arXiv:2301.05229v1 [cond-mat.quant-gas] 12 Jan 2023

利用双频在二维中实现拓扑弗洛凯工程

Yixiao Wang,[1] Anne-Sophie Walter,[1] Gregor Jotzu,[2] 以及 Konrad Viebahn[1], *

[1] *Institute for Quantum Electronics, ETH Zurich, 8093 Zurich, Switzerland*

[2] *Max Planck Institute for the Structure and Dynamics of Matter, 22761 Hamburg, Germany*(日期: 2023年1月13日)

在二维中采用双频驱动为 Floquet工程开辟了新的可能性，包括控制特定对称性以及调节共振能隙的性质。在本研究中，我们考察了受到双音弗洛凯驱动的双能带晶格模型，并通过数值和解析方法分析由此产生的有效弗洛凯能带结构。一方面，我们将 Sandholzer 等人的方法 [10. 1103/PhysRevResearch.4.013056]从一维拓展到二维，并发现当两个共振驱动在 1ω 和 2ω 处发生干涉时，简单的布拉菲晶格中会出现相互竞争的拓扑相。另一方面，我们探索了六角晶格中由驱动引起的对称性破缺，其中可通过弗洛凯调制独立调节反演对称性或时间反演对称性的破缺。我们的工作可能有助于更简单地为超冷原子生成拓扑能带，并在具有反演对称性的母晶格中实现非线性霍尔效应以及 Haldane 奇偶反常。

I. 引言

在强磁场作用下，电子自然会呈现拓扑现象，量子霍尔效应（QHE）便是其中一例 [1]。这些现象的内在物理机制是磁场导致的时间反演对称性破缺。量子霍尔效应发现数年后，人们注意到，即使没有外加磁场，也可以出现拓扑绝缘体，例如反常量子霍尔态 [2]和量子自旋霍尔效应 [3]。如今，可以通过 Floquet工程（即对量子系统施加周期驱动）实现反常拓扑相。迄今为止，Floquet工程所实现的拓扑现象大多局限于单频驱动方案，应用对象包括光学晶格 [4–17], 、真实材料 [14–17]、光子与等离激元波导 [18–20], 以及其他合成系统 [21–24]。近年来，双频和多频 Floquet工程逐渐成为增强驱动能力的有效策略，包括破坏时间反演对称性或空间对称性 [25–35]，以及不同弗洛凯谐波之间的干涉 [36–42]。双路径干涉与时间反演对称性破缺相结合，促成了在一维晶格中实现拓扑泵的理论提议 [43] 和实验演示 [44] 。据我们所知，多频领域的所有实验结果都局限于一维驱动图案，因此亟需探索用于二维驱动的新策略。

在本研究中，我们运用双音 Floquet 工程的思想，从二维简单母晶格中生成新颖的拓扑能带结构和拓扑相变。一方面，我们考虑对三角晶格最低两条能带进行共振驱动。尽管该模型的每个原胞中只有一个势能极小值，但我们能够通过调节 1ω 和 2ω 驱动的振幅及相对相位来驱动拓扑相变。这一方案简单易行，或可为实现强关联拓扑绝缘体开辟新途径，而现有方法尚无法实现这类绝缘体。另一方面，我们将双频驱动应用于具有反演对称性的（类石墨烯）六角晶格。这种驱动方案能够选择性地破坏反演对称性，同时保持时间反演对称性，从而实现一类新型 Floquet 哈密顿量。因此，我们发现，驱动 Haldane 模型中著名的宇称反常，并不需要外部破坏反演对称性 [2]。双频方案普遍适用于晶格中的 Floquet驱动系统，涵盖从凝聚态物质到合成量子物质的各种系统。

本文其余部分的结构如下。第二节介绍相关的双频驱动波形及可能的实验实现。随后，我们展示在三角晶格中进行共振 1ω–2ω 驱动如何导致拓扑相变（第三节）。第四节讨论在六角晶格中进行非共振驱动时，时间反演对称性和反演对称性的有效破缺。

II. 1ω–2ω 二维中的 Floquet 驱动

原则上，双频驱动可以应用于迄今已用于 Floquet 工程的任何物理系统 [14]。作为一个一般性的出发点，我们考虑一个被限制在静态势 $V_{\mathrm{lat}}(r)$中的粒子，并受到振荡力的作用

$$\hat{H}_{\mathrm{cm}}(\tau) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\mathrm{lat}}(r) - \mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r}\ , \tag{1}$$

with

$$\mathbf{F}(\tau) \equiv e\mathbf{E}(\tau) = -m\ddot{\mathbf{r}}_m(\tau) = -\dot{\mathbf{A}}(\tau)\ . \tag{2}$$

* viebahnk@phys.ethz.ch

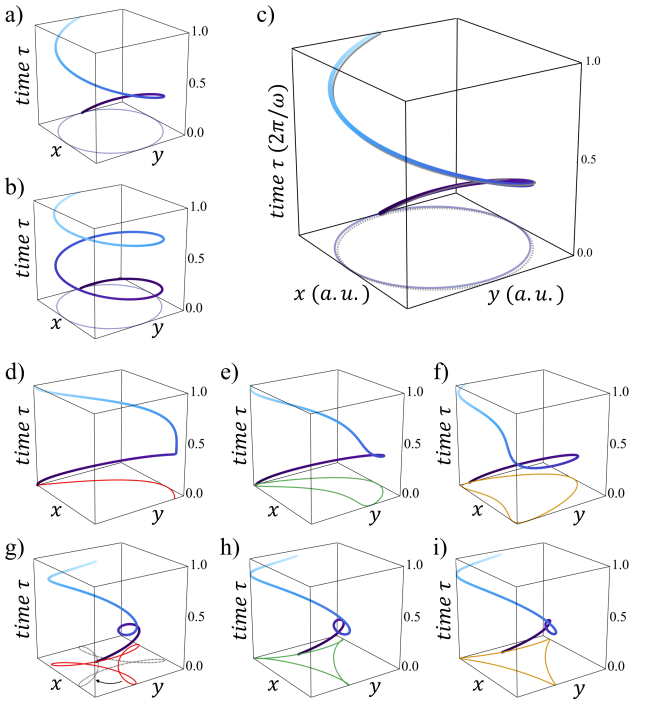

图 1. 二维驱动的单频和双频李萨如曲线。图中展示了实空间调制图形 $\mathbf{r}_m(\tau)$（方程 4）。这些形状与时变力 $\mathbf{F}(\tau)$ 的形状拓扑等价，因为二者通过取二阶导数相互关联（方程 2）。(a-c) 在 1ω (a) 处进行圆偏振强驱动、进行圆偏振弱驱动 2ω (b)，或将两种驱动结合使用（c），均可用于共振激发高能带跃迁。(c) 中的细线表示占主导地位的 1ω 波形，与 (a) 中相同。(d-f) 将 1ω 处的椭圆偏振驱动场与 2ω 处的线性场叠加，相对相位分别为 $\varphi_{y1} = 0$ (d)、0.2π (e) 和 0.5π (f)。(g-i) 将两个圆偏振驱动叠加，相对相位为 $\varphi_{x2} = 0.9\pi$、$\varphi_{y1} = 0.5\pi$、$\varphi_{y2} = 0.4\pi$，驱动强度为 $K_{x2} = K_{y2} = 0.7$，以及 $K_{x1} = K_{y1} = 0.5$ (g)、0.65 (h) 和 0.8 (i)。

在固态系统中，驱动力 $\mathbf{F}(\tau)$可以直接对应于激光与自由电子耦合所产生的振荡场 $\mathbf{E}(\tau)$ [17, 45]。等价地，周期驱动的施加可以视为利用矢量势进行的“最小耦合”，即 $q \to q - \mathbf{A}(\tau)/\hbar$。此外，也可以涉及声子 [46] 或磁振子 [47] 等集体模式。在基于波导的合成晶格中，波导的横向运动会产生有效的惯性力 [19]。对于光学晶格，驱动力可以由振荡的光学梯度或磁场梯度提供 [48]。或者，整个晶格势的周期性位移也会产生惯性力，这种方法称为“晶格摇动” [4, 5]。在这种情况下，实验室参考系中的哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathrm{lab}}(\tau) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\mathrm{lat}}\left[r - \mathbf{r}_m(\tau)\right] \ , \qquad (3)$$

与方程 2 通过两次幺正变换相关联 [49]。总之，本文中的推导可直接从人工设计的量子平台（例如光学晶格中的超冷原子）推广到凝聚态物质系统。

我们将二维驱动图案 $\mathbf{r}_m(\tau)$ 定义为

$$\begin{aligned} x_m(\tau) = &\quad A_{x1}\cos(\omega\tau) \quad + A_{x2}\cos(2\omega\tau + \varphi_{x2}) \\ y_m(\tau) = &A_{y1}\cos(\omega\tau + \varphi_{y1}) + A_{y2}\cos(2\omega\tau + \varphi_{y2}) \ . \end{aligned} \qquad (4)$$

