$ 是一个巴拿赫函数空间，因为存在一个范数 $||\cdot||_{(p,\infty,v)}$使得

$$||f||_{L^{p,\infty}(v)} \le ||f||_{(p,\infty,v)} \le \frac{p}{p-1}||f||_{L^{p,\infty}(v)}.$$

因此，根据闵可夫斯基积分不等式， T_A 满足：对于任意 $p > 1$,

$$T_A : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad \frac{p}{p-1}\Phi(||v||_{\widehat{A}_p}), \qquad \forall v \in \widehat{A}_p.$$

因此，利用定理 1.3，对 $p > 1$取下确界即可得到所需结果 (4.2)。最后，(4.3)只是定理 2.3 的一个推论。□

特别地，引言中陈述的下一个结果如下:

推论 1.7 的证明。该结果是推论 4.3 的直接推论，因为 $\left\{\frac{c_j}{||c||_{\ell^1}}T_j\right\}_j$是由计数概率测度所索引的一族算子。□

(I) 傅里叶乘子

我们的下一个应用涉及从 $\mathbf{R}^{n+k}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的限制乘子。首先，回顾一下，定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的有界函数 m 称为归一化函数，当且仅当

$$\lim_j \widehat{\psi_j} * m(x) = m(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4}$$

其中，对每个 j， $\psi_j(x) = \psi(x/j)$，且 $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$（即， ψ 是一个具有紧支集的无穷次可微函数）， $\psi \ge 0$ 和 $||\psi||_1 = 1$。

容易看出，此时对于 m 的每个勒贝格点 x ，（4.4）都成立。特别地，每个连续有界函数都是归一化的。

命题 4.4. 设 $k \geq 1$，并假设定义在 $\mathbf{R}^{n+k}$ 上的归一化有界函数m满足

$$T_m : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \varphi(||u||_{A_1}), \qquad \forall u \in A_1(\mathbb{R}^{n+k}),$$

其中，φ 是 $[1,\infty$上的正的非递减函数。取 $\phi \in L^1(\mathbf{R}^k)$并定义

$$m_\phi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} m(x,y)\phi(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

那么，对于每个 $v \in A_1(\mathbf{R}^n)$,

$$T_{m_\phi} : L^1_{\mathcal{R}}(v) \longrightarrow L^{1,\infty}(v), \qquad C_1\varphi(C_2||v||_{A_1})||v||_{A_1}(1+\log||v||_{A_1}).$$

证明。取 $v \in A_1(\mathbf{R}^n)$并定义 $u = v \otimes \chi_{\mathbb{R}^k}$，使得

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (x,\, y) &\longmapsto u(x,y) = v(x), \end{aligned}$$

满足 $u \in A_1(\mathbf{R}^{n+k})$，其中 $||u||_{A_1} \leq ||v||_{A_1}$。于是，$T_m : L^1(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u)$; 根据定理 4.4] （此处用到 m 是归一化的），

$$T_{m(\cdot,y)} : L^1(v) \longrightarrow L^{1,\infty}(v), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^k,$$

with

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^k} ||T_{m(\cdot,y)}||_{L^1(v)\to L^{1,\infty}(v)} \lesssim ||u||_{A_1}||T_m||_{L^1(u)\to L^{1,\infty}(u)} \leq ||v||_{A_1}\varphi(||v||_{A_1}).$$

现在，取$f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$。那么，对每个 $y \in \mathbf{R}^k$，我们有 $m(\cdot,y)\hat{}f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, 并且$m_\phi\hat{}f \in L^1(\mathbf{R}^n)$；因此，由傅里叶变换的性质,

$$T_{m(\cdot,y)}f(x) = \left(m(\cdot,y)\hat{f}\right)^\vee(x) \quad \text{and} \quad T_{m_\phi}f(x) = (m_\phi\hat{f})^\vee(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

因此，根据富比尼定理,

$$\begin{aligned} T_{m_\phi}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} m_\phi(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^k} m(\xi,y)\phi(y)\,dy\right)\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\left(\int_{\mathbb{R}^n} m(\xi,y)\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}\,d\xi\right)\phi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} T_{m(\cdot,y)}f(x)\phi(y)\,dy, \end{aligned}$$