本文所用相关驱动参数（相位和振幅）对应的双频驱动波形在图 1 中以李萨如曲线的形式呈现。矢量势的振幅由无量纲驱动强度 $K_{\alpha\beta} = m\omega_\beta A_{\alpha\beta} a/\hbar$给出，其中$a$ 是晶格间距，$A_{\alpha\beta}$ 是实空间振幅。指标 $\alpha \in \{x, y\}$ 表示方向，而 $\beta \in \{1, 2\}$ 表示频率。

共振圆形 1ω–2ω 驱动。强圆形 1ω 驱动（图 1a，$\varphi_{y1} = \pi/2$）与弱圆形 2ω 驱动（图 1b，$\varphi_{x2} = 0$，$\varphi_{y2} = \pi/2$）相结合，形成调制的圆形图案（图 1c）。由于驱动三角晶格的 s–p 共振时会发生双路径干涉，这种驱动图案可用于实现二维拓扑相变，类似于参考文献 [44]中的拓扑泵。

非共振 1ω–2ω 驱动，以探测空间和时间对称性。或者，在 1ω 处施加椭圆偏振驱动，并在 2ω ($A_{x2} = 0$, φ_{y2} =0) 处施加线偏振激光，会导致反演对称性与时间反演对称性破缺之间的竞争。例如，选择 $\varphi_{y1} = 0$ 会产生“回旋镖”图案（图 1d），该图案破缺反演对称性，但不破缺时间反演对称性。相反，$\varphi_{y1} = \pi/2$ （图 1f）则会形成圆润的“风筝”形状，其中时间反演对称性的破缺相较于反演对称性的破缺占主导地位。调节相位 φ_{y1}，即可在这两种对称性破缺情形之间连续过渡（图 1e），从而进入新颖的拓扑区间。

除了结合线性和椭圆偏振驱动之外，还可以通过叠加两个螺旋度相反的圆偏振驱动来实现反演对称性破缺与时间反演对称性破缺之间的竞争（图 1g-i）。在这种情况下，反演对称性的破缺方式取决于驱动图案相对于晶格几何结构的相对取向。通过以相同幅度增大 φ_{x2}和 φ_{y2} （即延迟两个频率驱动之间的相对时序），可以调节这一取向，使驱动图案绕原点旋转（图 1g，另见文献 [29, 33, 34]）。在凝聚态物质系统中，仅通过改变相对相位驱动拓扑相变在实验上可能更具优势，因为改变偏振或振幅可能导致伪影效应。

实验实现。本文聚焦于三角晶格和六角晶格。相应的光学晶格势及其产生的紧束缚参数见附录A。在波导系统中，通常可以自由选

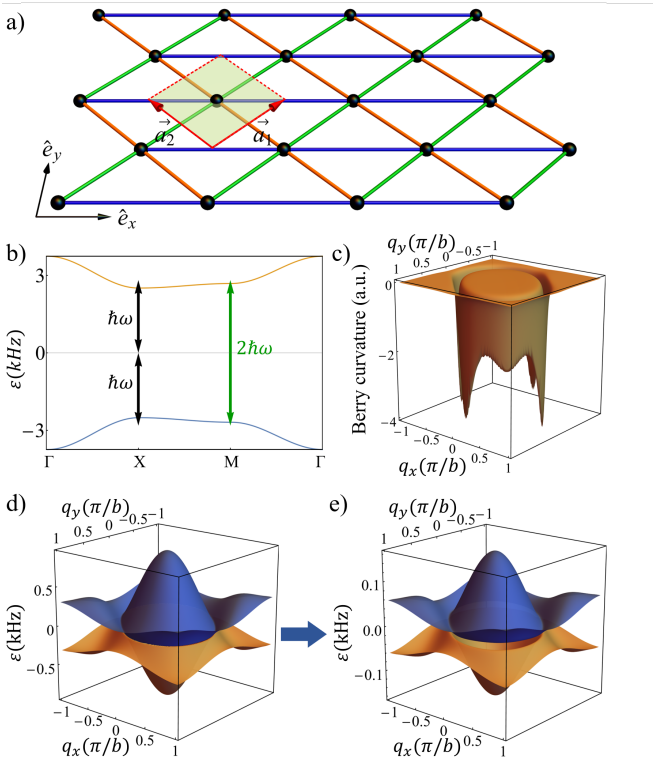

图 2. 三角晶格中的共振能带耦合（a），相关参数 $t_1 = -0.05$、$t_2 = -0.07$、$t_3 = -0.07$、$\varepsilon = -0.66$ E_{rec} 以 和无量纲能带间耦合 $\eta_{sp} = 0.19$ 为单位。共振单光子或双光子过程分别导致低能带与高能带发生耦合，对应于（b）中的绿色箭头和黑色箭头。Floquet 驱动抬升了旋转坐标系中静态能带结构的简并（c），并打开了带隙（d）。能带结构的环形极小值导致环形贝里曲率（e）。（f）展示了双频驱动下平凡且空间局域化的贝里曲率，其具有很强的贝里曲率偶极。

择 [19]。驱动项的时间依赖性被编码在一个额外的空间坐标中，从而能够实现多频驱动。最后，在固态系统中，频率为 2ω 的驱动项对应的激光场可以通过倍频产生，从而确保其相位相对于1ω 项保持稳定。随后，可以使用厚度可变的色散材料调节两者之间的相对相位。

用于二维 *Floquet* 工程的紧束缚哈密顿量。将原始哈密顿量（方程1）在 Wannier 基下展开并变换到准动量空间，可得以下表达式

$$\sum_n \left\{ \varepsilon_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n - \sum_{i=1}^{Z} \left[t_{n,i} \left(e^{i(\theta_i(\tau)+\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i)} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + h.c. \right) \right] - \mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r} \sum_{n'} \eta_{nn'} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \right\} . \tag{5}$$

这里，ε_n、t_n、i、$\eta_{nn'}$ 分别是能带 n、n' 的能带中心能量、最近邻隧穿矩阵元和带间耦合元（附录 B）。$\mathbf{b}_i = j\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2$ 是最近邻隧穿矢量，i 对配位数 Z以内的不等价近邻进行编号；$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ 对应二维中的原始平移矢量。随时间周期变化的 Peierls 相位为 $\theta_i(\tau) = \frac{m}{\hbar}\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{r}_m(\tau)$。在二次量子化表示中，$\hat{a}_n$ 表示能带 n中的湮灭算符。方程 5 的第一行描述了带内过程的静态和含时贡献，而第二行则是周期性驱动系统所产生的带间耦合。耦合元$\eta_{nn'}$ 可视为布洛赫态 [41]的偶极矩阵元。因此，第一行在准动量和能带指标n上是对角的，而第二行则为哈密顿量贡献非对角元。

我们以方程 5 中的哈密顿量作为 Floquet 分析的出发点。如果周期性驱动共振地作用于 s 与 p 能带之间的带隙，我们还会采用幺正变换来“旋转消除”能量差（见第 III节）。为了求得有效 Floquet哈密顿量，我们采用两种互补的方法。一方面，我们利用众所周知的高频展开（HFE） ω，按驱动频率 [50–54]的倒数幂次对有效哈密顿量进行解析计算。由于我们处于弱驱动区域，高频展开仍然有效。另一方面，我们可以通过 Trotter 分解 [55]数值求得有效哈密顿量。我们利用这种数值方法验证解析计算的结果，并事后论证高频展开截断的合理性。为了刻画能带拓扑，我们通过离散化二维布里渊区中的本征态计算贝里曲率。所得陈数是贝里曲率在闭合布里渊环面上的面积积分 [56, 57]。

III. 共振驱动的三角晶格

我们首先考虑一种简单的三角晶格，其中最低两条能带（s 和 p）受两种频率共振耦合；这一方案受到文献 [43] 的启发，并建立在此前采用单频驱动的研究 [58–60] 之上。

在无摇动的情况下，三角晶格紧束缚模型的静态哈密顿量为

$$\hat{H} = \left[\varepsilon + \sum_{i=1}^{3} t_i \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i) \right] \sigma_z \ . \tag{6}$$

最近邻隧穿矢量为 $\mathbf{b}_1 = (-1,1)b$、$\mathbf{b}_2 = (1,0)b$、$\mathbf{b}_3 = (0,1)b$ 和 $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$，位于旋转坐标系 $\hat{e}'_x = \frac{\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{2}}$, $\hat{e}'_y = \frac{-\hat{e}_x + \hat{e}_y}{\sqrt{2}}$ 中（图 2a）。耦合 s和 p 能带最简单的方法是

采用单频驱动，其参数由方程 4给出，其中 $A_{x2} = A_{y2} = 0$ 表示 φ_{y1}，而 $\varphi_{\circ}$

从方程5出发，含时哈密顿量可写为

$$\hat{H}(\tau) = \left\{ \varepsilon + \sum_{i=1}^{3} t_i \cos\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i + \theta_i(\tau)\right] \right\} \sigma_z + \left[\eta_{sp}\hbar\omega K_x \cos(\omega\tau) + \eta_{sp}\hbar\omega K_y \cos(\omega\tau + \varphi)\right] \sigma_x, \tag{7}$$