结合推论 4.3 以及 $L^{p,1}(v)$ 中的函数在 $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^n) \cap L^{p,1}(v)$ 中的稠密性，结论便得证。
□

（II）积分算子

现在考虑算子

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y)f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中积分核 K 满足某种形如 $|K(x,y)| \lesssim |x-y|^{-n}$ 的大小条件。

命题 4.5. 假设对于每个 $s > 0$,

$$T_s f(x) = \int_{|x-y|\geq s} K(x,y) f(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

满足该条件。

$$T_s : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \qquad \varphi(||u||_{A_1}), \qquad \forall u \in A_1,$$

其中， φ 是 $[1,\infty$上的正的非递减函数）。那么，如果 ϕ 是 $(0,\infty)$ 上的有界变差函数，且 $\lim_{x\to 0^+} \phi(x) = 0$，则有

$$T_\phi f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y)\phi(|x-y|) f(y) dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

满足如下条件。

$$T_\phi : L^1_{\mathcal{R}}(u) \longrightarrow L^{1,\infty}(u), \quad C_1\varphi(C_2||u||_{A_1})(1+\log||u||_{A_1}), \quad \forall u \in A_1.$$

证明。根据假设，我们注意到

$$\phi(|x-y|) = \int_0^{|x-y|} \phi'(s) ds, \qquad \phi' \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

因此，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及任意 $\varepsilon > 0$，由富比尼定理可得

$$\begin{aligned} T_\phi f(x) - \phi(\varepsilon) T f(x) &= \int_0^\infty \left(\int_{|x-y|\geq s\geq \varepsilon} K(x,y) f(y) dy \right) \phi'(s)\, ds \\ &= \int_\varepsilon^\infty T_s f(x) \phi'(s)\, ds, \end{aligned}$$

是一个平均算子，因此由推论 4.3 可得该结果，再令 ε 趋于零。□

5. Limited extrapolation results

本节的动机源于这样一个事实：调和分析中也有许多算子（例如 Bochner-Riesz），它们满足

$$T : L^{p_0}(v) \longrightarrow L^{p_0}(v)$$

并非对每个 $v \in A_{p_0}$ 都有界，但在 A_{p_0} 的某个子类中，对每个 v 都有界。在这一较弱的假设下，只有当某些取值的 p_- 和 p_+ 满足 $p \in$ （p_-, p_+）时，才能推出 T 在 L^p （v）上的有界性。本节旨在建立某种等价关系，类似于定理 1.6，即端点 p_- 处的有界性与 p 层次上的限制弱型有界性之间的等价关系。事实上，这种情况下的 Rubio de Francia 外推结果称为有限外推（见 [1, 8, 10, 15, 17]）。

定义 5.1. 给定 $0 \leq \alpha$、$\beta \leq 1$ 和 $1 \leq p < \infty$，我们来定义权类

$$A_{p;(\alpha,\beta)} = \left\{ 0 < v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : v = v_0^\alpha v_1^{\beta(1-p)}, v_j \in A_1 \right\}$$

with

$$||v||_{A_{p;(\alpha,\beta)}} = \inf \left\{ ||v_0||^\alpha_{A_1} ||v_1||^{\beta(p-1)}_{A_1} : v = v_0^\alpha v_1^{\beta(1-p)} \right\},$$

and

$$\hat{A}_{p;(\alpha,\beta)}=\left\{0<v\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):v=v_0^{\alpha}(Mh)^{\beta(1-p)},v_0\in A_1,\ h\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

with

$$||v||_{\hat{A}_{p;(\alpha,\beta)}}=\inf\left\{||v_0||_{A_1}^{\frac{\alpha}{1+\beta(p-1)}}:v=v_0^{\alpha}(Mf)^{\beta(1-p)}\right\}.$$

定义 5.2. 给定 $1\le p_0<\infty$ 和 $0\le\alpha$、$\beta\le 1$，令

$$p_+=\frac{p_0}{1-\alpha},\quad p'_-=\frac{p'_0}{1-\beta},\quad \left(\text{or } p_-=\frac{p_0}{1+\beta(p_0-1)}\right),$$