其中 $\varepsilon = (\varepsilon_s - \varepsilon_p)/2 = -\Delta\varepsilon/2$，$\Delta\varepsilon$ 为带隙大小。其他参数为 $t_i = t_{s、i} - t_{p、i}$，其中 $i = 1、2、3$，Peierls 相位为 $\theta_i(\tau) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^{\tau} \mathbf{F}(\tau')\cdot\mathbf{b}_i\, d\tau' = -[K_x \sin(\omega\tau)\hat{}x + K_y \sin(\omega\tau+\varphi)\hat{}y]\cdot\mathbf{b}_i/b$，泡利矩阵为 σ_j，其中 $j = x、y、z$。无量纲驱动强度分别记为 $K_x = m\omega A_{x1}a/\hbar$、$K_y = m\omega A_{y1}a/\hbar$。紧束缚参数，包括隧穿振幅、带间耦合和能带中心能量，通过对三角晶格势的Wannier函数进行计算获得（附录 B，图 2a）。

与带隙共振的单频圆偏振驱动。如果频率 ω 接近带隙共振，对应于占主导地位的单光子过程，我们应用幺正变换 $\mathcal{U}_R(\tau) = \exp(-i\omega\tau\sigma_z/2)$，以消除两个能带之间的能隙（图2d）。由此得到

$$\hat{H}(\tau) = \left\{ \varepsilon + \hbar\omega/2 + \sum_{i=1}^{3} t_i \cos\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i + \theta_i(\tau)\right] \right\} \sigma_z + \left[\eta_{sp}\hbar\omega K_x \cos(\omega\tau) + \eta_{sp}\hbar\omega K_y \cos(\omega\tau + \varphi)\right] \times \left[\sigma_x \cos(\omega\tau) - \sigma_y \sin(\omega\tau)\right]/2. \tag{8}$$

省略与单位矩阵成正比的项不会影响能带的拓扑。

通过在高频展开中分析方程8 （附录C），我们发现带隙呈环形打开（图2e，另见参考文献 [13, 61]）。然而，非对角项由常数项主导。从物理上说，这对应于 s 能带与 p 能带之间的格点内耦合，因此产生拓扑平庸的能带（图3a）。

与半个带隙共振的单频椭圆偏振驱动。以半个带隙能量（$\hbar\omega = 12.8t_1 = 0.64E_{rec}$）驱动系统，会产生相邻格点间带间耦合，从而可能形成拓扑能带。从方程4中的波形出发，取 $K_{x2} = K_{y2} = 0$ 并应用幺正变换 $\mathcal{U}_R(\tau) = \exp(-i\omega\tau\sigma_z)$，得到

$$\hat{H}(\tau) = \left\{ \varepsilon + \hbar\omega + \sum_{i=1}^{3} t_i \cos\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i + \theta_i(\tau)\right] \right\} \sigma_z + \left[\eta_{sp}\hbar\omega K_x \cos(\omega\tau) + \eta_{sp}\hbar\omega K_y \cos(\omega\tau + \varphi)\right] \times \left[\sigma_x \cos(2\omega\tau) - \sigma_y \sin(2\omega\tau)\right]/2, \tag{9}$$

其中 $\varepsilon + \hbar\omega \approx 0$。在这种情况下，驱动中唯一非零的傅里叶分量是 $\pm 1\omega$ 和 $\pm 3\omega$。与直接单光子共振不同，能带间耦合通过双光子过程发生（图 2b）。现在我们发现依赖于准动量的 σ_x 和 σ_y 项

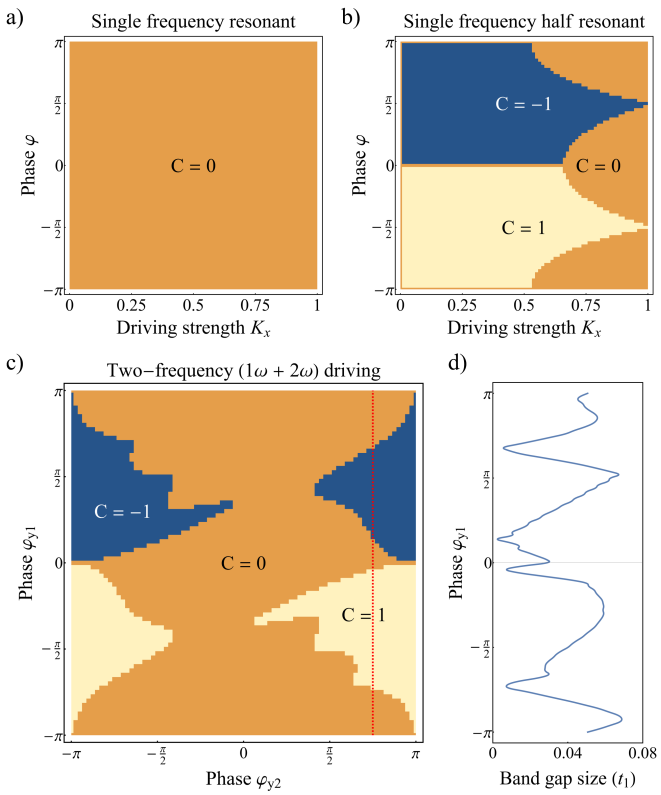

图 3. 三角晶格在共振驱动下的相图。共振处的单频驱动（$\hbar\omega = 25.6t_1 = 1.28E_{rec}$，$K_y = 0.5$，$\varepsilon + \hbar\omega/2 \simeq 0$）产生平庸能带（a），而半共振处的驱动（$\hbar\omega = 12.8t_1 = 0.64E_{rec}$，$K_y = 0.5$，$\varepsilon + \hbar\omega \simeq 0$）则诱导出拓扑能带（b）。(b) 中的平庸区域是由于能带受 ac-斯塔克效应影响而移出共振所致。(c) 展示了双频驱动（$K_{x1} = 0.4$，$K_{y1} = 0.5$，$K_{x2} = 0.02$，$K_{y2} = 0.02$）诱导的两种共振过程之间的竞争。(d) 为沿红线穿过 (c) 的截线上计算得到的带隙。

出现在有效哈密顿量中（附录C），从而在相图中形成拓扑非平庸区域（图 3b，另见参考文献 [60]）。在 $K_x = 0$ 和 $\varphi = 0$处的线在图 3b 的相图中长度为零，因此在现实实验中无法观测到从 $C \neq 0$ 到$C = 0$ 的相变。尽管较大的驱动振幅（超过 $K_x = 0.5$）会使模型变为拓扑平庸态，但这并非不同过程之间干涉所致，而是由于 ac- Stark 效应使能带移出共振条件 [4]。如以下所述，在 1ω 和2ω 处结合上述两种共振方案，会引入随驱动相位变化的真正拓扑相变。

双频共振椭圆驱动。共振 1ω 与 2ω 驱动之间的竞争，使具有 $C = 0$ 和$C = \pm 1$的拓扑相相互交织。现在，对于固定的式（4）中的 $[K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}]$，并调节 φ_{y1}

和 φ_{y2} （$\varphi_{x2}=0$）。这一 Floquet 方案只需改变 1ω 与 2ω 驱动之间的相位，就能跨越拓扑相变；相图（图3c）中和 $C\neq 0$ 对应的不同区域清楚地展示了这一点。诱导带隙约为 0.1 至 0.2 倍隧穿能量，增大驱动振幅即可进一步扩大带隙。

在布拉菲晶格中实现拓扑能带结构，例如本文所研究的简单三角晶格，具有重要意义。举例而言，这使得在超冷原子体系中生成拓扑能带变得更为简单。迄今为止，光学晶格中的二维拓扑模型已在二分晶格 [10, 12, 60], 带有移动超晶格的方格晶格 [8, 9, 11], 中实现， [62]或通过采用自旋轨道耦合实现。这些方案依赖于晶格或拉曼激光束之间相对相位的稳定性，因此带来了显著的技术负担。相位稳定性不足可能一直是实现二维拓扑晶格中强关联相的一大障碍。相较之下，三角晶格只需在平面内叠加三个驻波即可构建，无需主动稳定。因此， 1ω–2ω Floquet方案或可为实现关联拓扑物态开辟一条途径。除了概念上的简洁性，双频驱动还会使环形带隙沿线出现贝里曲率，且其分布可能不对称（图2f），尤其是在图3c所示的拓扑平庸区域。这使得周期驱动能够产生非零贝里曲率偶极，尽管底层晶格本身是平庸的且具有反演对称性。这一发现的意义不局限于超冷原子领域，还有望促成非线性霍尔效应的观测；迄今为止，这类效应的研究一直依赖于反演对称性破缺的材料 [63]。