其中 $p_+=\infty$ 若 $\alpha=1$，且 $p_-=1$ 若 $\beta=1$。于是，$1\le p_-\le p_+\le\infty$，并且我们可以为每个 $p\in[p_-,p_+]$ 关联以下指标

$$\alpha(p)=\frac{p_+-p}{p_+}\qquad\text{and}\qquad\beta(p)=\frac{p-p_-}{p_-(p-1)},$$

使得 $0\le\alpha(p)\ \beta(p)\ \le 1$, $p_+=\frac{p}{1-\alpha(p)}$, $p'_-=\frac{p'}{1-\beta(p)}$ 且 $\alpha(p_0)=\alpha$, $\beta(p_0)=\beta$。

定理 5.3（[17]）。设（f,g）是一对可测函数，且对某些 $1\le p_0<\infty$ 和 $0\le\alpha$, $\beta\le 1$（并非同时恒等于零），有

$$\|g\|_{L^{p_0}(v)}\le\varphi\left(\|v\|_{A_{p_0;(\alpha,\beta)}}\right)\|f\|_{L^{p_0}(v)},\qquad\forall v\in A_{p_0;(\alpha,\beta)},$$

其中 φ 是 $[1,\infty)$ 上的非递减函数。于是，对每个 $p_-<p<p_+$,

$$\|g\|_{L^p(v)}\le C_1\varphi\left(C_2\|v\|_{A_{p;(\alpha(p),\beta(p))}}^{\max\left(\frac{p_+-p_0}{p_+-p},\frac{p_0-p_-}{p-p_-}\right)}\right)\|f\|_{L^p(v)},\qquad\forall v\in A_{p;(\alpha(p),\beta(p))},$$

其中 C_1 和 C_2 是两个正常数，且与所有涉及的参数无关。

注意到，在定理 5.3 中无法外推至端点p_- 和 p_+。然而，在 [10, 定理 3.7] 中，作者能够得到端点 p_-处的估计。为此，他们需要假设算子对于权重类 $\hat{}A_{p;(\alpha,\beta)}$ 满足限制弱型有界性，该权重类略大于 $A_{p;(\alpha,\beta)}$。

定理 5.4（[10]）。设 $1\le p_0<\infty$、$0\le\alpha$、$\beta\le 1$（不同时恒为零），并设 T 为一个算子。假设

$$T:L^{p_0,1}(v)\longrightarrow L^{p_0,\infty}(v),\qquad\varphi(\|v\|_{\hat{A}_{p_0;(\alpha,\beta)}}),\qquad\forall v\in\hat{A}_{p_0;(\alpha,\beta)},$$

其中，φ 是 $[1,\infty$上的正的非递减函数）。则:

(i) If $p_->1$,

$$T:L^{p_-,1}\left(u^{\alpha(p_-)}\right)\longrightarrow L^{p_-,\infty}\left(u^{\alpha(p_-)}\right),\quad\frac{\Phi_{p_-}(||u||_{A_1}^{\alpha(p_-)})}{p_--1},\quad\forall u\in A_1,$$

其中，Φ_{p_-} 是 $[1,\infty$上的正的非递减函数）。

(ii) 若 $p_-=1$,

$$T:L^1_{\mathcal{R}}\left(u^{\alpha(p_-)}\right)\longrightarrow L^{1,\infty}\left(u^{\alpha(p_-)}\right),\qquad\Phi_1(||u||_{A_1}^{\alpha(p_-)}),\qquad\forall u\in A_1.$$

下面的定理表明，逆命题也成立：

定理 5.5。设 (f, g) 是一对可测函数，使得对于某些$1 \le p_0 < \infty$ 和 $0 < \alpha \le 1$,

$$||g||_{L^{p_0,\infty}(u^\alpha)} \le \varphi\left(\|u\|_{A_1}^\alpha\right) ||f||_{L^{p_0,1}(u^\alpha)}, \qquad \forall u \in A_1,$$