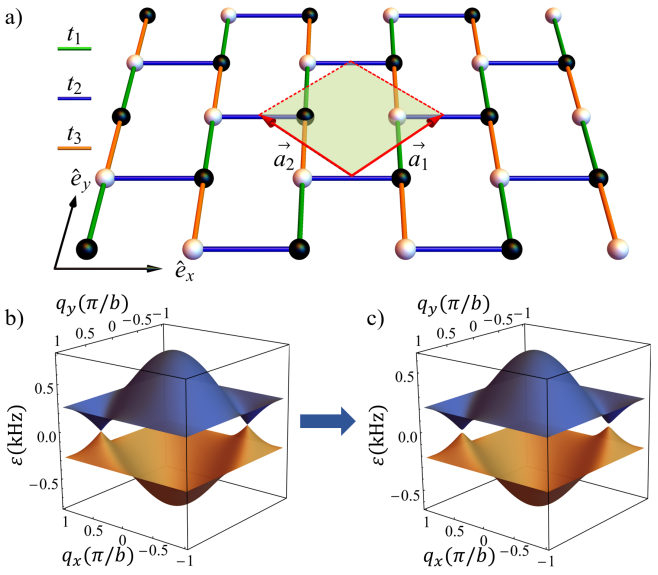

图 4. 六角晶格中的非共振驱动 (a)，隧穿振幅为 $t_1=t_2=t_3=0.06$ ，单位为 E_{reco} 静态能带结构具有两个简并的狄拉克点 (b)。Floquet 驱动通过有效地破坏对称性解除简并并打开能带间隙 (c)。

IV. 非共振驱动的六角晶格

双频驱动方法的第二个应用研究了砖墙构型的六角晶格，如图 4a 所示。这种势可以在与第 III节三角晶格相同的实验装置中实现，但该推导也适用于 120° 蜂窝晶格 [12] 以及真实的石墨烯 [17]。

我们从紧束缚哈密顿量出发

$$\hat{H}_{\boldsymbol{q}}(\tau)=\left\{\sum_{i=1}^{3}t_i\cos\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i+\theta_i(\tau)\right]\right\}\sigma_x+\left\{\sum_{i=1}^{3}t_i\sin\left[\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i+\theta_i(\tau)\right]\right\}\sigma_y, \tag{10}$$

最近邻隧穿矢量为 $\mathbf{b}_1=(0,1)b$,$\mathbf{b}_2=(-1,1)b$ 以及 $\mathbf{b}_3=(-1,0)b$ ，它们位于旋转后的坐标系 $\{\hat{e}'_x,\hat{e}'_y\}$ 中（图 4a）。式 4中的波形给出以下 Peierls 相位：

$$\theta_1(\tau)=-K_{y1}\sin(\omega\tau+\varphi_{y1})-K_{y2}\sin(2\omega\tau+\varphi_{y2})=-\theta_3(\tau),$$
$$\theta_2(\tau)=K_{x1}\sin(\omega\tau)+K_{x2}\sin(2\omega\tau+\varphi_{x2}), \tag{11}$$

驱动强度分别为 $K_{x1}=m\omega A_{x1}a/\hbar$、$K_{x2}=2m\omega A_{x2}a/\hbar$、$K_{y1}=m\omega A_{y1}a/\hbar$ 和 $K_{y2}=2m\omega A_{y2}a/\hbar$，与之前相同。由于这里不考虑能带间耦合，因此无需施加幺正变换，可以直接进行高频展开。

单频椭圆驱动。选择 $K_{x2}=K_{y2}=0$， $K_{x1}>0$ 对应于椭圆偏振驱动，由此产生拓扑或平庸能带。对于任意 $K_{y1}>0$和 φ_{y1} 模 $\pi\neq 0$ ，我们都能恢复众所周知的拓扑能隙打开现象：由于时间反演对称性破缺，两个狄拉克点处均打开带隙（图 4b-c） [64]。当 $K_{y1}=0$ 或 φ_{y1} 模 $\pi=0$ 时，对应于线偏振驱动，时间反演对称性保持不变，两个狄拉克点处的带隙均保持闭合。然而，满足 $C=0$ 的平庸区域在相图中仅是一条零宽度的“线”（图 5a，与前文图 3b 中的情况相同）。通常，只有底层晶格的反演对称性明确破缺，才能跨越拓扑相变并引发 Haldane 的“宇称反常”，从而使相图中的平庸“线”扩展为有限区域 [2, 10]。下文将证明，仅通过采用双频 Floquet 驱动就能打破反演对称性。因此，完全可以通过驱动实现平庸区域与非平庸区域之间的拓扑相变。

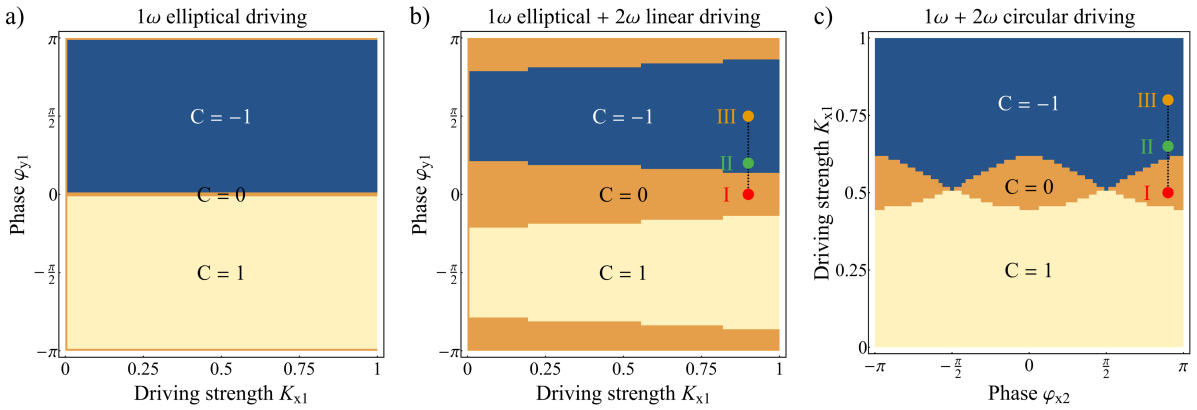

图 5. 非共振驱动下六角晶格的相图（$\hbar\omega = 20.8t_1 = 1.25E_{rec}$）。单频椭圆驱动（$K_{y1} = 0.9$，$K_{x2} = K_{y2} = 0$）可以打破时间反演对称性，从而产生非零陈数（a）。通过加入线偏振场（$K_{y1} = K_{y2} = 0.9$，$K_{x2} = 0$ 和 $\varphi_{x2} = \varphi_{y2} = 0$），可以独立控制反演对称性和时间反演对称性的破缺（b）；也可以使用两个偏振方向相反的圆偏振场（$K_{x1} = K_{y1}$，$K_{x2} = K_{y2} = 0.7$ $\varphi_{y1} = \pi/2$ $\varphi_{y2} = \varphi_{x2} - \pi/2$，以及）实现这一点（c）。(b) 和 (c) 中标出的跃迁路径 I - II - III 分别对应图 1d-f 和图 1g-i 中的李萨如曲线。

双频驱动。以以上单频椭圆驱动的情形为基础，我们令 $K_{x2} = 0$，同时令 $K_{y2} \neq 0$，加入线偏振“光”。驱动场进一步打破反演对称性，而反演对称性破缺与时间反演对称性破缺之间的竞争可见于图5b-c。只需沿标示路径调节相位，即可引发拓扑相变；该路径对应于图1d-f 中的李萨如曲线。

或者，若对 $K_{x1} = K_{y1}$、$K_{x2} = K_{y2}$、$\varphi_{y1} = \pi/2$和 $\varphi_{y2} = \varphi_{x2} - \pi/2$ 在式4中的条件加以约束，$1\omega - 2\omega$这种驱动方案对应于两个反向旋转的圆偏振场。显然，当一个圆偏振驱动场远强于另一个时，所得陈数将对应于占主导地位的场的螺旋度。然而，当一个圆偏振场的振幅接近另一个时，利萨如曲线会变成“苜蓿叶”形，对时间反演对称性的破缺也会受到抑制（图1g-i）。这种竞争使我们能够仅通过改变驱动相位，在拓扑平庸与非平庸状态（具有正或负质量项）之间进行调节。所得带隙大小与 Haldane 模型中的已知结果相近 [10]。有趣的是，我们发现，在反演对称性破缺的情况下，纯狄拉克哈密顿量在双频驱动下不会出现相应的能隙打开。虽然圆偏振驱动导致的时间反演对称性破缺可在近似的狄拉克哈密顿量中得到描述 [17]，，但反演对称性破缺依赖于晶格势的存在。从数学上看，这是因为受驱动的狄拉克哈密顿量仍为线性，其在 ω 和 2ω 处的傅里叶分量在高频展开中不会发生混合。从概念上说，特定的驱动模式有利于在蜂窝晶格的一个特定子晶格上打开带隙，而这并不适用于狄拉克哈密顿量。

我们还利用数值计算得到的能带结构，研究了超出高频展开适用范围时反演对称性破缺的行为。在这里，能隙打开大致按 $1/\omega^4$ 缩放，并在低频区间占据主导。因此，1ω–2ω 方案可能特别适用于激光驱动石墨烯中的相位控制的拓扑相变，而且可以在诸如参考文献 [17] 所采用的装置中轻松实现。

V. 结论

我们已经证明，二维中的双频 Floquet 驱动会产生丰富的拓扑相图，适用于共振和非共振调制。我们发现，1ω 与 2ω驱动之间的相对相位，是调控对称性以及有效 Floquet 哈密顿量所呈现拓扑性质的重要参数。在许多实验中，与频率或振幅等其他参数相比，仅调控相位更具优势。对于石墨烯等受周期性驱动的真实材料，[17]，非相干激发和电子弛豫会显著影响测量结果，甚至可能掩盖拓扑响应。非相干效应通常取决于入射光的偏振，尤其是在样品接触区附近。本研究提出的若干驱动方案，特别是反向旋转的圆偏振驱动，仅取决于光场之间的相对相位。因此，我们认为，该方法将

为操控和探测拓扑现象带来新的应用。将此处讨论的方案与自旋依赖的 Floquet 工程相结合 [48], 或许就能探索拓扑绝缘体的完整“周期表” [65]。

致谢

我们感谢瑞士国家科学基金会（资助编号182650和NCCR-QSIT）以及欧洲研究委员会高级资助项目TransQ（资助编号742579）的资助。

[1] K. v. Klitzing、G. Dorda和M. Pepper，“基于量子化霍尔电阻高精度测定精细结构常数的新方法”，《物理评论快报》45，494–497（1980年）。[2] F. D. M. Haldane，“一种无朗道能级的量子霍尔效应模型：宇称反常的凝聚态实现”，《物理评论快报》61，2015 2018 1988–（）。[3] C. L. Kane和E. J. Mele，“石墨烯中的量子自旋霍尔效应”，《物理评论快报》95，226801（2005年）。[4] Martin Holthaus，“利用周期驱动光学晶格的准能带进行Floquet工程”，《物理学杂志B：原子、分子与光学物理》49，013001 2016（）。[5] Andr´e Eckardt，“专题综述：周期驱动光学晶格中的原子量子气体”，《现代物理评论》89，11004（2017年）。[6] N. R. Cooper、J. Dalibard和I. B. Spielman，“超冷原子的拓扑能带”，《现代物理评论》91，015005（2019年）。[7] Christof Weitenberg和Juliette Simonet，“通过Floquet工程定制量子气体”，《自然·物理》（2021年），10.1038/s41567-021-01316-x。[8] M. Aidelsburger、M. Atala、M. Lohse、J. T. Barreiro、B. Paredes和I. Bloch，“在光学晶格中利用超冷原子实现霍夫施塔特哈密顿量”，《物理评论快报》111，185301（2013年）。[9] Hirokazu Miyake、Georgios A. Siviloglou、Colin J. Kennedy、William Cody Burton和Wolfgang Ketterle，“利用光学晶格中的激光辅助隧穿实现哈珀哈密顿量”，《物理评论快报》111，185302 2013（）。[10] Gregor Jotzu、Michael Messer、R´emi Desbuquois、Martin Lebrat、Thomas Uehlinger、Daniel Greif和Tilman Esslinger，“利用超冷费米子实验实现拓扑哈德恩模型”，《自然》515，237 240 2014–（）。[11] M. Eric Tai、Alexander Lukin、Matthew Rispoli、Robert Schittko、Tim Menke、Dan Borgnia、Philipp M. Preiss、Fabian Grusdt、Adam M. Kaufman和Markus Greiner，“二体极限下相互作用哈珀–霍夫施塔特模型的显微观测”，《自然》546，519–523（2017年）。[12] N. Fl¨aschner、D. Vogel、M. Tarnowski、B. S. Rem、D.-S. L¨uhmann、M. Heyl、J. C. Budich、L. Mathey、K. Sen- gstock和C. Weitenberg，“具有拓扑性质的系统骤冷后动力学涡旋的观测”，《自然·物理》14，265–268（2018年）。[13] Karen Wintersperger、Christoph Braun、F. Nur Unal、Andr´e Eckardt、Marco Di Liberto、Nathan Goldman、Im- manuel Bloch和Monika Aidelsburger，“利用超冷原子实现反常弗洛凯拓扑系统”，《自然·物理》16，1058–1063（2020年）。[14] Takashi Oka 和 Sota Kitamura，《量子材料的Floquet工程》，《凝聚态物理年度评论》10，387–408（2019年）。[15] Mark S. Rudner 和 Netanel H. Lindner，《Floquet拓扑绝缘体中的能带结构工程与非平衡动力学》，《自然综述：物理》2，229–244（2020年）。[16] Fenner Harper、Rahul Roy、Mark S. Rudner 和 S.L. Sondhi，《Floquet系统中的拓扑与对称性破缺》，《凝聚态物理年度评论》11（2020年），10.1146/annurev-conmatphys-031218-013721。[17] J. W. McIver、B. Schulte、F.-U. Stein、T. Matsuyama、G. Jotzu、G. Meier 和 A. Cavalleri，《石墨烯中的光诱导反常霍尔效应》，《自然·物理》16，38–41（2020年）。[18] Tomoki Ozawa、Hannah M. Price、Alberto Amo、Nathan Goldman、Mohammad Hafezi、Ling Lu、Mikael C. Rechtsman、David Schuster、Jonathan Simon、Oded Zilberberg 和 Iacopo Carusotto，《拓扑光子学》，《现代物理评论》91，015006（2019年）。[19] Mikael C. Rechtsman、Julia M. Zeuner、Yonatan Plotnik、Yaakov Lumer、Daniel Podolsky、Felix Dreisow、Stefan Nolte、Mordechai Segev 和 Alexander Szameit，《光子 Floquet 拓扑绝缘体》，《自然》496，196–200（2013年）。[20] Zlata Fedorova、Haixin Qiu、Stefan Linden 和 Johann Kroha，《快速Thouless泵中耗散导致拓扑输运量子化的观测》，Nat Commun 11，3758（2020年）。[21]Romain Fleury、Alexander B Khanikaev 和 Andrea Al`u，《用于声波的Floquet拓扑绝缘体》，Nat Commun 7，11744（2016年）。[22] Aravind Nagulu、Xiang Ni、Ahmed Kord、Mykhailo Tymchenko、Sasank Garikapati、Andrea Al`u 和 Harish Kr{is}hnaswamy，《面向5G无线系统的芯片级Floquet拓扑绝缘体》，Nat Electron 5，300–309（2022年）。[23] Bing Chen、Shuo Li、Xianfei Hou、Feifei Ge、Feifei Zhou、Peng Qian、Feng Mei、Suotang Jia、Nanyang Xu 和 Heng Shen，《利用固态量子模拟器对Floquet拓扑相进行数字量子模拟》，Photon. Res. 9，81（2021年）。[24]Kai Yang、Shaoyi Xu、Longwen Zhou、Zhiyuan Zhao、Tianyu Xie、Zhe Ding、Wenchao Ma、Jiangbin Gong、Fazhan Shi 和 Jiangfeng Du，《具有大陈数的Floquet拓扑相的观测》，《物理评论B》106，184106（2022年）。[25] M. Schiavoni、L. Sanchez-Palencia、F. Renzoni 和 G. Grynberg，《对称光晶格中定向扩散的相位控制》，《物理评论快报》90，094101（2003年）。[26] J. Struck、C. ¨Olschl¨ager、M. Weinberg、P. Hauke、J. Simonet、A. Eckardt、M. Lewenstein、K. Sengstock 和 P. Windpassinger，《驱动光学晶格中中性无自旋粒子的可调规范势》，