其中 φ是 $[1, \infty$上的非递减函数）。那么，对于任意 $p_0 \le p < \frac{p_0}{1-\alpha}$,

$$||g||_{L^{p,\infty}(v)} \le \Psi\left(||v||_{\hat{A}_{p;(\alpha(p),\beta(p))}}\right) ||f||_{L^{p,1}(v)}, \qquad \forall v \in \hat{A}_{p;(\alpha(p),\beta(p))},$$

其中 $\alpha(p) = 1 - \frac{p(1-\alpha)p_0}{}$, $\beta(p) = \frac{p-p_0}{p_0\ p-1()}$ 并且，对于每个 $r \ge 1$,

$$\Psi(r) = C_1 \left(\frac{1}{p_0 - p(1-\alpha)}\right)^{\frac{p-p_0}{p}} \varphi\left(C_2 r^{\frac{\alpha p}{p_0 - p(1-\alpha)}}\right) r^{\frac{\alpha(p-p_0)}{p_0 - p(1-\alpha)}} (1 + \log r)^{\frac{2(p-p_0)}{p}},$$

其中 C_1 和 C_2 是两个与所有相关参数无关的正常数。

证明。设 $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$，且 $u \in A_1$，使得

$$v = (Mh)^{\beta(p)(1-p)} u^{\alpha(p)} \in \widehat{A}_{p;(\alpha(p),\beta(p))}.$$

进一步，取 $t = 1 + \frac{1}{2^{n+1}\|u\|_{A_1}}$，使得 $u^t \in A_1$，其中 $||u^t||_{A_1} \lesssim ||u||_{A_1}$（见 (2.2)），并且由于 $t > 1$,

$$\frac{p - p_0}{p} = \frac{\alpha - \alpha(p)}{1 - \alpha(p)} < \frac{t\alpha - \alpha(p)}{t - \alpha(p)} < \alpha.$$

因此，我们可以取

$$v_\theta = (Mh)^{\beta(1-p)} u^{\alpha(p)\theta} \qquad \text{with} \qquad \frac{p - p_0}{p} < \theta < \frac{t\alpha - \alpha(p)}{t - \alpha(p)}.$$

此外，由于 $\alpha(p) \le \alpha$，令

$$\mu = 1 - \frac{\alpha(p)(1-\theta)}{\alpha t} \in (0, 1),$$

则 $\theta < \alpha\mu < 1$，并且由 (2.1)，对每个可测集 $F \subseteq \mathbf{R}^n$,

$$u_0 = \left(M_{\alpha\mu}(\chi_F v_\theta) u^{\alpha(p)(1-\theta)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = M\left(\chi_F v_\theta^{\frac{1}{\alpha\mu}}\right)^\mu (u^t)^{1-\mu} \in A_1,$$

其中 $||u_0||_{A_1} \le \frac{C||u||_{A_1}}{1-\mu}$。

现在，令 $y > 0$ 并设 $F = \{x : |g(x)| > y\}$，使得 $v(F) = \lambda_g^v(y)$。我们可以像定理 1.6 的证明中那样，假设 $v(F) < \infty$。于是，根据

假设，我们得到

$$
\begin{aligned}
&y^{p_0}\lambda_g^v(y) = y^{p_0}\int_{\{x\,:\,|g(x)|>y\}} v(x)\,dx \le y^{p_0}\int_F u_0(x)^\alpha dx \\
&\le \varphi\left(||u_0||_{A_1}^\alpha\right)^{p_0}\left[p_0\int_0^\infty\left(\int_{\{|f(x)|>z\}} u_0(x)^\alpha\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\,dz\right]^{p_0} \\
&\lesssim \varphi\left(||u_0||_{A_1}^\alpha\right)^{p_0}\left\|\frac{M_{\alpha\mu}(\chi_F v_\theta)}{v_\theta}\right\|_{L^{(\frac{p}{p_0})',\infty}(v)}\left[\int_0^\infty ||\chi_{\{|f(x)|>z\}}||_{L^{\frac{p}{p_0},1}(v)}^{\frac{1}{p_0}}\,dz\right]^{p_0} \\
&\lesssim \varphi\left(\left[\frac{C\alpha t||u||_{A_1}}{\alpha(p)(1-\theta)}\right]^\alpha\right)^{p_0}\left\|\frac{M_{\alpha\mu}(\chi_F v_\theta)}{v_\theta}\right\|_{L^{(\frac{p}{p_0})',\infty}(v)}||f||_{L^{p,1}(v)}^{p_0},
\end{aligned}
$$