《物理评论快报》108，225304（2012年）。[27]Tanay Nag、Robert-Jan Slager、Takuya Higuchi 和 Takashi Oka，《相互作用电子系统中的动力学同步转变》，《物理评论B》100，134301（2019年）。[28]Philipp Stammer、Serguei Patchkovskii 和 Felipe Morales，《强双色圆偏振激光场中交流斯塔克位移共振的证据》，Phys. Rev. A 101，033405（2020年）。[29] ´A. Jim´enez-Gal´an、R. E. F. Silva、O. Smirnova 和 M. Ivanov，《二维材料中的拓扑性质光波控制：用于亚周期和非共振谷操控》，Nat. Photonics 14，728–732（2020年）。[30]Christian Heide、Tobias Boolakee、Timo Eckstein 和 Peter Hommelhoff，《石墨烯中的光学电流产生：载波包络相位控制与 $\omega + 2\omega$ 控制》，Nanophotonics 10，3701–3707（2021年）。[31]Ofer Neufeld、Nicolas Tancogne-Dejean、Umberto De Giovannini、Hannes H¨ubener 和 Angel Rubio，《光驱动的极端非线性体光生伏打电流》，《物理评论快报》127，126601（2021年）。[32]Kai-Xuan Yao、Zhendong Zhang 和 Cheng Chin，《合成规范场中的玻色–爱因斯坦凝聚体畴壁动力学》，《自然》602，68–72（2022年）。[33]Yuya Ikeda、Sota Kitamura 和 Takahiro Morimoto，《双频驱动下电极化的Floquet工程》，Prog. Theor. Exp. Phys.，04A101（2022年）。[34] Tha´ıs V. Trevisan、Pablo Villar Arribi、Olle Heinonen、Robert-Jan Slager 和 Peter P. Orth，《双圆偏振光Floquet工程对磁对称性与拓扑的调控及其在狄拉克半金属 Cd 3 As 2中的应用》，《物理评论快报》128，066602（2022年）。[35] Sam Olin 和 Wei-Cheng Lee，《公度多频 Floquet Su-Schrieffer-Heeger模型中的拓扑相变》（2022年）。[36] Chao Zhuang、Christopher R. Paul、Xiaoxian Liu、Samansa Maneshi、Luciano S. Cruz 和 Aephraim M. Steinberg，《通过双路径量子干涉相干控制光学晶格中振动态之间的布居转移》，《物理评论快报》111，233002（2013年）。[37] Linxiao Niu、Dong Hu、Shengjie Jin、Xiangyu Dong、Xuzong Chen 和 Xiaoji Zhou，《多色振幅调制驱动光学晶格中的原子激发》，Opt. Express 23，10064（2015年）。[38] Christopher Grossert、Martin Leder、Sergey Denisov、Peter H¨anggi 和 Martin Weitz，《相干量子摇摆棘轮中输运共振的实验控制》，Nat Commun 7，10440（2016年）。[39] Frederik G¨org、Kilian Sandholzer、Joaqu´ın Minguzzi、R´emi Desbuquois、Michael Messer 和 Tilman Esslinger，《实现密度依赖的Peierls相位，以工程化与超冷物质耦合的量子化规范场》，《自然·物理》（2019年），10.1038/s41567-019-0615-4。[40] Konrad Viebahn、Joaqu´ın Minguzzi、Kilian Sandholzer、Anne-Sophie Walter、Manish Sajnani、Frederik G¨org 和 Tilman Esslinger，《抑制Floquet-Hubbard系统中的耗散》，《物理评论X》11，011057（2021年）。[41]Kilian Sandholzer、Anne-Sophie Walter、Joaqu´ín Min- guzzi、Zijie Zhu、Konrad Viebahn 和 Tilman Esslinger，“利用双频驱动在光学晶格中对单个能带隙进行 Floquet 工程”，《物理评论研究》4，013056（2022）。[42] Alberto Castro、Umberto de Giovannini、Shusuke A. Sato、Hannes H¨übener 和 Angel Rubio，“利用最优控制理论对材料能带结构进行 Floquet 工程”（2022）。[43] Jin Hyoun Kang 和 Yong-il Shin，“通过双谐波频率共振摇动实现一维光学晶格的拓扑 Floquet 工程”，《物理评论A》102，063315（2020）。[44]Joaqu´ín Minguzzi、Zijie Zhu、Kilian Sandholzer、Anne-Sophie Walter、Konrad Viebahn 和 Tilman Esslinger，“Floquet-Bloch 能带中的拓扑泵浦”，《物理评论快报》129，053201（2022）。[45] Y H Wang、H Steinberg、P Jarillo-Herrero 和 N Gedik，“拓扑绝缘体表面上 Floquet-Bloch 态的观测”，《科学》342，453（2013）。[46] Ankit S. Disa、Tobia F. Nova 和 Andrea Cavalleri，“利用光设计晶体结构”，《自然·物理》17，1087–1092（2021）。[47]Emil Vinas Bostr¨om、Martin Claassen、James McIver、Gregor Jotzu、Angel Rubio 和 Michael Sentef，“二维范德瓦耳斯磁体中的光诱导拓扑磁振子”，《SciPost物理》9，061（2020）。[48]Gregor Jotzu、Michael Messer、Frederik G¨org、Daniel Greif、R´emi Desbuquois 和 Tilman Esslinger，“通过磁场梯度调制为超冷费米子制备态依赖晶格”，《物理评论快报》115，073002（2015）。[49] Jean Dalibard，“随时间变化的晶格”，法兰西公学院，课程4（2013）。[50] Saar Rahav、Ido Gilary 和 Shmuel Fishman，“周期驱动系统的有效哈密顿量”，《物理评论A》68，013820（2003）。[51] N. Goldman 和 J. Dalibard，“周期驱动量子系统：有效哈密顿量与人工规范场”，《物理评论X》4，31027（2014）。[52]Andr´e Eckardt 和 Egidijus Anisimovas，“从 Floquet 空间视角对周期驱动量子系统进行高频近似”，《新物理学杂志》17，093039（2015）。[53] Marin Bukov、Luca D’Alessio 和 Anatoli Polkovnikov，“周期驱动系统的普适高频行为：从动力学稳定化到 Floquet 工程”，《物理学进展》64，139–226（2015）。[54] Takahiro Mikami、Sota Kitamura、Kenji Yasuda、Naoto Tsuji、Takashi Oka 和 Hideo Aoki，“周期驱动系统高频展开的 Brillouin-Wigner 理论：在 Floquet 拓扑绝缘体中的应用”，《物理评论B》93，144307（2016）。[55] H. F. Trotter，“关于算子半群的乘积”，《美国数学会会刊》10，545–551（1959），出版者：美国数学会。[56] Takahiro Fukui、Yasuhiro Hatsugai 和 Hiroshi Suzuki，“离散布里渊区中的陈数：计算（自旋）霍尔电导的高效方法”，《日本物理学会志》74，1674–1677（2005）。[57] J´anos K. Asb´óth、L´aszl´ó Oroszl´ány 和 Andr´ás P´ályi，*A short course on topological insulators: band structure*

and edge states in one and two dimensions，《物理学讲义》第919卷（施普林格，尚贝里，2016）。[58] Stefan K. Baur、Monika H. Schleier-Smith 和 Nigel R. Cooper，“具有拓扑能带的动态光学超晶格”，《物理评论A》89，051605(R)（2014）。[59] 郑伟和翟荟，“摇动光学晶格中的 Floquet 拓扑态”，《物理评论A》89，061603(R)（2014）。[60]张少亮和周琦，“塑造摇动光学晶格能带结构的拓扑性质”，《物理评论A》90，051601(R)（2014）。[61] C. A. Bracamontes、J. Maslek 和 J. V. Porto，“为超冷原子实现弗洛凯工程化护城河能带”，《物理评论快报》128，213401（2022）。[62] 孙伟、王宝宗、徐小天、易长瑞、张龙、吴展、邓友金、刘雄军、陈帅和潘建伟，“用于量子气体的高度可控且稳健的二维自旋轨道耦合”，《物理评论快报》121，150401（2018）。[63] 杜志忠、卢海舟和谢心澄，“非线性霍尔效应”，《自然综述·物理》3，744–752（2021）。[64] Takashi Oka 和 Hideo Aoki，“石墨烯中的光伏霍尔效应”，《物理评论B》79，081406（2009）。[65] 阿列克谢·基塔耶夫，“拓扑绝缘体和超导体的周期表”，载于 *AIP Conference Proceedings*（美国物理联合会，俄罗斯切尔诺戈洛夫卡，2009年），第22–30页。[66] Thomas Uehlinger、Gregor Jotzu、Michael Messer、Daniel Greif、Walter Hofstetter、Ulf Bissbort 和 Tilman Esslinger，“具有可调相互作用的人工石墨烯”，《物理评论快报》111，185307（2013）。[67] Nicola Marzari 和 David Vanderbilt，“ 复合能带的最大局域化广义瓦尼尔函数 ”，《物理评论B》56，12847–12865（1997）。[68] Ulf Bissbort，*Dynamical effects and disorder in ultracold bosonic matter*，博士论文，约翰·沃尔夫冈·歌德大学（2013）。

附录 A：光学晶格势

在文献所述的设置中，可以很容易地实现各种几何构型的晶格。 [66], 也就是说，

$$
\begin{aligned}
&V_{\mathrm{lat}}(x,y) = \\
&-V_{\overline{x}}\cos(k_L x+\theta/2)^2 - V_x\cos(k_L x)^2 - V_y\cos(k_L y)^2 \\
&-2\sqrt{V_x V_y}\cos(k_L x)\cos(k_L y)\cos(\phi),
\end{aligned}
\tag{A1}
$$

其中 $k_L = 2\pi/\lambda$。一维驻波相邻极小值之间的间距为 $a = \lambda/2$，反冲能为 $E_{rec} = (\hbar k_L)^2/(2m)$，波长 λ 为 1064nm，原子为钾-40。以下参数选择： $V_x = 0.6$、 $V_x = 0.3$、 $V_y = 2.8$ ，其单位均为 E_{rec}， $\theta = \pi$ 和 $\phi = 0$ ，可得到三角晶格。通过设置 $V_x = 12$、 $V_x = 0.8$ 和 $V_y = 4.65$，可以实现六角晶格。与紧束缚晶格相比，我们的原胞长度为 $b = \sqrt{2}a = \lambda/\sqrt{2}$。紧束缚参数可以根据真实晶格势（附录 B）进行评估，得到 $t_1 = -0.05$、 $t_2 = -0.07$、 $t_3 = -0.07$、 $\varepsilon = -0.66$ ，其单位为 E_{rec}（三角晶格， $\eta_{sp} = 0.19$），以及 $t_1 = t_2 = t_3 = 0.06$ ，其单位为 E_{rec} （六角晶格）。

附录 B：哈密顿量的推导

我们从共动系中的哈密顿量出发，

$$
\hat{H}_{cm}(\tau) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{lat}(\hat{r}) - \mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r}\ , \tag{B1}
$$

其中 $\hat{p}$ 和 $\hat{r}$ 分别是动量算符和位置算符，而 $\mathbf{F} = -m\ddot{\mathbf{r}}_m(\tau) = -\mathbf{A}(\tau)$。该哈密顿量由两部分组成。前两项包含静态晶格哈密顿量，最后一项表示含时色散。