其中，在倒数第二个估计中，我们使用了关于测度 $v(x)\,dx$ 的洛伦兹空间的 H¨older 不等式。

现在，由于 $\beta(p)(1-p) = 1-\frac{p}{p_0}$，因此 $v\in \hat{}A_{\frac{p}{p_0}}$，并且根据引理 2.5，

$$
\left\|\frac{M_{\alpha\mu}(\chi_F v_\theta)}{v_\theta}\right\|_{L^{(\frac{p}{p_0})',\infty}(v)} \lesssim C_{\frac{p}{p_0},\theta,\alpha\mu}(u)v(F)^{\frac{p-p_0}{p}} = C_{\frac{p}{p_0},\theta,\alpha\mu}(u)\lambda_g^v(y)^{\frac{p-p_0}{p}},
$$

因此，对所有 $y>0$ 取上确界，特别地，我们得到

$$
\|g\|_{L^{p,\infty}(v)} \lesssim C_{\frac{p}{p_0},\theta,\alpha\mu}(u)^{\frac{1}{p_0}}\varphi\left(\frac{\tilde{C}||u||_{A_1}^\alpha}{(1-\theta)^\alpha}\right)||f||_{L^{p,1}(v)}.
$$

最后，关于常数 $C_{\frac{p}{p_0},\theta,\alpha\mu}(u)$，我们注意到

$$
\begin{aligned}
C_{\frac{p}{p_0},\theta,\alpha\mu}(u) &= \left(\frac{p^2}{(p-p_0)^2(\alpha\mu-\theta)(\theta-\frac{p-p_0}{p})^2}\right)^\theta \|u\|_{A_1}^{2\theta-\frac{2(p-p_0)}{p_0}} \\
&\lesssim \left(\frac{p^2}{(p-p_0)^2(\alpha-\theta)(\theta-\frac{p-p_0}{p})^2}\right)^\theta \|u\|_{A_1}^{3\theta-\frac{2(p-p_0)}{p_0}},
\end{aligned}
$$

因此，常数 $C_{\frac{p}{p_0},\theta,\alpha\mu}(u)$ 的变化规律与定理 1.6 的证明中相同。

□

作为应用，我们给出临界指标以下 Bochner-Riesz 算子的一些新的加权估计。

命题 5.6（[25]）。设 $n=2$ 和 $0<\lambda<\frac{1}{2}$。则，

$$
B_\lambda : L^{\frac{4}{3+2\lambda}}\left(u^{\frac{2\lambda}{3+2\lambda}}\right)\longrightarrow L^{\frac{4}{3+2\lambda},\infty}\left(u^{\frac{2\lambda}{3+2\lambda}}\right),\quad c(n,\lambda)\|u\|_{A_1}^{\frac{\lambda(7+4\lambda)}{6+4\lambda}},\quad \forall u\in A_1.
$$

命题 5.7（[13]）。设 $n>2$ 和 $\frac{n-1}{2\,n+1()}<\lambda<\frac{n-1}{2}$。则

$$
B_\lambda : L^2\left(u^{\frac{1+2\lambda}{n}}\right)\longrightarrow L^2\left(u^{\frac{1+2\lambda}{n}}\right),\qquad \varphi\left(||u||_{A_1}^{\frac{1+2\lambda}{n}}\right),\qquad \forall u\in A_1,
$$

其中，φ 是 $[1,\infty$上的正的非递减函数）。

因此，作为定理 5.5 和命题 5.6 和 5.7 的推论，我们得到以下结果。

推论 5.8. 设 $n = 2$ 和 $0 < \lambda < \frac{1}{2}$。对于每个 $\frac{4}{3+2\lambda} \le p < \frac{4}{3}$，

$$B_\lambda : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad \forall v \in \hat{A}_{p;\left(\frac{4-3p}{4}, \frac{(3+2\lambda)p-4}{4(p-1)}\right)}.$$

现在，设 $n > 2$ 和 $\frac{n-1}{2\ n+1()} < \lambda < \frac{n-1}{2}$。对于每个 $2 \le p < \frac{2n}{n-1-2\lambda}$,

$$B_\lambda : L^{p,1}(v) \longrightarrow L^{p,\infty}(v), \qquad \forall v \in \hat{A}_{p;\left(\frac{2n-p(n-1-2\lambda)}{2n}, \frac{p-2}{2(p-1)}\right)}.$$

References

[1] Auscher, P.; Martell, J.M.: 《加权范数不等式、非对角估计与椭圆算子》。I. 一般算子理论与权。 *Adv. Math.* **212** (2007年)，第1期，225–276页。[2] Baena-Miret, S.; Carro, M.J.: 稀疏算子与粗糙算子在加权洛伦兹空间上的有界性。 *J. Fourier Anal. Appl.* **27** (2021年)，第3期，论文编号43，共22页。[3] Bennett, C.; Sharpley, R.: 算子插值。《纯粹与应用数学》，129。 *Academic Press, Inc., Boston, MA*, 1988年。xiv+469 页。ISBN: 0-12-088730-4。[4] Bochner, S.: 用球面平均对多重傅里叶级数求和。

Trans. Amer. ( )，第–期。[5]

Math. Soc. **40** 1936 2, 175 207

Buckley, S.: 加权空间上算子范数的估计与反向 Jensen 不等式。 *Trans. Amer. Math. Soc.* **340** (1993年)，第1期，253–272页。[6] Carro, M.J.: 从限制弱型到强型估计。 *J. London Math. Soc.* (2) 70 (2004)，第3期，750–762页。[7] Carro, M.J.; Domingo-Salazar, C.: 通过外推理论得到径向傅里叶乘子的加权弱型 (1, 1) 估计。 *J. Anal. Math.* **138** (2019年)，第1期，83–105页。[8] Carro, M.J.; Duoandikoetxea, J.; Lorente, M.: 有限范围内的加权估计及其在 Bochner-Riesz 算子中的应用。 *Indiana Univ. Math. J.* **61** (2012年)，第4期，1485–1511页。[9] Carro, M.J.; Grafakos, L.; Soria, J.: 通过 Rubio de Francia 外推得到的加权弱型 (1, 1) 估计。 *J. Funct. Anal.* **269** (2015年)，第5期，1203–1233页。[10] Carro, M.J.; Ortiz-Caraballo, C.: 径向函数上圆盘乘子的新加权估计。 *J. Fourier Anal. Appl.* **25** (2019年)，第1期，145–166页。[11] Carro, M.J.; Rodr´ıguez-L´opez, S.: 论加权情形下极大乘子的限制。

Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012年)，第5期，2241–2260页。[12] Carro, M.J.; Soria, J: 对 $p > p_0$ 的限制弱型 Rubio de Francia 外推及其在指数可积性估计中的应用。 *Adv. Math.* **290** (2016年)，888–918页。[13] Christ, M.: 论高维中 Bochner-Riesz 平均的几乎处处收敛。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **95** (1985年)，第1期，16–20页。[14] Chung H.M.; Hunt, R.A.; Kurtz D.S.: 带权 $L(p, q)$ 空间上的 Hardy-Littlewood 极大函数。 *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982年)，第1期，109–120页。[15] Cruz-Uribe, D.V.; Martell, J.M.; P´erez, C.: 权、外推与 Rubio de Francia 理论。《算子理论：进展与应用》，

215 *Birkhäuser/Springer*。 , , 。

Basel AG Basel 2011 +280 978 3 0348 0071 6

xiv 页。ISBN: ----。[16] Duoandikoetxea, J.: 傅里叶分析。由 David Cruz-Uribe 从1995年西班牙文原版翻译并修订。《数学研究生教程》，