接下来，我们将 $\hat{H}_{cm}(\tau)$ 在 Wannier 基 [67],中展开

$$
w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r}) \equiv w_n(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \frac{V}{(2\pi)^2}\int_{BZ} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\phi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{k}\ , \tag{B2}
$$

其中 n 是能带指标，$\phi_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}u_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 是布洛赫态，$\mathbf{R} = n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2$ 是任意晶格矢量，而 $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$是二维中的原始平移矢量。

在二次量子化中，我们可以将场算符在 Wannier 基下改写为

$$
\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{n,\mathbf{R}} w^*_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\hat{a}_{n,\mathbf{R}}\ , \tag{B3}
$$

其中 $\hat{a}_{n,\ \mathbf{R}}$ 是湮灭算符。

共动哈密顿量的第一部分可展开为

$$
\hat{H}_0(\tau) = \sum_{n,m,\mathbf{R},\mathbf{R}'} \hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{m,\mathbf{R}'}\int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{lat}(\hat{r})\right] w^*_{m,\mathbf{R}'}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\ . \tag{B4}
$$

鉴于静态哈密顿量无法混合不同能带，且Wannier函数呈指数局域，我们仅考虑各能带内的位点耦合和最近邻耦合，

$$
\hat{H}_0(\tau) = \sum_{n,\mathbf{R}}\left\{\hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{n,\mathbf{R}}\varepsilon_n + \sum_{\mathbf{b}_i}\left[\hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{n,\mathbf{R}+\mathbf{b}_i}t_i + h.c.\right]\right\}\ , \tag{B5}
$$

$$
\varepsilon_n = \int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{lat}(\hat{r})\right] w^*_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\ , \tag{B6}
$$

$$
t_i = \int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{lat}(\hat{r})\right] w^*_{n,\mathbf{R}+\mathbf{b}_i}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\ . \tag{B7}
$$

$\mathbf{b}_i = j\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2$ 是最近邻隧穿矢量。在三角晶格和六角晶格的构型中，$i \in \{1,2,3\}$。 ε_n 是能带中心能量， t_i 是最近邻隧穿振幅。

现在我们考虑驱动项，它可以在格点处耦合不同能带，但其格点间效应可以忽略不计，即

$$\begin{aligned}\hat{H}_1(\tau) &= -\sum_{n,m,\mathbf{R},\mathbf{R}'} \hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{m,\mathbf{R}'} \int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,[\mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r}]\,w^*_{m,\mathbf{R}'}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \\ &= -\sum_{n,\mathbf{R}} \hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{n,\mathbf{R}} \int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,[\mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r}]\,w^*_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} - \sum_{n,m\neq n,\mathbf{R}} \hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{m,\mathbf{R}} \int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,[\mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r}]\,w^*_{m,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} \\ &= -\sum_{n,\mathbf{R}} \left[\hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{n,\mathbf{R}}\mathbf{F}(\tau)\cdot\mathbf{R} + \sum_{m\neq n} \hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{m,\mathbf{R}} a\mathbf{F}(\tau)\cdot\eta_{nm}\hat{r'}\right] .\end{aligned} \tag{B8}$$

这里我们将带间耦合定义为

$$\eta_{nm} = \frac{1}{b}\left|\int w_{n,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\hat{r}w^*_{m,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\right| . \tag{B9}$$

通过数值计算 η_{sp} 根据 [66, 68], 中的方法，我们证明了 s 带与 p 带之间的偶极型耦合项$\int w_{m,\,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\hat{r}w^*_{n,\,\mathbf{R}}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ 沿着方向 $\hat{r'} = \hat{r} = \hat{e}_x + \hat{e}_y$。 此外，我们通过计算真实晶格势中原子的 Wannier函数，求得隧穿参数和能带中心能量。

现场驱动项 $\hat{a}^\dagger_{n,\,\mathbf{R}}\hat{a}_{n,\,\mathbf{R}}\mathbf{F}(\tau)\cdot\mathbf{R}$ 破坏了平移对称性，因此我们需要通过施加以下幺正变换将其旋转消去

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(-i\sum_{\mathbf{R}n}\chi_{\mathbf{R}(\tau)}\hat{a}^\dagger_{n,\mathbf{R}}\hat{a}_{n,\mathbf{R}}\right), \tag{B10}$$

$$\hat{H}'(\tau) = \hat{U}^\dagger(\tau)\hat{H}(\tau)\hat{U}(\tau) - i\hbar\hat{U}^\dagger(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{U}(\tau), \tag{B11}$$

其中 $\chi_{\mathbf{R}}(\tau) = \frac{m}{\hbar}\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{r}}_m(\tau)$。随后，将哈密顿量变换到准动量空间，并仅考虑最低两条能带，得到最终的哈密顿量，

$$\hat{H}_{\mathbf{q}}(\tau) = \sum_{n\in\{s,p\}}\left\{\varepsilon_n\hat{a}^\dagger_n\hat{a}_n + \sum_{i=1}^{Z}\left[t_{n,i}\left(e^{i(\theta_i(\tau)+\mathbf{q}\cdot\mathbf{b}_i)}\hat{a}^\dagger_n\hat{a}_n + h.c.\right)\right] - \mathbf{F}(\tau)\cdot\hat{r}\sum_{m\in\{s,p\}\neq n}\eta_{nm}\hat{a}^\dagger_n\hat{a}_m\right\}, \tag{B12}$$

具有时间周期性 Peierls 相位 $\theta_i(\tau) = \chi_{\mathbf{R}+\mathbf{b}_i}(\tau) - \chi_{\mathbf{R}}(\tau) = \frac{m}{\hbar}\mathbf{b}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_m(\tau)$。

附录 C：通过高频展开得到的解析哈密顿量

下面我们写出在紧束缚近似下，利用高频展开（HFE）解析推导得到的有效 Floquet 哈密顿量。高频展开的思路是将原始含时哈密顿量分解为傅里叶分量，进而得到有效哈密顿量，然后忽略较小的高频项。有效哈密顿量可分解为不同阶数的项，

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{n=0}^{\infty}\hat{H}^{(n)}_{\text{eff}}, \tag{C1}$$

其与 ω 的幂成反比，即 $\hat{H}^{(n)} \overset{\text{有效}}{\sim} \omega^{-n}$。如果频率远高于系统中的其他能量尺度，则可以截断高阶有效哈密顿量。这里我们只使用前两阶 [52],

$$\hat{H}^{(0)}_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{H}(\tau)\,d\tau \equiv \hat{H}_0 , \tag{C2}$$

$\hat{H}^{(0)}_{\text{eff}}$	$\sigma_x\eta_{sp}\hbar\omega[K_x + K_y \text{余弦}(\varphi)]/2$ $\sigma_y\eta_{sp}\hbar\omega K_y \text{正弦}(\varphi)/2$ $\sigma_z\{\varepsilon + \hbar\omega/2 + t_1 \text{余弦}[(q_x - q_y)b]J_0(2K_x) + t_2 \text{余弦}(q_x b)[J_0(K_x)J_0(K_y) - 2J_1(K_x)J_1(K_y) \text{余弦}(\varphi) +$ $2J_2(K_x)J_2(K_y) \text{余弦}(2\varphi)] + t_3 \text{余弦}(q_y b)[J_0(K_x)J_0(K_y) + 2J_1(K_x)J_1(K_y) \text{余弦}(\varphi) + 2J_2(K_x)J_2(K_y) \text{余弦}(2\varphi)]\}$
$\hat{H}^{(1)}_{\text{eff},2}$	$\sigma_x\eta_{sp}\{-t_1 \text{余弦}[(q_x - q_y)b]J_2(2K_x)[K_x + K_y \text{余弦}(\varphi)] - t_2\text{余弦}(q_x b)\{J_1(K_x)J_1(K_y)[K_y + K_x \text{余弦}(\varphi)] +$ $J_0(K_y)J_2(K_x)[K_x + K_y \text{余弦}(\varphi)] + J_0(K_x)J_2(K_y)[K_y \text{余弦}(\varphi) + K_x \text{余弦}(2\varphi)]\} + t_3\text{余弦}(q_y b)\{J_1(K_x)J_1(K_y)$ $[K_y + K_x\text{余弦}(\varphi)] - J_0(K_y)J_2(K_x)[K_x + K_y \text{余弦}(\varphi)] - J_0(K_x)J_2(K_y)[K_y \text{余弦}(\varphi) + K_x\text{余弦}(2\varphi)]\}\}/2$ $\sigma_y\eta_{sp}\text{正弦}(\varphi)\{t_1 \text{余弦}[(q_x - q_y)b]J_2(2K_x)K_y - t_2 \text{余弦}(q_x b)\{J_1(K_x)J_1(K_y)K_x - J_0(K_y)J_2(K_x)K_y + J_0(K_x)J_2(K_y)$ $[K_y + 2K_x \cos(\varphi)]\} + t_3\cos(q_y b)\{J_1(K_x)J_1(K_y)K_x + J_0(K_y)J_2(K_x)K_y - J_0(K_x)J_2(K_y)[K_y + 2K_x \cos(\varphi)]\}\}/2$ $\sigma_z\eta^2\hbar\omega[K_x^2 + K_y^2 + 2K_xK_y \cos(\varphi)]/8$

表 I. 效应　　在与 g 共振的单频驱动下，三角晶格的有效哈密顿量　　ap

$$\hat{H}^{(1)}_{\text{eff}} = \frac{1}{\hbar\omega}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left[\hat{H}_l, \hat{H}_{-l}\right] = \sum_{l=1}^{\infty}\hat{H}^{(1)}_{\text{eff},l}\ . \tag{C3}$$

这里, $\hat{H}_l$ a是含时哈密顿量的傅里叶分量，$\hat{H}(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\hat{H}_l e^{il\omega}$　　τ.