29 *American Mathematical*。 , , , 。xviii

Society Providence RI 2001 +222 0 8218 2172 5

页。ISBN: ---。[17] Duoandikoetxea, J.: 权的外推再探：新证明与锐界。*J. Funct. Anal.* **260** (2011年)，第6期，1886–1901页。[18] Fefferman, C.; Stein, E.M.: 一些极大不等式。 *Amer. J. Math.* **93** (1971年)，107–115页。[19] Garc

A_p *Proc. Amer.* ía-Cuerva, J.:

Math. Soc. **87** 1983 3, 422 426

权理论中的一个外推定理。( )，第–期。

[20] Garc´ía-Cuerva, J.; Rubio de Francia, J.L.：加权范数不等式及相关主题。北荷兰数学研究，
116 ´ [ ], 。《数学笔记》104 *North-Holland Publishing Co. Amsterdam* 1985 +604 0 444 87804 1
数学笔记。 , , 。x 页。ISBN：- - -。[21] Grafakos, L.：现代傅里叶分析。第三版。数学研究生教材，250。施普林格，纽约，2014年。xvi+624 页。ISBN：978-1-4939-1229-2；978-1-4939-1230-8。[22] de Guzm´án, M.：傅里叶分析中的实变方法。北荷兰数学研究，
46 ´ [ ], 75 *North-Holland Publishing* 。《数学笔记》*Co. Amsterdam-New York* 1981 + 392 0 444 86124 6
数学笔记。 , , 。xiii 页。ISBN：- - -。[23] Hyt¨önen, T.P.; P´érez, C.：极大奇异积分算子的 $L(\log L)^{\varepsilon}$ 端点估计。 *J. Math. Anal. Appl.* **428** (2015年)，第1期，605–626页。[24] Kerman, R.A.; Torchinsky, A.：关于 Hardy 极大函数的加权积分不等式。 *Studia Math.* **71** (1981/82年)，第3期，277–284页。[25] Kesler, R.; Lacey, M.T.：平面上 Bochner-Riesz 乘子的稀疏端点估计。 *Collect. Math.* **69** (2018年)，第3期，427—435页。[26] Kurtz, D.S.; Wheeden, R.L.：关于乘子加权范数不等式的结果。
Trans. ( )，–。[27] *Amer. Math. Soc.* **255** 1979 343 362
Lerner, A.K.; Ombrosi, S.; P´érez, C.：Calder´on-Zygmund 算子的锐 A_1 界及其与 Muckenhoupt 和 Wheeden 问题的关系。 *Int. Math. Res. Not.IMRN* 2008，第6期，文章编号 rnm161，共11页。[28] Li, K.; P´érez, C.; Rivera-R´íos, I.P.; Roncal, L：粗糙奇异积分算子的加权范数不等式。 *J. Geom. Anal.* **29** (2019年)，第3期，2526–2564页。[29] Muckenhoupt, B.：Hardy 极大函数的加权范数不等式。 *Trans.* ( )，–。 *Amer. Math. Soc.* **165** 1972 207 226
[30] P ´ *J. Funct.* érez, C.: *Anal.* **128** 1995 1, 163 185
奇异积分算子交换子的端点估计。( )，第–期。[31] P´érez, C.：奇异积分与权重教程。巴塞罗那CRM数学高级课程， *Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel*，2015年。[32] Rubio de Francia, J.L.：权的因子分解与外推。 *Bull. Amer. Math.* (新版)，*Soc.* **7** 2 1982 393 395
( ) ( )，—。[33] Rubio de Francia, J.L.：因子分解理论与 A_p 权。 *Amer. J. Math.* **106** (1984年)，第3期，533–547页。[34] Soria, F.：论 Carleson-Sj¨olin 外推定理及其在傅里叶级数几乎处处收敛中的应用。 *Studia Math.* **94** (1989年)，第3期，235–244页。[35] Vargas, A.M.：粗糙算子的加权弱型 (
1, 1 *J. London Math.*) 估计。( )，第–*Soc.* **54** 1996 2, 297 310
期。

Departament de Matemàtiques i Informàtica Universitat de Barcelona 08007 , , , Barcelona Spain.
Email address: sergibaena@ub.edu

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada Universidad , , Complutense de Madrid Spain.
Email address: mjcarro@ucm.es