表 I 当驱动场与带隙能量共振时，三角晶格的有效哈密顿量。非对角项中的常数项远大于依赖准动量的项，这意味着格点间带耦合占主导。由于驱动强度 $K \leq 1$ 仍处于弱驱动区，因此可以放心地忽略高于二阶的贝塞尔函数。

表II 展示了与半个带隙共振的单频驱动情形。此时，非对角项主要依赖于准动量。这里未列出双频驱动方案下三角晶格的哈密顿量。

$\hat{H}^{(0)}_{\text{eff}}$	$\sigma_z\{\varepsilon + \hbar\omega + t_1 \cos[(q_x - q_y)b]J_0(2K_x) + t_2 \cos(q_x b)[J_0(K_x)J_0(K_y) - 2J_1(K_x)J_1(K_y) \cos(\varphi) +$ $2J_2(K_x)J_2(K_y) \cos(2\varphi)] + t_3 \cos(q_y b)[J_0(K_x)J_0(K_y) + 2J_1(K_x)J_1(K_y) \cos(\varphi) + 2J_2(K_x)J_2(K_y) \cos(2\varphi)]\}$
$\hat{H}^{(1)}_{\text{eff},1}$	$\sigma_x\eta_{sp}\{-t_1 \text{正弦}[(q_x - q_y)b]J_1(2K_x)K_y \text{正弦}(\varphi) - t_2 \text{正弦}(q_x b) \text{正弦}(\varphi)\{K_yJ_0(K_y)J_1(K_x) + K_xJ_1(K_y)J_2(K_x) -$ $J_1(K_x)J_2(K_y)[K_y + 2K_x\text{余弦}(\varphi) + 2K_y \text{余弦}(2\varphi)] + J_0(K_x)J_1(K_y)[K_x + 2K_y \text{余弦}(\varphi)]\}$ $-t_3 \sin(q_y b) \sin(2\varphi)\{K_yJ_0(K_x)J_1(K_y) + J_1(K_x)J_2(K_y)[K_x + 2K_y \cos(\varphi)]\}\}$ $\sigma_y\eta_{sp}\{t_1 \sin[(q_x - q_y)b]J_1(2K_x)[K_x + K_y \cos(\varphi)] + t_2\sin(q_x b)\{J_0(K_y)J_1(K_x)[K_x + K_y \cos(\varphi)] -$ $J_1(K_y)J_2(K_x)[K_y + K_x\cos(\varphi)] + J_1(K_y)J_0(K_x)[K_x\cos(\varphi) + K_y \cos(2\varphi)] - J_1(K_x)J_2(K_y)$ $[K_x \cos(2\varphi) + K_y \cos(3\varphi)]\} + t_3 \sin(q_y b) \sin(2\varphi)\{-J_0(K_y)J_1(K_x)[K_x + K_y \cos(\varphi)] - J_1(K_y)J_2(K_x)$ $[K_y + K_x \cos(\varphi)] + J_1(K_y)J_0(K_x)[K_x \cos(\varphi) + K_y \cos(2\varphi)] + J_1(K_x)J_2(K_y)[K_x\cos(2\varphi) + K_y \cos(3\varphi)]\}\}$ $\sigma_z\eta_{sp}^2\hbar\omega[K_x^2 + K_y^2 + 2K_xK_y \cos(\varphi)]/4$
$\hat{H}^{(1)}_{\text{eff},3}$	$\sigma_x\eta_{sp}\{-t_2 \sin(q_x b)\{K_xJ_1(K_y)J_2(K_x) + J_1(K_x)J_2(K_y)[K_y + 2K_x\cos(\varphi)]\}$ $+t_3\sin(q_y b)\{-K_xJ_1(K_y)J_2(K_x) + J_1(K_x)J_2(K_y)[K_y + 2K_x \cos(\varphi)]\}\}/3$ $\sigma_y\eta_{sp}\{t_2\sin(q_x b)\{J_1(K_y)J_2(K_x)[K_y + K_x \cos(\varphi)] + J_1(K_x)J_2(K_y)[K_y \cos(\varphi) + K_x \cos(2\varphi)]\}$ $+t_3\sin(q_y b)\{J_1(K_y)J_2(K_x)[K_y + K_x \cos(\varphi)] - J_1(K_x)J_2(K_y)[K_y \cos(\varphi) + K_x \cos(2\varphi)]\}\}/3$ $\sigma_z\eta_{sp}^2\hbar\omega[K_x^2 + K_y^2 + 2K_xK_y \cos(\varphi)]/12$

表 II. 三角晶格在与带隙一半共振的单频驱动下的有效哈密顿量

对于六角晶格，表 III 给出了单频非共振驱动下的一般哈密顿量，而表 IV 则给出了双频非共振驱动下的哈密顿量。请注意，在表$H^{(1)}$ eff中省略了二阶贝塞尔函数IV ，但在数值计算中予以保留。

$\hat{H}^{(0)}_{\text{eff}}$	$\sigma_x\{[t_1\cos(q_yb)+t_3\cos(q_xb)]J_0(K_{y1})+t_2\cos[(q_x-q_y)b]J_0(K_{x1})\}$ $\sigma_y\{[t_1\text{正弦}(q_yb)-t_3\text{正弦}(q_xb)]J_0(K_{y1})-t_2\text{正弦}[(q_x-q_y)b]J_0(K_{x1})\}$
$\hat{H}^{(1)}_{\text{eff}}$	$-\sigma_z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\hbar\omega}t_2J_n(K_{x1})J_n(K_{y1})\left[(-1)^{n+1}t_1\text{正弦}(q_xb)+t_3\text{正弦}(q_yb)\right]\text{正弦}(n\varphi_{y1})$

表 III. 单频非共振驱动下六角晶格的有效哈密顿量

$\hat{H}^{(0)}_{\text{eff}}\ \sigma_x\{[t_1\cos(q_yb)+t_3\cos(q_xb)]J_0(K_{y1})J_0(K_{y2})+t_2\cos[(q_x-q_y)b]J_0(K_{x1})J_0(K_{x2})$ $2[t_1\ q_xb\ +t_3\ q_yb\ ]J_1\ K_{y2}\ J_2\ K_{y1}\ 2\varphi_{y1}-\varphi_{y2}\ +2t_2\ [\ q_x-q_y\ b]J_1\ K_{x2}\ J_2\ K_{x1}\sin(\ )\sin(\ )(\ )(\ )\sin(\ )$ $\sin(\ )(\ )(\ )\sin(\varphi_{x2})\}\sigma_y\{[t_1\sin(q_yb)-t_3\sin(q_xb)]J_0(K_{y1})J_0(K_{y2})-t_2\sin[(q_x-q_y)b]J_0(K_{x1})J_0(K_{x2})+2[t_1\cos(q_xb)-t_3$ $\cos(q_yb)]J_1(K_{y2})J_2(K_{y1})\sin(2\varphi_{y1}-\varphi_{y2})+2t_2\cos[(q_x-q_y)b]J_1(K_{x2})J_2(K_{x1})\sin(\varphi_{x2})\}\sigma_z\frac{2}{3\hbar\omega}\{6J_0(K_{y2})J_1(K_{y1})[t_2J_1(K_{x1})$ $J_1(K_{x2})(t_1\cos(q_xb)-t_3\cos(q_yb))\cos(\varphi_{x2}-\varphi_{y1})+(t_1^2-t_3^2)\hat{H}^{(1)}_{\text{eff}}J_1(K_{y1})J_1(K_{y2})\cos(2\varphi_{y1}-\varphi_{y2})]-6t_2J_0(K_{x2})J_1$ $(K_{x1})[t_2J_1(K_{x1})J_1(K_{x2})\cos(\varphi_{x2})+J_1(K_{y1})J_1(K_{y2})(t_1\cos(q_xb)+t3\cos(q_yb))\cos(\varphi_{y1}-\varphi_{y2})-J_1(K_{y1})J_0(K_{y2})(t_1\sin(q_xb)+t3\sin(q_yb))\sin(\varphi_{y1})]-t_2J_1(K_{x2})J_1(K_{y2})[3J_0(K_{x1})J_0(K_{y1})(t_1\sin(q_xb)+t_3\sin(q_yb))\sin(\varphi_{x2}-\varphi_{y2})-2J_1(K_{x1})$ $J_1(K_{y1})(t_1\sin(q_xb)-t_3\sin(q_yb))(\sin(\varphi_{x2}-\varphi_{y1}-\varphi_{y2})+3\sin(\varphi_{x2}+\varphi_{y1}-\varphi_{y2}))]\}$

表 IV. 双频失谐驱动下六角晶格的有效哈密顿量